

Exposé de première année

Marches Aléatoires Auto-Répulsives en dimension 1

Jacques Fournier Benjamin Havret
Sous la direction de Laure Dumaz

26 octobre 2013

Introduction

Contrairement à la marche aléatoire simple qui à chaque instant décide au hasard de son prochain déplacement, indépendamment du passé, une marche auto-répulsive s'oriente préférentiellement vers les zones qu'elle a le moins visitées dans le passé. La difficulté principale de l'étude réside alors dans son caractère intrinsèquement **non markovien**.

Nous étudierons dans ce mémoire uniquement des marches aléatoires unidimensionnelles se déplaçant sur \mathbb{Z} . Pour définir et étudier de tels objets, nous avons besoin d'introduire la notion de temps local défini comme le temps passé sur chacune des arêtes à un instant donné. Inspirée par des résultats semblables pour la marche aléatoire simple (cf [Kni63], développé en section 3), l'idée sera de déceler dans ces processus des temps locaux des comportements markoviens. Un point crucial résidera dans la nature locale des lois de transition de la marche. Celle-ci ne devra dépendre que des temps passés sur les arêtes voisines de la position courante.

Ainsi Tóth introduit en 1995 la BTSAW (*Bond True Self Avoiding Walk*) pour laquelle la probabilité de sauter sur une arête est proportionnelle à λ^{\wedge} (temps passé sur cette arête) pour un certain paramètre $\lambda \in]0, 1[$. Ce modèle est proche de la "vraie" marche aléatoire auto-répulsive ("*true self-avoiding walk*") définie par Amit, Parisi et Peliti en 1983 (dans [APP83]), où la répulsion provient des sites au lieu des arêtes. Tóth démontre dans [Tó95] une convergence en loi pour sa marche. Si le théorème central limite assure qu'à un instant n , la marche aléatoire simple se trouve à une distance typique $n^{1/2}$ de son point de départ, Tóth démontre que pour la BTSAW ce déplacement est d'ordre de grandeur $n^{2/3}$.

Nous commencerons par l'étude d'un modèle simplifié (ci-après nommé *Toy-Model*) introduit en 1998 par Tóth et Werner dans [TW98], correspondant à la limite $\lambda \rightarrow 0$ pour le modèle original. Un résultat similaire de convergence, avec la même renormalisation par $n^{2/3}$, est démontré dans [NR06].

Nous nous intéresserons ici aux propriétés markoviennes des temps locaux, pour le Toy-Model en premier lieu, puis pour la marche aléatoire simple, enfin pour la BTSAW. On justifiera en outre l'exposant $2/3$ pour le Toy-Model à l'aide de résultats combinatoires établis par Feller dans [Fel58]. On donnera aussi, sans la prouver complètement, des arguments pouvant conduire à la convergence en loi de cette même marche.

Dans toute la suite, on travaillera sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{C}, \mathbb{P})$.

Table des matières

1	Toy-Model	3
1.1	Définition de la marche aléatoire auto-répulsive du Toy-Model	3
1.2	Quelques propriétés du temps local du Toy-Model	4
1.3	Équivalence avec le parcours d'un labyrinthe	6
2	Convergence en loi de la marche	9
2.1	Résultats sur la marche aléatoire simple et conséquences	10
2.1.1	Convergence en loi d'un temps d'atteinte	10
2.1.2	Aires sous des marches aléatoires	14
2.1.3	Conséquence pour la marche du Toy-Model	17
2.2	Convergence en loi de l'aire à l'aide des fonctions génératrices : idées de démonstration.	17
2.3	De la convergence de \mathcal{T}_n à celle de S_n	19
3	Quelques résultats dus à Knight	20
3.1	Nature markovienne du processus des temps locaux	20
3.2	Résultats asymptotiques sur leurs distributions	26
4	Généralisation du théorème de Knight et modèle de Tóth	32
4.1	Le théorème de Knight pour les marches locales	32
4.2	Modèle de Bálint Tóth	33

1 Toy-Model

Nous commençons par étudier le Toy-Model, introduit dans [TW98]. Celui-ci présente l'avantage d'admettre des définitions graphiques alternatives (construction par rectangles, parcours d'un labyrinthe aléatoire), rendant ses propriétés très visuelles. De plus, l'idée de sa construction en tant que parcours d'un labyrinthe aléatoires a été utilisée pour définir son analogue continu (processus continu auto-répulsif) qui constitue le principal résultat de [TW98].

1.1 Définition de la marche aléatoire auto-répulsive du Toy-Model

Les notations sont fortement inspirées de [Dum12].

Dans tout ce paragraphe une arête reliant deux points consécutifs de \mathbb{Z} sera codée par son milieu à valeurs dans $\hat{\mathbb{Z}} := \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$.

Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une marche aléatoire sur \mathbb{Z} .

Pour $\hat{z} \in \hat{\mathbb{Z}}$, on définit le temps local passé sur l'arête \hat{z} jusqu'à l'instant i comme étant le nombre de fois que l'on franchit l'arête allant de $\hat{z} - 1/2$ à $\hat{z} + 1/2$ (dans les deux sens possibles). Plus formellement :

$$l(i, \hat{z}) = \#\{j \in \{0, \dots, i-1\} / \{S_j, S_{j+1}\} = \{\hat{z} - 1/2, \hat{z} + 1/2\}\}.$$

On introduit également le temps local de $z \in \mathbb{Z}$ à l'instant i défini comme le nombre de passage en z de la marche aléatoire jusqu'à l'instant i (en comptant à partir de -1) :

$$\lambda(i, z) = \#\{j \in [0, i] / S_j = z\} - 1.$$

Définissons par ailleurs des conditions initiales $a(\hat{z})$ du temps local (nous verrons plus tard pourquoi la définition de ces conditions initiales est capitale). Dans le cas du Toy-Model, nous prendrons toujours (Fig. 1) :

$$\begin{aligned} a(1/2) &= a(5/2) = a(9/2) = \dots = a(-1/2) = a(-5/2) = \dots = 0, \\ a(3/2) &= a(7/2) = a(11/2) = \dots = a(-3/2) = a(-7/2) = \dots = -1. \end{aligned}$$

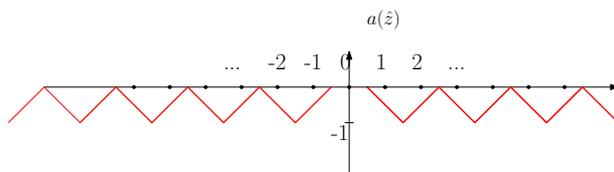


FIGURE 1 – Les conditions initiales du temps local

Enfin, on note $L_n(\hat{z}) = l(n, \hat{z}) + a(\hat{z})$. Dans toute la suite, on parlera abusivement de temps local pour désigner L_n .

Une marche aléatoire auto-répulsive est une marche aléatoire S_n , qui saute uniquement sur les plus proches voisins, à valeurs dans \mathbb{Z} , et dont la particularité est qu'à chaque instant n , la loi de saut (*i.e.* la probabilité de se déplacer à gauche ou à droite à l'instant n) dépend du temps local sur les deux arêtes adjacentes à S_n . Plus précisément, on se déplace préférentiellement en

direction de l'arête la moins visitée (où le temps local est le plus faible).

Dans ce Toy-Model, on opte pour une loi avec composante déterministe :

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = S_n + 1 | S_0, \dots, S_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } L_n(S_n + 1/2) < L_n(S_n - 1/2), \\ 0 & \text{si } L_n(S_n + 1/2) > L_n(S_n - 1/2), \\ \frac{1}{2} & \text{si } L_n(S_n + 1/2) = L_n(S_n - 1/2), \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = S_n - 1 | S_0, \dots, S_n) = 1 - \mathbb{P}(S_{n+1} = S_n + 1 | S_0, \dots, S_n).$$

REMARQUE. Notons que sans l'initialisation du temps local ($a(\hat{z})$), la marche serait, au choix initial près, déterministe.

1.2 Quelques propriétés du temps local du Toy-Model

Le but de cette partie est d'établir des relations et propriétés vérifiées par le temps local qui nous seront utiles pour la suite.

PROPOSITION 1.1. *Pour tout entier z , nous avons le lien suivant entre le temps local en z et les temps locaux des arêtes adjacentes :*

$$L_n(z + 1/2) + L_n(z - 1/2) = \begin{cases} 2\lambda(n, z) & \text{si } S_n = z, \\ 2\lambda(n, z) + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

PREUVE : par récurrence sur n :

Cela est clairement vrai au rang 0 par définition de $a(\hat{z})$.

Si la relation est vraie à l'instant n ,

- si $z \notin \{S_n, S_{n+1}\}$, toutes les quantités intervenant à l'instant n restent les mêmes à l'instant $n + 1$.
- si $z = S_{n+1}$,
Que l'on arrive de gauche ($S_n = z - 1$), ou de droite ($S_n = z + 1$), on a $L_{n+1}(z - 1/2) + L_{n+1}(z + 1/2) = L_n(z + 1/2) + L_n(z - 1/2) + 1$. Et puisque $\lambda(n + 1, z) = \lambda(n, z)$, le résultat s'ensuit.
- si $z = S_n$, on conclut de même.

□

PROPOSITION 1.2. *Grâce aux conditions initiales du temps local vérifiant : $\forall z \in \mathbb{Z}^*$, $|a(z - 1/2) - a(z + 1/2)| = 1$, on a :*

- $\forall z \in \mathbb{Z} - \{S_n\}$, $|L_n(z + 1/2) - L_n(z - 1/2)| = 1$
- Pour $z = S_n$, $L_n(z + 1/2) - L_n(z - 1/2) \in \{-2, 0, 2\}$.

PREUVE : Par récurrence sur n :

L'initialisation découle de la définition de $a(\hat{z})$ et de $S_0 = 0$.

Pour $n \geq 1$,

- si $z \notin \{S_n, S_{n+1}\}$, toutes les quantités intervenant ne changent pas entre les instants n et $n + 1$.
- si $z = S_n$,
 - si $L_n(z + 1/2) - L_n(z - 1/2) = 0$, alors selon la direction du saut, on a soit $L_{n+1}(z - 1/2) = L_n(z - 1/2) + 1$ soit $L_{n+1}(z + 1/2) = L_n(z + 1/2) + 1$. Dans tous les cas, $L_{n+1}(z + 1/2) - L_{n+1}(z - 1/2) = L_n(z + 1/2) - L_n(z - 1/2) \pm 1 \in \{-1, 1\}$.
 - si $L_n(z + 1/2) - L_n(z - 1/2) \in \{-2, 2\}$, le saut entre les instants n et $n + 1$ est par définition déterministe et on vérifie que $L_{n+1}(z + 1/2) - L_{n+1}(z - 1/2) \in \{-1, 1\}$.

- si $z = S_{n+1}$, $L_n(z + 1/2) - L_n(z - 1/2) \in \{-1, 1\}$ (par l'hypothèse de récurrence) et, comme $L_{n+1}(z - 1/2) = L_n(z - 1/2) + 1$ ou $L_{n+1}(z + 1/2) = L_n(z + 1/2) + 1$ (selon que $S_n = z - 1$ ou $z + 1$), dans tous les cas, $L_{n+1}(z + 1/2) - L_{n+1}(z - 1/2) \in \{-2, 0, 2\}$. \square

REMARQUE 1.3. Cette dernière propriété implique que, à partir de la donnée de $\{L_n(\hat{z}), \hat{z} \in \hat{\mathbb{Z}}\}$, on peut retrouver la valeur de S_n (qui correspond à l'unique z pour lequel $L_n(z + 1/2) - L_n(z - 1/2) \in \{-2, 0, 2\}$).

PROPOSITION 1.4. *Pour tout n , $L_n(S_n + 1/2) + S_n$ est impair.*

REMARQUE 1.5. On en déduit, avec la proposition 1.2 : $L_n(S_n - 1/2) + S_n$ est impair.

PREUVE : Par récurrence : Pour $n = 0$, $S_0 = 0$ et $L_0(1/2) + 0 = 1$ est impair.

Si $L_n(S_n + 1/2) + S_n$, alors au rang $n + 1$,

- Si $S_{n+1} = S_n + 1$ alors $L_{n+1}(S_{n+1} + 1/2)$ a même parité que $L_{n+1}(S_n + 1/2)$ (car $L_{n+1}(S_{n+1} + 1/2) - L_{n+1}(S_{n+1} - 1/2) \in \{-2, 0, 2\}$) et $L_{n+1}(S_n + 1/2) = L_n(S_n + 1/2) + 1$ d'où $L_{n+1}(S_{n+1} + 1/2) + S_{n+1}$ est impair.
- Si $S_{n+1} = S_n - 1$ alors, comme $L_n(S_n + 1/2) - L_n(S_n - 1/2) \in \{-2, 0, 2\}$ et $L_{n+1}(S_{n+1} + 1/2) = L_n(S_{n+1} + 1/2) + 1$, il vient $L_{n+1}(S_{n+1} + 1/2) + S_{n+1} = L_n(S_n) + S_n - 2$, qui est impair par l'hypothèse de récurrence. \square

COROLLAIRE 1.6. $\lambda(n, S_n) + S_n$ est impair $\iff L_n(S_n + \frac{1}{2}) = L_n(S_n - \frac{1}{2})$.

PREUVE : En utilisant le résultat $L_n(z + 1/2) + L_n(z - 1/2) = 2\lambda(n, z)$ de la proposition 1.1 :

- (\Leftarrow)

$$\begin{aligned} L_n(S_n + 1/2) = L_n(S_n - 1/2) &\Rightarrow L_n(S_n + 1/2) = \lambda(n, S_n) \\ &\quad \text{(par la proposition 1.1),} \\ &\Rightarrow \lambda(n, S_n) + S_n \text{ est impair} \\ &\quad \text{(par la proposition 1.4).} \end{aligned}$$

- (\Rightarrow)

$$\begin{aligned} \lambda(n, S_n) + S_n \text{ est impair} &\Rightarrow \frac{L_n(S_n + 1/2) + L_n(S_n - 1/2)}{2} + S_n \text{ est impair} \\ &\quad \text{(proposition 1.1),} \\ &\Rightarrow \frac{L_n(S_n - 1/2) - L_n(S_n + 1/2)}{2} \text{ est pair} \\ &\quad \text{(avec la proposition 1.4),} \\ &\Rightarrow L_n(S_n - 1/2) - L_n(S_n + 1/2) = 0 \\ &\quad \text{(avec la proposition 1.2).} \end{aligned}$$

\square

REMARQUE 1.7. Ce corollaire spécifie en particulier que les instants où la marche doit choisir avec équiprobabilité son prochain saut ont une composante déterministe.

1.3 Équivalence avec le parcours d'un labyrinthe

On notera dans ce paragraphe $\mathbb{T} := \{(z, h) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : z + h \text{ impair}\}$.

REMARQUE. Le terme "labyrinthe" sera ici employé dans une acception restreinte : il existera en réalité un unique parcours possible, zigzaguant parmi tous les points de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

• Commençons par constater le fait suivant :

Si $L_n(S_n - 1/2) = L_n(S_n + 1/2)$ (c'est-à-dire si $S_n + \lambda(n, S_n)$ est impair d'après le corollaire 1.6) et $S_{n+1} - S_n = \omega \in \{-1, 1\}$, alors, notant p le premier instant où la marche revient en S_n , on a $S_{p+1} - S_p = -\omega$.

Ainsi, on peut écrire, si $(S_n, \lambda(n, S_n)) \in \mathbb{T}$,

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \xi(S_n, \lambda(n, S_n)), \\ S_p - S_{p-1} &= -\xi(S_n, \lambda(n, S_n)), \end{aligned}$$

où $(\xi(z, h))_{(z, h) \in \mathbb{T}}$ est une famille de variables aléatoires *i.i.d.* de loi commune $\mathbb{P}(\xi(z, h) = 1) = \mathbb{P}(\xi(z, h) = -1) = \frac{1}{2}$. Cette remarque va permettre de construire les parois du labyrinthe et justifie la construction par rectangles.

