Théorème des nombres premiers: la preuve de Daboussi

Gerard Freixas i Montplet
Élève à: ENS ULM, Universitat de Barcelona

26 juin 2002

Sujet proposé par Régis de la Bretèche

Introduction

Une des questions les plus profondément étudiées en arithmétique est la répartition des nombres premiers. À la fin du dix-huitième siècle, Gauss et Legendre ont conjecturé que le nombre de premiers plus petits ou égaux à un réel donné $x \geq 2$ est, plus ou moins, $x/\log x$. Ils ont remarqué ce fait à partir de tables faites à la main. Hadamard et De La Vallée-Poussin ont prouvé ce résultat en 1886 :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1$$

où $\pi(x)$ est le nombre de premiers plus petits ou égaux à x. Sa preuve utilise la fonction zêta de Riemann et des techniques de l'analyse complexe. On connait ce théorème comme le "Théorème des nombres premiers". Les résultats établissant des liens entre les propriétés des zéros de la fonction zêta de Riemann et les propriétés des nombres premiers, ont conduit à l'idée que l'analyse complexe était le cadre naturel du théorème des nombres premiers. Pourtant, en 1949, Erdős et Selberg ont donné une preuve de ce théorème n'utilisant que des outils "élémentaires"de l'analyse réelle. Les mathématiciens voyaient ainsi que l'analyse réelle était suffisament riche pour aborder le théorème des nombres premiers.

Le but de cet exposé est d'exhiber une preuve du théorème des nombres premiers n'utilisant que des techniques de l'analyse réelle. Il s'agit d'une preuve étonnante de Daboussi (1984). Le schéma suivit est :

1. Dans la première section, on parle des fonctions arithmétiques. On introduit l'opération de convolution et le principe de l'hyperbole. On donne aussi des exemples de fonctions arithmétiques, qui sont utilisées le long des sections suivantes. En particulier, on parle de la fonction de Möbius et de l'inversion de Möbius. Finalement, on définit le concepte de série de Dirichlet et en caractérise la convergence.

2. La deuxième partie est concernée au théorème de Chebyshev. D'abord on définit les fonctions de Chebyshev, π et ψ, qui sont précédées d'un petit étude de leurs propriétés. En suit, on donne la preuve du théorème de Chebyshev, qui établit une minoration et une majoration asymtotiques pour ψ. Finalement, un résultat établissant un lien entre π et ψ, permet de donner l'équivalence de l'énoncé du théorème des nombres premiers avec $\lim_{x \to +\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$.

3. La troisième partie sert à présenter les théorèmes de Mertens, qui donnent le comportement asymptotique de certaines sommes et produits portant sur des nombres premiers. Ces résultats jouent un rôle important dans la preuve du théorème des nombres premiers qu'on donne à la fin du texte.

4. Ainsi comme la partie 2 achève pour donner un énoncé équivalent à celui du théoréme des nombres premiers, en fonction de ψ, la partie 4 en donne encore deux autres, un desquels est l'objet de la preuve de Daboussi. Ce nouveau énoncé équivalent s'exprime en termes d'une nouvelle fonction, $M(x)$.

5. La dernière partie du texte est consacrée à la preuve de Daboussi du théorème des nombres premiers. Cette preuve est basée aux propriétés de deux familles d'ensembles premiers. Ont étudie le cardinal de chacun de ces ensembles, en se servant de quelques résultats des autres sections. On introduit un nouveau outil, la fonction de Dickman. Dans l'introduction de cette section, on donne un schéma plus détaillé de la preuve.

1 Fonctions arithmétiques

Dans ce chapitre, on présente les définitions clés concernant les fonction arithmétiques et leurs propriétés de base. Des exemples de telles fonctions sont donnés. Il s'agit des fonctions τ, μ et Λ.

1.1 Définitions

Une fonction arithmétique est une application $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{C}$. On dit qu'elle est multiplicative lorsqu'elle envoie l'unité vers l'unité et préserve le produit des entiers premiers entre eux. C'est-à-dire, lorsque $f(1) = 1$ et $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ si $(m, n) = 1$.

1.2 Convolution des fonctions arithmétiques

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions arithmétiques. Si $f, g \in \mathcal{A}$, on définit leur convolution comme la fonction arithmétique

$$f \star g(n) = \sum_{d|n} f(d) \cdot g(n/d).$$

Cette opération munit l'ensemble des fonctions arithmétiques multiplicatives de structure de groupe.

1.3 Principe de l'hyperbole

La plupart des résultats de cet exposé concernent des fonctions définies pas des sommes de fonctions arithmétiques. Pour les manipuler, le principe qu'on montre dans la suite est un des outils essentiels.

Proposition 1.3.1 (Principe de l'hyperbole) *Soient $f, g \in \mathcal{A}$ et notons $F(x) = \sum_{n \leq x} f(n)$ et $G(x) = \sum_{n \leq x} g(n)$, pour $x \geq 1$. Alors, pour chaque $y \in [1, x]$, on a*

$$\sum_{n \leq x} f \star g(n) = \sum_{n \leq y} g(n) F(x/n) + \sum_{n \leq x/y} f(n) G(x/n) - F(x/y) G(y).$$

preuve Considérons la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x} f\star g(n) &= \sum_{n\le x}\sum_{d|n} f(n)g(n/d) = \sum_{nm\le x} f(n)g(m)\\ &= \sum_{\substack{nm\le x\\ m\le y}} f(n)g(m) + \sum_{\substack{nm\le x\\ m>y}} f(n)g(m).\end{aligned}$$

La première somme peut s'écrire comme $\sum_{m\le y} g(m)\left(\sum_{n\le x/m} f(n)\right)$ et, donc, elle vaut $\sum_{m\le y} g(m)F(x/m)$. La deuxième somme est traitée comme suit :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{nm\le x\\ m>y}} f(n)g(m) &= \sum_{n\le x/y} f(n)\left(\sum_{m\le x/n} g(m)\right) - \sum_{n\le x/y} f(n)\left(\sum_{m\le y} g(m)\right)\\ &= \sum_{n\le x/y} f(n)G(x/n) - \sum_{n\le x/y} f(n)G(y)\\ &= \sum_{n\le x/y} f(n)G(x/n) - F(x/y)G(y).\end{aligned}$$

Ceci nous donne le résultat énoncé.$\diamond$

1.4 Quelques exemples

1.4.1 Fonction τ

La fonction τ est la fonction arithmétique définie par la convolution $\mathbf{1}\star\mathbf{1}$, où $\mathbf{1}$ désigne la fonction constante égale à 1. Sa valeur sur un entier donne son nombre de diviseurs.

1.4.2 Fonction μ

La fonction μ est l'inverse de $\mathbf{1}$ dans le groupe des fonctions arithmétiques multiplicatives. Notons δ l'élément neutre de ce groupe, $\delta(n) = \begin{cases}1 & \text{si } n=1\\ 0 & \text{si } n\neq 1\end{cases}$. Alors, μ est la seule fonction qui vérifie

$$\sum_{d|n}\mu(n) = \begin{cases}1 & \text{si } n=1\\ 0 & \text{si } n\neq 1\end{cases}.$$

Il suit de la définition de μ la propriété suivante :

$$\mu(n) = \begin{cases}(-1)^k & \text{si } n \text{ a } k \text{ diviseurs premiers et sans carré}\\ 0 & \text{autrement}\end{cases}$$

1.4.3 Fonction Λ

La fonction Λ est le produit de convolution $\Lambda = \mu\star\log$. Elle satisfait les propriétés suivantes :

1. $\Lambda(n) = \begin{cases}\log p & \text{si } n=p^m, m\ge 1\\ 0 & \text{autrement}\end{cases}$
2. $\Lambda = (-\mu\log)\star 1$

1.5 Inversion de Möbius

Dans la suite on donne une formule appelée formule d'inversion de Möbius, qui permet d'inverser quelques types de sommations. Cette formule est en telle sorte l'analogue à la formule d'inversion de Fourier, dans le contexte où nous sommes placés.

Proposition 1.5.1 *Soient* $F, G : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbf{C}$. *Alors,* $F(x) = \sum_{n \leq x} G(x/n)$ *si, et seulement si,* $G(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n) F(x/n)$.

preuve Supposons que $F(x) = \sum_{n \leq x} G(x/n)$. Donc,

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) F(x/n) = \sum_{n \leq x} \mu(n) \left(\sum_{m \leq x/n} G(x/nm) \right) = \sum_{k \leq x} G(x/k) \left(\sum_{n | k} \mu(n) \right) = G(x).$$

Le cas qui reste à montrer est pareill.$\diamond$

1.6 Séries de Dirichlet

Définiton 1.6.1 *Soit* $f \in \mathcal{A}$. *La série de Dirichlet associée à* f *est la série formelle* $\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$.

Lorsque $f \in \mathcal{A}$ est une fonction multiplicative, il y a un critère sur la convergence absolue de sa série de Dirichlet, qui s'exprime en termes des nombres premiers. De plus, dans ce cas il peut se calculer la somme de la série en utilisant une factorisation en nombres premiers des entiers sur lesquels la somme porte. Ces faits sont énoncés dans le résultat suivant, que l'on admet.

Proposition 1.6.1 *Soit* $f \in \mathcal{A}$ *une fonction arithmétique et* $F(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$ *sa série de Dirichlet.* $F(s)$ *est absolument convergente si, et seulement si,* $\sum_{p} \sum_{n \geq 1} \frac{f(p^n)}{p^{ns}}$ *l'est. Dans ce cas, on a l'égalité* $\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p} \sum_{n \geq 0} \frac{f(p^n)}{p^{ns}}$.$\diamond$

2 Le théorème de Chebyshev

Ce chapitre nous permet d'introduire les fonctions de Chebyshev et les premiers résultats sur elles. Le résultat principal du texte fournit des équivalents de ces fonctions, à l'infini. Pour établir ces équivalents, un des préliminaires nécessaires est une estimation asymptotique qu'on prouve dans cette section : le théorème de Chebyshev.

