

# Présentation de l'algorithme de Fast Marching Anisotrope pour la résolution numérique de l'équation eikonale

François Desquilbet

Introduction au domaine de recherche  
Encadré par Jean-Marie Mirebeau \*

5 octobre 2018

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Méthodes de calcul du plus court chemin</b>	<b>2</b>
2.1	Etat de l'art . . . . .	2
2.2	Algorithme de Fast Marching . . . . .	3
2.3	Equation du plus court chemin . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Fast Marching Anisotrope</b>	<b>4</b>
3.1	Schéma semi-lagrangien . . . . .	5
3.2	Schéma eulérien . . . . .	5
3.3	Pénalisation de la courbure . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Application à la configuration d'un réseau de radars à partir des trajectoires menaçantes</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>9</b>

---

\*Université Paris-Sud, CNRS, Université Paris-Saclay

# 1 Introduction

Dans cette introduction au domaine de recherche, je vais expliquer le principe de l'algorithme de Fast Marching Anisotrope, abrégé en FMA par la suite. Il permet de résoudre numériquement l'équation eikonale, c'est-à-dire de calculer le plus court chemin d'une zone à une autre dans un domaine (continu) muni d'une métrique. L'implémentation a été effectuée en C++ par Jean-Marie Mirebeau et est en accès libre sur sa page github [10], avec une interface Python disponible ainsi que des Jupyter notebooks explicatifs pour le fonctionnement du code.

Je présenterai ensuite une application de cet algorithme à un problème industriel (la configuration d'un réseau de radars) que j'ai traité lors de mon stage de M2 au centre de recherche de l'entreprise Thales à Palaiseau.

## 2 Méthodes de calcul du plus court chemin

### 2.1 Etat de l'art

L'algorithme FMA est une variante de l'algorithme du Fast Marching, qui peut lui-même se voir comme une généralisation de l'algorithme de Dijkstra.

L'algorithme de Dijkstra [4] a été publié en 1959 par E. Dijkstra. Il permet de calculer des plus courts chemins à partir d'une source dans un graphe discret orienté, pondéré par des réels positifs. Pour un graphe de  $n$  sommets et  $a$  arêtes, la complexité de l'algorithme de Dijkstra est en  $O((n+a)\log(n))$  : le calcul peut être effectué en une passe dans le graphe en utilisant un front de propagation depuis le point source.

L'algorithme du Fast Marching [11] a été développé par J. Sethian dans les années 1980. L'algorithme est similaire à celui de Dijkstra et utilise le fait que l'information se propage depuis le point source. L'algorithme du Fast Marching peut aussi être vu comme un cas particulier de la méthode des surfaces de niveau (level-set method), développée en 1988 par S. Osher et J. Sethian.

Parmi les méthodes de calcul de plus courts chemins, on peut mettre en avant une distinction entre schémas causaux et non-causaux. La causalité traduit la préservation au sein du problème discret du caractère déterministe du problème de contrôle optimal sous-jacent. Elle équivaut, dans le cadre des problèmes posés sur des graphes, à la positivité des longueurs des arêtes, qui permet l'extraction rapide de chemins minimaux par l'algorithme de Dijkstra. Les schémas numériques causaux sont résolus par l'algorithme du Fast Marching qui généralise Dijkstra.

Pour la recherche de plus court chemin dans un domaine, des algorithmes plus généraux (non causaux) peuvent aussi être utilisés tels que l'algorithme de Bellman-Ford [4] développé dans les années 1950, qui peut autoriser la présence d'arêtes de poids négatifs contrairement à l'algorithme de Dijkstra, mais qui en contrepartie est de complexité plus élevée.

La généralisation de l’algorithme du Fast Marching qu’on considère ici, l’algorithme FMA développé par Jean-Marie Mirebeau, est particulièrement intéressante dans le cas de problèmes fortement anisotropes, qui présentent des directions privilégiées non-uniformes sur le domaine de résolution et non alignées avec les axes de coordonnées. L’algorithme FMA reste efficace pour des métriques anisotropes, contrairement aux algorithmes classiques pour lesquelles la complexité augmente fortement avec l’anisotropie. De plus, il est possible d’utiliser des métriques singulières qui permettent une pénalisation de la courbure de la trajectoire.