• Définissons maintenant le labyrinthe en question. Notons à cet effet :

$$\begin{aligned} F &:= \{(x - 1/2, h) \in \hat{\mathbb{Z}} \times (\mathbb{N} \cup \{-1\}) : x + h \text{ impair}\}, \\ B &:= \hat{\mathbb{Z}} \times (\mathbb{N} \cup \{-1\}) \setminus F. \end{aligned}$$

On découpe le demi-plan $(\hat{\mathbb{Z}} \times (\mathbb{N} \cup \{-1\}))$ en rectangles 2×1 de la forme $[\hat{z}, \hat{z} + 1] \times [h - 1, h + 1]$ où (\hat{z}, h) est dans F (ce couple (\hat{z}, h) , coordonnées du milieu du côté droit d'un rectangle, sera le code de ce rectangle). Pour tout $(z, h) \in \mathbb{T}$, si $\xi(z, h) = 1$ (resp. $\xi(z, h) = -1$), on dessine le motif (a) (resp. (b)) (cf. Fig. 2) dans le rectangle de code $(z - 1/2, h + 1)$.

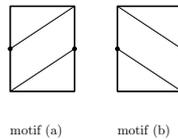


FIGURE 2 – Briques élémentaires

Les conditions initiales $(a(\hat{z}))$ correspondent aux briques initiales du labyrinthe indiquées sur la figure 3.

Le graphe formé par ces arêtes obliques peut être interprété comme les parois d'un labyrinthe aléatoire constitué d'une unique composante connexe. Le mur de droite dans le sens de parcours est formé des arêtes reliant les points de F , le mur de gauche par celles reliant les points de B . Alors, la suite $(S_n, \lambda(n, S_n))_{n \geq 0}$ est donnée par le parcours de ce labyrinthe (Fig. 4).

REMARQUE. Sur la figure 4, au temps $n = 23$, on a équiprobabilité de poursuivre vers la gauche ou vers la droite.

Cet assemblage de briques aléatoires est aussi équivalent à un système de marches aléatoires coalescentes donné par les définitions suivantes.

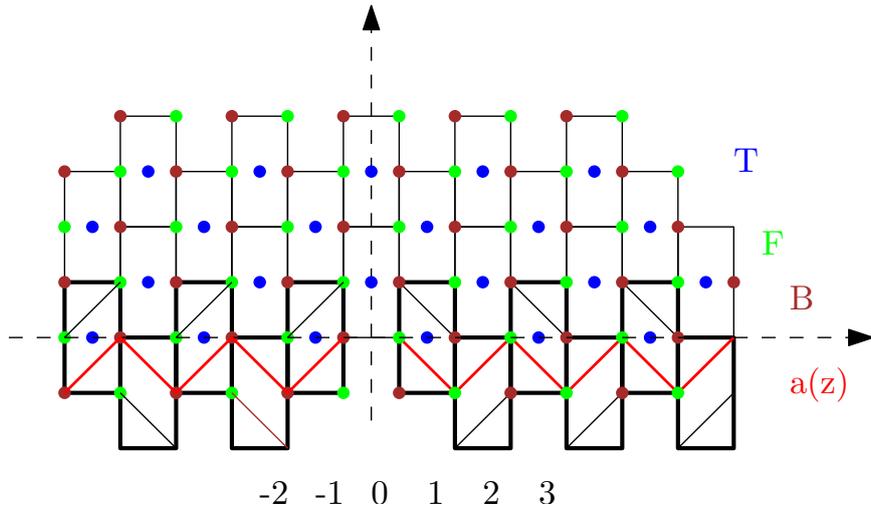


FIGURE 3 – Le pavage du demi-plan

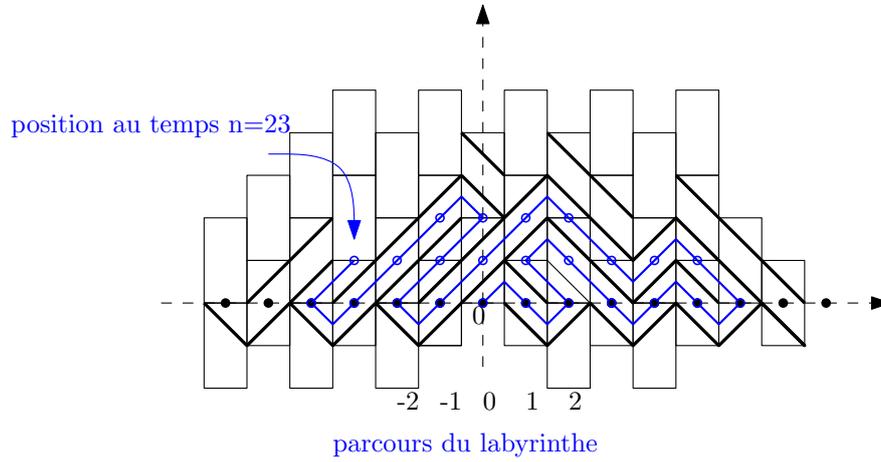


FIGURE 4 – Un exemple de trajectoire

On introduit la famille de marche aléatoires coalescentes allant vers la droite : pour tout $(\hat{z}, h) \in F$, la marche $L_{(\hat{z}, h)}^+$ est définie comme suit :

$$\begin{cases} L_{(\hat{z}, h)}^+(\hat{z}) = h, \\ L_{(\hat{z}, h)}^+(\hat{y} + 1) = L_{(\hat{z}, h)}^+(\hat{y}) + \xi(\hat{y} + 1/2, L_{(\hat{z}, h)}^+(\hat{y}) - 1). \end{cases}$$

Les conditions initiales imposent que ces marches soient réfléchies par l'axe des abscisses avant 0, absorbé par lui après 0, ce que l'on peut assurer en imposant les conditions

$$\begin{aligned} \xi(1, -1) &= \xi(3, -1) = \dots = \xi(-2, -2) = \xi(-4, -2) = \dots = -1, \\ \xi(2, -2) &= \xi(4, -2) = \dots = \xi(-1, -1) = \xi(-3, -1) = \dots = 1. \end{aligned}$$

On note enfin $L_{(\hat{z}, h)}^-$ les marches duales, définies pour $(\hat{z}, h) \in B$, et reliant les sommets de B .

On peut les écrire comme suit :

$$\begin{cases} L_{(\hat{z},h)}^-(\hat{z}) = h, \\ L_{(\hat{z},h)}^-(\hat{y} - 1) = L_{(\hat{z},h)}^-(\hat{y}) + \xi(\hat{y} - 1/2, L_{(\hat{z},h)}^-(\hat{y}) - 1). \end{cases}$$

La figure 5 donne un exemple de labyrinthe ainsi formé.

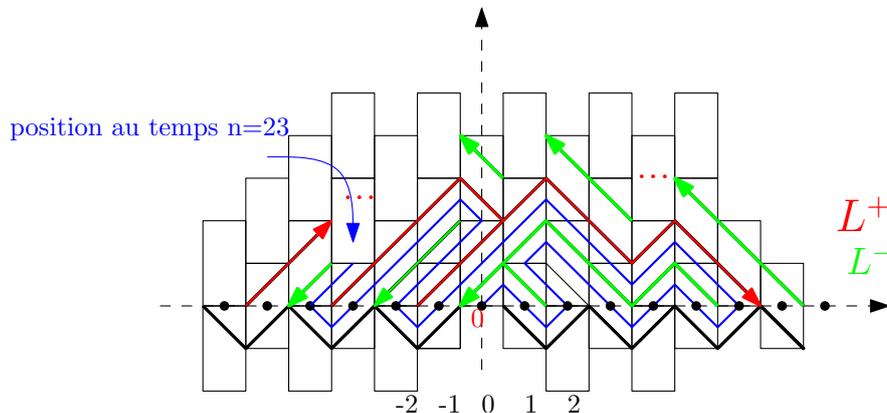


FIGURE 5 – Chemins coalescents formant les parois du labyrinthe

REMARQUE 1.8. Les chemins coalescents encadrant le parcours dans le labyrinthe nous donnent directement le temps local sur les arêtes. C'est-à-dire que pour une position courante $(S_n, \lambda(n, S_n) - 1) = (x, h)$, les valeurs en chaque demi-entier des marches définies ci-dessous donnent la valeur du temps local sur l'arête correspondante.

- Si $(x + 1/2) \in F$ la marche partant de $(x - 1/2, h)$ à gauche et celle partant de $(x + 1/2, h)$ à droite (premier cas sur la figure 6, et Fig. 7 (tracé rouge)).
- Si $(x + 1/2) \in B$ la marche partant de $(x - 1/2, h + 1)$ à gauche et celle partant de $(x + 1/2, h - 1)$ à droite (deuxième cas sur la figure 6).

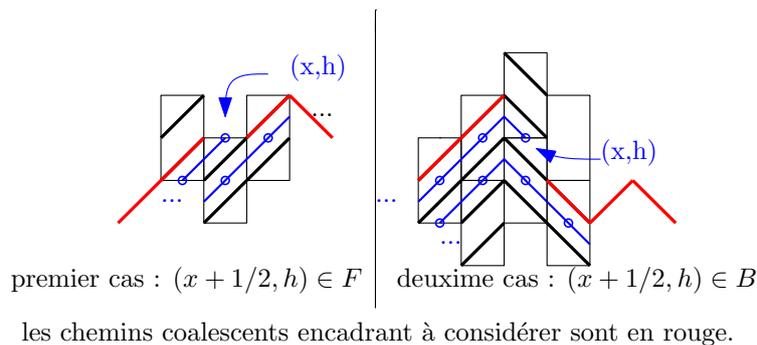


FIGURE 6 – Lecture du temps local sur les parois du labyrinthe

La figure 7 donne le schéma à plus grande échelle pour le cas $(x + 1/2, h) \in F$. Par exemple au temps n où la marche est en (x, h) , le temps local sur l'arête $[2, 3]$ est 4, sur l'arête $[-4, -3]$ il est de 1.

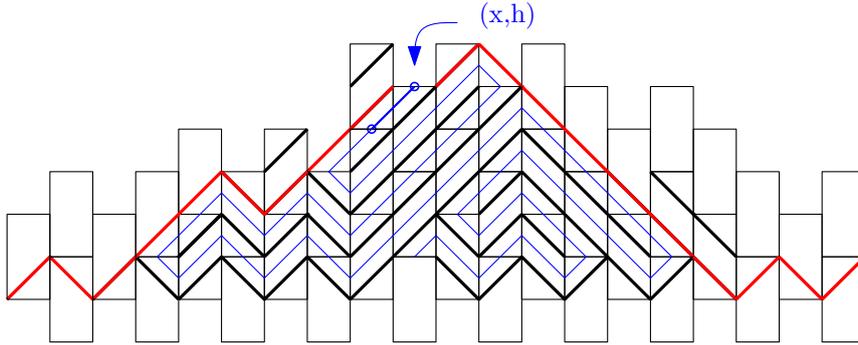


FIGURE 7 – À plus grande échelle

REMARQUE 1.9. Outre le fait qu'elles rendent l'étude non triviale, les conditions initiales $(a(\hat{z}))$ du temps local jouent un rôle crucial dans l'équivalence avec le labyrinthe. En regardant la figure 4, on s'aperçoit néanmoins que d'autres initialisations du temps local auraient été envisageables : certaines trajectoires de marches aléatoires simples par exemple. Le point crucial pour qu'une telle initialisation soit retenue réside dans la coalescence des marches L^+ et L^- des temps locaux avec la marche $(a(\hat{z}))$: en particulier, des conditions trop raides, telles que par exemple $a(n + 1/2) \sim \alpha n$ pour un $\alpha < 0$ ne sont pas valides (il découle de la loi forte des grands nombres qu'avec probabilité non nulle, une marche partant de $(1/2, 1)$ par exemple, ne coalesce pas avec ces conditions initiales).

Les conditions choisies dans ce modèle sont les plus "plates" possibles.

REMARQUE 1.10. Comme indiqué en introduction, on souhaite que les processus des temps locaux forment des chaînes de Markov. Le Toy-Model présente l'avantage d'avoir pour tel processus une chaîne de Markov des plus élémentaires : aux conditions d'absorption ou de réflexion sur l'axe des abscisses près, c'est une marche aléatoire simple.

2 Convergence en loi de la marche

Origine de l'exposant 2/3 : heuristique. Soit $(S_n)_{n \geq 0}$ la marche aléatoire du Toy-Model et $(R_n)_{n \geq 0}$ la marche aléatoire simple partant de 0. Le théorème centrale limite donne la convergence en loi de $\frac{R_n}{\sqrt{n}}$ vers une variable aléatoire gaussienne (non nulle). De par son caractère auto-répulsif, il est naturel de s'attendre à un étalement plus grand de S_n . On parle dans ce cas de marche superdiffusive.

Renversons le problème en tentant de trouver des fonctions f et g telles que le temps \mathcal{T}_n nécessaire pour atteindre le point $x_n := \lfloor xf(n) \rfloor$ pour la $h_n^{\text{ème}}$ (où $h_n := \lfloor hg(n) \rfloor$) fois soit de l'ordre de n (pour des $h, x \geq 0$ fixés, le cas $x < 0$ étant similaire). On se placera uniquement dans le premier cas de la remarque 1.8, le cas général peut s'en déduire. La correspondance avec le labyrinthe fournit la valeur de \mathcal{T}_n : c'est l'aire délimitée par

- les conditions aux limites $(a(\hat{z}))$,
- à droite : la marche aléatoire dans F partant de $(x_n + \frac{1}{2}, h_n)$ jusqu'au temps d'atteinte de l'axe des abscisses,
- à gauche : la marche aléatoire dans B réfléchie "avant" 0 jusqu'à ce qu'elle atteigne l'axe des abscisses dans les z négatifs.

Dans la suite, on appellera \mathcal{A} l'aire à droite du point x_n , et \mathcal{B} l'aire à gauche (Fig. 8). Un raisonnement informel reposant sur le théorème central limite laisse penser que si $f(n) = n^{2/3}$ et

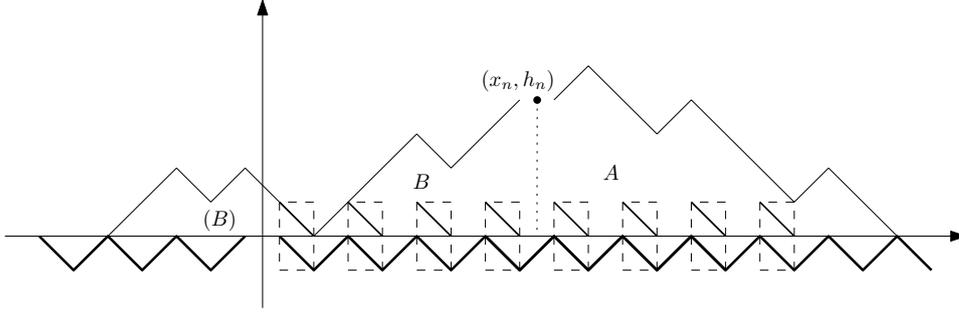


FIGURE 8 – Correspondance entre un temps d'atteinte et l'aire sous les temps locaux

$g(n) = n^{1/3}$, alors \mathcal{T}_n est de l'ordre de n . Ainsi à un instant d'ordre de grandeur n , notre marche se trouve dans une fenêtre de taille $n^{2/3}$ autour de son point de départ et a passé un temps de l'ordre de grandeur $n^{1/3}$ sur chacune des arêtes. On aimerait qu'alors $\frac{S_n}{n^{2/3}}$ converge en loi. Un résultat de ce type existe. Nous verrons dans cette partie des arguments pouvant légitimer cet exposant. Tentons dans un premier temps d'établir des résultats sur \mathcal{T}_n .

Reposant essentiellement sur quelques résultats combinatoires, le prochain paragraphe donnera des résultats de tension pour les aires sous des marches aléatoires. Ceci nous permettra d'établir la tension de la suite $\frac{1}{n}\mathcal{T}_n$.

A l'aide d'une transformée de Laplace, on s'efforcera par la suite de donner une idée de démonstration de la convergence en loi de \mathcal{T}_n . On déduira d'un tel résultat le théorème suivant :

THÉORÈME 2.1. *Si \mathcal{U} est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1 indépendante de la marche, alors $\left(\frac{S_{\lfloor n\mathcal{U} \rfloor}}{n^{2/3}}, \frac{H_{\lfloor n\mathcal{U} \rfloor}}{n^{1/3}}\right)$ converge en loi.*

2.1 Résultats sur la marche aléatoire simple et conséquences

2.1.1 Convergence en loi d'un temps d'atteinte

Le but de cette section est d'obtenir des résultats de convergence concernant des premiers temps d'atteinte et des maxima pour la marche aléatoire symétrique. Les résultats sont tirés de [Fel58]. Soit $(\varepsilon_i)_{i \geq 1}$ des variables aléatoires *i.i.d.* telles que $\mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_1 = -1) = \frac{1}{2}$. Et $R_n := \sum_{k=1}^n \varepsilon_k$; $R_0 = 0$, la marche aléatoire simple.

