
CARTES PLANAIRES ALÉATOIRES

Lucas Gerin

Présentation du thème de recherche,
encadré par **Philippe Chassaing**.

Septembre 2005

Cette présentation consiste en un résumé de mon mémoire de DEA [7] qui consistait lui-même en une étude de [4], et que j'ai réalisé en juin 2004 sous la direction de Philippe Chassaing. J'ai toutefois réorganisé toute la structure du mémoire afin de bien insister sur les motivations (physiques et mathématiques), ainsi que sur les perspectives. Par ailleurs, j'ai essayé de rendre ce texte entièrement compréhensible par un élève ayant suivi uniquement un cours de Probabilités de Licence.

1 Introduction

L'étude combinatoire des cartes planaires a commencé avec Tutte [13] dans les années 60. Elle a beaucoup évolué lors des quarantes dernières années sous l'impulsion des combinatoriciens (l'étude de tels objets étant liée historiquement à la résolution du problème des quatre couleurs) et a connu un regain d'intérêt lorsque les physiciens théoriques y ont vu un outil intéressant en théorie quantique des champs.

Cette présentation est construite de la façon suivante : on introduit tout d'abord deux outils essentiels de combinatoire que sont les *quadrangulations planaires* et les *arbres bien étiquetés*, pour pouvoir définir l'objet central de la discussion, introduit par Chassaing & Durhuus dans [4], la *quadrangulation plane infinie uniforme*. Ensuite on présente brièvement les motivations physiques d'une telle étude, puis on essaie de comprendre dans quelle mesure la réponse mathématique apportée par [4] au problème physique est satisfaisante. Finalement, on présente quelques perspectives liées à ces domaines.

2 Combinatoire des arbres et des cartes

2.1 Arbres bien étiquetés

Essayons maintenant d'introduire de la façon la moins formelle possible les outils indispensables à la compréhension de l'exposé.

Dans toute la suite, on considère des arbres enracinés avec une arête racine, éventuellement infinis, mais dans lesquels les degrés des sommets sont finis. La taille d'un arbre est le nombre d'arêtes qui le composent.

Un *arbre étiqueté* est un arbre dans lequel on associe à chaque sommet un entier (une *étiquette*), avec la contrainte que sur une arête, les deux étiquettes diffèrent au plus d'un. Si, de plus, l'étiquette de la racine est 1 et que toute étiquette dans l'arbre est supérieure ou égale à 1 alors l'arbre est un *arbre bien étiqueté*.

On a besoin pour parler de convergence d'un arbre de se donner une distance sur l'ensemble des *arbres bien étiquetés*, elle est décrite formellement dans mon mémoire de DEA. Essentiellement, deux arbres sont proches pour cette distance s'ils sont "identiques près de la racine".

Nous allons construire maintenant une mesure de probabilités sur les arbres étiquetés infinis, comme limite de mesure uniforme sur les arbres finis. Notons μ_N , la mesure de probabilité uniforme sur l'ensemble fini (c'est clair) des *arbres bien étiquetés* à N arêtes.

Par des arguments de séries génératrices et d'analyse complexe, on montre alors le théorème suivant, résultat central de [4] :

Théorème 2.1. *La mesure μ_N converge faiblement vers une mesure de probabilité μ sur l'ensemble des arbres bien étiquetés infinis.*

2.2 La mesure sur les arbres infinis

Une propriété importante de la mesure μ est qu'elle charge uniquement une classe particulière d'arbres. On appelle *tige* un chemin infini partant de la racine dans un arbre. Alors il est montré dans [4] que μ ne charge que les arbres ayant exactement une *tige*. On appelle *branche* un sous-arbre qui part de la *tige*.

Ce qui est remarquable pour l'utilisation de cette mesure, c'est que l'on peut avoir une connaissance très précise des étiquettes des sommets constituant la tige, ainsi que des branches. La marche aléatoire constituée par les étiquettes de la tige est une chaîne de Markov très simple, et la loi de chaque branche ne dépend que de l'étiquette sur laquelle débute cette branche. Ce qui est déterminant pour la suite, c'est que grâce à cette description probabiliste simple des étiquettes dans l'arbre infini, on peut estimer les fréquences de chaque étiquette dans l'arbre, et ce résultat qualitatif aura une signification physique lorsque nous étudierons la *quadrangulation plane infinie uniforme*.