2.1 Les fonctions de Chebyshev

Définiton 2.1.1 *Les fonctions de Chebyshev sont* $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$, *pour* $x \geq 2$, *et* $\psi(x) = \sum_{d \leq x} \Lambda(d)$, *por* $x \geq 1$.

Dans ce qui suit, on donne trois résultats, le dernier desquels établit certain lien entre ψ et la fonction B définie tout de suite.

Lemme 2.1.1 *Soit* $B(x) = \sum_{d \leq x} \Lambda(d) [x/d]$, $x \geq 1$. *Alors,* $B(x) = x \log x - x + O(\log x)$.

preuve D'un côté la formule de Stirling fournit

$$\log(n!) = n\log n - n + O(\log n)$$

et, de l'autre côté, il peut s'écrire

$$\begin{aligned}\log(n!) &= \sum_{1\leq m\leq n}\log m = \sum_{1\leq m\leq n}\sum_{p^k\mid m}\log p\\ &= \sum_{p^k\leq n}\log p\left[n/p^k\right] = \sum_{d\leq n}\Lambda(d)\left[n/d\right] = B(n)\end{aligned}$$

qui, pour $n = [x]$, donne le résultat souhaité.$\diamond$

Lemme 2.1.2 *Posons* $B_2(x) = B(x) - 2B(x/2)$*, pour* $x \geq 2$*. Alors,* $B_2(x) = \sum\limits_{d\leq x}\Lambda(d)\chi(n/d)$*, où* $\chi(u) = [u] - 2\left[u/2\right]$*.*

preuve Observons d'abord que la fonction χ est une fonction 2-périodique, satisfaisant $\chi(u) = \begin{cases}0 & \text{si } 0\leq u<1\\ 1 & \text{si } 1\leq u<2\end{cases}$. Écrivons, alors

$$\begin{aligned}B_2 &= \sum_{d\leq x}\Lambda(d)\left[x/d\right] - \sum_{d\leq x/2}2\Lambda(d)\left[x/2d\right]\\ &= \sum_{d\leq x}\Lambda(d)\left(\left[x/d\right] - 2\left[x/2d\right]\right) = \sum_{d\leq x}\Lambda(d)\chi(x/d)\end{aligned}$$

où nous avons utilisé que si $d > [x/d] + 1$, alors $[x/2d] = 0$. Donc, on a prouvé le lemme.$\diamond$

Corollaire 2.1.1 *Lorsque* $x \geq 2$*, on a* $\psi(x) - \psi(x/2) \leq B_2(x) \leq \psi(x)$*.*

preuve Rappelons que $B_2(x) = \sum\limits_{d\leq x}\Lambda(d)\chi(x/d)$, de sort que $B_2(x) \leq \sum\limits_{d\leq x}\Lambda(d) = \psi(x)$. Pour la deuxième inégalité, on utilise que $\chi(x/d) = 1$ lorsque $x/2 < d \leq x$:

$$\begin{aligned}\psi(x) - \psi(x/2) &= \sum_{d\leq x}\Lambda(d) - \sum_{d\leq x/2}\Lambda(d) = \sum_{x/2<d\leq x}\Lambda(d)\\ &= \sum_{x/2<d\leq x}\Lambda(d)\chi(x/d) \leq B_2(x)\end{aligned}$$

d'où le corollaire.$\diamond$

2.2 Le théorème de Chebyshev

Montrons, tout de suite, le résultat fondamental de ce chapitre. Il s'agit du théorème de Chebyshev, qui établit une minoration et une majoration asymptotiques de la fonction ψ.

Théorème 2.2.1 (Chebyshev) *On a, pour* $x \geq 2$*, l'estimation* $x\log 2 + O\left(\log x\right) \leq \psi(x) \leq x\log 4 + O\left((\log x)^2\right)$*.*

preuve Le corollaire 2.1.1 fournit $\psi(x) \geq B(x) - 2B(x/2)$. En appliquant le lemme 2.1.1, au deuxième membre de l'inégalité, on obtient

$$\psi(x) \geq x\log x - x - 2\left(\frac{x}{2}\log\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}x\right) + O(\log x).$$

Donc, on trouve $\psi(x) \geq x\log 2 + O(\log x)$.
Le corollaire qu'on vient de prouver permet d'écrire

$$\begin{aligned}\psi(x) &= B_2(x) + \psi(x/2) \leq B_2(x) + B_2(x/2) + \psi(x/4) \leq \dots \\ &\leq \sum_{0\leq j\leq k} B_2(x/2^j) + \psi(x/2^{k+1}).\end{aligned}$$

On choisit k afin que le terme $\psi(x/2^{k+1})$ soit nul. Ceci arrive en prenant $k = \left[\frac{\log x}{\log 2}\right]$, car alors $\frac{x}{2^{k+1}} < 1$. Donc,

$$\psi(x) \leq \sum_{0\leq j\leq k}\left(\frac{x\log 2}{2^j} + O(\log x)\right).$$

Or, $k = O(\log x)$, d'où l'on obtient

$$\psi(x) \leq x\log 2\sum_{j\geq 0}\frac{1}{2^j} + O\left((\log x)^2\right) = x\log 4 + O\left((\log x)^2\right)$$

qui finit la preuve.$\diamond$

Le lemme suivant permet de prouver un résultat analogue au théorème ci-dessus pour la fonction π.

Lemme 2.2.1 *Pour $x \geq 2$, on a l'estimation $\pi(x) = \frac{\psi(x)}{\log x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right)$.*

preuve Écrivons

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \sum_{d\leq x}\Lambda(d) = \sum_{p^s\leq x}\log p = \sum_{\substack{s\leq \log x/\log p\\ p\leq x}}\log p \\ &= \sum_{p\leq x}\log p\left[\frac{\log x}{\log p}\right] \leq \sum_{p\leq x}\log p\frac{\log x}{\log p} = \pi(x)\log x.\end{aligned}$$

On a d'ailleurs $2\psi(x) = \sum\limits_{p\leq x} 2\log p\left[\frac{\log x}{\log p}\right] \geq \sum\limits_{p\leq x}\log x$ On a trouvé, donc,

$$\psi(x) \leq \pi(x)\log x \leq 2\psi(x).$$

Étudions la différence $\pi(x)\log x - \psi(x)$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{p\leq x}\left(\log x - \log p\left[\frac{\log x}{\log p}\right]\right) &\leq \sum_{p\leq\sqrt{x}}\log p + \sum_{\sqrt{x}<p\leq x}\left(\log x - \left[\frac{\log x}{\log p}\right]\log p\right) \\ &\leq \sum_{p\leq\sqrt{x}}\log p + \sum_{\sqrt{x}<p\leq x}(\log x - \log p) \\ &\leq \psi\left(\sqrt{x}\right) + \sum_{\sqrt{x}<p\leq x}\log(x/p).\end{aligned}$$

Grâce au théorème de Chebyshev, on sait que $\psi\left(\sqrt{x}\right) = O(\sqrt{x})$ En outre, il peut s'écrire

$$\begin{aligned}\sum_{\sqrt{x}<p\leq x}\log(x/p) &= \sum_{\sqrt{x}<p\leq x}\int_p^x\frac{dt}{t} = \sum_{\sqrt{x}<p\leq x}\int_{\sqrt{x}}^x\frac{\mathbf{1}_{[p,x]}(t)}{t}dt \\ &= \int_{\sqrt{x}}^x\sum_{\sqrt{x}<p\leq x}\frac{\mathbf{1}_{[p,x]}(t)}{t}dt = \int_{\sqrt{x}}^x\sum_{p\leq t}\frac{1}{t}dt \\ &= \int_{\sqrt{x}}^x\frac{\pi(t)}{t}dt.\end{aligned}$$

Voyons que cette intégrale est $O\left(\frac{x}{\log x}\right)$. En effet, la majoration $\pi(x)\log x \leq 2\psi(x)$ et le théorème de Chebyshev nous amènent à $\frac{\pi(x)}{x} = O\left(\frac{1}{\log x}\right)$. Alors, en appliquant le théorème de la moyenne par des intégrales de fonctions continues positives, on trouve

$$\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{\pi(t)}{t} dt = O\left(\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{1}{\log t} dt\right) = O\left(\frac{x-\sqrt{x}}{\log \sqrt{x}}\right) = O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

En rassemblant les conclusions obtenues,

$$\pi(x)\log x - \psi(x) = O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

d'où l'assertion du lemme.$\diamond$

Corollaire 2.2.1 *On a de l'équivalence élémentaire entre les deux conditions suivantes :*

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1.$

preuve Il suffit de récrire le lemme 2.2.1 comme $\frac{\pi(x)}{x/\log x} = \frac{\psi(x)}{x} + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$.$\diamond$

Corollaire 2.2.2 *On a, lorsque* $x \geq 2$*, l'estimation* $(\log 2 + o(1))\frac{x}{\log x} \leq \pi(x) \leq \frac{x}{\log x}(\log 4 + o(1))$.

preuve Ceci est une conséquence immédiate du théorème de Chebyshev et du lemme précédent.$\diamond$

3 Les théorèmes de Mertens

Dans ce qui suit, on énonce le premier théorème et le second théorème de Mertens. Seulement la preuve du premier est détaillée. Le second théorème est admis. Ces deux résultats sont clés pour prouver le théorème des nombres premiers, de la façon qu'on va procéder.

3.1 Premier théorème de Mertens

Le premier théorème de Mertens découle du lemme suivant, qui exhibe un équivalent de la fonction $\sum\limits_{d\leq x} \frac{\Lambda(d)}{d}$ à l'infini.