Nous utiliserons également $\tau_r := \min\{n \geq 0 : R_n = r\}$, le premier temps d'atteinte de r .

Le théorème centrale limite assure que $\frac{R_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne. Symétriquement, on s'attend à ce que $\frac{\tau_n}{n^2}$ converge aussi en loi. Ce sera l'objet du théorème 2.5. Feller en propose une preuve combinatoire.

De la même manière que pour déterminer la loi du temps d'arrêt du mouvement brownien, on commence par un principe de réflexion :

LEMME 2.2 (Principe de réflexion). *Si $r, n \geq 0$ et $0 \leq k \leq r$,*

$$\mathbb{P}(\tau_r \leq n, R_n = k) = \mathbb{P}(R_n = 2r - k).$$

Note : conformément à la figure 9, on parlera de pas montant et descendant respectivement pour $\varepsilon_i = 1$ et $\varepsilon_i = -1$.

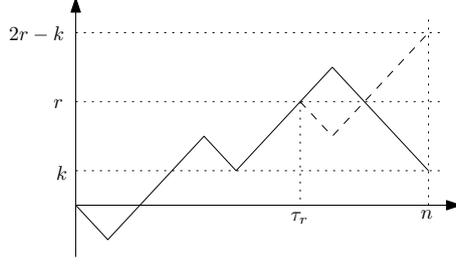


FIGURE 9 – Principe de réflexion.

PREUVE : On décompose selon les valeurs possibles du temps d'atteinte :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_r \leq n, R_n = k) &= \sum_{j=0}^n \mathbb{P}(\tau_r = j, R_n = k) \\ &= \sum_{j=0}^n \mathbb{P}\left(\tau_r = j, \sum_{p=j+1}^n \varepsilon_p = k - r\right). \end{aligned}$$

Puis on met à profit l'indépendance de $\{\tau_r = j\}$ et de $\sigma(\varepsilon_{j+1}, \dots)$:

$$\mathbb{P}(\tau_r \leq n, R_n = k) = \sum_{j=0}^n \mathbb{P}(\tau_r = j) \mathbb{P}\left(\sum_{p=j+1}^n \varepsilon_p = k - r\right).$$

Enfin par symétrie,

$$\mathbb{P}(\tau_r \leq n, R_n = k) = \sum_{j=0}^n \mathbb{P}(\tau_r = j) \mathbb{P}\left(\sum_{p=j+1}^n \varepsilon_p = r - k\right).$$

D'où, en remontant les égalités

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_r \leq n, R_n = k) &= \mathbb{P}(\tau_r \leq n, R_n = 2r - k) \\ &= \mathbb{P}(R_n = 2r - k). \end{aligned}$$

car $\{R_n = 2r - k\} \subset \{\tau_r \leq n\}$. □

LEMME 2.3. À l'instant n , la marche se trouve en x avec probabilité :

$p_{n,x} := \mathbb{P}(R_n = x) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n+x}{2}}$ avec la convention : $\binom{n}{\frac{n+x}{2}} = 0$ si $\frac{n+x}{2} \notin \mathbb{N}$.

PREUVE : On peut décomposer n en $n = p + q$ où p est le nombre de pas montant, q le nombre de pas descendant. Alors $x = p - q$. On a donc $p_{n,x} = \frac{1}{2^n} \binom{p+q}{p} = \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n+x}{2}}$. □

La loi des premiers temps d'atteinte découle de ces deux premiers lemmes :

LEMME 2.4. La probabilité que (R_n) atteigne $r \in [0, n]$ pour la première fois à l'instant n est donnée par :

$$\varphi_{r,n} := \mathbb{P}(\tau_r = n) = \frac{r}{n} \binom{n}{\frac{n+r}{2}} \frac{1}{2^n}.$$

avec la même convention : $\binom{n}{\frac{n+r}{2}} = 0$ si $\frac{n+r}{2} \notin \mathbb{N}$.

PREUVE : Observons déjà que le dernier pas effectué est nécessairement montant.
Par conséquent,

$$\begin{aligned}\varphi_{r,n} &= \mathbb{P}(R_{n-1} = r-1 ; \varepsilon_n = 1, \forall k \leq n-1, R_k \leq r-1) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}(R_{n-1} = r-1, \forall k \leq n-1, R_k \leq r-1).\end{aligned}$$

Or, par le principe de réflexion :

$$\mathbb{P}(R_{n-1} = r-1 ; \exists k \leq n-1 \ R_k = r) = \mathbb{P}(R_{n-1} = r-1, \tau_r \leq n-1) = \mathbb{P}(R_{n-1} = r+1).$$

Donc $\varphi_{r,n} = \frac{1}{2}(p_{n-1,r-1} - p_{n-1,r+1})$, dont le calcul donne, avec le lemme 2.3,

$$\frac{r}{n} \binom{n}{\frac{n+r}{2}} \frac{1}{2^n}$$

□

La loi explicite du temps d'arrêt τ_r fournie par le lemme 2.4 permet de conclure quant à la convergence en loi de $\frac{\tau_r}{n^2}$.

THÉORÈME 2.5. *Notant Z une variable aléatoire de loi gaussienne centrée réduite, on a*

$$\frac{\tau_r}{r^2} \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{(d)} \frac{1}{Z^2}.$$

Autrement dit, pour tout $a \geq 0$,

$$\mathbb{P}(\tau_r \leq ar^2) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{1/\sqrt{a}}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds.$$

REMARQUE. La limite est précisément la loi du temps d'atteinte de 1 pour un mouvement brownien standard. Feller propose ainsi une approche discrète de qui peut se voir comme un corollaire du théorème de Donsker.

PREUVE : Commençons par remarquer que, s'agissant de variables aléatoires réelles, il suffit pour conclure de prouver que pour tout $a > 0$ et $b < \infty$,

$$\mathbb{P}\left(a \leq \frac{\tau_r}{r^2} \leq b\right) \longrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{1/\sqrt{b}}^{1/\sqrt{a}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds.$$

• Grâce à la formule de Stirling ($n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$), on a l'équivalent suivant : lorsque $r \rightarrow \infty$, et $\frac{n}{r^2} \geq \alpha$, pourvu que n et r aient même parité,

$$\varphi_{r,n} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{r}{\sqrt{n^3 - r^2 n}} \frac{n^n}{(n+r)^{\frac{n+r}{2}} (n-r)^{\frac{n-r}{2}}} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{r}{\sqrt{n^3}} e^{-\frac{r^2}{2n}}.$$

• Soit $b > a > 0$ et $r > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(a < \frac{\tau_r}{r^2} \leq b\right) &= \sum_{n=\lfloor ar^2 \rfloor + 1}^{\lfloor br^2 \rfloor} \varphi_{r,n} \\ &= \int_{(\lfloor ar^2 \rfloor + 1)/r^2}^{\lfloor br^2 \rfloor / r^2} r^2 \varphi_{r, \lfloor r^2 u \rfloor} \mathbf{1}_{\lfloor r^2 u \rfloor + r \in 2\mathbb{N}} du.\end{aligned}$$

COROLLAIRE 2.8. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que,*

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\max_{0 \leq k \leq \tau_{(-r)}} R_k \geq \beta r \right) \leq \varepsilon.$$

PREUVE : On veut estimer

$$\mathbb{P} \left(\max_{0 \leq k \leq \tau_{(-r)}} R_k \geq \beta r \right) = \mathbb{P}(\tau_{\beta r} \leq \tau_{-r}).$$

Décomposons selon les valeurs du temps d'atteinte :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_{\beta r} \leq \tau_{-r}) &\leq \mathbb{P}(\tau_{(-r)} > \alpha r^2) + \mathbb{P}(\tau_{\beta r} \leq \tau_{-r} \leq \alpha r^2) \\ &\leq \mathbb{P}(\tau_{(-r)} > \alpha r^2) + \mathbb{P}(\tau_{\beta r} \leq \tau_{-r}; \tau_{(-r)} - \tau_{\beta r} \leq \alpha r^2). \end{aligned}$$

Or, par la propriété de Markov forte :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau_{\beta r} \leq \tau_{-r}; \tau_{(-r)} - \tau_{\beta r} \leq \alpha r^2) &= \mathbb{P}(\tau_{\beta r} < \tau_{(-r)}) \mathbb{P}(\tau_{(\beta+1)r} \leq \alpha r^2) \\ &\leq \mathbb{P}(\tau_{(\beta+1)r} \leq \alpha r^2). \end{aligned}$$

Le théorème 2.5 assure qu'en fixant α puis β assez grands, on peut rendre ces quantités petites. On obtient ainsi le résultat. \square

2.1.2 Aires sous des marches aléatoires

Note : dans cette partie, pour plus de lisibilité, on prendra la liberté de ne pas se préoccuper du caractère entier des arguments, et d'omettre les parties entières.

On conserve les définitions de R_n, τ_r, \dots introduites dans le paragraphe précédent, à ceci près que l'on munit l'espace (Ω, \mathcal{C}) d'une famille de probabilités $(\mathbb{P}_h)_{h \in \mathbb{N}}$ telles que sous \mathbb{P}_h , $R_0 = h$ presque sûrement. On introduit l'aire sous la marche avant d'atteindre 0 pour la première fois (Fig. 11) :

$$\mathcal{D} := \sum_{k=0}^{\tau_0} R_k.$$

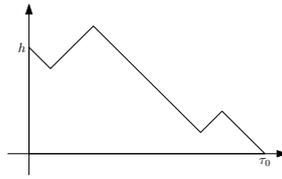


FIGURE 11 – L'aire \mathcal{D}

L'étude de cette quantité donne des résultats sur l'aire \mathcal{A} (à droite sur la figure 8). On s'attend typiquement à ce que, pour $h > 0$ réel fixé, sous \mathbb{P}_{hn} , \mathcal{D} soit de l'ordre de n^3 . Montrons que c'est effectivement le cas :

PROPOSITION 2.9. *Pour tout $\varepsilon > 0$, et tout $h > 0$ réel, il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{hn}(\alpha n^3 \leq \mathcal{D} \leq \beta n^3) \geq 1 - \varepsilon.$$

PREUVE. • On remarque (Fig. 12) que

$$\mathbb{P}_{hn}(\mathcal{D} \geq \alpha n^3) \geq \mathbb{P}_{hn} \left(\tau_{\frac{hn}{2}} \geq \frac{8\alpha}{h^3} \left(\frac{hn}{2} \right)^2 \right) = \mathbb{P}_0 \left(\tau_{\frac{hn}{2}} \geq \frac{8\alpha}{h^3} \left(\frac{hn}{2} \right)^2 \right).$$

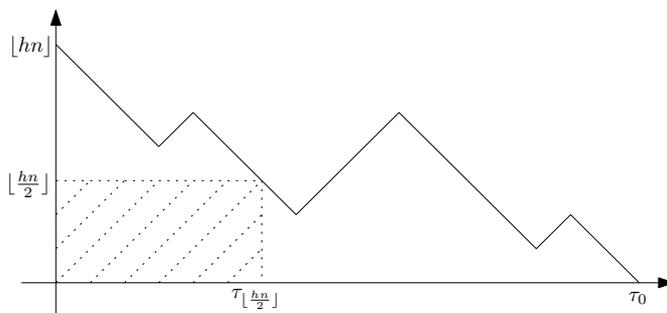


FIGURE 12 – L'argument pour la minoration

Comme hn n'est pas entier a priori, cette estimation n'est pas toujours vraie telle qu'annoncée. Elle l'est cependant pour n assez grand (signalons que h est fixé tout au long de la preuve), quitte à remplacer 8α par 9α , ce qui ne perturbe pas la suite du raisonnement.

Le Théorème 2.5 assure déjà :

$$\mathbb{P}_0 \left(\tau_{\frac{hn}{2}} \geq \frac{8\alpha}{h^3} \left(\frac{hn}{2} \right)^2 \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{h^{3/2}}{\sqrt{8\alpha}}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds,$$

qui tend vers 1 quand $\alpha \rightarrow 0$. De manière informelle, pour α assez petit, $\mathbb{P}_{hn}(\mathcal{D} \geq \alpha n^3)$ tend à être proche de 1. On obtient ainsi un résultat de minoration sur \mathcal{D} .

• Pour ce qui concerne la majoration, en majorant l'aire par un rectangle, on s'aperçoit que, sous \mathbb{P}_{hn} : \mathcal{D} ne peut dépasser βn^3 que si le temps d'atteinte de 0 (τ_0) dépasse $\frac{\sqrt{\beta}}{h} hn^2$ ou si le maximum de la marche avant ce temps d'arrêt dépasse $\frac{\sqrt{\beta}}{h} hn$. Autrement dit,

$$\mathbb{P}_{hn}(\mathcal{D} > \beta n^3) \leq \mathbb{P}_{hn} \left(\tau_0 > \frac{\sqrt{\beta}}{h} hn^2 \right) + \mathbb{P}_{hn} \left(\max_{0 \leq k \leq \tau_0} R_k > \frac{\sqrt{\beta}}{h} hn \right).$$

Il suffit de majorer ces deux termes. Soit $\varepsilon > 0$. Le corollaire 2.8 et le théorème 2.5 assurent l'existence de $\beta > 0$ tel que les limsup deux termes précédents soient majorés par ε .

Donc pour de tels β ,

$$\mathbb{P}_{hn}(\mathcal{D} > \beta n^3) \leq 2\varepsilon.$$

En combinant avec le résultat de minoration précédent on peut conclure. \square

• On cherche maintenant à estimer l'aire \mathcal{B} (cf. Fig. 8). Définissons pour cela une marche aléatoire $(X_p^{(x,h)})_{p \geq 0}$ partant de h de la façon suivante : pour $p \leq x$, c'est une marche aléatoire symétrique réfléchie en 0. Pour $p > x$, c'est une marche aléatoire simple.

On veut obtenir des résultats de majoration des quantités suivantes : l'aire sous la marche avant l'instant x (notée $\mathcal{R}^{(x,h)}$), et l'aire sous la marche depuis son origine jusqu'au premier temps d'atteinte de 0 supérieur à x (cette aire est notée $\mathcal{W}^{(x,h)}$ et le temps d'atteinte $\theta^{(x,h)}$) (Fig. 13).

On a donc :

$$\begin{aligned}\theta^{(x,h)} &= \min\{p \geq x : X_p^{(x,h)} = 0\}, \\ \mathcal{R}^{(x,h)} &= \sum_{k=0}^x X_k^{(x,h)}, \\ \mathcal{W}^{(x,h)} &= \sum_{k=0}^{\theta^{(x,h)}} X_k^{(x,h)}.\end{aligned}$$

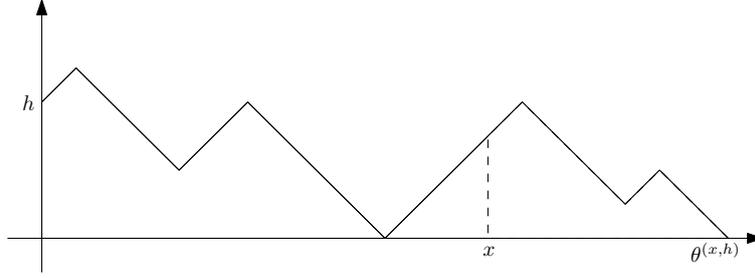


FIGURE 13 – L'aire totale $\mathcal{W}^{(x,h)}$. Et l'aire $\mathcal{R}^{(x,h)}$ à gauche des pointillés.

On s'attend aussi à ce que $\mathcal{W}^{(xn^2, hn)}$ soit de l'ordre de n^3 . On cherche le même type d'estimations que précédemment : la suite $(\frac{1}{n^3} \mathcal{W}^{(xn^2, hn)})_{n \geq 1}$ sera ainsi tendue.