Voici ce résultat, expliqué dans [7] : le nombre moyen $\mathbb{E}_\mu [N_j]$ d'étiquettes j dans un arbre bien étiqueté de mesure μ est

Théorème 2.2.

$$\mathbb{E}_\mu [N_j] = \Theta(j^3).$$

2.3 Cartes planes et quadrangulations

Parlons maintenant de la classe d'objet la plus importante de cette présentation, et qui sera probablement le sujet principal de mon travail, au moins dans un premier temps, les *cartes planes*.

Tout d'abord, un *graphe planaire* est un graphe que l'on peut dessiner dans un plan sans que les arêtes ne se chevauchent. Pour simplifier on ne considère ici que des graphes *localement finis*, c'est-à-dire dans lesquels chaque sommet n'a qu'un nombre fini de voisins. Alors qu'un graphe est défini tout simplement comme une relation entre ses différents sommets, une *carte plane* est une structure un peu plus compliquée : grossièrement, on rajoute des notions de géométrie à un graphe planaire, par exemple on suppose qu'il existe des notions de faces, d'orientation, et que la formule d'Euler a un sens, le plus simple est de considérer la Figure 1. En particulier, à un seul graphe planaire on peut associer plusieurs cartes planes.

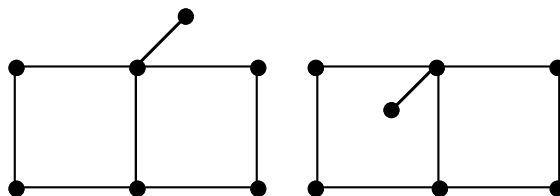


FIG. 1 – Le même graphe correspondant à deux cartes planes.

Une carte plane infinie est le plongement dans la sphère \mathbb{S}^2 d'un graphe planaire infini G . Une face est une composante connexe de $\mathbb{S}^2 \setminus G$, son degré est le nombre d'arêtes qui la bordent. On quotiente l'ensemble convenablement de façon à obtenir un ensemble de cartes planes (deux graphes sont équivalents en tant que cartes s'ils sont équivalents en tant que graphes, et s'ils ont même nombre de faces, de même degré, etc.). Cela revient à quotienter l'ensemble des plongements d'un graphe dans la sphère par rapport aux déformations par des homéomorphismes de \mathbb{S}^2 .

Définition 2.1. Une quadrangulation est une carte plane dont chaque face est de degré 4.

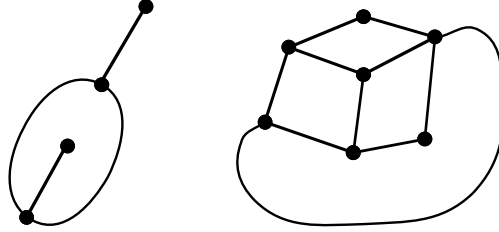


FIG. 2 – Deux quadrangulations de la sphère.

2.4 La bijection de Schaeffer

L'originalité de [4], c'est d'utiliser une bijection décrite pour la première fois par G.Schaeffer dans [12] entre *arbres bien étiquetés* et quadrangulations. Cette bijection entre arbres et quadrangulations finis est adaptée par Chassaing & Durhuus pour en faire une application \mathcal{Q} de l'ensemble des arbres bien étiquetés infinis vers l'ensemble des quadrangulations infinies. La mesure image de μ par \mathcal{Q} est alors une mesure de probabilités que l'on peut interpréter comme une *quadrangulation planaire infinie uniforme*.

Encore une fois, tous les détails techniques sont décrits dans [4] et [7], et essayons plutôt de comprendre la motivation physique qui rend extrêmement intéressante l'introduction de cette *quadrangulation planaire infinie uniforme*.

3 Un peu de géométrie quantique

La construction de surfaces aléatoires discrètes intervient de façon déterminante en mécanique quantique, via la géométrie quantique (voir par exemple [1] pour une introduction).

