TD8 : Homologie singulière I

Si (X, A) est une paire topologique, on notera $H_n(X)$ (resp. $H_n(X, A)$) le groupe d'homologie $H_n(X;\mathbb{Z})$ (resp. le groupe d'homologie relatif $H_n(X, A;\mathbb{Z})$).

Exercice 1. Quelques propriétés

Soit (X, A) une paire topologique.

1. Montrer que $H_0(X, A) = 0$ si et seulement si A intersecte de manière non-vide toutes les composantes connexes par arcs de X.
2. Montrer que $H_1(X, A) = 0$ si et seulement si l'application $H_1(A) \to H_1(X)$ est surjective et toute composante connexe par arcs de X contient au plus une composante connexe par arcs de A.
3. On suppose que A est un point. Calculer *l'homologie réduite* $H_*(X, A)$ en fonction de l'homologie de X.
4. Montrer que l'inclusion $A \hookrightarrow X$ induit un isomorphisme sur tous les groupes d'homologie si et seulement si les groupes d'homologie relatifs de la paire (X, A) sont tous nuls.
5. Soit (X, A) une paire d'espaces topologiques telle que A soit un rétract de X. Montrer que l'application $H_n(A) \to H_n(X)$ induite par l'inclusion $A \hookrightarrow X$ est injective.

Exercice 2. Suites exactes longues en homologie

Soit (X, A, B) un triplet d'espaces topologiques avec $B \subseteq A \subseteq X$.

1. Montrer que la suite suivante est exacte :

$$\dots \xrightarrow{d_{k+1}} H_k(A, B) \xrightarrow{i_{*,k}} H_k(X, B) \xrightarrow{j_{*,k}} H_k(X, A) \xrightarrow{d_k} H_{k-1}(A, B) \xrightarrow{i_{*,k-1}} \dots$$

   où les applications $i : (A, B) \to (X, B)$ et $j : (X, B) \to (X, A)$ sont fournies par l'inclusion $A \hookrightarrow X$ et l'identité $X \to X$, respectivement, et d_k est la composition des morphismes $H_k(X, A) \to H_{k-1}(A)$ et $H_{k-1}(A) \to H_{k-1}(A, B)$ qui proviennent des suites exactes des paires (X, A) et (A, B), respectivement.
2. En déduire la suite exacte de la paire (X, A) pour les groupes d'homologie réduits.

Exercice 3. Bouquet d'espaces

Soient (X, x_0) et (Y, y_0) deux espaces topologiques pointés, dont le point base admet des voisinages ouverts dans X et Y respectivement qui se rétractent par déformation forte sur ce point. Calculer $H_n(X \vee Y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction des groupes d'homologie de X et de Y.

Exercice 4. Homologie du parachute

Calculer l'homologie du « parachute » obtenu en recollant les trois sommets de Δ^2.

Exercice 5. Suspensions

Soit X un espace topologique. On rappelle que la suspension SX de X est l'espace quotient $CX/(X \times \{0\})$. Calculer l'homologie de SX en fonction de l'homologie de X.

Exercice 6. Tore et bouquets de sphères

Montrer que le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ a les mêmes groupes d'homologie singulière que le bouquet $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$ mais que ces deux espaces ne sont pas homotopiquement équivalents.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à salim.tayou@ens.psl.eu, ou venir me voir au bureau T2.

Exercice 7. Théorème de Hurewicz

Soit X un espace topologique. On note $C_2(X;\mathbb{Z})$ le groupe des 2-chaînes singulières de X. On rappelle qu'un chemin $\gamma : [0,1] \to X$ peut être vu comme un 1-simplexe singulier de X, qui sera un 1-cycle si et seulement si γ est un lacet.

1. Soit α un chemin constant. Montrer qu'il est égal au bord d'une certaine 2-chaîne singulière.
2. Soient $\alpha : [0,1] \to X$ et $\beta : [0,1] \to X$ des chemins tels que $\alpha(1) = \beta(0)$, de sorte qu'on puisse considérer le chemin $\alpha\beta$ obtenu par concaténation. Montrer qu'il existe une 2-chaîne singulière $c \in C_2(X;\mathbb{Z})$ telle que $\alpha\beta = \alpha + \beta + \partial c$.
3. Soient $\alpha : [0,1] \to X$ et $\beta : [0,1] \to X$ des chemins homotopes (à extrémités fixes). Montrer que $\alpha - \beta$ est le bord d'une 2-chaîne singulière.
4. On fixe un point $x_0 \in X$. Montrer qu'il existe un morphisme de groupes bien défini
$$\phi : \pi_1(X, x_0) \to H_1(X;\mathbb{Z})$$
envoyant la classe d'homotopie d'un lacet de base x_0 sur la classe d'homologie du 1-cycle correspondant. Ce morphisme est appelé le *morphisme de Hurewicz*.
5. On suppose maintenant que X est connexe par arcs. Montrer qu'alors ce morphisme induit un isomorphisme entre $H_1(X;\mathbb{Z})$ et l'abélianisé de $\pi_1(X, x_0)$ (c'est-à-dire le quotient de $\pi_1(X, x_0)$ par le sous-groupe engendré par tous les commutateurs $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$).

Exercice 8. Applications de paires

Soient (X, A) et (Y, B) deux paires d'espaces topologiques, et soient $f : (X, A) \to (Y, B)$ et $g : (X, A) \to (Y, B)$ des applications continues. On suppose que f et g sont homotopes en tant qu'applications de paires. Montrer que pour tout entier $k \geq 0$, les morphismes $f_* : H_k(X, A) \to H_k(Y, B)$ et $g_* : H_k(X, A) \to H_k(Y, B)$ coïncident.