Lemme 3.1.1 *Pour* $x \geq 1$*, on a* $\sum\limits_{d\leq x} \frac{\Lambda(d)}{d} = \log x + O(1)$.

preuve Rappelons que le lemme 2.1.1 prouve $B(x) = \sum\limits_{d\leq x} \Lambda(d)\,[x/d] = x\log x - x + O(\log x)$. Rappelons aussi que le théorème de Chebyshev nous donne $\frac{\psi(x)}{x} = O(1)$. En posant $\left[\frac{x}{d}\right] = \frac{x}{d} + O(1)$, on a

$$\sum_{d\leq x} \frac{\Lambda(d)}{d} = \frac{B(x)}{x} + O\left(\frac{\psi(x)}{x}\right) = \log x + O(1)$$

ce qui nous donne l'équivalent énoncé.$\diamond$

Théorème 3.1.1 (Premier théorème de Mertens) *Pour* $x \geq 1$*, on a* $\sum\limits_{d\leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1)$.

preuve Il s'agit de profiter du lemme précédent, qui donne un résultat analogue. On a

$$\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p}=\sum_{d\leq x}\frac{\Lambda(d)}{d}+\left(\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p}-\sum_{d\leq x}\frac{\Lambda(d)}{d}\right)=\sum_{d\leq x}\frac{\Lambda(d)}{d}-\sum_{\substack{p^s\leq x\\ s\geq 2}}\frac{\log p}{p^s}.$$

Or, la dernière somme est $O(1)$. En effet, comme il s'agit d'une somme de termes positifs, on peut inverser l'ordre des sommations comme suit :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p^s\leq x\\ s\geq 2}}\frac{\log p}{p^s}&=\sum_{p\leq x}\sum_{2\leq s\leq \log x/\log p}\frac{\log p}{p^s}\leq\sum_{p\leq x}\log p\sum_{s\geq 2}\frac{1}{p^s}\\&=\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p(p-1)}\leq\sum_{n\geq 2}\frac{\log n}{n(n-1)}<+\infty.\end{aligned}$$

Celui-ci et le lemme précédent permettent de conclure.$\diamond$

3.2 Second théorème de Mertens

Le second théorème de Mertens, aussi connu comme formule de Mertens, demande une preuve assez longue, qui est basée sur le premier théorème de Mertens et les propriétés de la fonction zêta de Riemann. Les techniques utilisées dans la preuve sont pareilles à celles que nous allons rencontrer plus tard dans les démonstrations d'autres résultats. C'est pour ça qu'ici on ne détaille pas la preuve.

Théorème 3.2.1 (Second théorème ou formule de Mertens) *Pour* $x>0$, *on a* $\prod_{p\leq x}\left(1-p^{-1}\right)^{-1}=e^{\gamma}\log x+O(1)$.

$\diamond$

4 Le théorème de Landau

Le corollaire 2.2.1 nous donne une équivalence élémentaire entre $\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi(x)}{x/\log x}=1$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{x}=1$. Le théorème de Landau donne encore d'autres équivalents à ces deux conditions. De ce théorème on n'en a besoin que d'une partie, qui est celle qu'on démontre. La preuve de Daboussi du théorème des nombres premiers est, en fait, une preuve de cette condition équivalente. Le théorème de Landau est pourtant énoncé avec toute généralité, à titre d'information.

Théoréme 4.1 (Landau) *Il y a de l'équivalence élémentaire entre les trois conditions suivantes :*

1. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{x}=1$
2. $M(x):=\sum_{n\leq x}\mu(n)=\underset{x\to+\infty}{o}(x)$
3. $\sum_{n\geq 1}\frac{\mu(n)}{n}=0.$

preuve Montrons l'implication $2\Rightarrow 1$. La preuve de Daboussi du théorème des nombres premiers établit la certitude de 2.
Posons $\psi(x)=\sum_{d\leq x}\Lambda(d)=\sum_{d\leq x}\left(\Lambda-\mathbf{1}\right)(d)+[x]$. Divisons, maintenant, par x. On obtient $\frac{\psi(x)}{x}=\frac{1}{x}\sum_{d\leq x}\left(\Lambda-\mathbf{1}\right)(d)+1+o(1)$. Donc, il s'agit de montrer que $\sum_{d\leq x}\left(\Lambda-\mathbf{1}\right)(d)=o(x)$. Utilisons les propriétés de la convolution pour donner une

expression équivalente de la fonction $\Lambda - \mathbf{1}$:

$$\begin{aligned}\Lambda - \mathbf{1} &= (\log - \tau) \star \mu = (\log - \tau + 2\gamma \mathbf{1}) - 2\gamma \mathbf{1} \star \mu \\ &= f \star \mu - 2\gamma\delta\end{aligned}$$

où $f = \log - \tau + 2\gamma\mathbf{1}$. On aura, alors,

$$\sum_{d \leq x} (\Lambda - \mathbf{1})(d) = \sum_{d \leq x} f \star \mu(d) - 2\gamma.$$

Comme $2\gamma = o(x)$, ce qu'on cherche à montrer est $\sum_{d \leq x} f \star \mu(d) = o(x)$ L'outil qui permet de suivre ce chemin est le principe de l'hyperbole. Posons $H(x) = \sum_{n \leq x} f \star \mu(n)$, $M(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n)$ et $N(x) = \sum_{n \leq x} f(x)$. Pour x assez grand et $2 < y \leq x$ le principe de l'hyperbole fournit

$$H(x) = \sum_{n \leq x/y} \mu(n) N(x/n) + \sum_{n \leq y} f(n) M(x/n) - N(y) M(x/y).$$

Par l'hypothèse qu'on est en train de faire, on a, pour y fixée, $\sum_{n \leq y} f(n) M(x/n) = o(x)$, car la somme en n est finie. De même, $N(y)M(x/y) = o(x)$. Il en découle, donc, que $\limsup_{x \to +\infty} \frac{|H(x)|}{x} = \limsup_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \left| \sum_{n \leq x/y} \mu(n) N(x/n) \right| \leq \limsup_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leq x/y} |N(x/n)|$. Finalement, il faut prouver que cette limite vaut 0. Admettons, pour l'instant, qu'on sait que $N(x) = O(\sqrt{x})$. Alors, $\limsup_{x \to +\infty} \frac{|H(x)|}{x} \ll \limsup_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n \leq x/y} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Par comparaison avec une intégrale, on a $\sum_{n \leq x/y} \frac{1}{\sqrt{n}} \ll \sqrt{\frac{x}{y}}$, et, donc, $\limsup_{x \to +\infty} \frac{|H(x)|}{x} \ll \frac{1}{\sqrt{y}}$. Comme ceci vaut pour tout $y > 2$, alors on en déduit que $\limsup_{x \to +\infty} \frac{|H(x)|}{x} = 0$.
Montrons, maintenant, le fait admis : $N(x) = O(\sqrt{x})$. On a $N(x) = \sum_{n \leq x} f(n) = \sum_{n \leq x} \log n - \sum_{n \leq x} \tau(n) + \sum_{n \leq x} 2\gamma\mathbf{1}(n)$. Grâce à la formule de Stirling appliquée à la première somme, ceci peut se récrire comme $N(x) = x \log x - x + 2\gamma x - \sum_{n \leq x} \tau(n) + O(\sqrt{x})$. Donc, il reste à étudier la somme de τ. Utilisons à nouveau le principe de l'hyperbole :

$$\begin{aligned}\sum_{n \leq x} \tau(n) = \sum_{n \leq x} \mathbf{1} \star \mathbf{1} &= \sum_{n \leq \sqrt{x}} \left[\frac{x}{n}\right] + \sum_{m \leq x/\sqrt{x}} \left[\frac{x}{m}\right] - \left[\frac{x}{\sqrt{x}}\right] [\sqrt{x}] \\ &= 2x \sum_{n \leq \sqrt{x}} \frac{1}{n} - 2 \sum_{n \leq \sqrt{x}} \left\{\frac{x}{n}\right\} - \left(\sqrt{x} - \{\sqrt{x}\}\right)^2 \\ &= 2x \sum_{n \leq \sqrt{x}} \frac{1}{n} - x + O(\sqrt{x}).\end{aligned}$$

Finalement, de la définition de γ, $\sum_{n \leq \sqrt{x}} \frac{1}{n} = \log(\sqrt{x}) + \gamma + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Donc, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n \leq \sqrt{x}} \tau(n) &= 2x \left(\log(\sqrt{x}) + \gamma + O(1/\sqrt{x})\right) - x + O(\sqrt{x}) \\ &= x(\log x + 2\gamma - 1) + O(\sqrt{x}).\end{aligned}$$

Quand on substitue ceci dans le développement obtenu pour N, il reste seulement les termes $O(\sqrt{x})$, et on a bien l'estimation $N(x) = O(\sqrt{x})$.$\diamond$

5 Théoréme des nombres premiers : la preuve de Daboussi

Cette section est la dernière du texte. Elle nous conduit à la preuve de Daboussi du théorème des nombres premiers, en suivant le schéma suivant :

- Le premier point consiste à donner une façon de factoriser les nombres entiers, qui généralise la factorisation habituelle. Cette factorisation est basée sur la définition de deux familles d'ensembles d'entiers, $\{S(x,y)\}_{x,y\geq 1}$ et $\{T(x,y)\}_{x,y\geq 1}$. Le cardinal de chacun de ces ensembles est étudié, afin de comprendre son comportement "asymptotique". On introduit, aussi, la fonction $M(x,y)$.

- Le point suivant consiste à introduire la fonction de Dickman et ses propriétés, qui sont admises à cause de sa nature technique. Dans un des lemmes principaux du chapitre, elle est utilisée pour définir une fonction qui permet de simplifier les hypothèses qu'on fait, ainsi comme le résultat cherché.

- Finalement, on prouve le thérème des nombres premiers, en utilisant les équivalences élémentaires vues au corollaire 2.2.1 et au théorème de Landau. La preuve qu'on donne est celle de Daboussi. Elle a besoin de l'étude des ensembles S et T. Un fait remarquable de cette preuve est qu'elle n'utilise que des outils de l'analyse réelle, des outils essentiellement élémentaires.