3.1 L'intégrale de Feynman

Classiquement en mécanique quantique, on travaille sur la probabilité pour une particule d'être à un instant donnée dans une partie de l'espace. Considérons une particule se déplaçant, pour simplifier, sur \mathbb{R} . Son état à l'instant t est donné par une amplitude de probabilité, c'est-à-dire une fonction $\Psi(t, \cdot)$ à valeurs dans \mathbb{C} vérifiant $\|\Psi(t, \cdot)\|_2^2 = 1$. Alors, pour $A \subset \mathbb{R}$ suffisamment régulier, on interprète

$$P(A) \stackrel{\text{def}}{=} \int_A |\Psi(t, \xi)|^2 d\xi$$

comme la probabilité pour cette particule d'être dans A à l'instant t . Si l'on suppose que ce système vérifie l'équation de Schrödinger, cela donne

$$\Psi(t, \cdot) = (e^{-\frac{i}{\hbar}tH} \Phi), \quad (3.1)$$

où H désigne l'opérateur hamiltonien du système.

Feynman (voir par exemple [8]) introduit l'*amplitude de transition* $\Psi(0, t; u, \xi)$ pour aller de u à ξ entre 0 et t . C'est la fonction qui vérifie

$$\Psi(t, \xi) = \int_{\mathbb{R}} \Psi(0, t; u, \xi) \phi(u) du,$$

où ϕ est une densité de probabilités sur \mathbb{R} qui désigne la position de la particule à l'instant 0.

L'idée initiale de Feynman pour généraliser (3.1) est de considérer l'intégrale abstraite suivante, appelée *intégrale de Feynman* :

$$\Psi(0, t; u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{K} \int_{\mathcal{C}_{u,v}^{0,t}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(x)\right) \mathcal{D}x. \quad (3.2)$$

$\mathcal{C}_{u,v}^{0,t}$ désigne l'ensemble des chemins¹ x allant de u à v entre les instants 0 et t ; \mathcal{D} est pour l'instant une mesure "uniforme sur tous les chemins" et K est une constante de renormalisation.

$S(x)$ est l'action classique associée au chemin x :

$$S(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - V(x(s)) ds, \quad (3.3)$$

où $V(x)$ est l'énergie potentielle du système à la position x et m la masse de la particule.

Telle quelle, cette définition n'est clairement pas satisfaisante, elle pose au moins trois problèmes :

1. On peut montrer (voir [8] Th. 3.1.3) que si μ est une mesure sur $\mathcal{C}_{u,v}^{0,t}$ invariante par translation et telle qu'il existe un ouvert de mesure finie, alors μ est la mesure nulle.
2. Même si l'on arrive à définir proprement la mesure $\mathcal{D}x$, l'action $S(x)$ est définie sur $\mathcal{C}_{u,v}^{0,t}$ alors qu'elle met en jeu la dérivée du chemin x (!).
3. Même la constante K n'est pas claire puisque l'on considère les chemins géométriques, K devrait donc être le "volume du groupe des homéomorphismes croissants", a-t-il une \mathcal{D} -mesure finie ?

3.2 La gravité quantique simpliciale

Pour résoudre le problème 1), les physiciens ont défini des modèles de cartes aléatoires, sous le nom de *2-dimensional quantum gravity*. Il s'agit de donner une définition opérationnelle de (3.2) directement sur des surfaces de Riemann quelconques de dimension 2. L'idée générale est de discrétiser la surface étudiée avec un carte planaire, déterministe ou aléatoire.

Soit donc une surface de Riemann M de dimension 2, les physiciens préfèrent considérer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{\text{Riem}(M)} \mathcal{D}[g] e^{-S_g}. \quad (3.4)$$

¹Ici, un chemin est un chemin géométrique, c'est-à-dire l'ensemble des courbes paramétriques quotientés par rapport aux reparamétrisations par un homéomorphisme croissant, cela rend la définition de (3.2) encore plus difficile ! Voir [4], section 2.2.1 pour plus de détails.

On cherche à intégrer sur un ensemble des métriques sur M . Le terme S_g est défini par

$$S_g \stackrel{\text{def}}{=} K \int dx \sqrt{|g|}.$$

On voit l'analogie avec (3.3) mais cette fois il n'apparaît pas de dérivée.