## 2.2 Algorithme de Fast Marching

On écrit l’algorithme de Fast-Marching dans sa forme la plus générale. On cherche à résoudre le problème de point fixe :

$$\Lambda U = U$$

où  $U : X \rightarrow \mathbb{R}$  est l’inconnue,  $X$  est une discrétisation de l’espace  $\Omega$ , et  $\Lambda : \mathbb{R}^X \rightarrow \mathbb{R}^X$  est un opérateur (défini en fonction de l’équation qu’on cherche à résoudre). On note aussi  $\partial X \subset X$  une discrétisation du bord du domaine  $\partial\Omega$ .

Pour l’algorithme du Fast Marching, il faut aussi définir un « stencil »  $V(p)$  pour chaque point  $p \in X$ , qui représente l’ensemble des points de son voisinage utilisés dans le schéma numérique de l’équation discrétisée.

On attribue alors un marquage *Lointain*, *Front* ou *Accepté* : chaque point du domaine est marqué comme *Accepté* seulement une fois, après quoi la valeur de la solution calculée  $U$  ne change plus. Les points marqués comme *Lointain* peuvent être vus comme un front de propagation. Il est aussi possible d’effectuer des pré-traitements et post-traitements lors de la visite des points qui peuvent améliorer la performance de l’algorithme, et le critère d’arrêt peut aussi être modifié.

---

### Algorithme 1 Fast Marching

---

**Entrée:**  $X, \partial X, \Lambda, V$

Marquer  $\partial X$  comme *Front*, et les autres points comme *Lointain*.

Initialiser  $U$  à la valeur  $+\infty$  sur  $X$ , et aux conditions au bord sur  $\partial X$ .

**tant que** il existe des points du *Front* **faire**

Trouver un point  $q$  du *Front* qui minimise  $U$ .

Marquer  $q$  comme *Accepté*.

**pour tout** voisin  $p \in V(q)$  qui soit du *Front* ou *Lointain* **faire**

Si  $p$  est *Lointain*, marquer  $p$  comme *Front*.

Changer  $U(p)$  en  $\Lambda U(p)$  (en prenant en compte la valeur  $U(q)$  du dernier point *Accepté*).

**fin pour**

**fin tant que**

retourner  $U$

---

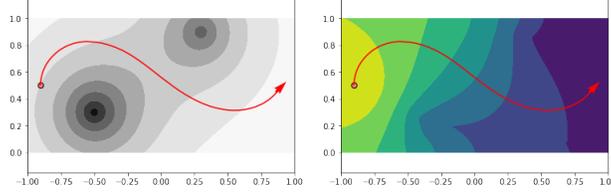


FIGURE 1 – (gauche) Trajectoire optimale au sein d’une métrique euclidienne, (droite) Front de propagation correspondant

### 2.3 Equation du plus court chemin

On définit tout d’abord la notion de métrique qu’on utilise ici.

**Definition 2.1** Soit  $\mathbb{E}$  un espace vectoriel de dimension finie et  $\Omega \subseteq \mathbb{E}$  ouvert. Une gauge est une application 1-homogène, convexe et semi-continue inférieurement  $F : \mathbb{E} \rightarrow [0, \infty]$  qui s’annule à l’origine seulement. La boule unité pour la gauge est le compact convexe  $B := \{\dot{p} \in \mathbb{E} ; F(\dot{p}) \leq 1\}$ .

Une métrique sur  $\Omega$  est une application  $\mathcal{F} : \bar{\Omega} \times \mathbb{E} \rightarrow [0, \infty]$  telle que  $\mathcal{F}_p$  est une gauge pour tout  $p \in \bar{\Omega}$ , et les boules unités dépendent continûment de  $p$  pour la distance de Hausdorff.

Dans le cadre qui nous intéresse, on souhaite trouver la longueur minimale  $u(p)$  des chemins allant du bord  $\partial\Omega$  d’un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  à un point  $p \in \Omega$  donné :

$$u(p) = \inf\{\text{length}_{\mathcal{F}}(\gamma) ; \gamma : [0, 1] \rightarrow \bar{\Omega}, \gamma(0) \in \partial\Omega, \gamma(1) = p\}$$

Le chemin  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \bar{\Omega}$  est supposé localement Lipschitzien, et sa longueur  $\text{length}_{\mathcal{F}}(\gamma)$  est mesurée via une métrique  $\mathcal{F}$  :

$$\text{length}_{\mathcal{F}}(\gamma) = \int_0^1 \mathcal{F}_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) dt$$

Une fois que le calcul de  $u$  a été effectué, il est possible de retrouver les trajectoires minimales en résolvant l’équation différentielle ordinaire :

$$\dot{\gamma}(t) = d\mathcal{F}_{\gamma(t)}^*(du(\gamma(t)))$$

## 3 Fast Marching Anisotrope

On souhaite définir l’opérateur  $\Lambda$  et les stencils  $V$  qui correspondent à l’équation du plus court chemin, afin d’effectuer sa résolution numérique par l’algorithme du Fast Marching. Dans le cadre d’une métrique anisotrope, je présente

pour cela deux méthodes : la méthode semi-lagrangienne et la méthode eulérienne. L'algorithme correspondant à l'une de ces méthodes est ici appelé : Fast Marching Anisotrope (FMA).