5.1 Les ensembles S, T, et la fonction $M(x,y)$

Définiton 5.1.1 *Soient $x,y\geq 1$ des nombres réels. On définit $S(x,y)$ comme l'ensemble $\{n\leq x \mid P^+(n)\leq y\}$, et l'ensemble $T(x,y)$ comme $\{n\leq x \mid P^-(n)>y\}$. On note leurs cardinaux $\Psi(x,y)$ et $\Phi(x,y)$ respectivement.*
Pour $x,y\geq 1$, la fonction $M(x,y)$ est définie comme $M(x,y)=\sum\limits_{n\in S(x,y)}\mu(n)$.

Lemme 5.1.1 *Pour $x,y\geq 1$, tout entier $1\leq n\leq x$ peut être écrit de façon unique comme produit d'un entier de $S(x,y)$ et un entier de $T(x,y)$.*

preuve Soit $1\leq n\leq x$ un entier. Prenons $a=\prod\limits_{\substack{p^s\,\|\,n\\ p\leq y}}p^s$ et $b=\prod\limits_{\substack{p^s\,\|\,n\\ p>y}}p^s$, et alors $a\in S(x,y)$, $b\in T(x,y)$, $n=ab$. De plus, il est clair que cette factorisation est unique.$\diamond$

Observation 5.1.1 *Les ensembles du type S jouent le rôle des nombres entiers n'excèdent pas un réel donné x. Les ensembles du type T modélisent les ensembles de nombres premiers qui n'excèdent pas un réel donné x. Pour ce comprendre, on peut examiner la forme de ces ensembles en quelques cas remarquables :*

1. *Si $y\geq x$, alors $S(x,y)=\{n\leq x\}$ et $\Psi(x,y)=[x]$. On a aussi $T(x,y)=\{1\}$ et $\Phi(x,y)=1$. En général, on a $\Psi(x,y)+\Phi(x,y)=[x]+1$*

2. *Supposons $x>1$. On se donne $\varepsilon>0$ et $1\leq y\leq x^\varepsilon$. Lorsque on prend un entier $n=p_1\cdots p_k$ dans l'ensemble $T(x,y)$, il doit satisfaire aux inégalités $x^{k\varepsilon}<n\leq x$. Donc, en prenant $\log$, on trouve $k<\frac{1}{\varepsilon}$. Ceci nous dit que, si par exemple $y\leq\sqrt{x}$, alors $k=0$ ou $k=1$. Donc, on aura que $T(x,y)=\{y<p\leq x\}\cup\{1\}$, et $\Phi(x,y)=\pi(x)-\pi(y)+1$. En particulier, $\Phi(x,\sqrt{x})=\pi(x)-\pi\left(\sqrt{x}\right)+1$. En général, le nombre k de facteurs premiers*

d'un entier dans $T(x,y)$, $y>1$, est borné par $u=\frac{\log x}{\log y}$.

3. *Lorsqu'on essai d'obtenir un contrôle sur le nombre de facteurs premiers d'un entier dans $S(x,y)$, on n'arrive jamais à réussir. Les éléments des ensembles $S(x,y)$ ont toujours beaucoup de facteurs premiers. Ceci nous donne une idée du fait que ces ensembles modélisent les entiers bornées par un réel donné.*

Lemme 5.1.2 *Soit $y\geq 2$ et soit $\sigma>0$. Alors la série $\sum\limits_{P^+(n)\leq y}\frac{1}{n^\sigma}$ est convergente et elle vaut $\prod\limits_{p\leq y}\left(1-p^{-\sigma}\right)^{-1}$.*

preuve Comme la fonction arithmétique $f(n)=n^{-\sigma}\mathbf{1}_{\{m\,|\,P^+(m)\leq y\}}(n)$ est multiplicative et la somme $\sum\limits_{p}\sum\limits_{k\geq 1}f(p^k)=\sum\limits_{p\leq y}\sum\limits_{k\geq 1}p^{-k\sigma}=\sum\limits_{p\leq y}\frac{p^{-\sigma}}{1-p^{-\sigma}}$ est finie, la proposition 1.6.1 sur les séries de Dirichlet permet de déduire la convergence de la série de l'énoncé. De plus, on sait aussi que $\sum\limits_{P^+(n)\leq y}\frac{1}{n^\sigma}=\prod\limits_{k\geq 0}f(p^k)=\prod\limits_{p\leq y}\left(1-p^{-\sigma}\right)^{-1}$.$\diamond$

Voyons, tout de suite, quel est le comportement du cardinal $\Psi(x,y)$.

Théorème 5.1.1 *Soient $x\geq 1$ et $y\geq 2$ des nombres réels. Alors, si $u=\frac{\log x}{\log y}$, on a $\Psi(x,y)\ll xe^{-u/2}$.*

preuve On traite deux cas :

a) Si $y<11$, $S(x,y)=\{2^{r_2}3^{r_3}5^{r_5}7^{r_7}\leq x\}$. Alors, on aura que $r_k\leq\frac{\log x}{\log k}$, d'où $\Psi(x,y)\ll(\log x)^4\ll xe^{-u/2}$, car $xe^{-u/2}=x^{1-1/\log\left(y^2\right)}$.

b) Si $y\geq 11$. Définissons la fonction arithmétique multiplicative f_a, $a>0$, comme suit :

$$f_a(n)=n^a\mathbf{1}_{\{m\,|\,P^+(m)\leq y\}}(n).$$

On observe, alors, que

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{x^{3/4}<n\leq x\\P^+(n)\leq y}}1&=x^{-3a/4}\sum_{\substack{x^{3/4}<n\leq x\\P^+(n)\leq y}}x^{3a/4}<x^{-3a/4}\sum_{\substack{x^{3/4}<n\leq x\\P^+(n)\leq y}}f_a(n)\\&\leq x^{-3a/4}\sum_{\substack{n\leq x\\P^+(n)\leq y}}f_a(n)=x^{-3a/4}\sum_{n\leq x}f_a(n).\end{aligned}$$

Alors, on aura que

$$\begin{aligned}\Psi(x,y)&=\sharp\left\{n\leq x^{3/4}\,|\,P^+(n)\leq y\right\}+\sharp\left\{x^{3/4}<n\leq x\,|\,P^+(n)\leq y\right\}\\&\leq x^{3/4}+x^{-3a/4}\sum_{n\leq x}f_a(n).\end{aligned}$$

En prenant $a=\frac{2}{3\log y}$, on a $x^{-3a/4}=e^{-u/2}$ et $x^{3/4}\leq xe^{-u/2}$. Donc, il suffit de montrer que $\sum\limits_{n\leq x}f_a(n)=O(x)$. Pour ce faire, on introduit une fonction arithmétique multiplicative auxiliaire, qui dépend aussi de $a>0$:

$$g_a\left(p^s\right)=\begin{cases}p^{as}\left(1-p^{-a}\right)&\text{si } p\leq y\\0&\text{si } p>y\end{cases}$$

Vérifions que $f_a\leq g_a\star\mathbf{1}$:

1. si $p \leq y$, alors $g_a \star \mathbf{1}(p^s) = \sum\limits_{0 \leq k \leq s} g_a(p^s) = 1 + \sum\limits_{1 \leq k \leq s} p^{ak}(1 - p^{-a}) = p^{as} = f_a(s)$.

2. si $p > y$, alors $g_a \star \mathbf{1}(p^s) = 1 \geq 0 = f_a(p^s)$.

On trouve, donc,

$$\begin{aligned}\sum_{n \leq x} f_a(n) &\leq \sum_{n \leq x} \sum_{d \mid n} g_a(d) = \sum_{d \leq x} g_a(d) \left[\frac{x}{d}\right] \\ &\leq x \sum_{d \leq x} \frac{g_a(d)}{d} = x \sum_{\substack{d \leq x \\ P^+(d) \leq y}} \frac{g_a(d)}{d} \\ &\leq x \sum_{P^+(d) \leq y} \frac{g_a(d)}{d}\end{aligned}$$

Grâce à la proposition 1.6.1 sur les séries de Drichlet, la dernière somme est convergente, en utilisant que $\sum\limits_{p \leq y} (1 - p^{-a}) \sum\limits_{s \geq 1} p^{(a-1)s}$ converge, car $a - 1 = \frac{2}{3 \log y} - 1 < 0$. De plus, on a l'égalité

$$x \sum_{P^+(d) \leq y} \frac{g_a(d)}{d} = x \prod_{p \leq y} \sum_{s \geq 0} \frac{g_a(p^s)}{p^s} = x \prod_{p \leq y} \sum_{s \geq 0} \frac{p^{as}(1 - p^{-a})}{p^s}.$$

On majore les termes de la somme. On aura $1 - p^{-a} \leq a \log p$, de façon que $\frac{p^{as}(1-p^{-a})}{p^s} \leq a \left(\frac{p^a}{p}\right)^s \log p$. Par définiton de a, on aura $p^a \leq y^a = e^{2/3}$. Donc, le p-ième terme de la dernière somme est majoré par $a \log p \left(\frac{e^{2/3}}{p}\right)^s$. Donc, on trouve les rélations suivantes :

$$\begin{aligned}x \sum_{P^+(d) \leq y} \frac{g_a(d)}{d} &\leq x \prod_{p \leq y} \left(1 - p^{-a} + a \log p \sum_{s \geq 1} \left(\frac{e^{2/3}}{p}\right)^s\right) \\ &= x \prod_{p \leq y} \left(1 - p^{-a} + a \log p \frac{e^{2/3}}{p - e^{2/3}}\right) \\ &\ll x \prod_{p \leq y} \left(1 + a \frac{\log p}{p}\right).\end{aligned}$$

Donc, le dernier pas consiste à montrer que le produit converge lorsque $y \to +\infty$. Or, par définition de a, le dernier produit est plus petit ou égal à $\prod\limits_{p \leq y} \left(1 + \frac{\log p}{p \log y}\right)$. Maintenant, le premier théorème de Mertens nous dit que $\sum\limits_{p \leq y} \frac{\log p}{p \log y} = \frac{1}{\log y}(\log y + O(1))$, qui tend vers 1 lorsque $y \to +\infty$. Celui-ci implique la convergence du produit et, donc, permet de conclure : $\sum\limits_{n \leq x} f(n) = xO(1) = O(x)$.$\diamond$

On continue par un résultat technique qui doit nous permettre de faire des estimations de quelques types de sommes, en sachant de l'information asymptotique des fonctions sommées. On appelle "lemme (S)"à ce résultat, pour y faire appel plus facilement. (S) indique "sommation".