PROPOSITION 2.10. *Pour tout $\varepsilon > 0$, et tout $x, h > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que,*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathcal{W}^{(xn^2, hn)} \leq \beta n^3) \geq 1 - \varepsilon.$$

PREUVE. • Il est déjà clair que $\mathcal{R}^{(xn^2, hn)}$ ne peut dépasser βn^3 que si le maximum de la marche avant xn^2 dépasse $\frac{\beta}{x}n$. Le corollaire 2.6 assure que cela n'arrive à la limite qu'avec probabilité faible pourvu β que soit assez grand : pour tout x et h , il existe $\beta > 0$ tel que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathcal{R}^{(xn^2, hn)} > \beta n^3) \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} 0.$$

• On veut enfin estimer $\mathcal{W}^{(x,h)}$. Il suffit de décomposer selon les valeurs de $X_x^{(x,h)}$. Fixons $\varepsilon > 0$. Le corollaire 2.6 montre que la probabilité que $X_{xn^2}^{(xn^2, hn)}$ dépasse γn tend à être faible si γ est grand. On obtient, pour un γ fixé assez grand,

$$\mathbb{P}(\mathcal{W}^{(xn^2, hn)} > \beta n^3) \leq \varepsilon + \sum_{t=0}^{\gamma n} \mathbb{P}(\mathcal{W}^{(xn^2, hn)} > \beta n^3 ; X_{xn^2}^{(xn^2, hn)} = t).$$

Dans cette démonstration, on notera $\mathcal{Q}^{(t)}$, l'aire sous une marche aléatoire simple partant de t avant qu'elle n'atteigne 0.

En utilisant la propriété de Markov simple, et le fait qu'alors l'aire après x conditionné au fait que $X_x^{(x,h)} = t$ suit la même loi que $\mathcal{Q}^{(t)}$:

$$\mathbb{P}(\mathcal{W}^{(xn^2, hn)} > \beta n^3) \leq \varepsilon + \sum_{t=0}^{\gamma n} \mathbb{P}\left(\left(\mathcal{R}^{(xn^2, hn)} > \frac{1}{2}\beta n^3 \text{ ou } \mathcal{Q}^{(t)} > \frac{1}{2}\beta n^3\right) ; X_{xn^2}^{(xn^2, hn)} = t\right).$$

où $\mathcal{Q}^{(t)}$ est indépendant de $(X_p^{(x,h)})_{p \geq 0}$.

Alors par sous-additivité, puis en exploitant le fait que $\mathbb{P}(\mathcal{Q}^{(t)} > \frac{1}{2}\beta n^3)$ croît avec t ,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\mathcal{W}^{(xn^2, hn)} > \beta n^3) \\ & \leq \varepsilon + \sum_{t=0}^{\gamma n} \left(\mathbb{P}\left(\mathcal{R}^{(xn^2, hn)} > \frac{1}{2}\beta n^3 ; X_{xn^2}^{(xn^2, hn)} = t\right) + \mathbb{P}(\mathcal{Q}^{(t)} > \frac{1}{2}\beta n^3) \mathbb{P}(X_{xn^2}^{(xn^2, hn)} = t) \right) \\ & \leq \varepsilon + \mathbb{P}\left(\mathcal{R}^{(xn^2, hn)} > \frac{1}{2}\beta n^3 ; X_{xn^2}^{(xn^2, hn)} \leq \gamma n\right) + \mathbb{P}(\mathcal{Q}^{(\gamma n)} > \frac{1}{2}\beta n^3) \mathbb{P}(X_{xn^2}^{(xn^2, hn)} \leq \gamma n) \\ & \leq \varepsilon + \mathbb{P}(\mathcal{R}^{(xn^2, hn)} > \frac{1}{2}\beta n^3) + \mathbb{P}(\mathcal{Q}^{(\gamma n)} > \frac{1}{2}\beta n^3). \end{aligned}$$

Grâce aux estimations déjà obtenues, on conclut. \square

2.1.3 Conséquence pour la marche du Toy-Model

Il suit des derniers résultats le théorème suivant :

THÉORÈME 2.11. *Soit $x, h \geq 0$. Notant $\mathcal{T}_n^{(x,h)}$ l'instant où la marche (S_n) du Toy-Model atteint le point $\lfloor xn^{2/3} \rfloor$ pour la $\lfloor hn^{1/3} \rfloor$ ème fois, la suite $(\frac{1}{n}\mathcal{T}_n^{(x,h)})_{n \geq 1}$ est tendue, c'est-à-dire :*

$$\left[\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\alpha \leq \frac{\mathcal{T}_n^{(x,h)}}{n} \leq \beta \right) \right]_{\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow \infty} \rightarrow 1.$$

REMARQUE 2.12. Ce résultat est moins fort qu'une convergence en loi. Celle-ci pourrait s'obtenir avec des outils comme le théorème de Donsker. Puisque celui-ci dépasse nos connaissances, nous nous attacherons dans le paragraphe suivant à donner des arguments plus élémentaires qui pourraient permettre de conclure.

REMARQUE 2.13. Le théorème de Prokhorov assure néanmoins la convergence étroite à extraction près. En particulier, si l'on parvient à identifier une limite unique, la convergence en loi s'en déduit.

2.2 Convergence en loi de l'aire à l'aide des fonctions génératrices : idées de démonstration.

Nous allons nous intéresser à une autre approche pouvant conduire à un résultat de convergence de l'aire \mathcal{A} . L'idée va être d'obtenir une équation satisfaite par sa transformée de Laplace.

Soit $(\varepsilon_i)_{i \geq 1}$ des variables aléatoires *i.i.d.* telles que $\mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_1 = -1) = \frac{1}{2}$.

On donne les définitions suivantes, obtenues en renormalisant la marche aléatoire simple. Pour $h > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, on note $(Y_p^{(n,h)})_{p \in \frac{1}{n^2}\mathbb{N}}$ le processus défini par $Y_0^{(n,h)} = \frac{\lfloor hn \rfloor}{n}$ et, pour $p \geq 0$ (et tel que $pn^2 \in \mathbb{N}$) :

$$Y_{p+\frac{1}{n^2}}^{(n,h)} = Y_p^{(n,h)} + \frac{1}{n}\varepsilon_{n^2 p}.$$

Le temps d'atteinte de 0 est noté $T^{(n,h)}$.

On définit comme précédemment l'aire sous la marche (Fig. 14) :

$$\mathcal{Q}^{(n,h)} := \sum_{\substack{k=0 \\ \text{par pas de } \frac{1}{n^2}}}^{T^{(n,h)}} Y_k^{(n,h)}.$$

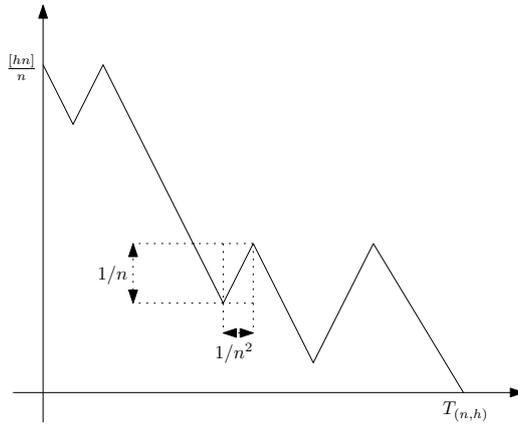


FIGURE 14 – L'aire $\mathcal{Q}^{(n,h)}$

Enfin soit $\alpha \mapsto u_{n,\alpha}(h)$ sa transformée de Laplace :

$$u_{n,\alpha}(h) = \mathbb{E} \left[e^{-\alpha \mathcal{Q}^{(n,h)}} \right].$$

Alors, en distinguant les valeurs possibles du premier pas, et en exploitant la propriété de Markov simple, on obtient l'équation discrète suivante : pour tout $\alpha, h > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n,\alpha}(h) = \frac{1}{2} e^{-\alpha \frac{[hn]}{n^3}} \left(u_{n,\alpha} \left(h + \frac{1}{n} \right) + u_{n,\alpha} \left(h - \frac{1}{n} \right) \right). \quad (1)$$

On a par ailleurs la condition initiale $u_{n,\alpha}(0) = 1$ et la condition limite : $\lim_{h \rightarrow \infty} u_{n,\alpha}(h) = 0$.

On aimerait que pour tout $\alpha, h \mapsto u_{n,\alpha}(h)$ converge vers la solution de l'équation différentielle "limite" $v''(h) = 2\alpha h v(h)$, de conditions aux limites $v(0) = 1$ et $\lim_{h \rightarrow \infty} v(h) = 0$. Cette solution est, à une constante multiplicative près, la fonction d'Airy, très étudiée pour ses applications en optique notamment. Son graphe est donné en figure 15.

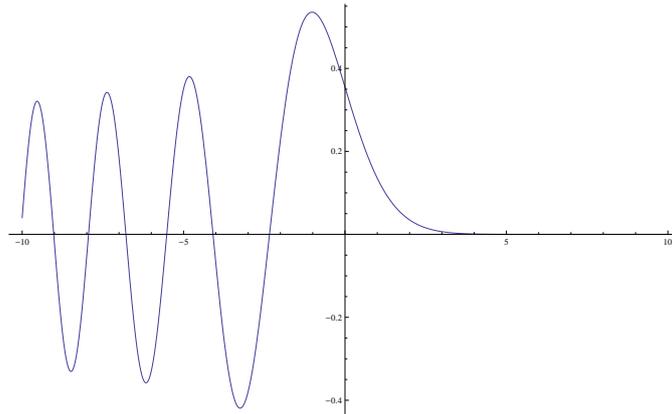


FIGURE 15 – La fonction d'Airy

Consistance de l'équation discrète : On fixe $\alpha > 0$.

On se donne une application v de classe C^2 sur \mathbb{R}^+ vérifiant pour tout $h > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v(h) = \frac{1}{2} e^{-\alpha \frac{1+hn}{n^3}} \left(v \left(h + \frac{1}{n} \right) + v \left(h - \frac{1}{n} \right) \right).$$

Pour h fixé, un développement limité à l'ordre 2 permet d'obtenir :

$$v''(h) = 2\alpha h v(h). \quad (2)$$

Ceci assure la consistance du schéma (1) vis-à-vis de l'équation différentielle (2).

Convergence en loi de l'aire : On peut espérer que sous une certaine condition de stabilité, un analogue du théorème de Lax (avec une condition initiale et une condition limite) assure alors la convergence pour tout α , de $h \mapsto u_{n,\alpha}(h)$ vers la solution de l'équation différentielle $v''(h) = 2\alpha h v(h)$, de conditions aux limites $v(0) = 1$ et $\lim_{h \rightarrow \infty} v(h) = 0$. Enfin, notant, pour tout h , $\mathbb{A}(h)$ la transformée de Laplace inverse de $u_\infty(\cdot, h)$, on obtiendrait la convergence en loi pour tout $h > 0$:

$$\mathcal{Q}^{(n,h)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathbb{A}(h).$$

REMARQUE. Cette convergence peut aussi être vue comme une conséquence d'outils liés au théorème de Donsker. La loi limite serait alors vraisemblablement celle de l'aire sous un mouvement brownien partant de h avant qu'il n'atteigne 0.

Des méthodes analogues peuvent amener à la convergence en loi de l'aire totale donnée par la figure 8. Grâce à l'équivalence entre la marche du Toy-Model et le parcours du labyrinthe aléatoire, il s'ensuivrait que $\frac{\mathcal{T}_n^{(x,h)}}{n}$ converge en loi (où $\mathcal{T}_n^{(x,h)}$ désigne le temps d'atteinte par la marche du Toy-Model du point $[n^{2/3}x]$ pour la $[n^{1/3}h]$ ème fois). On aurait une conclusion du type :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in [0, +\infty], \exists \mathfrak{F}^{(x,h)} \quad \frac{\mathcal{T}_n^{(x,h)}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \mathfrak{F}^{(x,h)}. \quad (3)$$

On notera $p(x, h)$ la valeur en 1 de la transformée de Laplace de la loi limite éventuelle dans (3).

2.3 De la convergence de \mathcal{T}_n à celle de S_n .

On suppose donné un résultat du type (3). On ne peut pas en déduire directement la convergence en loi de $\frac{S_n}{n^{2/3}}$ pour des temps déterministes. On cherche à prouver ici le théorème 2.1. On veut donc montrer la convergence en loi de $\left(\frac{S_{[n\mathcal{U}]}}{n^{2/3}}, \frac{H_{[n\mathcal{U}]}}{n^{1/3}} \right)$, où \mathcal{U} est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1, indépendante de la marche.

Soit φ une application continue à support compact sur \mathbb{R}^2 . On a

$$\mathbb{E} \left[\varphi \left(\frac{S_{[n\mathcal{U}]}}{n^{2/3}}, \frac{H_{[n\mathcal{U}]}}{n^{1/3}} \right) \right] = \sum_{(x,h) \in n^{-2/3}\mathbb{Z} \times n^{-1/3}\mathbb{N}} \varphi(x, h) \mathbb{P} \left((S_{[n\mathcal{U}]}, H_{[n\mathcal{U}]}) = (n^{2/3}x, n^{1/3}h) \right).$$

Par indépendance de \mathcal{U} avec la marche,

$$\mathbb{E} \left[\varphi \left(\frac{S_{[n\mathcal{U}]}}{n^{2/3}}, \frac{H_{[n\mathcal{U}]}}{n^{1/3}} \right) \right] = \sum_{(x,h) \in n^{-2/3}\mathbb{Z} \times n^{-1/3}\mathbb{N}} \varphi(x, h) \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}([n\mathcal{U}] = k) \mathbb{P} \left(\mathcal{T}_n^{(x,h)} = k \right).$$

Or un calcul montre que $[n\mathcal{U}]$ suit une loi géométrique de paramètre $e^{-1/n}$. Il vient,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\varphi \left(\frac{S_{[n\mathcal{U}]} }{n^{2/3}} \frac{H_{[n\mathcal{U}]} }{n^{1/3}} \right) \right] &= \sum_{(x,h) \in n^{-2/3}\mathbb{Z} \times n^{-1/3}\mathbb{N}} \varphi(x,h) \sum_{k \geq 0} e^{-k/n} (1 - e^{-1/n}) \mathbb{P} \left(\mathcal{T}_n^{(x,h)} = k \right) \\ &= \sum_{(x,h) \in n^{-2/3}\mathbb{Z} \times n^{-1/3}\mathbb{N}} \varphi(x,h) (1 - e^{-1/n}) \mathbb{E} \left[\exp \left(-\frac{\mathcal{T}_n^{(x,h)}}{n} \right) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} n(1 - e^{-1/n}) \varphi \left(\frac{[n^{2/3}x]}{n^{2/3}}, \frac{[n^{1/3}h]}{n^{1/3}} \right) \\ &\quad \times \mathbb{E} \left[\exp \left(-\frac{1}{n} \mathcal{T}_n \left(\frac{[n^{2/3}x]}{n^{2/3}}, \frac{[n^{1/3}h]}{n^{1/3}} \right) \right) \right] dh dx, \end{aligned}$$

qui, par convergence dominée, tend vers

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} \varphi(x,h) p(x,h) dh dx.$$

Ceci prouve la convergence en loi de $\left(\frac{S_{[n\mathcal{U}]} }{n^{2/3}}, \frac{H_{[n\mathcal{U}]} }{n^{1/3}} \right)$.

Constatons que c'est autour de la forme du processus des temps locaux (qui sont rappelés des marches aléatoires simples réfléchies puis absorbées par l'axe des abscisses) que se sont articulés les arguments justifiant l'exposant 2/3, ainsi que ceux conduisant vers des pistes de démonstration pour une convergence en loi de $S_n/n^{2/3}$. Dans son article, Tóth se sert de mêmes idées pour le modèle plus complexe que constitue la BTSAW. Les processus de temps locaux sont plus complexes, mais ils restent markoviens. En guise d'introduction, le prochain paragraphe prouve la nature markovienne d'un tel processus dans le cadre de la marche aléatoire simple.

3 Quelques résultats dus à Knight

Cette partie s'appuie sur les travaux de Knight, parus dans [Kni63] en 1963. Il y démontre que le processus des temps locaux pour la marche aléatoire simple constitue une chaîne de Markov assez simple pour pouvoir l'analyser. Il en déduit des résultats similaires pour le mouvement brownien : c'est le théorème de Ray-Knight. Le même théorème fut en effet démontré indépendamment par Ray à la même époque (dans [Ray63]). Ce dernier choisit toutefois une approche différente, sans utiliser le modèle discret.

3.1 Nature markovienne du processus des temps locaux

Rappelons que $R(n) = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k$, $n \geq 0$ représente la marche aléatoire symétrique.

DÉFINITION 3.1. Pour tout $k \geq 0$ et $m \geq 0$, on définit t_m l'instant précédant le $(m+1)^{\text{ème}}$ passage de 0 à 1 (c'est-à-dire qu'on a $R(t_m) = 0$ et $R(t_m + 1) = 1$).