Pour donner un sens à (3.4), l'idée originale de Regge (voir [1, ?]) est d'approcher M par des *variétés linéaires par morceaux* (VLM). Considérons M comme une surface de dimension 2 plongée dans \mathbb{R}^3 , et supposons que l'on ait une carte planaire T dont les sommets sont sur M , et les arêtes des segments dans \mathbb{R}^3 . Alors on peut définir une métrique sur T de la façon suivante :

1. La métrique est *plane* à l'intérieure d'une face (*i.e.* la courbure est nulle).
2. La métrique est continue sur les arêtes.

On obtient ainsi une variété linéaire par morceaux. La métrique d'une VLM est entièrement déterminée par la longueur $l_{i,j}$ de chaque arête (i, j) . La mesure \mathcal{D} dans (3.4) est alors remplacée par une *marche aléatoire en milieu aléatoire* :

1. Une mesure de probabilités sur une certaine classe de carte planaire recouvrant cette surface,
2. Conditionnellement au tirage de cette carte planaire, une mesure sur tous les chemins de u à v (la mesure associée à la marche aléatoire symétrique dans T).

Les physiciens pensent alors que : premièrement, ce modèle est une généralisation convenable aux surfaces de Riemann quelconques de dimension 2 de l'approche de Feynman, deuxièmement qu'il admet une limite continue lorsque la longueur des arêtes² de la carte tend vers 0.

3.3 La réponse de Chassaing & Durhuus

Voyons comment la combinatoire permet de répondre partiellement à ce problème. On a donc défini une mesure de probabilités sur l'ensemble des quadrangulations infinies. On comprend mieux maintenant l'intérêt d'une telle mesure, puisqu'elle permet de se donner une structure de *Variété Linéaire par Morceaux* (presque une surface de Riemann). Dans un sens on vient de "tirer une géométrie au hasard".

Le résultat le plus remarquable dans l'étude qualitative de la mesure sur les arbres bien étiquetés est la connaissance de la fréquence de chacune des étiquettes dans l'arbre. Justement le nombre d'étiquettes k dans un arbre bien étiqueté correspond au nombre de sommets à distance k de la racine dans la quadrangulation qui lui est associée par la bijection \mathcal{Q} . On peut alors estimer une sorte de "dimension" du graphe obtenu, que l'on appelle *dimension de Hausdorff*³ d'un graphe : c'est le réel d_H , s'il existe, qui vérifie

$$B_r = \Theta(r^{d_H}), r \rightarrow \infty, \quad (3.5)$$

où B_r est le nombre de sommets dans le graphe à distance r de la racine.

On trouve alors 4 comme dimension pour la *quadrangulation infinie uniforme*, résultat qui était prévu heuristiquement dans [1, ?].

²Dans un sens encore à définir puisque pour l'instant nos cartes n'ont pas la longueur...

³Ce nombre correspond à la dimension classique dans le cas d'un réseau régulier.

4 Perspectives

Essayons maintenant de dégager quelques pistes liées aux structures étudiées dans cette présentation.

4.1 En Combinatoire et Algorithmique

Une étape passionnante consisterait à essayer de construire directement la *quadrangulation infinie uniforme* (ou plutôt une mesure qui lui ressemble), sans avoir besoin de passer par les arbres bien étiquetés. En effet une telle construction, si elle est possible permettrait d’avoir une bien meilleure vision géométrique de cet objet.

Au niveau algorithmique, on a également envie de pouvoir générer aléatoirement de telles quadrangulations. D’une façon plus générale la génération aléatoire de cartes planaires est un domaine très dynamique, motivé par exemple par la modélisation des réseaux de télécommunications. De ce point de vue Angel & Schramm [2] ont obtenu des résultats extrêmement intéressants puisqu’ils ont construit une mesure sur les triangulations planaires infinies appelée *Uniform Infinite Planar Triangulation* de manière plus directe que Chassaing & Durhuus.

4.2 En Géométrie Aléatoire

À partir d’un graphe tel que la *quadrangulation planaire infinie uniforme*, les probabilistes ont naturellement envie de calculer des probabilités de percolation.

Rappelons brièvement ce qu’est la percolation. Colorions chaque arête d’un graphe en noir avec probabilité p et en blanc avec probabilité $1 - p$, indépendamment les unes des autres. On dit qu’il y a *percolation* s’il existe une composante connexe infinie dans le graphe composée uniquement d’arêtes noires, et qui contient l’origine. Le calcul de la probabilité de cet événement (motivé à l’origine par la physique statistique) a déjà été obtenu pour un certain nombre de graphes déterministes, et justement par Angel & Schramm pour leur *Uniform Infinite Planar Triangulation*.