Ces méthodes ont différents avantages et pourront être utilisées l'une ou l'autre selon le contexte. De plus, les métriques qu'il est actuellement possible de traiter avec l'algorithme FMA ne sont pas les mêmes pour ces deux méthodes.

### 3.1 Schéma semi-lagrangien

Les méthodes semi-lagrangiennes de calcul des temps d'arrivée sont fondées sur une propriété de consistance interne de la fonction valeur  $u$ , appelée principe d'optimalité de Bellman. Elle exprime qu'un chemin minimal de  $\partial\Omega$  à  $p \in \Omega$  peut se décomposer en la concaténation de deux chemins minimaux, de  $\partial\Omega$  à un certain  $q \in V(p)$  et de  $q$  à  $p$  respectivement, où  $V(p) \subseteq \Omega$  est un voisinage arbitraire de  $p$ . Ainsi, en notant  $d_{\mathcal{F}}$  la quasi-distance (i.e. : possiblement asymétrique) associée à  $\mathcal{F}$ ,

$$u(p) = \inf_{q \in V(p)} d_{\mathcal{F}}(q, p) + u(q)$$

Les schémas numériques semi-lagrangiens miment, dans le domaine discret, cette propriété. Soient  $X$  et  $\partial X$  des parties discrètes approchant  $\Omega$  et  $\partial\Omega$ , et pour tout  $p \in \Omega$  soit  $V(p)$  un polytope contenant  $p$  et dont les sommets appartiennent à  $X$ . On cherche  $U : X \rightarrow [0, \infty]$  tel que pour tout  $p \in X \setminus \partial X$  :

$$U(p) = \inf_{q \in \partial V(p)} \mathcal{F}_p(p - q) + I_{V(p)}U(q) := \Lambda U(p),$$

et  $U(p) = 0$  pour tout  $p \in \partial X$ . La distance  $d_{\mathcal{F}}$  est approchée à l'aide de la métrique locale  $\mathcal{F}_p(p - q)$ , et les valeurs de  $U$  aux points  $q \in V(p)$  qui ne sont pas des sommets sont approchées par l'interpolation linéaire  $I_{V(p)}U(q)$ .

Il existe une propriété géométrique dite d'angle aigu, portant sur les couples  $(V(p), \mathcal{F}_p)_{p \in X}$  de stencil et métrique locale, qui implique la propriété de causalité du système obtenu. Il faut construire des stencils respectant cette propriété d'angle aigu, donc définissant des schémas numériques causaux. Dans le cas des grilles cartésiennes, cette construction est possible à l'aide de l'arbre de Stern-Brocot pour des métriques finsleriennes bidimensionnelles, ou de germes de triangulation de Delaunay pour des métriques riemaniennes, voir [8].

### 3.2 Schéma eulérien

On peut définir  $\Lambda$  et  $V$  d'une autre manière pour résoudre l'équation du plus court chemin, avec la formulation eulérienne.

La fonction  $u$  de temps de plus court trajet est en fait solution de l'équation eikonale (équation du trajet de la lumière dans un milieu). Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles de type Hamilton-Jacobi-Bellman, statique et du premier ordre, qui caractérise les solutions de problèmes de contrôle optimal déterministes. Le passage de l'écriture « plus court chemin » à l'équation eikonale est présenté dans [2].

L'équation eikonale est une EDP satisfaite par la fonction temps d'arrivée  $u : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ , au sens des solutions de viscosité. Elle s'écrit :

$$\mathcal{F}_p^*(du(p)) = 1$$

où  $\mathcal{F}_p^*(\hat{p}) = \sup\{\langle \hat{p}, \dot{p} \rangle, \mathcal{F}(\dot{p}) \leq 1\}$  pour tout  $p \in \Omega$ , avec la condition au bord  $u(p) = 0$  pour tout  $p \in \partial\Omega$  (domaine de départ).