On pose $S(m,k) = \#\{0 \leq n \leq t_m/R(n-1) = k \text{ et } R(n) = k+1\}$.

Autrement dit, $S(m,k)$ est le nombre de pas de $R(n)$ de k à $k+1$ jusqu'au $(m+1)^{\text{ème}}$ (exclu) pas de 0 à 1.

Il en résulte que $S(m,0) = m$. (Fig.16 et 17)

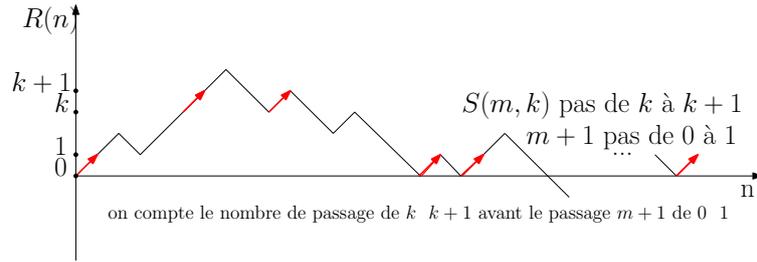


FIGURE 16 – représentation de $S(m, k)$

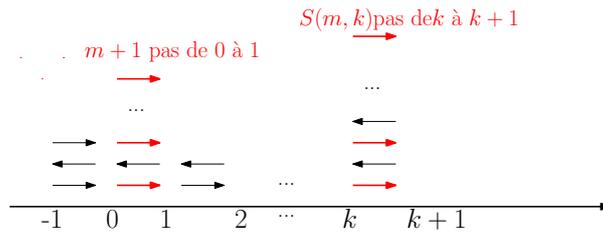


FIGURE 17 – représentation de $S(m, k)$

Une autre manière de se représenter les chemins (cette équivalence sera développée en section 4.2) est donnée en figure 17.

THÉORÈME 3.2 (de Knight). *Pour tout $m \geq 0$, $(S(m, k))_{k \geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène à valeurs dans les entiers naturels avec $S(m, 0) = m$ et de matrice de transition définie par*

$$p(i_1, i_2) = (-1)^{i_2} \binom{-i_1}{i_2} 2^{-(i_1+i_2)}.$$

On s'est servi de la notation suivante :

NOTATION. On utilisera, pour $i, j \geq 0$, $\binom{-i}{j}$ pour désigner $\frac{-i(-i-1)\dots(-i-j+1)}{j!}$, de sorte que $\frac{1}{(1+x)^i} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-i}{j} x^j$. On a en particulier $\binom{0}{j} = 0$ si $j > 0$, et $\binom{-i}{0} = 1$ pour tout $i \geq 0$.

REMARQUE 3.3. Il est essentiel de considérer le processus des temps locaux à un instant aléatoire se référant au nombre de pas sur une arête (ici $[0, 1]$). En le considérant à un instant déterministe par exemple, il ne constitue plus une chaîne de Markov : typiquement, si la marche fait beaucoup de pas sur une arête elle ne peut en faire beaucoup sur une autre.

La preuve se déroule en deux temps. Tout d'abord, nous allons démontrer que $(S(m, k))_{k \geq 0}$ est une chaîne de Markov. Ensuite, nous calculerons les coefficients des matrices de transition, qui justifieront du même coup son caractère homogène.

Avant de nous attaquer à la démonstration de ce théorème, établissons un lemme qui nous sera utile.

LEMME 3.4. *Soit $(R(n))_{n \in \mathbb{N}}$, la marche aléatoire symétrique telle que $R(0) = 0$. Le nombre de pas de 0 à 1 de cette marche jusqu'au premier temps d'attente de -1 suit une loi géométrique de raison $1/2$. (Fig. 18)*

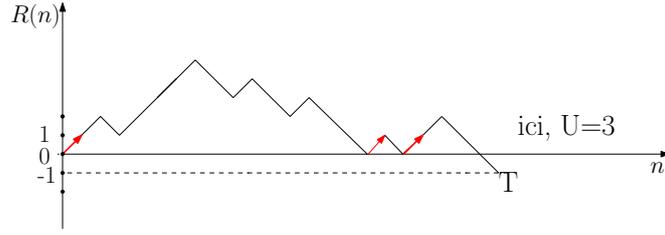


FIGURE 18 – illustration de la définition de U

PREUVE DU LEMME : Posons $T = \inf\{n / R(n) = -1\}$, le premier temps d'atteinte de -1 . Notons U le nombre d'instant $n < T$ tels que $R(n) = 0$ et $R(n+1) = 1$.

$U = 0$ équivaut à $\varepsilon_1 = -1$ car $\varepsilon_1 = 1$ entraîne que $U \geq 1$ et $\varepsilon_1 = -1$ entraîne que $T = 1$, donc $U = 0$. Il vient $\mathbb{P}(U = 0) = \mathbb{P}(\varepsilon_1 = -1) = \frac{1}{2}$

Posons $\tau = \inf\{n > 0 / R(n) = 0\}$ et $\tilde{U} = \#\{\tau \leq n < T / R(n) = 0 \text{ et } R(n+1) = 1\}$. Alors, par la propriété de Markov forte, \tilde{U} est indépendant de $(R(q))_{0 \leq q \leq \tau}$ et a même loi que U .

D'où,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U = q + 1) &= \mathbb{P}(\{\varepsilon_1 = 1\} \cap \{U = q + 1\}) \\ &= \mathbb{P}(\{\varepsilon_1 = 1\} \cap \{\tilde{U} = q\}) \\ &= \mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1) \mathbb{P}(\tilde{U} = q) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}(U = q). \end{aligned}$$

Par récurrence, on obtient que $\mathbb{P}(U = q) = (\frac{1}{2})^{q+1}$. □

PREUVE DU THÉORÈME 3.2 : Comme annoncé, on commence par établir le caractère markovien. La preuve requiert quelques définitions préalables que nous allons introduire : Durant la preuve, $m \geq 0$, $k \geq 0$, $i_1 \geq 0$ sont fixés :

- Pour $1 \leq i \leq i_1$, on définit le temps d'atteinte $j_{1,i}$ comme étant le plus petit entier tel que $R(n)$ réalise exactement i pas de k à $k+1$ pour $0 \leq n \leq j_{1,i}$.
Par conséquent $R(j_{1,i} - 1) = k$ et $R(j_{1,i}) = k + 1$
- On définit également le temps d'atteinte $j_{2,i}$ comme étant le plus petit entier supérieur à $j_{1,i}$ tel que $R(j_{2,i}) = k$. $j_{1,i}$ et $j_{2,i}$ sont des temps d'arrêt. (Fig. 19)
- Soit $\mathcal{F}(i)$ la tribu engendrée par $R(n)$, pour $0 \leq n \leq j_{1,i}$ et $j_{2,i} \leq n < \infty$.

On remarque que pour tout $i \in [1, i_1]$, et tout $0 \leq k_1 \leq k$, $S(m, k_1)$ est $\mathcal{F}(i)$ -mesurable.

Notant $\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{i_1} \mathcal{F}(i)$, $S(m, k_1)$ est ainsi \mathcal{F} -mesurable.

- De même, soit $\mathcal{G}(i)$ la tribu engendrée par $(R(n), j_{1,i} \leq n \leq j_{2,i})$
On a alors que $\mathcal{F}(i)$ et $\mathcal{G}(i)$ sont indépendantes. Ceci découle de la propriété de Markov forte : $j_{1,i}$ et $j_{2,i}$ sont des temps d'arrêt (remarquons que $R(j_{1,i})$ et $R(j_{2,i})$ sont déterministes). Les tribus $(\mathcal{G}(i), 1 \leq i \leq i_1)$ sont également indépendantes entre elles.

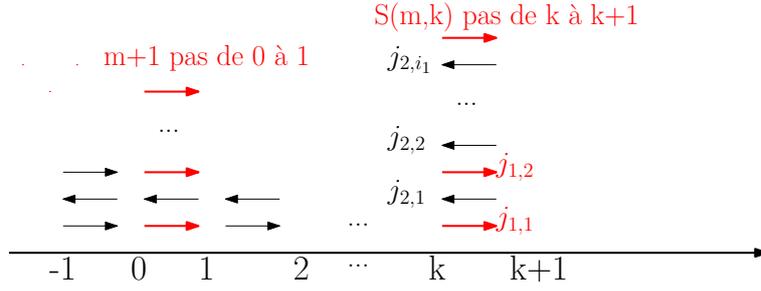


FIGURE 19 – Les temps d'arrêt $j_{1,i}$ et $j_{2,i}$

- Soit, pour $k_2 \geq k$, $U_{k_2,i}$ le nombre de pas de $R(n)$ de k_2 à $k_2 + 1$ pour $j_{1,i} \leq n < j_{2,i}$. (Fig.20)

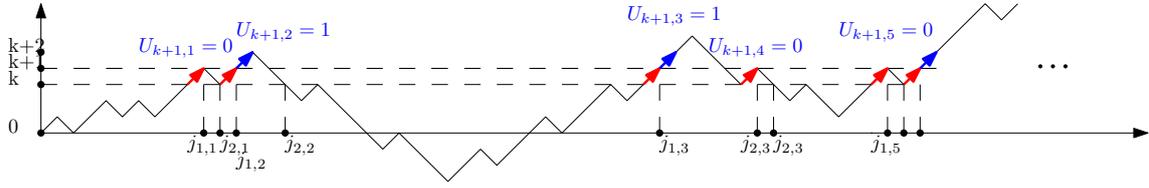


FIGURE 20 – illustration de la définition de $U_{k_2,i}$

$U_{k_2,i}$ est alors $\mathcal{G}(i)$ -mesurable, donc indépendant de $\mathcal{F}(i)$, et est en outre $\mathcal{F}(j)$ -mesurable pour tout $j \neq i$. Ceci assure, pour k_2 fixé, que les $U_{k_2,i}$ pour $i \in [1, i_1]$ sont indépendants entre eux, et conjointement indépendants de \mathcal{F} .

On remarque de plus que sur l'ensemble $\{S(m, k) = i_1\} \in \mathcal{F}$, $S(m, k_2) = \sum_{i=1}^{i_1} U_{k_2,i}$. Donc, on a bien indépendance du passé et du futur conditionnellement au présent, ce qui nous permet d'avoir le caractère markovien de la chaîne. En effet, pour tous entiers $l_0 = m, \dots, l_{k-1}$ et i_1 tels que $\mathbb{P}(\{S(m, 0) = l_0\} \cap \dots \cap \{S(m, k-1) = l_{k-1}\} \cap \{S(m, k) = i_1\}) > 0$,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(S(m, k+1) = i_2 \mid S(m, 0) = l_0, \dots, S(m, k-1) = l_{k-1}, S(m, k) = i_1) \\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{i_1} U_{k+1,i} = i_2 \mid S(m, 0) = l_0, \dots, S(m, k-1) = l_{k-1}, S(m, k) = i_1\right) \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(\left\{\sum_{i=1}^{i_1} U_{k+1,i} = i_2\right\} \cap \{S(m, 0) = l_0\} \cap \dots \cap \{S(m, k-1) = l_{k-1}\} \cap \{S(m, k) = i_1\}\right)}{\mathbb{P}\left(\{S(m, 0) = l_0\} \cap \dots \cap \{S(m, k-1) = l_{k-1}\} \cap \{S(m, k) = i_1\}\right)} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(\left\{\sum_{i=1}^{i_1} U_{k+1,i} = i_2\right\}\right) \mathbb{P}\left(\{S(m, 0) = l_0\} \cap \dots \cap \{S(m, k-1) = l_{k-1}\} \cap \{S(m, k) = i_1\}\right)}{\mathbb{P}\left(\{S(m, 0) = l_0\} \cap \dots \cap \{S(m, k-1) = l_{k-1}\} \cap \{S(m, k) = i_1\}\right)} \\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{i_1} U_{k+1,i} = i_2\right),
\end{aligned}$$

où, pour l'avant dernière égalité, on utilise l'indépendance conjointe des $U_{k+1,i}$ avec \mathcal{F} (et donc avec les $S(m, k_1)$ pour $0 \leq k_1 \leq k$). Le résultat final ne dépend que de k , i_1 et i_2 . $(S(m, k))_{k \geq 0}$ est donc bien une chaîne de Markov, à priori non homogène.

Nous remarquons que la forme du coefficient de la matrice de transition est celui d'un processus de branchement.

Pour montrer l'homogénéité de la chaîne de Markov, il suffit de calculer explicitement les coefficients de la matrice de transition associée.

Comme on a affaire à une somme de variables aléatoires indépendantes $(\sum_{i=1}^{i_1} U_{k+1,i})$ à valeurs dans \mathbb{N} , une bonne stratégie pour trouver les coefficients de la matrice de transition consiste à déterminer les coefficients du développement en série entière de la fonction génératrice :

$$\mathbb{E}[s^{\sum_{i=1}^{i_1} U_{k+1,i}}] = \prod_{i=1}^{i_1} \mathbb{E}[s^{U_{k+1,i}}].$$

Montrons que les $U_{k+1,i}$ (qui représentent le nombre de pas de $k+1$ à $k+2$ entre les temps $j_{1,i}$ et $j_{2,i}$) sont identiquement distribués suivant une loi géométrique de raison $1/2$ (et donc, ne dépendent pas de k). On se ramène au lemme 3.4 :

$U_{k+1,i}$ est le nombre d'instants n entre les temps d'atteinte $j_{1,i}$ et $j_{2,i}$ tels que $R(n) = k+1$ et $R(n+1) = k+2$.

Définissons $\tilde{\tau} = j_{2,i} - j_{1,i}$ (qui est un temps d'arrêt pour $(R(j_{1,i} + n))_{n \geq 0}$ par définition de $j_{2,i}$) et posons $\tilde{\varepsilon}_n = \varepsilon_{n+j_{1,i}}$ ainsi que $\tilde{R}(n) = R(j_{1,i} + n) - (k+1) = R(j_{1,i} + n) - R(j_{1,i}) = \sum_{q=1}^n \varepsilon_{j_{1,i}+q} = \sum_{q=1}^n \tilde{\varepsilon}_q$.

Par la propriété de Markov forte, les $(\tilde{\varepsilon}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont indépendants, de même loi que les $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$. $\tilde{R}(n)$ est donc une marche aléatoire simple. En outre, $\tilde{\tau}$ est le premier temps d'atteinte de -1 de celle-ci. $U_{k+1,i}$ est ainsi le nombre de pas de $\tilde{R}(n)$ de 0 à 1 avant qu'elle n'atteigne -1 . Par le lemme 3.4, $U_{k+1,i}$ suit donc une loi géométrique de raison $1/2$.

Ainsi,

$$\mathbb{E}[s^{U_{k+1,i}}] = \frac{1}{2-s}.$$

On déduit de ce qui précède :

$$\begin{aligned} \sum_{q=0}^{\infty} \mathbb{P}(S(m, k+1) = q \mid S(m, k) = i_1) s^q &= \sum_{q=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{i_1} U_{k+1,i} = q\right) s^q \\ &= \mathbb{E}[s^{\sum_{i=1}^{i_1} U_{k+1,i}}] \\ &= \prod_{i=1}^{i_1} \mathbb{E}[s^{U_{k+1,i}}] \\ &= \left(\frac{1}{2-s}\right)^{i_1} \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \binom{-i_1}{q} 2^{-(i_1+q)} s^q. \end{aligned}$$

Par identification ; nous obtenons le résultat voulu. (de manière équivalente, $p(i_1, \cdot)$ est la convolée de i_1 lois géométriques de paramètre $1/2$). \square

REMARQUE 3.5. Comme constaté plus haut, $(S(m, k))_{k \geq 0}$ est un processus de branchement dans lequel le "nombre d'enfants" suit une loi géométrique de paramètre $1/2$.

Nous allons maintenant généraliser ce qui précède en prenant une autre référence que le nombre de pas de 0 à 1.

DÉFINITION 3.6. Pour tout $k \geq 0$, $m \geq 0$, et $b < 0$, on définit $t_m(b)$ le temps qui précède la $(m+1)^{\text{ème}}$ passage de b à $b+1$ (c'est-à-dire qu'on a $R(t_m) = b$ et $R(t_m+1) = b+1$).

On pose $S(b, m, k) = \#\{1 \leq n \leq t_m(b) / R(n-1) = b+k \text{ et } R(n) = b+k+1\}$.