D’une façon plus générale, toujours en s’intéressant à la géométrie de grandes cartes planaires, certains combinatoriciens (voir par exemple [10]) essaient d’obtenir des estimations du type “inégalités isopérimétriques” dans des graphes, mais on se heurte ici à des problèmes liés à la structure discrète des objets étudiés.

4.3 En Probabilités des Processus

Bien souvent en probabilités, l’étude d’objets discrets intéressants (marches aléatoires, arbres, graphes, etc...) incite à considérer un passage à la limite de façon à obtenir une version “continue” d’un tel objet : mouvement brownien, arbre continu d’Aldous par exemple. C’est ce qu’ont fait Marckaert & Mokkadem [11] en construisant une quadrangulation planaire continue, la *Brownian Map*, toujours à partir de la bijection de Schaeffer. J’aimerais mieux comprendre la construction de cet objet, notamment les propriétés laissées invariantes par le passage à la limite, et avoir une vision géométrique et physique de la *Brownian Map*.

4.4 En Physique Théorique

D’un point de vue plus personnel, je souhaiterais comprendre le sens physique de la dimension 4 obtenue indépendamment par Chassaing & Durhuus d’un côté, Angel

& Schramm de l'autre, et justifié physiquement bien avant, par exemple dans [3, 1]. Outre une meilleure compréhension de la motivation physique de l'étude des cartes planaires, cela me permettrait de mieux saisir les intuitions géniales de certains physiciens lorsqu'ils font de la combinatoire.

Remerciements. J'ai l'occasion ici de remercier encore une fois Philippe Chassaing de m'avoir encadré pour mon mémoire de DEA et d'avoir accepté de m'encadrer pour la thèse. Je le remercie également et peut-être plus encore pour m'avoir accompagné dans mes réflexions depuis un an et demi.

Je tiens aussi à saluer toutes les personnes qui ont pris le temps cette année de discuter avec moi du travail de recherche, notamment aux journées ALEA 2005, journées extrêmement agréables qui ont confirmé mon goût pour la combinatoire et ont achevé de me convaincre de faire une thèse dans ce domaine.

Références

- [1] J.Ambjørn, B.Durhuus & T.Jónsson (1997); *Quantum gravity, a statistical field theory approach*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics.
- [2] O.Angel & O.Schramm (2003). Uniform Infinite Planar Triangulation. *Comm. Math. Phys.* vol. 241, no. 2-3, 191–213.
- [3] J.Bouttier, P.Di Francesco & E.Guitter (2003). Geodesic distance in planar graphs. *Nucl.Phys.* B663 535-567.
- [4] P.Chassaing & B.Durhuus (2003); Local limit of labelled trees and expected volume growth in a random quadrangulation. à paraître. PR/0311532.
- [5] P.Chassaing & G.Schaeffer (2002); Random planar lattices and integrated superBrownian excursion. *Proba. Th. and related fields*. soumis.
- [6] R.Cori & B.Vauquelin (1981); Planar maps are well labelled trees. *Canad. J. Math.*, 33(5), 1023 :1042.
- [7] L.Gerin (2004); Arbres aléatoires et cartes planaires. Mémoire de DEA, Université Paris XI.
- [8] G.W.Johnson & M.L.Lapidus (1999); *The Feynman integral and Feynman's operational calculus*. Oxford Mathematical Monograph.
- [9] J.-F.Le Gall; Notes du cours de DEA *Arbres aléatoires* à l'Université Paris VI. Disponible sur le site internet de l'auteur.
- [10] R.Lyons & Y.Peres (2004); *Probability on Trees and Networks*. Livre disponible sur internet.
- [11] J.-F.Marckert & A.Mokkadem (2004). Limit of Normalized Quadrangulations : the Brownian map. prépublication.
- [12] G.Schaeffer (1998); Conjugaisons d'arbres et cartes combinatoires. Thèse, Université Bordeaux I.
- [13] W.T. Tutte. (1963); A census of planar maps. *Canad. J. Math.*, 15, 249 :271.