Cette équation eikonale peut être discrétisée directement, permettant de nouveau le calcul des temps d'arrivée. Cette discrétisation prend la forme :

$$\mathfrak{F}_p(U(p), (U(p) - U(q))_{q \in X}) = 1$$

pour tout  $p \in X$ , avec la condition au bord  $U = 0$  sur  $\partial X$ . De nouveau  $X$  et  $\partial X$  sont des ensembles discrets dédiés à l'approximation du domaine  $\Omega$  et de son bord  $\partial\Omega$ . La résolution stable du système est possible si  $\mathfrak{F}_p : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^X \rightarrow \mathbb{R}$  est croissante en chacune de ses variables. Si de plus  $\mathfrak{F}_p$  dépend seulement des parties positives des différences  $(U(p) - U(q))_{q \in X}$ , alors la résolution peut être effectuée en une seule passe par l'algorithme du Fast-Marching.

En effet, pour cela, on peut définir un opérateur  $\Lambda$  à partir de  $\mathfrak{F}$ , qui vérifiera la propriété de causalité pour la résolution selon l'algorithme du Fast-Marching :

$$\Lambda U(x) := \sup\{V(x) ; V \in \mathbb{R}^X, \mathfrak{F}V(x) \leq 0, V \leq U \text{ sur } X \setminus \{x\}\}$$

où  $\mathfrak{F}V(x) := \mathfrak{F}_x(V(p), (V(p) - V(q))_{q \in X})$

Il faut cependant obtenir une formulation avec  $\mathfrak{F}$  qui possède les propriétés voulues. C'est notamment possible si on peut écrire la métrique  $\mathcal{F}$  sous la forme :

$$\mathcal{F}_p^*(\hat{p}) = \sqrt{\max_{i \in I} \sum_{j \in J} \rho_{ij}(p) \langle \hat{p}, \dot{e}_{ij}(p) \rangle_+^2}$$

où  $a_+ := \max(a, 0)$ ,  $I$  et  $J$  sont des ensembles finis,  $\rho_{ij}(p) \geq 0$  et  $\dot{e}_{ij}(p) \in \mathbb{Z}^d$  dépendent de la structure de la métrique. Le schéma numérique résultant vérifiera alors les bonnes propriétés pour être résolu par l'algorithme de Fast Marching.

Pour des métriques riemanniennes, on obtient cette décomposition grâce à la première réduction de Voronoi. D'autres métriques ont aussi pu être traitées, voir [8].

### 3.3 Pénalisation de la courbure

Les métriques qui vont nous intéresser sont en particulier anisotropes (i.e. dépendent de l'orientation). De plus, une expression particulière de la métrique permet de calculer des trajectoires dont la courbure est pénalisée.

Redéfinissons ainsi le coût d'une trajectoire  $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , paramétrée à vitesse euclidienne unité :

$$\int_0^T C(x(t), \dot{x}(t)) G(\alpha |\ddot{x}(t)|) dt$$

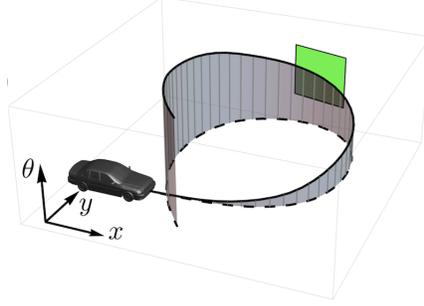


FIGURE 2 – Virage d’une voiture selon le modèle de Dubins, dans un espace 3D  $(x,y,\theta)$

où  $C : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow ]0, +\infty[$  est le coût relatif à la position et à l’orientation,  $\alpha > 0$  est homogène à un rayon de courbure (et peut dépendre de la position et de l’orientation), et  $G$  est la pénalisation de la courbure.

Pour cela, le problème est vu dans l’espace des configurations  $\mathbb{M} := \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$  des positions et des orientations, où  $\mathbb{S}^1 := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$  : la dérivée pourra alors contenir des informations sur la courbure. Une métrique est ensuite introduite sur cet ensemble, faite pour pénaliser les changements de direction, et qui interdit les mouvements physiques qui ne sont pas positivement colinéaires à l’orientation actuelle. Cette métrique est non-holonome : il n’est pas possible de se déplacer avec un coût fini dans toutes les directions de l’espace tangent. Pour un point  $p = (x, \theta) \in \mathbb{M}$  et un vecteur tangent  $\dot{p} = (\dot{x}, \dot{\theta}) \in T_{(x,\theta)}\mathbb{M}$  avec  $|\dot{x}| = 1$ , on définit :

$$\mathcal{F}_p(\dot{p}) = \begin{cases} C(x, \theta)G(\alpha|\dot{\theta}|) \text{ si } \dot{x} = n(\theta), \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$$

où  $n(\theta) := (\cos(\theta), \sin(\theta))$

La métrique est ensuite étendue par 1-homogénéité à des vitesses  $(\dot{x}, \dot{\theta})$  dont la composante physique n’est pas unité :  $|\dot{x}| \neq 1$ . La gauge correspondante est convexe si la fonction  $G$  est croissant et convexe, voir [9].