Autrement dit, $S(b, m, k)$ est le nombre de pas de $R(n)$ de $b+k$ à $b+k+1$ jusqu'au $(m+1)^{\text{ème}}$ (exclu) pas de b à $b+1$. (Fig. 21, Fig. 22)

Il en résulte que $S(b, m, 0) = m$.

Il découle de la définition que $S(0, m, k) = S(m, k)$.

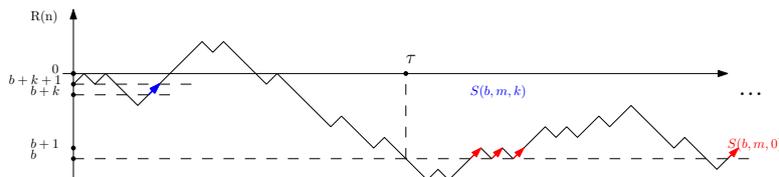


FIGURE 21 – illustration de $S(b, m, k)$

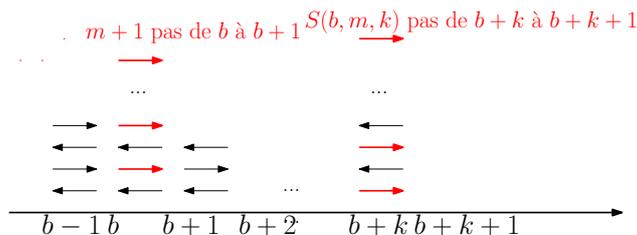


FIGURE 22 – autre représentation de $S(b, m, k)$

Il vient un résultat similaire, à ceci près que la chaîne de Markov n'est plus homogène :

PROPOSITION 3.7. Pour tout $m \geq 0$, $b \leq 0$, $(S(b, m, k))_{k \geq 0}$ est une chaîne de Markov (inhomogène) à valeurs dans \mathbb{N} vérifiant $S(b, m, 0) = m$ et de matrices de transition définies par

$$p(k; i_1, i_2) = \mathbb{P}(S(b, m, k+1) = i_2 \mid S(b, m, k) = i_1)$$

$$= \begin{cases} (-1)^{i_2} \begin{pmatrix} -(i_1+1) \\ i_2 \end{pmatrix} 2^{-(i_1+1+i_2)} & \text{si } 0 \leq k < -b, \\ (-1)^{i_2} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} 2^{-(i_1+i_2)} & \text{si } -b \leq k. \end{cases}$$

PREUVE : Ici, $m \geq 0$ et $0 \geq b$ sont fixés. Le caractère markovien de $S(b, m, k)$ se voit en adaptant la preuve du théorème 3.2 : on fixe $k \geq 0$.

- Si $k \geq -b$, tout ce passe exactement comme dans la preuve du théorème 3.2 en adaptant les définitions : Pour $1 \leq i \leq i_1$, on définit le temps d'atteinte $j_{1,i}$ comme étant le plus petit entier tel que $R(n)$ réalise exactement i pas de $b+k$ à $b+k+1$ pour $0 \leq n \leq j_{1,i}$. On définit également le temps d'atteinte $j_{2,i}$ comme étant le plus petit entier plus supérieur à $j_{1,i}$ tel que $R(j_{2,i}) = b+k$.

Et tout le reste marche comme précédemment et nous permet de démontrer le caractère markovien (à priori inhomogène).

- Si $0 \leq k < -b$, il nous faut définir $j_{1,0} = 0$ et $j_{2,0}$ comme étant le plus petit entier supérieur à $j_{1,0}$ tel que $R(j_{2,0}) = b + k$. Pour $i \geq 1$, les $j_{1,i}$ et $j_{2,i}$ sont définis comme précédemment. Soit $\mathcal{F}(0)$ la tribu engendrée par $R(n)$, pour $j_{2,0} \leq n < \infty$, $\mathcal{G}(0)$ la tribu engendrée par $\{R(n), j_{1,0} \leq n \leq j_{2,0}\}$. On pose $\mathcal{F} = \bigcap_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}(i)$. Enfin $U_{k_2,0}(k_2 \geq k)$ est le nombre de pas de $R(n)$ de k_2 à $k_2 + 1$ pour $0 \leq n < j_{2,0}$. On conclut comme précédemment : seul un terme $i = 0$ est rajouté. Ce qui montre le caractère markovien (inhomogène).

Donc, $(S(b, m, k))_{k \geq 0}$ est bien une chaîne de Markov. Démontrons maintenant la forme des coefficients des matrices de transition.

- Pour $-b \leq k$, on peut se ramener directement au cas du théorème précédent car $S(b, m, k) = S(S(b, m, -b), b + k)$. Donc,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S(b, m, k + 1) = i_2 | S(b, m, k) = i_1, S(b, m, k - 1) = p_{k-1}, \dots, S(b, m, 0) = p_0) \\ = \mathbb{P}(S(p_{-b}, b + k + 1) = i_2 | S(p_{-b}, b + k)) \\ = (-1)^{i_2} \binom{i_1}{i_2} 2^{-(i_1 + i_2)}. \end{aligned}$$

- Pour $0 \leq k < -b$, il suffit de voir que comme précédemment, $U_{k+1,0}$ est une variable aléatoire géométrique de raison $\frac{1}{2}$ indépendante de $(R(j_{1,i} + n), n \geq 0)$. Alors $p(k; i_1, i_2)$ est la convolée de $i_1 + 1$ variables aléatoires indépendantes de même fonction génératrice $\frac{1}{2-s}$, ce qui donne le résultat. □

3.2 Résultats asymptotiques sur leurs distributions

THÉORÈME 3.8. Soit $p^{(n)}(i_1, i_2)$ le coefficient correspondant au couple (i_1, i_2) de l'itéré $n^{\text{ème}}$ de la matrice de transition $(p(i_1, i_2))_{(i_1, i_2) \in \mathbb{N}^2}$, et, pour $\alpha \geq 0, x \geq 0$,

$$f_n(x; \alpha, \beta) = p^{([nx])}([n\alpha], [n\beta]).$$

Alors, pour $\beta > 0$, la limite de $nf_n(x; \alpha, \beta)$ existe et, en notant $f(x; \alpha, \beta) = \lim_{n \rightarrow \infty} nf_n(x; \alpha, \beta)$,

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\alpha}{x^2} e^{-\frac{\alpha+\beta}{x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{(k+1)!} \left(\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{x} \right)^{2k}.$$

Et $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x; \alpha, \beta) = e^{\frac{\alpha}{x}} =: F(x; \alpha, 0)$.

Pour tout $\beta \geq 0$, on pose alors $F(x; \alpha, \beta) = F(x; \alpha, 0) + \int_0^\beta f(x; \alpha, \gamma) d\gamma$. La distribution conjointe de $f_n(x; \alpha, \beta)$ converge vers celle de $F(x; \alpha, \beta)$ dans le sens où, pour tout $0 < x_1 < \dots < x_k$ et tous intervalles de la forme $[\beta_{1,i}, \beta_{2,i}[$, $1 \leq i \leq k$,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S(0, [n\alpha], 0) = nm, S(0, [n\alpha], [nx_1]) \in [n\beta_{1,1}, n\beta_{2,1}[, \dots, S(0, [n\alpha], [nx_k]) \in [n\beta_{1,k}, n\beta_{2,k}[) \\ = \int_{[\beta_{1,k}, \beta_{2,k}[} \dots \int_{[\beta_{1,1}, \beta_{2,1}[} F(x_1; \alpha, d\beta_1) F(x_2 - x_1; \beta_1, d\beta_2) \dots F(x_k - x_{k-1}; \beta_{k-1}, d\beta_k). \end{aligned}$$

PREUVE : Commençons par établir le lemme suivant

LEMME 3.9. *L'itérée $p^{(n)}$ de p est donnée par :*

$$p^{(n)}(i_1, i_2) = \sum_{k=0}^{i_1} \binom{i_1}{k} \binom{-k}{i_2} (-1)^{i_2} (n^2 - 1)^{-k} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{i_1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-i_2}.$$

PREUVE DU LEMME : Soit $G_n(s)$ la fonction génératrice associée à $p^{(n)}(1, \cdot)$.

Montrons par récurrence que $G_n(s) = \frac{n-(n-1)s}{n+1-ns}$.

L'initialisation $G_1(s) = \frac{1}{2-s}$ a été montré dans le théorème 3.2.

Maintenant, supposons que nous avons $G_n(s) = \frac{n-(n-1)s}{n+1-ns}$.

Nous avons vu dans la preuve de la théorème 3.2 que $\left(\frac{1}{2-s}\right)^{i_1} = \sum_{q=0}^{\infty} p(i_1, q) s^q$.

En notant que $p^{(n+1)}(1, i_2) = \sum_{q=0}^{\infty} p^{(n)}(1, q) p(q, i_2)$, il vient,

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} p^{(n+1)}(1, l) s^l &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} p^{(n)}(1, q) p(q, l) s^l \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} p^{(n)}(1, q) p(q, l) s^l \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} p^{(n)}(1, q) \left(\frac{1}{2-s}\right)^q \\ &= G_n\left(\frac{1}{2-s}\right) \\ &= \frac{n-(n-1)\frac{1}{2-s}}{n+1-n\frac{1}{2-s}} \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= \frac{(n+1)-ns}{n+2-(n+1)s}. \end{aligned}$$

En utilisant Fubini-Lebesgue dans la deuxième égalité par convergence normale de la série sur le disque unité. Ce qui achève la récurrence.

On voit ensuite (de manière analogue à la démonstration du théorème 3.2) que $p^{(n)}(i_1, i_2)$ est la convolée $i_1^{\text{ème}}$ de $p^{(n)}(1, i_2)$. En effet $p^{(n)}(i_1, i_2) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{i_1} U_{k+n, i} = i_2\right)$. Or les $U_{k+n, i}$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (l'égalité en loi provient de la propriété de Markov forte et l'indépendance provient de l'indépendance des tribus $\mathcal{G}(i)$ (avec les notations de la preuve du théorème 3.2)). Et donc, $p^{(n)}(i_1, i_2)$ est le coefficient de s^{i_2} dans $(G_n(s))^{i_1}$.

Réécrivons $G_n(s) = \frac{1}{n(n+1)} \frac{1-\frac{ns}{n+1}}{1-\frac{ns}{n+1}} + \frac{n-1}{n}$.

Alors,

$$\begin{aligned}
(G_n(s))^{i_1} &= \sum_{k=0}^{i_1} \binom{i_1}{k} \left(\frac{1}{n(n+1)} \frac{1}{1 - \frac{ns}{n+1}} \right)^k \left(\frac{n-1}{n} \right)^{i_1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{i_1} \binom{i_1}{k} n^{-i_1} (n-1)^{i_1-k} (n+1)^{-k} \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \binom{-k}{q} \left(\frac{ns}{n+1} \right)^q \\
&= \sum_{q=0}^{\infty} s^q \sum_{k=0}^{i_1} \binom{i_1}{k} n^{-i_1} (n+1)^{-k} (n-1)^{i_1-k} \left(\frac{n}{n+1} \right)^q (-1)^q \binom{-k}{q} \\
&= \sum_{q=0}^{\infty} s^q \sum_{k=0}^{i_1} \binom{i_1}{k} \binom{-k}{q} (-1)^q (n^2-1)^{-k} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{i_1} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-q}.
\end{aligned}$$

Par identification, on a le résultat :

$$p^{(n)}(i_1, i_2) = \sum_{k=0}^{i_1} \binom{i_1}{k} \binom{-k}{i_2} (-1)^{i_2} (n^2-1)^{-k} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{i_1} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-i_2}.$$

□

Voyons comment le théorème s'en déduit.

On commence par remarquer que si $i_2 \neq 0$, le terme pour $k = 0$ dans la formule précédente est nul. Donc si $\beta \neq 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
f(x; \alpha, \beta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n f_n(x; \alpha, \beta) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^{[n\alpha]} \binom{[n\alpha]}{k} \binom{-k}{[n\beta]} (-1)^{[n\beta]} ([nx]^2 - 1)^{-k} \left(1 - \frac{1}{[nx]} \right)^{[n\alpha]} \left(1 + \frac{1}{[nx]} \right)^{-[n\beta]} \\
&= e^{-\frac{\alpha+\beta}{x}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{[n\alpha]} n \binom{[n\alpha]}{k} \binom{-k}{[n\beta]} (-1)^{[n\beta]} ([nx]^2 - 1)^{-k}.
\end{aligned}$$

Or pour chaque terme, on a l'équivalent suivant (quand $n \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned}
n \binom{[n\alpha]}{k} \binom{-k}{[n\beta]} (-1)^{[n\beta]} ([nx]^2 - 1)^{-k} &\sim \frac{[n\alpha]^k}{k!} \frac{[n\beta]^{k-1}}{(k-1)!} \frac{n}{[nx]^{2k}} \\
&\sim \frac{1}{k! (k-1)!} \frac{\alpha}{x^2} \left(\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{x} \right)^{2(k-1)}.
\end{aligned}$$

Il reste à donner un argument de domination pour justifier un passage à la limite terme à terme. On commence par écrire

$$\begin{aligned}
\left| n \binom{[n\alpha]}{k} \binom{-k}{[n\beta]} (-1)^{[n\beta]} ([nx]^2 - 1)^{-k} \right| &\leq \frac{n}{([nx]^2 - 1)^k} \frac{(k + [n\beta] - 1)!}{(k-1)! [n\beta]!} \frac{[n\alpha]^k}{k!} \\
&\leq \frac{n}{([nx]^2 - 1)^k} \frac{(k + [n\beta] - 1)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{[n\alpha]^k}{k!} \\
&\leq n \frac{(n\beta + k - 1)^{k-1} (n\alpha)^k}{(k-1)! k! (nx(nx-2))^k}.
\end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned} \left| n \binom{[n\alpha]}{k} \binom{-k}{[n\beta]} (-1)^{[n\beta]} ([nx]^2 - 1)^{-k} \mathbf{1}_{k \leq [n\alpha]} \right| &\leq n \frac{(n(\beta + \alpha))^{k-1} (n\alpha)^k}{(k-1)! k! (nx(nx-2))^k} \\ &\leq \frac{(\beta + \alpha)^{k-1}}{(k-1)! k!} \left(\frac{n}{nx-2} \right)^k \left(\frac{\alpha}{x} \right)^k. \end{aligned}$$

Si x, α, β sont contenus dans un compact ne contenant pas 0 : $\frac{1}{A} \leq x, \alpha, \beta \leq A$, pour un certain $A > 0$,

$$\frac{(\beta + \alpha)^{k-1}}{(k-1)! k!} \left(\frac{n}{nx-2} \right)^k \left(\frac{\alpha}{x} \right)^k \leq \frac{1}{(k-1)! k!} \left(\frac{n}{nx-2} \right)^k (2A)^{k-1} A^{2k}.$$

Donc dès que $n > 4A$ (ce qui assure $\frac{n}{nx-2} < 2A$), et $A > 1$:

$$\begin{aligned} \frac{(\beta + \alpha)^{k-1}}{(k-1)! k!} \left(\frac{n}{nx-2} \right)^k \left(\frac{\alpha}{x} \right)^k &\leq \frac{1}{(k-1)! k!} (2A)^k (2A)^{k-1} A^{2k} \\ &\leq \frac{(4A^4)^k}{(k-1)! k!}. \end{aligned}$$

Comme la série de terme général $\frac{(4A^4)^k}{k!}$ converge, le théorème de convergence dominée permet d'écrire

$$\begin{aligned} f(x; \alpha, \beta) &= e^{-\frac{\alpha+\beta}{x}} \lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^{[n\alpha]} \binom{[n\alpha]}{k} \binom{-k}{[n\beta]} (-1)^{[n\beta]} ([nx]^2 - 1)^{-k} \\ &= e^{-\frac{\alpha+\beta}{x}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)! k!} \frac{\alpha}{x^2} \left(\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{x} \right)^{2(k-1)} \\ &= e^{-\frac{\alpha+\beta}{x}} \frac{\alpha}{x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)! k!} \left(\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{x} \right)^{2k}. \end{aligned}$$

qui est la formule qui était avancée.

La domination sur tout compact ainsi qu'un argument facile d'uniformité des équivalents précédents assurent qu'en outre la convergence est uniforme en x, α, β sur tout compact de $]0, +\infty[^3$.