Lemme 5.1.3 (S) *Soit $\{a_n\}_n$ une suite de nombres complexes satisfaisant $\sum\limits_{n \leq t} a_n = F(t) + O(R(t))$, pour $1 \leq t \leq x$, où $F \in C^1[1, x]$ et $R : [1, x] \longrightarrow$*

$[0,+\infty)$ *monotone croissante. Soit* $b:[1,x] \longrightarrow \mathbf{C}$ *continue et* C^1 *par morceaux. Alors,* $\sum_{n\leq x} a_n b(n) = \int_1^x F'(t)b(t)dt + O\left(R_1(x)\right)$, *où* $R_1(x) = |F(1)b(1)| + |R(x)b(x)| + \int_1^x |R(t)b'(t)|\,dt$.

preuve Il s'agit d'écrire $\sum_{n\leq x} a_n b(n) = A(x)b(x) - \int_1^x A(t)b'(t)dt$, pour $A(x) = \sum_{n\leq x} a_n$. Alors, comme on connait le comportement de A, pour conclure il suffit de le substituer dans cette égalité et d'intégrer par parties.$\diamond$

Théorème 5.1.2 *Soient* $x \geq 1$ *et* $y \geq 2$ *des nombres réels. Alors,*

$$\Phi(x,y) = x\prod_{p\leq y}\left(1-\frac{1}{p}\right) + O\left(xe^{-u/2}\log y\right),$$

$u = \frac{\log x}{\log y}$.

preuve On commence par observer un fait qui nous permet d'introduire la fonction μ dans le problème qu'on est en train d'étudier : pour tout $n \leq x$, on a $\mathbf{1}_{T(x,y)}(n) = \sum_{\substack{P^+(d)\leq y\\ d|n}} \mu(d)$. En effet, on écrit $n = ab$, pour $a \in S(x,y)$, $b \in T(x,y)$ uniques. Alors, on trouve que

$$\sum_{\substack{P^+(d)\leq y\\ d|n}} \mu(d) = \sum_{d|a} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{si } a \neq 1 \end{cases}.$$

Maintenant, on observe que si $a = 1$, alors $n = b \in T(x,y)$ et si $a \neq 1$, alors $n \notin T(x,y)$. Ceci nous montre qu'on a bien $\mathbf{1}_{T(x,y)}(n) = \sum_{\substack{P^+(d)\leq y\\ d|n}} \mu(d)$. Donc, en sommant sur $n \leq x$, on trouve

$$\begin{aligned}\Phi(x,y) &= \sum_{n\leq x} \mathbf{1}_{T(x,y)}(n) = \sum_{n\leq x}\sum_{\substack{P^+(d)\leq y\\ d|n}} \mu(d) \\ &= \sum_{n\leq x}\sum_{d|n} \mu(d)\mathbf{1}_{\{m\,|\,P^+(m)\leq y\}}(d) = \sum_{\substack{P^+(d)\leq y\\ d\leq x}} \mu(d)\left[\frac{x}{d}\right].\end{aligned}$$

Écrivons $\left[\frac{x}{d}\right] = \frac{x}{d} + O(1)$. On a, donc, que $\Phi(x,y) = x\sum_{\substack{P^+(d)\leq y\\ d\leq x}} \frac{\mu(d)}{d} + O\left(xe^{-u/2}\right)$.

Traitons la somme qui reste. On peut écrire

$$\sum_{P^+(d)\leq y} \frac{\mu(d)}{d} = \sum_{\substack{P^+(d)\leq y\\ d\leq x}} \frac{\mu(d)}{d} + \sum_{\substack{P^+(d)\leq y\\ d> x}} \frac{\mu(d)}{d}.$$

Le membre de gauche de cette égalité est une somme absolument convergente d'une fonction arithmétique multiplicative. Donc, elle vaut $\prod_{p\leq y}\sum_{s\geq 0}\frac{\mu(p^s)}{p^s}$ ou, encore, $\prod_{p\leq y}\left(1-\frac{1}{p}\right)$. Finalement, en utilisant le lemme (S) et $\Psi(x,y) \ll xe^{-u/2}$ on obtient l'estimation $\sum_{\substack{P^+(d)\leq y\\ d> x}} \frac{\mu(d)}{d} \ll e^{-u/2}\log y$. Ceci permet de conclure :

$$\begin{aligned}\Phi(x,y) &= x\prod_{p\le y}\left(1-\frac{1}{p}\right)+O\left(xe^{-u/2}\log y\right)+O\left(xe^{-u/2}\right)\\ &= x\prod_{p\le y}\left(1-\frac{1}{p}\right)+O\left(xe^{-u/2}\log y\right).\end{aligned}$$

$\diamond$

Rappelons que pour $x \ge 1$, $y \ge 1$, on a définit $M(x)=\sum\limits_{n\le x}\mu(n)$ et $M(x,y)=\sum\limits_{n\in S(x,y)}\mu(n)$. Le théorème suivant établit un lien entre ces deux fonctions.

Théorème 5.1.3 *Soit $y \ge 2$. Alors, on a*

$$\limsup_{x\to+\infty}\frac{|M(x)|}{x}\le\prod_{p\le y}\left(1-\frac{1}{p}\right)\int_1^{+\infty}\frac{|M(x,y)|}{x^2}dx.$$

preuve On observe que $|M(x,y)|\le\Psi(x,y)\ll xe^{-u/2}=x^{1-1/\log\left(y^2\right)}$. Alors, $\frac{|M(x,y)|}{x^2}\ll x^{-1-1/\log\left(y^2\right)}$, qui est intégrable sur $[1,+\infty)$ car $\log\left(y^2\right)>0$.
Pour chaque entier $n\le x$, posons $n=ab$, $a\in S(x,y)$, $b\in T(x,y)$ uniques. Comme $P^+(a)\le y<P^+(b)$, alors a et b sont premiers entre eux. Du coup, $\mu(n)=\mu(a)\mu(b)$. Alors, il peut s'écrire

$$\begin{aligned}M(x)=\sum_{n\le x}\mu(n) &= \sum_{b\in T(x,y)}\mu(b)\sum_{\substack{a\in S(x,y)\\ ab\le x}}\mu(a)\\ &= \sum_{b\in T(x,y)}\mu(b)M\left(x/b,y\right).\end{aligned}$$

En prenant des valeurs absolues, la majoration trouvée est

$$|M(x)|\le\sum_{n\le x}|M\left(n,y\right)|\left(\Phi\left(\frac{x}{n},y\right)-\Phi\left(\frac{x}{n+1},y\right)\right)$$

Notons $P_y=\prod\limits_{p\le y}\left(1-\frac{1}{p}\right)$. Par le théorème précédent on aura

$$\Phi\left(\frac{x}{k},y\right)=\frac{x}{k}P_y+O\left(\frac{x}{k}e^{-u_k/2}\log y\right),$$

où $u_k=\frac{\log(x/k)}{\log y}$. Alors, le majorant obtenu pour $|M(x)|$ peut s'écrire sous la forme $A(x,y)+B(x,y)$, où

$$\begin{aligned}A(x,y) &= \sum_{n\le x}|M(n,y)|\left(\frac{x}{n}P_y-\frac{x}{n+1}P_y\right)\\ &= xP_y\sum_{n\le x}|M(n,y)|\int_n^{n+1}\frac{dt}{t^2}\end{aligned}$$

est le terme "principal"et $B(x,y)$ est le terme d'"erreur".
Grâce à la convergence de l'intégrale montrée au début de la preuve, on a $A(x,y)\le x\int_1^{+\infty}\frac{|M(x,y)|}{x^2}dx$.
Si on définit $R_n=\Phi\left(\frac{x}{n},y\right)-\Phi\left(\frac{x}{n+1},y\right)-xP_y\int_n^{n+1}\frac{dt}{t^2}$, alors $B(x,y)=$

$\sum_{n \le x} |M(n,y)| R_n$. Ainsi écrit, on est tenté d'appliquer la sommation d'Abel. On procède en prenant le plus grand des indices comme le premier indice de sommation. En remarquant que

$$\begin{aligned}|M(n,y) - M(n-1,y)| &= \left| \sum_{k \in S(n,y)} \mu(k) - \sum_{k \in S(n-1,y)} \mu(k) \right| \\ &= \left| \sum_{k \in S(n-1,y)} \mu(k) - \mu(n) \mathbf{1}_{\{m \mid P^+(m) \le y\}}(n) - \sum_{k \in S(n-1,y)} \mu(k) \right| \\ &= \left| \mu(n) \mathbf{1}_{S(n,y)}(n) \right| \le \mathbf{1}_{S(x,y)}(n)\end{aligned}$$

et en utilisant $\Phi(x,y) \ll x e^{-u/2}$, on obtient que

$$\left| \sum_{n \le x} |M(n,y)| R_n \right| \ll x^{1-1/\log(y^2)} \log y \left(1 + \sum_{P^+(n) \le y} \frac{1}{n^{1-1/\log(y^2)}} \right).$$