Dans l’algorithme FMA, on peut prendre en compte une pénalisation de la courbure parmi un des trois modèles suivants :

- Le modèle de Reeds-Shepp (avec ou sans marche arrière), qui représente les mouvements d’une chaise roulante qui peut tourner sur place :  $G^{RS}(\kappa) := \sqrt{1 + \kappa^2}$
- Le modèle d’Euler-Mumford elastica, qui décrit la position au repos d’une barre élastique :  $G^{EM}(\kappa) := 1 + \kappa^2$
- Le modèle de Dubins, pour lequel le rayon de courbure de la trajectoire est borné :  $G^D(\kappa) := \begin{cases} 1 \text{ si } \kappa \leq 1, \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$

Ces différentes pénalisations de courbure (et quelques autres combinaisons)

peuvent être traités dans le cadre du schéma eulérien, car il a été possible de décomposer la métrique résultante d’une façon qui peut être traitée par le schéma.

On a ainsi un modèle qui prend en compte une pénalisation de la courbure parmi en choix de plusieurs pénalisations disponibles, grâce à cette méthode de changement d’espace des configurations. La résolution numérique effective des équations n’est cependant pas réalisable pour tous les types de pénalisation de courbure.

## 4 Application à la configuration d’un réseau de radars à partir des trajectoires menaçantes

On considère un ensemble de plusieurs radars militaires dont on peut choisir la configuration, par le réglage de paramètres internes et du positionnement des radars. L’objectif est de configurer ce réseau de radars de manière optimale, pour détecter au mieux les menaces (avions, missiles, drones...).

Pour cela, de même que dans [5], on considère un jeu à deux joueurs, où le premier joueur (le défenseur) installe le réseau de radars, et où le deuxième joueur (l’attaquant) cherche à pénétrer dans la zone protégée sans se faire détecter. Le problème retenu pour le défenseur est de maximiser la probabilité de détection de la trajectoire optimale que peut prendre l’attaquant.

Jusqu’à présent, comme dans [1], les probabilité de détection locale causées par les radars ne pouvaient pas dépendre de l’orientation, car les temps de calcul devenaient alors trop importants pour les applications souhaitées. Mais avec l’algorithme FMA, il devient possible de traiter ce problème en prenant pleinement en compte l’anisotropie causée par le réseau de radars.

La métrique définie par la probabilité de détection locale peut en effet être fortement anisotrope, car un radar détecte uniquement la vitesse radiale de la cible par effet Doppler. De plus, le profil d’une cible pour un radar, appelé profil SER (surface équivalent radar), dépend aussi fortement de l’orientation.

Les trajectoires optimales sont ainsi calculées en utilisant l’algorithme FMA, qui peut gérer des probabilités de détection locale qui dépendent de la position et de l’orientation de la trajectoire de l’attaquant. L’algorithme FMA prend aussi en compte des pénalisations de courbure pour modéliser la manoeuvrabilité, ce qui permet un modèle réaliste.

A partir du calcul des trajectoires menaçantes, on détermine ensuite une configuration optimale du réseau de radars avec un algorithme d’optimisation, pour maximiser la probabilité de détection de la pire trajectoire. Le problème d’optimisation est difficile (non convexe, non différentiable, multi-modal), ce qui nécessite un travail pour le choix de l’algorithme d’optimisation. En pratique, l’algorithme CMA-ES donne de bons résultats.