D'autre part, en utilisant que $f_n(x; \alpha, 0) = G_{[nx]}(0)^{[n\alpha]}$, il vient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x; \alpha, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{[nx]}{[nx]+1} \right)^{[n\alpha]} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-[n\alpha] \ln(1 + \frac{1}{[nx]})} = e^{-\frac{\alpha}{x}}.$$

Pour montrer la convergence du noyau de transition, on écrit :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S(0, [n\alpha], 0) = nm, S(0, [n\alpha], [nx_1]) \in [n\beta_{1,1}, n\beta_{2,1}[, \dots, S(0, [n\alpha], [nx_k]) \in [n\beta_{1,k}, n\beta_{2,k}[) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i_{2,k} \in [n\beta_{1,k}, n\beta_{2,k}[} \dots \sum_{i_{2,1} \in [n\beta_{1,1}, n\beta_{2,1}[} \\ f_n(x_1; \alpha, i_{2,1}) f_n(x_2 - x_1; i_{2,1}/n, i_{2,2}) \dots f_n(x_k - x_{k-1}; i_{2,k-1}, i_{2,k}) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i_{2,k}/n \in [\beta_{1,k}, \beta_{2,k}[} \dots \sum_{i_{2,1}/n \in [\beta_{1,1}, \beta_{2,1}[} \\ f_n(x_1; \alpha, i_{2,1}/n) f_n(x_2 - x_1; i_{2,1}/n, i_{2,2}/n) \dots f_n(x_k - x_{k-1}; i_{2,k-1}/n, i_{2,k}/n) \\ = \int_{[\beta_{1,k}, \beta_{2,k}[} \dots \int_{[\beta_{1,1}, \beta_{2,1}[} F(x_1; \alpha, d\beta_1) F(x_2 - x_1; \beta_1, d\beta_2) \dots F(x_k - x_{k-1}; \beta_{k-1}, d\beta_k). \end{aligned}$$

Seule la dernière égalité est à prouver (les autres proviennent des définitions), il suffit d'observer que terme à terme, la convergence de $nf_n(x; \alpha, \beta)$ est uniforme pour α, β et x dans un intervalle compact ne contenant pas 0, et ensuite utiliser les résultats sur les sommes de Riemann. \square

Nous avons donc montré que pour une condition initiale $m = [n\alpha]$, et à distance $k = [nx]$, le processus $(\frac{S(0, [n\alpha], [nx])}{n})_{n \geq 0}$ converge en loi vers un processus de Markov de mesure de transition $F(x; \alpha, d\beta)$. On va voir que l'on peut étendre ce résultat à $(S(b, m, k))_{k \geq 0}$ pour $b \neq 0$.

Les deux corollaires suivants, donnés par Knight dans son article, font appel à des notions dépassant nos connaissances actuelles. On donne cependant une preuve au premier corollaire : certains arguments seront toutefois donnés sans détail. On pourra se reporter à [Kni63] pour une démonstration plus précise.

COROLLAIRE 3.10. *La fonction de transition $F(x; \alpha, d\beta)$ est celle d'un processus homogène de Markov avec un générateur infinitésimal $y \frac{d^2}{dy^2}$ opérant sur l'espace des fonctions continues convergeant à l'infini et valant 0 en 0.*

PREUVE : Par le changement d'échelle $i_1 = [n\alpha]$ et $i_2 = [n\beta]$, on a vu dans preuve de la propriété précédente, que, en considérant la fonction suivante,

$$\left(\frac{1}{[nx]([nx] + 1)} \left(\frac{1}{1 - \frac{[nx]s}{[nx] + 1}} \right) + 1 - \frac{1}{[nx]} \right)^{[n\alpha]},$$

alors, n fois le coefficient de s^{i_2} tend vers $f(x; \alpha, \beta)$ quand n tend vers l'infini.

En posant $s = e^{-\frac{\lambda}{n}}$, alors,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{[nx]([nx] + 1)} \left(\frac{1}{1 - \frac{[nx]e^{-\frac{\lambda}{n}}}{[nx] + 1}} \right) + 1 - \frac{1}{[nx]} \right)^{[n\alpha]} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} f_n(x; \alpha, i_2/n) e^{-\frac{\lambda i_2}{n}} \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda\beta} F(x; \alpha, d\beta), \end{aligned}$$

en utilisant la dernière proposition pour la dernière égalité.

Par un développement limité

$$\begin{aligned}
[n\alpha] \ln \left(\frac{1}{[nx]([nx] + 1)} \left(1 - \frac{[nx]e^{-\frac{\lambda}{n}}}{[nx] + 1} \right)^{-1} + 1 - \frac{1}{[nx]} \right) \\
&= [n\alpha] \ln \left(1 - \frac{1}{[nx]} + \frac{1}{[nx]} \frac{1}{[nx](1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}) + 1} \right) \\
&= (n\alpha + O(1)) \ln \left(1 - \frac{1}{nx + O(1)} + \frac{1}{nx + o(1)} \frac{1}{\lambda x + 1 + o(1)} \right) \\
&= (n\alpha + O(1)) \left(-\frac{1}{nx + O(1)} + \frac{1}{nx + O(1)} \frac{1}{\lambda x + 1 + o(1)} \right) \\
&= \frac{\alpha}{x} \left(-1 + \frac{1}{\lambda x + 1} \right) \\
&= -\frac{\lambda\alpha}{\lambda x + 1}.
\end{aligned}$$

D'où $e^{\frac{-\lambda\alpha}{1+\lambda x}}$ (par développement limité).

Soit $T_x : f \rightarrow \int_0^\infty f(\beta)F(x; \alpha, d\beta)$ Le semi-groupe de Feller du processus agissant sur l'ensemble des fonctions définies sur $[0, \infty[$.

Donc, pour $\lambda > 0$, $T_x(e^{-\lambda y}) = e^{\frac{-\lambda y}{1+\lambda x}}$, T_x est uniformément continue sur l'ensemble des fonctions $e^{-\lambda y}$, $\lambda > 0$ pour la topologie uniforme.

$\{e^{-\lambda y}, \lambda \geq 0\}$ est une sous-algèbre unitaire séparante de $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. On déduit donc du théorème de Stone-Weierstrass que $\{e^{-\lambda y}, \lambda \geq 0\}$ est dense dans $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, donc à fortiori dans $\{f \in C([0, \infty[, \mathbb{R})/\exists a \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = a\}$.

T_x est bien définie sur $\{f \in C([0, \infty[, \mathbb{R})/\exists a \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = a\}$. Donc, par uniforme continuité de T_x sur le sous-ensemble dense $\{e^{-\lambda y}, \lambda \geq 0\}$, il découle que T_x est uniformément continue sur $\{f \in C([0, \infty[, \mathbb{R})/\exists a \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = a\}$.

Soit λ fixé,

$$\frac{d}{dx} \exp\left(-\frac{\lambda y}{1 + \lambda x}\right)|_{x=0} = \lambda^2 y e^{-\lambda y} = y \frac{d^2}{dx^2} e^{-\lambda y}.$$

Comme $A(1) = 0$,

$$\frac{d}{dx} T_x(1 - e^{-\lambda y})|_{x=0} = -\lambda^2 y e^{-\lambda y} = y \frac{d^2}{dx^2} (1 - e^{-\lambda y}).$$

Cette fonction est bien continue en tant que fonction de y et tend vers 0 en $+\infty$. Donc, comme $A(1) = 0$, $1 - e^{-\lambda y}$ est dans le domaine du générateur infinitésimal A et $A = y \frac{d^2}{dx^2}$ sur $\{1 - e^{-\lambda y}, \lambda \geq 0\}$. On vérifie que l'algèbre engendrée par $\{1\} \cup \{1 - e^{-\lambda y}, \lambda > 0\}$ forme bien une sous-algèbre unitaire séparante de $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ (la stabilité par produit est due au fait que $(1 - e^{-\lambda_1 y})(1 - e^{-\lambda_2 y}) = (1 - e^{-\lambda_1 y}) + (1 - e^{-\lambda_2 y}) - (1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)y})$). Le théorème de Stone-Weierstrass appliqué à cette nouvelle sous-algèbre $\{1\} \cup \{1 - e^{-\lambda y}, \lambda > 0\}$ montre qu'elle est dense dans l'ensemble des fonctions continues sur \mathbb{R}^+ tendant vers 0 en 0 et ayant une limite finie en l'infini.

Par un argument de résolvante (qui caractérise la chaîne), on montre que $A = y \frac{d^2}{dx^2}$ sur le domaine du générateur infinitésimal. Donc que le générateur infinitésimal est bien $y \frac{d^2}{dx^2}$. \square

Donnons maintenant sans démonstration une généralisation proposée par Knight de ce dernier énoncé au processus $(S(b, m, k))_{k \geq 0}$.

COROLLAIRE 3.11. *La fonction de transition de $\frac{S([nx_0], [n\alpha_0], [n(x_0+x)])}{n}$, $x_0 \leq 0, \alpha_0 \geq 0, x > 0$ converge vers celle d'un processus de diffusion inhomogène de paramètre x , de valeur initiale α_0 et de deux intervalles d'homogénéité :*

- Pour $0 \leq x < -x_0$, le générateur est $y \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d}{dy}$ et 0 est une valeur d'entrée.
- Pour $-x_0 \geq x$ le générateur est $y \frac{d^2}{dy^2}$ et 0 est une valeur de sortie avec une condition limite d'absorption.

4 Généralisation du théorème de Knight et modèle de Tóth

4.1 Le théorème de Knight pour les marches locales

Le théorème de Knight prouvé précédemment se généralise à une plus grande classe de marches aléatoires. Les temps locaux de la marche du Toy-Model formaient par exemple une chaîne de Markov : ils constituaient plus précisément des marches aléatoires simples coalescentes réfléchies ou absorbées par l'axe des abscisses. En outre, on connaissait pour ce cas des lois conjointes du type de celle de $(S(b_1, m_1, k), \dots, S(b_p, m_p, k))_{k \geq 0}$ (avec les notations du paragraphe précédent) : ce sont des marches aléatoires simples coalescentes avec certaines conditions de réflexion et d'absorption par l'axe des abscisses.

DÉFINITION 4.1 (Temps locaux). Pour toute suite finie (x_0, x_1, \dots, x_i) , on introduit les nombres de traversées de l'arête $[k, k+1]$: celles effectuées de gauche à droite (*forward*), de droite à gauche (*backward*), et leur nombre total :

$$\begin{aligned} f(k|\underline{x}_0^i) &:= \#\{0 \leq j < i : x_j = k, x_{j+1} = k+1\}, \\ b(k|\underline{x}_0^i) &:= \#\{0 \leq j < i : x_j = k+1, x_{j+1} = k\}, \\ w(k|\underline{x}_0^i) &:= f(k|\underline{x}_0^i) + b(k|\underline{x}_0^i). \end{aligned}$$

Notons qu'en réalité $f(k|\underline{x}_0^i)$ et $b(k|\underline{x}_0^i)$ se déduisent de $w(k|\underline{x}_0^i)$ et des positions relatives de k , x_0 et x_i :

$$w(k|\underline{x}_0^i) = \begin{cases} 2f(k|\underline{x}_0^i) & \text{si } k \geq x_0 \text{ et } k \geq x_i \text{ ou si } k < x_0 \text{ et } k < x_i, \\ 2f(k|\underline{x}_0^i) - 1 & \text{si } x_0 < k \leq x_i, \\ 2f(k|\underline{x}_0^i) + 1 & \text{si } x_i \leq k < x_0. \end{cases}$$

DÉFINITION 4.2 (Marche locale). On dira qu'une marche aléatoire $(X_n)_{n \geq 0}$ sur \mathbb{Z} , de sauts de taille 1 est *locale* si la loi de ses sauts ne dépend que de la position de la marche et des temps locaux sur les arêtes voisines. Autrement dit : il existe une application Q telle que pour tout $n \geq 0$, tout $x_0, x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = Q(x_{n+1}, x_n, w(x_n | \underline{x}_0^n), w(x_n - 1 | \underline{x}_0^n)).$$

En conséquence $(X_n, (w(k | \underline{X}_0^n))_{k \in \mathbb{Z}})_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov homogène.

La marche aléatoire simple, ainsi que la marche du Toy-Model en sont des exemples.

On supposera dans la suite que les marches partent de 0. On introduit enfin une définition similaire à celle du paragraphe précédent :

DÉFINITION 4.3. Soit, pour $m > 0$, T_m l'instant précédent la $(m + 1)^{\text{ème}}$ traversée de l'arête $[0, 1]$ de gauche à droite.

On note alors $\Phi_m(k) = f(k | \underline{X}_0^{T_m})$, le nombre de pas de k à $k + 1$ avant le $(m + 1)^{\text{ème}}$ (exclu) pas de 0 à 1.

On a alors un analogue du théorème 3.2 :

THÉORÈME 4.4 (Théorème de Knight pour les marches locales). *Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une marche locale irréductible et récurrente (au sens où presque sûrement, chaque point est visité une infinité de fois), et $m > 0$. Alors le processus $(\Phi_m(k))_{k \geq 0}$ est une chaîne de Markov inhomogène à valeurs dans \mathbb{N} et de valeur initiale $\Phi_m(0) = m$.*

REMARQUE 4.5. De même qu'il était crucial de compter les pas sur les arêtes en se référant à une arête donnée (cf Remarque 3.3), pour les mêmes raisons on ne peut ici se passer de l'homogénéité des lois de transitions des marches locales (au sens où l'application Q de la définition 4.2 ne dépend pas de n).

On ne traitera ici que le cas particulier de la BTSAW. Toutefois, comme indiqué dans la remarque 4.10, le cas général se prouve très facilement en adaptant les formules des lois de transitions dans les calculs développés ci-après.

4.2 Modèle de Bálint Tóth

Dans [T695], Tóth introduit la véritable marche aléatoire auto-réulsive à répulsions par arêtes (*Bond True Self-Repelling Walk : BTSAW*). Dans ce modèle la loi des sauts est moins grossière que pour le Toy-Model.

DÉFINITION 4.6. On se donne un paramètre $\lambda \in]0, 1[$. La BTSAW est une marche locale $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ partant de 0 et de lois de transition :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_n + 1 | \underline{X}_0^n = \underline{x}_0^n) = \frac{\lambda^{w(x_n | \underline{x}_0^n)}}{\lambda^{w(x_n | \underline{x}_0^n)} + \lambda^{w(x_n - 1 | \underline{x}_0^n)}},$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_n - 1 | \underline{X}_0^n = \underline{x}_0^n) = \frac{\lambda^{w(x_n - 1 | \underline{x}_0^n)}}{\lambda^{w(x_n | \underline{x}_0^n)} + \lambda^{w(x_n - 1 | \underline{x}_0^n)}}.$$

Ainsi la marche s'oriente préférentiellement sur l'arête la moins visitée. En cas d'égalité, il y a équiprobabilité des déplacements. Notons que le Toy-Model correspond à la limite $\lambda \rightarrow 0$ et la marche aléatoire simple à $\lambda = 1$. À plus forte raison, "préférentiellement" prend un sens d'autant plus fort que λ est proche de 0.

Correspondance entre trajectoires et processus de franchissement : Nous traitons ici le cas d'une trajectoire (x_0, x_1, \dots, x_n) telle que $x_0 = x_n = 0$ et $f(0 | \underline{x}_0^n) = m$. La donnée d'une telle trajectoire est équivalente à la donnée du processus de franchissement défini comme suit. On note, si $k > 0$, $\mathfrak{s}_r(k)$ le nombre de pas de k à $k + 1$ entre les $r^{\text{ème}}$ et $(r + 1)^{\text{ème}}$ pas de $k - 1$ à

k . Si $k < 0$, $\mathfrak{s}_r(k)$ désigne le nombre de pas de k à $k + 1$ entre les $r^{\text{ème}}$ et $(r + 1)^{\text{ème}}$ pas de $k + 1$ à $k + 2$. Alors la trajectoire \underline{x} est équivalente à la donnée de :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(0) &= m, \\ \underline{\mathfrak{s}}(k) &= (\mathfrak{s}_1(k), \dots, \mathfrak{s}_{\mathfrak{S}(k-1)}(k)), & \mathfrak{S}(k) &= \sum_{r=1}^{\mathfrak{S}(k-1)} \mathfrak{s}_r(k) & \text{pour } k > 0, \\ \underline{\mathfrak{s}}(-1) &= (\mathfrak{s}_0(-1), \dots, \mathfrak{s}_m(-1)), & \mathfrak{S}(-1) &= \sum_{r=0}^m \mathfrak{s}_r(-1), \\ \underline{\mathfrak{s}}(k) &= (\mathfrak{s}_0(k), \dots, \mathfrak{s}_{\mathfrak{S}(k+1)-1}(k)), & \mathfrak{S}(k) &= \sum_{r=0}^{\mathfrak{S}(k+1)-1} \mathfrak{s}_r(k) & \text{pour } k \leq -2, \end{aligned}$$

où les suites $(\mathfrak{S}(k))_{k \geq 0}$ et $(\mathfrak{S}(k))_{k \leq 0}$ sont presque nulles (*i.e.* seul un nombre fini de termes est non nul).