La somme entre parenthèses est convergente, car $1 - \frac{1}{\log(y^2)} > 0$ lorsque $y \ge 2$ et, alors, on peut appliquer le lemme 5.1.2.
La conclusion de ce qu'on vient de voir est

$$\frac{A(x,y)}{x} + \frac{B(x,y)}{x} \le P_y \int_1^{+\infty} \frac{|M(t,y)|}{t^2} dt + O_y \left(x^{-1/\log(y^2)} \right).$$

Comme $O_y \left(x^{-1/\log(y^2)} \right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient que

$$\limsup_{x \to +\infty} \frac{|M(x)|}{x} \le P_y \int_1^{+\infty} \frac{|M(t,y)|}{t^2} dt.$$

$\diamond$

5.2 La fonction de Dickman

La fonction de Dickman est la seule fonction $\rho : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbf{R}$ qui est continue, dérivable sur $[1, +\infty)$ et qui satisfait :

1. $\rho(v) = 1,\ 0 \le v \le 1$
2. $v\rho'(v) + \rho(v-1) = 0,\ v > 1$

La fonction de Dickman vérifie les conditions suivantes :

i. $v\rho(v) = \int_{v-1}^{v} \rho(t) dt$
ii. $\rho(v) > 0,\ v \ge 0$
iii. $\rho'(v) < 0,\ v > 1$
iv. $\rho(v) \le \frac{1}{\Gamma(v+1)}$
v. $\int_0^{+\infty} \rho(v) dv = e^{\gamma}$

5.3 La preuve de Daboussi du théorème des nombres premiers

Le but de cette section est d'appliquer les résultats vus le long du texte pour prouver le théorème des nombres premiers. Pour ce faire il y a besoin de quelques résultats préliminaires.

Lemme 5.3.1 *On a* $\sup_{x\geq 1}\left|\sum_{n\leq x}\frac{\mu(n)}{n}\right|\leq 2.$

preuve Prenons les fonctions $F(x)=[x]$ et $G(x)=1$. Comme $F(x)=\sum_{n\leq x}G(x/n)$ l'inversion de Möbius fournit $1=\sum_{n\leq x}\mu(n)F(x/n)$ c'est-à-dire, $\sum_{n\leq x}\mu(n)\,[x/n]$. En posant $\left[\frac{x}{n}\right]=\frac{x}{n}-\left\{\frac{x}{n}\right\}$, on trouve que $\left|\sum_{n\leq x}\frac{\mu(n)}{n}\right|\leq\frac{1+[x]}{x}\leq 2$, d'où le résultat.◇

Corollaire 5.3.1 *Soit* $M(x)=\sum_{n\leq x}\mu(n)$*. Alors,* $\sup_{a,b\geq 0}\left|\int_a^b M(x)\frac{dx}{x^2}\right|\leq 6.$

preuve Supposons que $a>b>0$. Alors, on aura

$$\begin{aligned}\int_a^b M(x)\frac{dx}{x^2} &= \int_a^b\sum_{n\leq b}\mu(n)\mathbf{1}_{[n,b]}(x)\frac{dx}{x^2}=\sum_{n\leq b}\mu(n)\int_a^b\mathbf{1}_{[n,b]}(x)\frac{dx}{x^2}\\ &= \sum_{a<n\leq b}\mu(n)\int_a^b\mathbf{1}_{[n,b]}(x)\frac{dx}{x^2}+\sum_{n\leq a}\mu(n)\int_a^b\frac{dx}{x^2}\\ &= \sum_{a<n\leq b}\mu(n)\left[\frac{-1}{x}\right]_n^b+\sum_{n\leq a}\mu(n)\left[\frac{-1}{x}\right]_a^b\\ &= \sum_{a<n\leq b}\frac{\mu(n)}{n}+\sum_{n\leq a}\frac{\mu(n)}{a}-\sum_{n\leq b}\frac{\mu(n)}{b}\\ &= \frac{M(a)}{a}-\frac{M(b)}{b}+\sum_{a<n\leq b}\frac{\mu(n)}{n}.\end{aligned}$$

Maintenant, on applique le lemme précédent et la majoration $\left|\frac{M(x)}{x}\right|\leq\frac{[x]}{x}\leq 1$, et on conclut.◇

À partir de maintenant, on fixe $a=\limsup_{x\to+\infty}\frac{|M(x)|}{x}$. On sait que $0\leq a\leq 1$. Par le théorème de Landau et le corollaire 2.2.1, qui suit du théorème de Chebyshev, si on prouve $a=0$, alors on aura $\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi(x)}{x/\log x}=1$.

Le théorème 5.1.3 établit $a\leq\prod_{p\leq y}\left(1-\frac{1}{p}\right)\int_1^{+\infty}\frac{|M(x,y)|}{x^2}dx$, lorsque $y\geq 2$. On divise l'intégrale en deux morceaux, $I_1(y)=\int_1^y\frac{|M(x,y)|}{x^2}dx$ et $I_2(y)=\int_y^{+\infty}\frac{|M(x,y)|}{x^2}dx$. Maintenant, si $x\leq y$, alors on a que

$$M(x,y)=\sum_{n\in S(x,y)}\mu(n)=\sum_{n\leq x}\mu(n)=M(x).$$

Donc, $I_1(y)=\int_1^y\frac{M(x)}{x^2}dx$. Observons que dans le corollaire 5.3.1 on a traité des intégrales de ce type-ci. Dans la suite, on va traiter ces deux intégrales.

Lemme 5.3.2 *Soit* $b>a$*. Alors,* $\limsup_{y\to+\infty}\frac{I_1(y)}{\log y}\leq b\delta$*, où* $\delta=\delta(a)<1$ *si* $a>0$*.*

preuve Prenons $b>a$. Il existe $x_0>0$ tel que $|M(x)|\leq bx$ si $x\geq x_0$. Si on prend $y>x_0$, il peut se construire une partition de $[x_0,y)$ de la forme $\{[x_j,x_{j+1})\}_{0\leq j\leq J}$, de façon que M ait signe constant sur chaque intervalle et vaille 0 sur x_j, pour $0<j<J$. En effet, posons

$$x_1=\sup\left\{x_0<t<y\,|\,\epsilon\left(M\left(x_0\right)\right)=\epsilon\left(M\left(t\right)\right)\right\}$$

où ϵ est la fonction signe qui prend ses valeurs dans $\{-1,0,1\}$, définie comme d'habitude. Si $x_1 < y$, on prend

$$x_2 = \sup\{x_1 < t < y \mid \epsilon(M(x_1+\varepsilon)) = \epsilon(M(t))\}$$

où $\varepsilon > 0$ assez petit afin que M ait le signe constant sur $(x_1, x_1+\varepsilon]$ et $x_1+\varepsilon < y$. Si $x_2 < y$, on applique le même argument. Ce processus achève en un nombre fini de pas, car $M(x) = \sum_{n\leq x} \mu(n)$ et $\mu(n) \in \{-1,0,1\}$. De plus, le dernier extrême obtenu est $x_{J+1} = y$. Ceci nous donne la partition cherchée. Comme M est de signe constant sur les intervalles construits, alors

$$T_j := \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{|M(x)|}{x^2}dx = \left|\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{M(x)}{x^2}dx\right| \leq 6.$$

En outre, l'annulation de M sur les extrêmes x_j, $0 < j < J$, permet d'écrire

$$|M(x)| = |M(x) - M(x_j)| = \left|\sum_{x_j < n \leq x} \mu(n)\right| \leq x - x_j.$$

Si on pose $\lambda_j = \log(x_{j+1}/x_j)$ et on fait le changement de variable $x = tx_j$ dans T_j, alors on trouve que $T_j = \left|\int_1^{\exp\lambda_j} \frac{M(tx_j)}{t^2 x_j}dt\right|$. Maintenat, on vient de prouver que $|M(tx_j)| \leq tx_j - x_j$ et on sait que $|M(tx_j)| \leq btx_j$. Donc, on a $T_j \leq \int_1^{\exp\lambda_j} \frac{1}{t}\min\left\{b, 1-\frac{1}{t}\right\}dt$. Comme $T_j \leq 6$, on trouve la majoration $T_j \leq T_j^* := \min\left\{6, \int_1^{\exp\lambda_j} \frac{1}{t}\min\left\{b, 1-\frac{1}{t}\right\}dt\right\}$.
On souhaite de majorer T_j^*. Pour ce faire, prenons $\delta = 1 - \frac{1}{24}a^2 \geq \frac{23}{24} > \frac{1}{2}$. Voyons que $T_j^* \leq b\delta\lambda_j$. Il s'agit de distinguer les deux cas suivants :

1. $b\lambda_j \geq 12$. Alors, $T_j^* \leq 6 \leq \frac{1}{2}b\lambda_j \leq \frac{23}{24}b\lambda_j \leq b\delta\lambda_j$

2. $b\lambda_j < 12$. Supposons d'abord que $\lambda_j \leq b$. Utilisons que $1-\frac{1}{t} \leq \log t$. Alors, $T_j^* \leq \int_1^{\exp\lambda_j} \log t \frac{dt}{t} = \frac{\lambda_j^2}{2} \leq \frac{1}{2}b\lambda_j \leq b\delta\lambda_j$
   Si on se place dans le cas contraire, $\lambda_j > b$, alors on divise l'intégrale dans l'expression de T_j^* en deux morceaux, comme suit :

   $$T_j^* \leq \int_1^{\exp b} \log t\frac{dt}{t} + \int_{\exp b}^{\exp\lambda_j} \frac{b}{t}dt = \frac{b^2}{2} + \lambda_j b - b^2 = b\lambda_j\left(1 - \frac{b}{2\lambda_j}\right).$$

   Comme $\frac{12}{\lambda_j} > b$, alors on trouve $-\frac{b}{2\lambda_j} = -\frac{1}{24}b\frac{12}{\lambda_j} < -\frac{1}{24}b^2 < -\frac{1}{24}a^2$. Donc, dans ce cas, on a aussi que $T_j^* \leq b\delta\lambda_j$.