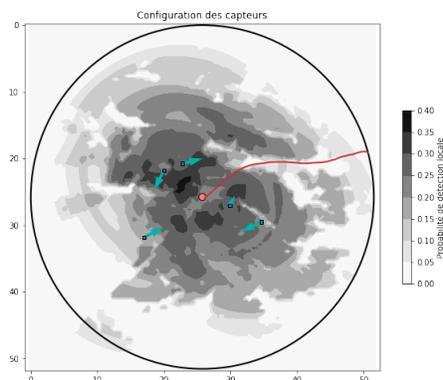


FIGURE 3 – Trajectoire minimale (rouge) au sein d’un réseau de 5 radars

## 5 Conclusion et perspectives

On a vu comment calculer la fonction  $u$  de temps d’arrivée sur le domaine. On en déduit ensuite les trajectoires minimales en résolvant une équation différentielle ordinaire (en un coût de calcul en pratique bien moindre que celui nécessaire au calcul de  $u$ ). À partir d’un unique calcul de  $u$ , on peut donc obtenir l’ensemble des trajectoires qui partent de différents points du bord du domaine et en direction d’un objectif.

L’algorithme FMA permet ainsi le calcul des plus courts chemins pour une métrique anisotrope qui peut aussi permettre une pénalisation selon la courbure. Les calculs sont effectués de manière très rapide en une passe grâce à l’algorithme du Fast Marching.

Cet algorithme a été utilisé dans le cadre d’un partenariat avec l’entreprise Thales, sur le sujet de la configuration d’un réseau de radars contre les trajectoires menaçantes.

D’autres applications sont aussi envisageables. Un domaine où des métriques anisotropes sont utilisées est en sismologie, pour la recherche de la forme des sous-sols [6] : on effectue une détonation en surface et on écoute ensuite le temps de retour de l’onde émise, qui s’est réfléchié dans le sous-sol. À l’aide de ce temps de parcours et de l’équation de parcours de l’onde, on peut deviner la forme du sous-sol. Cependant, à cause des cisaillements du sol, la métrique induite est fortement anisotrope, ce pourquoi l’algorithme FMA est bien adapté au problème. Il s’agit d’un sujet sur lequel je travaillerai par la suite.

Enfin, il y a diverses perspectives de recherche théorique pour améliorer l’algorithme. Il serait notamment intéressant de retirer la contrainte d’une grille cartésienne dans le cadre du schéma semi-lagrangien, et d’utiliser une grille composée de points aléatoirement choisis dans le domaine. On conjecture en effet que la gestion de l’anisotropie serait alors améliorée : dans le cadre d’une

grille cartésienne, si la direction principale de l'anisotropie est presque alignée avec la grille, alors les stencils utilisés dans les schémas numériques auront une grande taille, et ce phénomène de pire cas pourrait être évité en utilisant une grille aléatoire.

Une prise en compte de nouveaux modèles de pénalisation de la courbure est aussi à travailler, ainsi qu'une extension des métriques qu'il est possible de traiter, par le schéma semi-lagrangien ou eulérien.

## Références

- [1] F. Barbaresco. *Computation of most threatening radar trajectories areas and corridors based on fast-marching and Level Sets*. In IEEE Symposium On Computational Intelligence For Security And Defence Applications, pages 51-58. IEEE, 2011.
- [2] M. Bardi, I. Capuzzo-Dolcetta. *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [3] R. Cariou. *Le traitement du signal radar : détection et interprétation de l'écho radar*. Paris : Dunod, DL 2012.
- [4] E. Dijkstra. *A short introduction to the art of programming*, 1971. (article original de 1959 décrivant l'algorithme de Dijkstra : pages 67 à 73)
- [5] J. Dreo, J-M. Mirebeau. *Automatic differentiation of non-holomic fast marching for computing most threatening trajectories under sensors surveillance*. In : Nielsen, F., Barbaresco, F. (eds.) Proceedings of Third International Conference on Geometric Science of Information (GSI). Paris, 2017.
- [6] P Le Bouteiller, M Benjemaa, L Métivier, J Virieux. *An accurate discontinuous Galerkin method for solving point-source Eikonal equation in 2-D heterogeneous anisotropic media*, Geophysical Journal International, Volume 212, Issue 3, Pages 1498-1522, 2018.
- [7] J-M. Mirebeau, Jorg Portegies. *Hamiltonian Fast Marching : A numerical solver for anisotropic and non-holonomic eikonal PDEs*. 2018.
- [8] J-M. Mirebeau. *Numerical schemes for anisotropic pdes on cartesian domains*. Diplôme d'habilitation à diriger les recherches de l'Université Paris-Sud, 2018.
- [9] J-M. Mirebeau. *Fast-marching methods for curvature penalized shortest paths*. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2018.
- [10] J-M. Mirebeau. Github Repository, <https://github.com/Mirebeau>
- [11] J.A. Sethian. *A Fast Marching Level Set Method for Monotonically Advancing Fronts*, Proc. Natl. Acad. Sci., 93, 4, pp.1591-1595, 1996.