Exemple. L'exemple suivant donne une idée algorithmique permettant de retrouver la marche à partir de son processus de franchissement, qui justifie la bijection. On prend ici

$$\mathfrak{S}(0) = 2, \quad \underline{\mathfrak{s}}(1) = (2, 1), \quad \underline{\mathfrak{s}}(-1) = (1, 0, 1).$$

Commençons par écrire les pas entre 0 et 1 (Fig. 23).

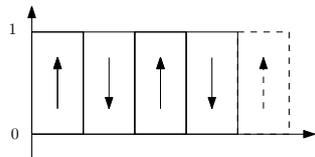


FIGURE 23 – Première étape : les pas entre 0 et 1

Entre un tel pas montant et un pas descendant s'insèrent les éventuels pas de 1 à 2, comme indiqué sur la figure 24.

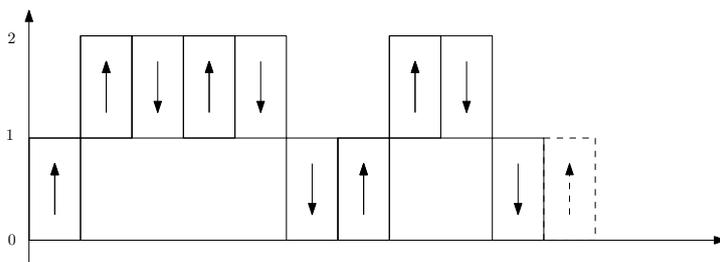


FIGURE 24 – Deuxième étape : les pas de 1 à 2

De la même manière les éventuels pas de -1 à 0 s'insèrent avant chaque pas de 0 à 1 (Fig. 25). On peut continuer ainsi le processus si la suite des processus de franchissement est plus longue (on pourrait avoir $\underline{\mathfrak{s}}(2) = (0, 2, 1)$ par exemple).

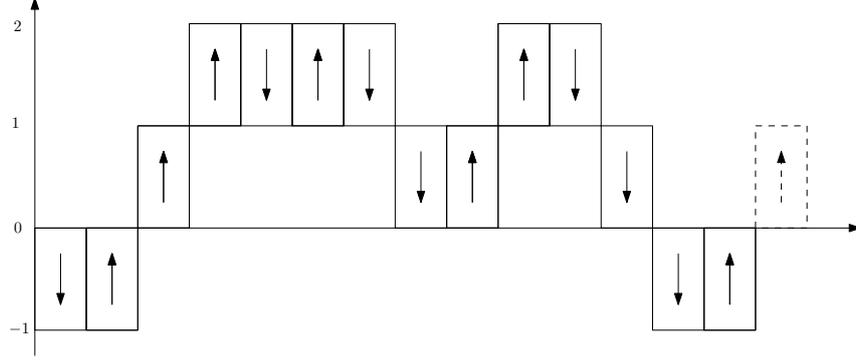


FIGURE 25 – Troisième étape : les pas de -1 à 0

REMARQUE 4.7. Tóth montre en fait dans le résultat suivant, impliquant que presque sûrement, la suite $(\mathfrak{S}(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ est presque nulle pour la BTSAW :

THÉORÈME 4.8. *Presque sûrement, la BTSAW visite chaque point une infinité de fois.*

Grâce à ce point de vue, nous allons prouver le caractère markovien du processus des temps locaux pour la BTSAW. On remarque à ce propos que :

$$\forall k \quad \mathfrak{S}(k) = \Phi_m(k).$$

Cette nouvelle vision des trajectoires permet déjà d'évaluer la probabilité que la BTSAW les réalise. Écrivons en effet

$$\mathbb{P} \left(\underline{X}_0^{T_m} = \underline{x}_0^i \right) = \prod_{j=0}^{i-1} q_j(\underline{x}_0^{j+1})$$

où, conformément à la définition des lois de transition de la marche :

$$q_j(\underline{x}_0^{j+1}) = \begin{cases} \frac{\lambda^{w(x_j | \underline{x}_0^j)}}{\lambda^{w(x_j | \underline{x}_0^j)} + \lambda^{w(x_{j-1} | \underline{x}_0^j)}} & \text{si } x_{j+1} = x_j + 1, \\ \frac{\lambda^{w(x_{j-1} | \underline{x}_0^j)}}{\lambda^{w(x_j | \underline{x}_0^j)} + \lambda^{w(x_{j-1} | \underline{x}_0^j)}} & \text{si } x_{j+1} = x_j - 1. \end{cases}$$

Grâce à la correspondance exhibée ci-dessus, on peut réécrire ce produit dans l'ordre des arêtes (et non dans l'ordre chronologique). Il vient :

$$\mathbb{P} \left(\underline{X}_0^{T_m} = \underline{x}_0^i \right) = \prod_{k>0} \left\{ \prod_{r=1}^{\mathfrak{S}(k-1)} \psi_{k,r} \right\} \times \left\{ \prod_{r=0}^m \psi_{-1,r} \right\} \times \prod_{k \leq -2} \left\{ \prod_{r=0}^{\mathfrak{S}(k+1)-1} \psi_{k,r} \right\},$$

où, si $k > 0$, $\psi_{k,r}$ désigne la probabilité d'effectuer $\mathfrak{s}_r(k)$ pas de k à $k+1$ entre les $r^{\text{ème}}$ et $(r+1)^{\text{ème}}$ pas de $k-1$ à k (facteur entre crochets dans la formule qui suit), et de finalement faire un pas de k à $k-1$ (dernier facteur). La définition du processus de franchissement impose qu'avant cette série de pas, on en a déjà effectué $2 \sum_{l=1}^{r-1} \mathfrak{s}_l(k)$ sur l'arête $[k, k+1]$ et que le temps passé sur l'arête $[k-1, k]$ reste constamment égal à $2r-1$ pendant cette période. Autrement dit :

$$\psi_{k,r} = \left[\prod_{j=0}^{\mathfrak{s}_r(k)-1} \frac{\lambda^{2 \sum_{l=1}^{r-1} \mathfrak{s}_l(k) + 2j}}{\lambda^{2 \sum_{l=1}^{r-1} \mathfrak{s}_l(k) + 2j} + \lambda^{2r-1}} \right] \frac{\lambda^{2r-1}}{\lambda^{2 \sum_{l=1}^r \mathfrak{s}_l(k)} + \lambda^{2r-1}}.$$

De la même manière pour $k < 0$ (-1 ou ≤ -2),

$$\psi_{k,r} = \left[\prod_{j=0}^{\mathfrak{s}_r(k)-1} \frac{\lambda^{2 \sum_{l=1}^{r-1} \mathfrak{s}_l(k)+2j}}{\lambda^{2 \sum_{l=1}^{r-1} \mathfrak{s}_l(k)+2j} + \lambda^{2r}} \right] \frac{\lambda^{2r}}{\lambda^{2 \sum_{l=1}^r \mathfrak{s}_l(k)} + \lambda^{2r}}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\underline{X}_0^{T_m} = \underline{x}_0^i \right) &= \prod_{k>0} \left\{ \prod_{r=1}^{\mathfrak{S}(k-1)} \left[\prod_{j=0}^{\mathfrak{s}_r(k)-1} \frac{\lambda^{2 \sum_{l=1}^{r-1} \mathfrak{s}_l(k)+2j}}{\lambda^{2 \sum_{l=1}^{r-1} \mathfrak{s}_l(k)+2j} + \lambda^{2r-1}} \right] \frac{\lambda^{2r-1}}{\lambda^{2 \sum_{l=1}^r \mathfrak{s}_l(k)} + \lambda^{2r-1}} \right\} \\ &\times \left\{ \prod_{r=0}^m \left[\prod_{j=0}^{\mathfrak{s}_r(-1)-1} \frac{\lambda^{2 \sum_{l=1}^{r-1} \mathfrak{s}_l(-1)+2j}}{\lambda^{2 \sum_{l=1}^{r-1} \mathfrak{s}_l(-1)+2j} + \lambda^{2r}} \right] \frac{\lambda^{2r}}{\lambda^{2 \sum_{l=1}^r \mathfrak{s}_l(-1)} + \lambda^{2r}} \right\} \\ &\times \prod_{k \leq -2} \left\{ \prod_{r=0}^{\mathfrak{S}(k+1)-1} \left[\prod_{j=0}^{\mathfrak{s}_r(k)-1} \frac{\lambda^{2 \sum_{l=1}^{r-1} \mathfrak{s}_l(k)+2j}}{\lambda^{2 \sum_{l=1}^{r-1} \mathfrak{s}_l(k)+2j} + \lambda^{2r}} \right] \frac{\lambda^{2r}}{\lambda^{2 \sum_{l=1}^r \mathfrak{s}_l(k)} + \lambda^{2r}} \right\}. \end{aligned}$$

Soit $(\phi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ presque nulle. En sommant sur toutes les possibilités, il vient alors,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\mathfrak{S}(0) = m, \mathfrak{S}(1) = \phi_1, \dots, \mathfrak{S}(-1) = \phi_{-1}, \dots) \\ &= \sum_{\substack{\mathfrak{s}_1(1), \dots, \mathfrak{s}_m(1) \\ \text{de somme } \phi_1}} \sum_{\substack{\mathfrak{s}_1(2), \dots, \mathfrak{s}_{\phi_1}(2) \\ \text{de somme } \phi_2}} \dots \\ &\sum_{\substack{\mathfrak{s}_0(-1), \dots, \mathfrak{s}_m(-1) \\ \text{de somme } \phi_{-1}}} \sum_{\substack{\mathfrak{s}_0(-2), \dots, \mathfrak{s}_{\phi_{-1}}(-2) \\ \text{de somme } \phi_{-2}}} \dots \mathbb{P} \left(\underline{X}_0^{T_m} = \underline{x}(\underline{\mathfrak{s}}) \right), \end{aligned}$$

où $\underline{x}(\underline{\mathfrak{s}})$ est la trajectoire correspondant au processus de franchissement $\underline{\mathfrak{s}}$. Grâce au calcul fait de cette dernière probabilité, on obtient un résultat de la forme :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\Phi_m(0) = m, \Phi_m(1) = \phi_1, \dots, \Phi_m(-1) = \phi_{-1}, \dots) \\ &= \prod_{k>0} P_+(\phi_{k-1}, \phi_k) \times P^*(m, \phi_{-1}) \times \prod_{k \leq -2} P_-(\phi_{k+1}, \phi_k), \end{aligned}$$

pour des certaines applications P^* , P_- et P_+ (explicitées dans la proposition suivante). Il résulte de cette écriture le caractère markovien :

PROPOSITION 4.9. $(\Phi_m(k))_{k \geq 0}$ et $(\Phi_m(k))_{k \leq 0}$ sont des chaînes de Markov, respectivement homogène et non homogène, indépendantes, partant de m , et de lois de transition respectives : Si $k \geq 0$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\Phi_m(k+1) = \beta | \Phi_m(k) = \alpha) \\ &= \sum_{\mathfrak{s}_1, \dots, \mathfrak{s}_\alpha : \sum \mathfrak{s}_i = \beta} \prod_{r=1}^{\alpha} \left[\prod_{j=0}^{\mathfrak{s}_r-1} \frac{\lambda^{2 \sum_{l=1}^{r-1} \mathfrak{s}_l+2j}}{\lambda^{2 \sum_{l=1}^{r-1} \mathfrak{s}_l+2j} + \lambda^{2r-1}} \right] \frac{\lambda^{2r-1}}{\lambda^{2 \sum_{l=1}^r \mathfrak{s}_l} + \lambda^{2r-1}}. \end{aligned}$$

Pour $k = -1$:

$$\mathbb{P}(\Phi_m(-1) = \beta | \Phi_m(0) = m) = \sum_{\mathfrak{s}_0, \dots, \mathfrak{s}_m : \sum \mathfrak{s}_i = \beta} \prod_{r=0}^m \left[\prod_{j=0}^{\mathfrak{s}_r-1} \frac{\lambda^{2 \sum_{l=1}^{r-1} \mathfrak{s}_l+2j}}{\lambda^{2 \sum_{l=1}^{r-1} \mathfrak{s}_l+2j} + \lambda^{2r}} \right] \frac{\lambda^{2r}}{\lambda^{2 \sum_{l=1}^r \mathfrak{s}_l} + \lambda^{2r}}.$$

Si $k \leq -2$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\Phi_m(k-1) = \beta | \Phi_m(k) = \alpha) \\ &= \sum_{\mathfrak{s}_0, \dots, \mathfrak{s}_{\alpha-1} : \sum \mathfrak{s}_i = \beta} \prod_{r=0}^{\alpha-1} \left[\prod_{j=0}^{\mathfrak{s}_r-1} \frac{\lambda^{2 \sum_{i=1}^{r-1} \mathfrak{s}_i + 2j}}{\lambda^{2 \sum_{i=1}^{r-1} \mathfrak{s}_i + 2j} + \lambda^{2r}} \right] \frac{\lambda^{2r}}{\lambda^{2 \sum_{i=1}^r \mathfrak{s}_i} + \lambda^{2r}}. \end{aligned}$$

REMARQUE 4.10. Le calcul ci-dessus n'utilise pas essentiellement l'expression exacte des lois de transition de la BTSAW. En particulier, cette même démarche s'applique à toute marche locale; ce qui fournit une preuve au théorème 4.4.

REMARQUE 4.11. On a traité ici le cas où l'on se réfère au nombre de pas de 0 à 1. Comme pour la marche aléatoire simple, on peut l'étendre à la manière de la proposition 3.7, au cas où l'on se réfère au nombre de pas de b à $b+1$, pour un certain $b \in \mathbb{Z}$. La correspondance avec le processus de franchissement ne pose pas de problème, seule la complexité des expressions dans les calculs qui suivent s'en ressent. On pourra se reporter à [Tó95] pour le cas général. En revanche des résultats sur les lois conjointes de temps locaux suivant différentes références ne sont pas aussi simples que pour le Toy-Model.

Concernant la suite de l'article [Tó95] : Tóth analyse ensuite la structure de la chaîne de Markov ainsi trouvée. Elle est beaucoup plus complexe qu'un processus de branchement comme pour la marche aléatoire simple. Il parvient toutefois à comprendre son comportement et en déduit un analogue du théorème 2.1 du Toy-Model (admis ici) :

THÉORÈME 4.12. *Si \mathcal{U} est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1 indépendante de la BTSAW (X_n) , alors $n^{-2/3} X_{\lfloor n\mathcal{U} \rfloor}$ converge en loi, vers un objet bien défini.*

Références

- [APP83] D. Amit, G. Parisi, and L. Peliti. Asymptotic behavior of the "true" self-avoiding walk. *Phys. Review*, (B 27) :1635–1645, 1983.
- [Dum12] Laure Dumaz. A clever (self-repelling) burglar. *Electronic Journal Of Probability*, (17) :1–17, 2012.
- [Fel58] William Feller. *An introduction to probability theory and its applications*, volume 1. New York : John Wiley and Sons London : Chapman and Hall cop. 1957, 3rd edition, 1958.
- [Kni63] F. B. Knight. Random walks and a sojourn density process of brownian motion. *Transactions of the American Mathematical Society*, 109(1) :56–86, Oct. 1963.
- [NR06] C.M. Neman and K. Ravishankar. Convergence of the Tóth lattice filling curve to the Tóth-Werner plane filling curve. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, (1) :333–345, 2006.
- [Ray63] D. Ray. Sojourn times of a diffusion process III. *J. Math*, pages 615–630, 1963.
- [T695] Bálint Tóth. The "true" self-avoiding walk with bond repulsions on \mathbb{Z} : limit theorems. *The Annals Of Probability*, 23(4) :1523–1556, 1995.
- [TW98] Bálint Tóth and Wendelin Werner. The true self-repelling motion. *Probability Theory and Related Fields*, (111) :375–462, 1998.