Cette inégalité est finalement utilisée pour obtenir le résultat :

$$\begin{aligned} I_1(y) = \int_1^y \frac{|M(x)|}{x^2}dx &= \int_1^{x_0} \frac{|M(x)|}{x^2}dx + \sum_{0\leq j\leq J} T_j \\ &\leq \int_1^{x_0} \frac{|M(x)|}{x^2}dx + b\delta \sum_{0\leq j\leq J-1} \log\left(\frac{x_{j+1}}{x_j}\right) \\ &= \int_1^{x_0} \frac{|M(x)|}{x^2}dx + b\delta\log y - b\delta\log x_0 \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{I_1(y)}{\log y} \leq \frac{1}{\log y}\int_1^{x_0} \frac{|M(x)|}{x^2}dx + b\delta - b\delta\frac{\log x_0}{\log y}.$$

En prenant $\limsup_{y\to+\infty}$, il suit $\limsup_{y\to+\infty} \frac{I_1(y)}{\log y} \leq b\delta.\diamond$.

Dans l'intégrale $I_2(y)$ apparait la fonction $|M(x,y)|$. Il est clair qu'on s'intéresse à majorer cette fonction si on veut avancer. Le lemme suivant nous donne la majoration de laquelle on a besoin, en utilisant la fonction de Dickman.

Lemme 5.3.3 *Soient $\varepsilon > 0$ et $b > a$. Alors, uniformément en $1 \leq x^\varepsilon \leq y$, on a $|M(x,y)| \leq bx\rho(u)\left(1 + O\left(\frac{1}{\log(2x)}\right)\right)$, pour $u = \frac{\log x}{\log y}$.*

preuve Le premier pas consiste à obtenir un contrôle sur $M(x,y)\log x$ en fonction des nombres premiers plus petits ou égaux à y. Considérons la somme $\sum_{n\in S(x,y)} \mu(n)\log n$. Si $p \leq y$, $m \in S(x/p,y)$ et $p|m$, alors pm contient un facteur carré, de sort que le terme $\mu(pm)$ de la somme vaut 0. Alors, la dernière somme s'écrite comme

$$\sum_{p\leq y} \sum_{\substack{m\in S(x/p,y)\\ p\nmid m}} \mu(p)\mu(m)\log p = -\sum_{p\leq y} \sum_{\substack{m\in S(x/p,y)\\ p\nmid m}} \mu(m)\log p$$

$$= -\sum_{p\leq y} \log p \left(\sum_{m\in S(x/p,y)} \mu(m) - \sum_{\substack{m\in S(x/p,y)\\ p|m}} \mu(m) \right)$$

$$= -\sum_{p\leq y} \log p \left(M\left(x/p,y\right) - \sum_{\substack{m\in S(x/p,y)\\ p|m}} \mu(m) \right).$$

Traitons le deuxième terme entre parenthèses :

$$\left| \sum_{\substack{m\in S(x/p,y)\\ p|m}} \mu(m) \right| \leq \sum_{\substack{m\in S(x/p,y)\\ p|m}} 1 \leq \sum_{d\leq x/p^2} 1 = \left[x/p^2\right].$$

Donc, nous obtenons

$$\sum_{n\in S(x,y)} \mu(n)\log n = -\sum_{p\leq y} \left(M\left(x/p,y\right) + O\left(x/p^2\right)\right)\log p$$
$$= -\sum_{p\leq y} M\left(x/p,y\right)\log p - \sum_{p\leq y} O\left(x/p^2\right)\log p.$$

Comme la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\log n}{n^2}$ est convergente, alors on conclut que

$$\sum_{n\in S(x,y)} \mu(n)\log n = -\sum_{p\leq y} M\left(x/p,y\right)\log p + O(x).$$

D'ailleurs, en utilisant la formule de Stirling,

$$\left| \sum_{n\in S(x,y)} \mu(n)\log\left(x/n\right) \right| \leq \sum_{n\leq x} \log\left(x/n\right) \ll x.$$

Ces deux majorations permettent d'obtenir le contrôle de $M(x,y)\log x$ souhaité :

$$\begin{aligned} M(x,y)\log x &= \sum_{n\in S(x,y)} \mu(n)\log x \\ &= \sum_{n\in S(x,y)} (\log x - \log n)\,\mu(n) + \sum_{n\in S(x,y)} \mu(n)\log n \\ &= \sum_{n\in S(x,y)} \mu(n)\log(x/n) + \sum_{n\in S(x,y)} \mu(n)\log n \\ &= -\sum_{p\le y} M(x/p,y)\log p + O(x). \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe une constante $C\ge 0$ telle que pour $x,y\ge 1$ l'on ait

$$|M(x,y)|\log x \le \sum_{p\le y} |M(x/p,y)|\log p + Cx. \tag{1}$$

Prenons $x_0>0$ tel que $|M(x)|\le bx$ si $x\ge x_0$. Rappelons que si $y\ge x\ge x_0$ on a $|M(x,y)|=|M(x)|\le bx$. Définissons

$$h(v)=\frac{|M(y^v,y)|}{b\rho(v)y^v}$$

$$h^*(u)=\sup_{u_0\le v\le u} h(v)$$

où, comme d'habitude, $u_0=\frac{\log x_0}{\log y}$. Observons que ainsi définie, h^* est une fonction croissante en u. Elle nous permet de récrire l'hypothèse $|M(x)|\le bx$ si $x\ge x_0$ comme $h^*(1)\le 1$. En effet,

$$\begin{aligned} h^*(1) &= \sup_{u_0\le v\le 1} \frac{|M(y^v,y)|}{b\rho(v)y^v} = \sup_{u_0\le v\le 1}\frac{|M(y^v,y)|}{by^v} \\ &= \sup_{x_0\le x\le y}\frac{|M(x,y)|}{bx} = \sup_{x_0\le x\le y}\frac{|M(x)|}{bx}\le 1 \end{aligned}$$

On peut récrire aussi l'objectif qu'on cherche à montrer :

$$h^*(u)\le 1+O_k\left(\frac{1}{\log y}\right)$$

où $1\le u\le k$.
Fixons $u\in[1,k]$, $v\in[u_0,u]$. Posons $x=y^v$ et $v_p=\frac{\log p}{\log y}$. En appliquant (1) et en divisant par $b\rho(v)y^v\log(y^v)$, on obtient que $h(v)\le S_1+S_2+\frac{C}{b\rho(v)\log(y^v)}$, où l'on a posé :

- $S_1=\sum_{\substack{p\le y\\ y^v/p>x_0}} \frac{h^*(u-v_p)\rho(v-v_p)\log p}{p\rho(v)\log(y^v)}$
- $S_2=\sum_{\substack{p\le y\\ y^v/p\le x_0}} \frac{|M(y^v/p,y)|\log p}{b\rho(v)y^v\log(y^v)}$

Voyons, d'abord, que le premier théorème de Mertens permet de contrôler S_2 par une fonction comme le troisième terme dans l'expression de h. On considère $\frac{|M(y^v/p,y)|\log p}{b\rho(v)\log(y^v)(y^v/p)p}$, qui est la fonction sommée dans S_2. Par définition de $M(x,y)$, on trouve $\frac{|M(y^v/p,y)|}{b(y^v/p)}\le 1$. Si de plus $y^v<p$, alors $\frac{y^v}{p}<1$ et

$\frac{|M(y^v/p,y)|}{b(y^v/p)} = 0$. Donc,

$$\begin{aligned} S_2 &\le \sum_{y^v/x_0 \le p \le y^v} \frac{\log p}{p\rho(v)v\log y} = \frac{1}{v\rho(v)\log y}\left(\sum_{p\le y^v}\frac{\log p}{p} - \sum_{p<y^v/x_0}\frac{\log p}{p}\right) \\ &= \frac{1}{v\rho(v)\log y}\left(\log\left(y^v\right) - \log\left(y^v/x_0\right) + O(1)\right) \ll \frac{1}{v\rho(v)\log y}. \end{aligned}$$

Ceci assure qu'il existe une constante $C(b) \ge 0$ telle que

$$\begin{aligned} h(v) &\le S_1 + \frac{C(b)}{v\rho(v)\log y} \\ &\le \sum_{p\le y} \frac{h^*\left(u-v_p\right)\rho\left(v-v_p\right)\log p}{pv\rho(v)\log y} + \frac{C(b)}{v\rho(v)\log y}. \end{aligned}$$

Maintenant, il s'agit de comprendre le comportement de la somme dans cette inégalité. Pour $0 \le \theta \le 1$, posons $U_\theta = \sum_{p\le y^\theta} \frac{\rho(v-v_p)\log p}{pv\rho(v)\log y}$. En divisant la somme apparaissant dans la majoration de h, $\sum_{p\le y} = \sum_{p\le y^{1/2}} + \sum_{y^{1/2}<p\le y}$, et en utilisant que $h^*\left(u-v_p\right) \le h^*(u)$, si $p \le y^{1/2}$, et $h^*(u) \le h^*\left(u-1/2\right)$, si $y^{1/2} < p \le y$, car h^* croissante, on obtient

$$\begin{aligned} h(v) &\le h^*(u)U_{1/2} + h^*\left(u-1/2\right)\left(U_1 - U_{1/2}\right) + \frac{C(b)}{v\rho(v)\log y} \\ &= \left(h^*(u) - h^*\left(u-1/2\right)\right)U_{1/2} + h^*\left(u-1/2\right)U_1 + \frac{C(b)}{v\rho(v)\log y}. \end{aligned} \tag{2}$$

