TD9 : Homologie singulière II

Exercice 1. Bouteille de Klein et complémentaire d'un cercle

Calculer les groupes d'homologie des espaces topologiques suivants :

1. La bouteille de Klein.
2. Le complémentaire d'un cercle dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. Homologie des surfaces

1. Soit X_g une sphère dont on a retiré $2g$ ouverts disjoints D_i^2 homéomorphes au disque D^2, $1 \leq i \leq 2g$. Calculer l'homologie de X_g, ainsi que l'application induite en homologie par $\bigsqcup_{i=1}^{2g} \partial D_i^2 \hookrightarrow X_g$.
2. Pour $g \geq 1$, notons S_g l'espace topologique obtenu à partir d'un $4g$-gone régulier en identifiant ses côtés orientés dans le sens horaire, notés a_1, b_1, c_1, d_1 de la manière suivante : a_i avec c_i^{-1}, b_i avec d_i^{-1} (c'est une surface à g-trous, faire un dessin !). Calculer les groupes d'homologie de S_g.
3. Soient $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ deux ensembles de points distincts de S_g.
   (a) Calculer l'homologie de $S_g \setminus X$, le complémentaire de X.
   (b) Calculer l'homologie du quotient S_g/Y.
   (c) Calculer l'homologie de $(S_g \setminus X)/Y$.

Exercice 3. Degré d'une application

Soit $n \geq 1$ et $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une application continue. On rappelle que le degré de f est le nombre entier $\deg(f)$ tel que, pour tout $z \in H_n(\mathbb{S}^n; \mathbb{Z})$, on ait $f_*(z) = \deg(f)z$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, le degré de $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ est égal au degré de sa suspension $Sf : \mathbb{S}^{n+1} \to \mathbb{S}^{n+1}$.
2. Construire un morphisme de groupes surjectif
$$\pi_n(\mathbb{S}^n) \twoheadrightarrow H_n(\mathbb{S}^n; \mathbb{Z}).$$
3. Montrer que si $\deg(f) \neq 0$ alors f est surjective. La réciproque est-elle vraie ?
4. **Théorème de Brouwer.** Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ sans point fixe. Montrer que $\deg f = (-1)^{n+1}$.
5. **Action libre d'un groupe.** Soit G un groupe non-trivial agissant librement sur $\mathbb{S}^{2n}$ par homéomorphismes. Montrer que $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
6. **Champs de vecteurs.**
   (a) On suppose n impair. Montrer qu'il existe sur $\mathbb{S}^n$ un champ de vecteurs tangents continu ne s'annulant pas.
   (b) Montrer le théorème de la « boule chevelue » : tout champ de vecteurs tangents continu sur $\mathbb{S}^n$ avec n pair s'annule en au moins un point.
7. **Théorème de Perron Frobenius.** Soit A une matrice carrée de taille n, inversible et à coefficients positifs. Montrer que A admet un vecteur propre à coordonnées positives dont la valeur propre associée est strictement positive.

Exercice 4. Produit de sphères

Soient n et m deux entiers naturels. Calculer les groupes d'homologie du produit $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$.

Exercice 5. Homologie de quelques espaces « pathologiques »

1. Calculer l'homologie de la droite à deux origines, et plus généralement de la droite à n origines.
2. Calculer l'homologie de l'adhérence dans $\mathbb{R}^2$ du graphe de la fonction $\sin(1/x)$, $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à salim.tayou@ens.fr, ou venir me voir au bureau T2.

Exercice 6. Cônes et équivalences d'homologie

Soit (C_*, ∂) un complexe de chaînes de groupes abéliens. La suspension de (C_*, ∂) est le complexe de chaînes $(sC_*, -\partial)$ défini par $sC_0 = 0$ et $sC_{i+1} = C_i$ pour tout $i \geq 0$.

Soit $f : C_* \to D_*$ un morphisme de complexes de chaînes de groupes abéliens. Le cône de f est le complexe de chaînes noté $C_*(f)$, défini par : $C_0(f) = D_0$, $C_{i+1} = C_i \oplus D_{i+1}$ pour $i \geq 0$, et la différentielle envoie $(x, y) \in C_i \oplus D_{i+1}$ sur $(-\partial x, \partial y + f(x)) \in C_{i-1} \oplus D_i$.

1. Vérifier que $C(f)_*$ est bien un complexe de chaînes.
2. Montrer qu'on a une suite exacte courte de complexes
$$0 \to D_* \to C(f)_* \to (sC)_* \to 0.$$
3. En déduire une suite exacte longue en homologie
$$\cdots \to H_i(D_*) \to H_i(C(f)_*) \to H_i((sC)_*) \xrightarrow{\delta} H_{i-1}(D_*) \to \cdots$$
et tel que le connectant δ soit égal à $H_{i-1}(f)$, l'application induite par f en homologie.
4. Montrer que f induit un isomorphisme en homologie si, et seulement si, le cône de f a une homologie triviale.

   On dit qu'un complexe est contractile si son application identité est homotope à l'application nulle. On suppose par la suite que $C(f)_*$ est contractile.
5. Montrer que l'injection $D_* \to C(f)_*$ est homotope à zéro. En déduire que f admet un inverse homotopique à droite.
6. Montrer que la surjection $C(f)_* \to sC_*$ est homotope à zéro. En déduire que f admet un inverse homotopique à gauche, puis que f est un équivalence d'homotopie.