Estimons $U_{1/2}$ et U_1, en utilisant le lemme (S). On observe que $U_\theta = \sum_{p\le y^\theta} a_p b(p)$, où $a_p = \frac{\log p}{p\log y}$ et $b(t) = \frac{\rho(v-\log t/\log y)}{v\rho(v)}$. Ceux-ci vérifient les hypothèses du lemme (S). Grâce au premier théorème de Mertens,

$$\sum_{p\le y^\theta} a_p = \sum_{p\le y^\theta} \frac{\log p}{p\log y} = \frac{1}{\log y}\left(\log\left(y^\theta\right) + O(1)\right) = \theta + O\left(\frac{1}{\log y}\right).$$

Si $r\left(\theta\right) = \frac{1}{v\rho(v)}\int_0^\theta \rho\left(v-t\right)dt$, alors le lemme (S) fournit $U_\theta = r\left(\theta\right) + O_k\left(\frac{1}{\log y}\right)$. Donc, pour estimer $U_{1/2}$ et U_1 il suffit d'étudier $r\left(1/2\right)$ et $r(1)$:

- Le changement de variables $v - t = w$ donne $r(1) = \frac{1}{v\rho(v)}\int_{v-1}^v \rho(w)dw$, qui vaut 1 d'après les propriétés de la fonction Dickman énoncées (5.2).
- Voyons que $r\left(1/2\right) \le 1/2$. Cela résulte de $r(1) = 1$ et en écrivant $\int_0^1 = \int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1$. En effet, si on procède comme ça, on obtient

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{v\rho(v)}\int_0^{1/2}\rho(v-t)dt + \frac{1}{v\rho(v)}\int_{1/2}^1\rho(v-t)dt \\ &\ge \frac{1}{v\rho(v)}\int_0^{1/2}\rho(v-t)dt + \frac{1}{v\rho(v)}\int_{1/2}^1\rho\left(v-t+1/2\right)dt \\ &= \frac{1}{v\rho(v)}\int_0^{1/2}\rho(v-t)dt + \frac{1}{v\rho(v)}\int_0^{1/2}\rho(v-t)dt = 2r\left(1/2\right) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la décroissance de ρ pour l'inégalité et on a fait le changement $z = t - 1/2$ pour obtenir l'égalité finale. Donc, $r(1/2) \leq 1/2$.

On retourne à (2). Ce qu'on vient de prouver montre que

$$h(v) \leq \frac{1}{2}h^*(u) + \frac{1}{2}h^*(u - 1/2) + O_k\left(\frac{1}{\log y}\right) + \frac{C(b)}{v\rho(v)\log y}.$$

En prenant $\sup\limits_{u_0 \leq v \leq u}$ aux deux côtés de cette inégalité,

$$h^*(u) \leq h^*(u - 1/2) + O_k\left(\frac{1}{\log y}\right) \tag{3}$$

Si $u - 1/2 \leq 1$, alors comme h^* est croissante et $h^*(1) \leq 1$, (3) fournit $h^*(u) \leq 1 + O_k\left(\frac{1}{\log y}\right)$ et on a finit. Si on est placé dans le cas contraire, $u - 1/2 > 1$, on applique (3) en remplaçant u par $u - 1/2$. On réitére ce processus, qui finit en un nombre finit de pas, plus petit ou égal à $2k$, car $u \in [1, k]$. On obtient, à la fin, que $h^*(u) \leq 1 + O_k\left(\frac{1}{\log y}\right)$. Ceci achève la preuve.$\diamond$

De ce lemme on en déduit le corollaire suivant, qui est l'analogue du lemme 5.3.2 pour $I_2(y) = \int_y^{+\infty} \frac{|M(x,y)|}{x^2}dx$.

Corollaire 5.3.2 *Soit $b > a$. Alors* $\limsup\limits_{y \to +\infty} \frac{I_2(y)}{\log y} \leq b\left(e^\gamma - 1\right)$.

preuve Prenons $k \geq 1$ un entier quelconque et considérons la division $\int_y^{+\infty} = \int_y^{y^k} + \int_{y^k}^{+\infty}$. Traitons les deux morceaux :

- Posons $u = \frac{\log x}{\log y}$. Alors

$$\begin{aligned}\int_{y^k}^{+\infty} \frac{|M(x,y)|}{x^2}dx &\leq \int_{y^k}^{+\infty} \frac{\Psi(x,y)}{x^2}dx \\ &\ll \int_{y^k}^{+\infty} \frac{xe^{-u/2}}{x^2}dx = \int_k^{+\infty} e^{-u/2}\log y\, du \\ &\ll e^{-k/2}\log y.\end{aligned}$$

- Le lemme précédent permet d'écrire

$$\int_y^{y^k} \frac{|M(x,y)|}{x^2}dx = \int_y^{y^k} \frac{1}{x^2}bx\rho(u)\left(1 + O_k\left(\frac{1}{\log 2x}\right)\right)dx.$$

  Faisons le changement de variable $u = \frac{\log x}{\log y}$. Alors,

$$\begin{aligned}\int_y^{y^k} \frac{|M(x,y)|}{x^2}dx &= \int_1^k \log y\, b\rho(u)\left(1 + O_k\left(\frac{1}{\log 2 + u\log y}\right)\right)du \\ &= \int_1^k b\rho(u)\left(\log y + O_k\left(\frac{1}{u}\right)\right)du = b\log y\int_1^k \rho(u)du \\ &+ b\int_1^k \rho(u)O_k(1)du = (b\log y + O_k(1))\int_1^k \rho(u)du.\end{aligned}$$

Rassemblons tout ça pour obtenir

$$\frac{I_2(y)}{\log y} \le b\left(1 + O_k\left(\frac{1}{\log y}\right)\right)\int_1^k \rho(u)du + Ce^{-k/2},$$

pour certaine constante $C \ge 0$. Si k reste fixe, alors

$$\limsup_{y\to+\infty} \frac{I_2(y)}{\log y} \le b\int_1^k \rho(u)du + Ce^{-k/2}.$$

Finalement, il manque à faire tendre k vers l'infini, ce qui fournit l'inégalité souhaitée :

$$\limsup_{y\to+\infty} \frac{I_2(y)}{\log y} \le b\int 1^{+\infty}\rho(u)du = b\,(e^\gamma - 1)\,.$$

$\diamond$

Le lemme 5.3.2 et le corollaire 5.3.2 sont les résultats clés dans la preuve de Daboussi du théorème des nombres premiers. On en donne la preuve tout de suite.

Théorème 5.3.1 (Théorème des nombres premiers) *Soit* $\pi(x) = \sum\limits_{p\le x} 1$, $x \ge 2$. *Alors,* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1$

preuve Par le corollaire 2.2.1 et le théoréme de Landau, on se ramène à montrer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{M(x)}{x} = 0$ ou, encore, $a = 0$.

Soit $b > a$. Alors, $\limsup\limits_{y\to+\infty} \frac{I_1(y)}{\log y} \le b\delta$, où $\delta = \delta(a) < 1$ si $a > 0$ (lemme 5.3.2). On a aussi $\limsup\limits_{y\to+\infty} \frac{I_2(y)}{\log y} \le b\,(e^\gamma - 1)$ (corollaire 5.3.2). On rappele que $a \le \prod\limits_{p\le y}\left(1 - \frac{1}{p}\right)(I_1(y) + I_2(y))$ (théorème 5.1.3). On applique la formule de Mertens au produit de cette inégalité. On obtient que

$$a \le \frac{1}{e^\gamma \log y + O(1)}\,(I_1(y) + I_2(y))$$

Donc, en prenant $\limsup\limits_{y\to+\infty}$, $a \le \frac{1}{e^\gamma} b\,(\delta + e^\gamma - 1)$. Ceci vaut pour $b > a$ quelconque. Donc, en faisant $b \to a^+$, on trouve $a \le \frac{1}{e^\gamma} a\,(\delta + e^\gamma - 1)$. Celui-ci implique que $a = 0$. En effet, si $a > 0$, alors on déduirait que $e^\gamma \le \delta + e^\gamma - 1$, d'où $\delta \ge 1$, ce qui contredit que $\delta < 1$ lorsque $a > 0$. Donc, $a = 0$, qui achève la preuve.$\diamond$

Références

[1] G. Tenembau et M. Mendés-France, *Les nombres premiers*. Références : Que sais-je ? no 571, (PUF, 1997)

Notations

Ci-dessus, on peut trouver quelques notations et conventions qui ont été suivies le long du texte.

- d, j, k, m, n, r désignent des nombres entiers.

- $d|n$: d divise n.
- $d \not| n$: d ne divise pas n.
- p : nombre premier.
- $p^s \parallel n$: $p^s|n$ et $p^{s+1} \not| n$.
- $P^+(n)$: plus grand facteur premier de n. Par convention, $P^+(1) = 1$.
- $P^-(n)$: plus petit facteur premier de n. Par convention, $P^-(1) = \infty$.
- $\mathbf{1}_E$: fonction indicatrice de l'ensemble E.
- $f(x) = \underset{x \to +\infty}{O}(g(x))$: $\exists x_0 > 0, C \geq 0 \,|\, \forall x \geq x_0,\, |f(x)| \leq C\,|g(x)|$.
- $f(x) = \underset{x \to +\infty}{o}(g(x))$: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x_0 > 0 \,|\, \forall x \geq x_0,\, |\,|f(x)| \leq \varepsilon\,|g(x)|$.
- $f(x) \ll g(x)$: $f(x) = \underset{x \to +\infty}{O}(g(x))$.
- $f(x) = \underset{x \to +\infty}{O_y}(g(x))$: $\exists x_0 > 0, C(y) \geq 0 \,|\, \forall x \geq x_0,\, |f(x)| \leq C(y)\,|g(x)|$.
- $f(x) \ll_y g(x)$: $f(x) = \underset{x \to +\infty}{O_y}(g(x))$.
- $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x \frac{dt}{t}$.
- $\gamma = \lim_{N \to +\infty} \left(\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \right) - \log N \right)$.