

Introduction à la théorie des nœuds

Élie GOUDOUT
&
Amine MARRAKCHI

Mémoire encadré par M. Benjamin ENRIQUEZ.

Juin 2013

Résumé

Ce texte est une présentation de quelques aspects de la théorie des nœuds et entrelacs, et de leurs invariants. On présente notamment la factorisation des nœuds en nœuds premiers, l'approche liée à la théorie des surfaces (surfaces de Seifert), l'approche diagrammatique fondée sur la théorie de Reidemeister. Cette approche nous conduit à la construction du *groupe de colorabilité* d'un diagramme qui fournit un bon invariant de nœuds. Nous présentons une variante de ce groupe, que nous relierons au module d'Alexander qui est construit de manière topologique. Nous présentons également la notion de groupe et quandle d'un nœud, ainsi qu'un résultat sur la présentation de ce groupe : la présentation de Wirtinger. Comme autre application du théorème de Reidemeister, nous présentons la théorie du polynôme de Jones.

Table des matières

1	Surfaces de Seifert et factorisation des nœuds	4
1.1	Somme de nœuds	4
1.2	Surfaces de Seifert	5
1.3	Genre d'un nœud	6
1.4	nœuds premiers et factorisation	8
2	Théorie de Reidemeister et applications	11
2.1	Théorème de Reidemeister	11
2.2	Colorabilité	12
2.3	n -coloration	13
2.3.1	Groupe de colorabilité	13
2.3.2	$\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module associé à un entrelacs	15
3	Groupe fondamental et quandle d'un entrelacs	16
3.1	Présentation de Wirtinger	16
3.2	Quandle d'un entrelacs L	16
3.3	Relation entre groupe fondamental et quandle d'un entrelacs L : point de vue algébrique	17
3.4	Construction topologique du quandle d'un entrelacs	18
4	Module et polynôme d'Alexander	18
4.1	Définition du module d'Alexander	19
4.2	Présentation du module d'Alexander	19
4.3	Matrice de présentation et polynôme d'Alexander	22
5	Polynômes de Jones	23
5.1	Construction du polynôme de Jones : méthode de Kauffman	23
5.2	Equation fonctionnelle et propriétés du polynôme de Jones	25

Introduction

La théorie mathématique des nœuds ne fait ses débuts qu'au 19^{ème} siècle. Cependant, que ce soit pour des raisons esthétiques, symboliques ou même pratiques, l'intérêt de l'Homme pour les nœuds et les entrelacs remonte à bien plus longtemps. Ils sont omniprésents dans l'art décoratif celte dès 450 ap. JC et certains, comme le nœud de trèfle ou les anneaux borroméens, sont utilisés dans la symbolique chrétienne pour évoquer la trinité. On en trouve aussi des représentations dans presque toutes les cultures et les civilisations.

L'intérêt des physiciens et des mathématiciens pour les nœuds et les entrelacs ne commence à se manifester qu'avec les travaux de Gauss en électromagnétisme où il définit et calcule pour la première fois le nombre d'entrelacement de deux nœuds. Mais la théorie des nœuds ne prend vraiment son essor qu'en 1867 avec les travaux de Tait et Thomson, et leur théorie des atomes-tourbillons comme modèle de la matière : les atomes ne seraient, selon leur théorie, que des tourbillons formant des nœuds dans l'éther. C'est ainsi que commence le travail de classification des différents type de nœuds, dans l'espoir d'expliquer les propriétés physico-chimiques des éléments. Tous les nœuds, jusqu'à 10 croisements, sont alors identifiés et classifiés avec très peu d'erreurs. Plus tard, l'hypothèse de l'éther étant abandonnée, le modèle des atomes-tourbillons devient caduque et la théorie des nœuds connaît alors une période de stagnation.

Au début du 20^{ème} siècle, l'évolution des idées en topologie et en théorie des groupes et la naissance de la topologie algébrique fournissent de nouveaux outils pour la théorie des nœuds. Dehn propose alors le groupe fondamental du complémentaire du nœud comme nouvel invariant en 1910 et Wirtinger montre comment le calculer à partir d'un diagramme en 1925. En 1926, Reidemeister découvre les mouvements qui portent son nom et donne un critère théorique puissant pour savoir quand est-ce que deux diagrammes représentent le même nœud. Alexander le redécouvre indépendamment et propose pour la première fois, en 1927, un invariant de nœud de type polynomial : le polynôme d'Alexander. Enfin, en 1934, Seifert étudie la théorie des nœuds avec une nouvelle approche par la théorie des surfaces, qui permet d'établir plusieurs résultats fondamentaux sur la factorisation des nœuds.

La théorie ne connaît pas ensuite de découverte majeure jusqu'en 1989. C'est en effet à cette date là, que V. Jones, spécialiste de la théorie des algèbres d'opérateurs, découvre un lien profond avec celle des nœuds. Sa découverte se concrétise par un nouvel invariant polynomial aux propriétés surprenantes, qui lui vaut la médaille Fields. Cette découverte provoque un regain d'intérêt pour la théorie des nœuds qui persiste jusqu'à nos jours, avec un grand nombre de nouvelles approches (comme les invariants de type fini où l'homologie de Khovanov) et des liens avec des domaines très variés, allant de la physique quantique et la chimie à la classification des variétés de dimension 3.

Dans ce texte, nous présentons une vue d'ensemble de la théorie des nœuds jusqu'au polynôme de Jones. Le lecteur qui désire en savoir plus sur les découvertes plus récentes peut consulter la référence [3].

Mais avant de commencer, nous devons d'abord définir précisément ce qu'est un nœud. Intuitivement, ce sera juste un fil noué dans l'espace, dont on a recollé les deux bouts. Un entrelacs sera tout simplement un enchevêtrement de nœuds. La définition mathématique requiert beaucoup plus de précautions.

Définition 1. *Un entrelacs à n composantes est un plongement de n copies de \mathbb{S}_1 dans \mathbb{S}_3 . Lorsque $n = 1$, on dit que c'est un nœud.*

Définition 2. *Deux entrelacs à n composantes, donnés par les plongements p et p' , sont dits équivalents s'il existe un homéomorphisme φ de \mathbb{S}_3 préservant l'orientation, et tel que $\varphi \circ p = p'$.*

Dans la suite, on confondra souvent un entrelacs, son image par le plongement associé et sa classe d'équivalence pour cette relation.

Les nœuds tels que nous les avons définis ne sont pas encore tout à fait satisfaisants. Il existe en effet des nœuds dits *sauvages* : ce sont des nœuds fractaux, qui ne peuvent être

dessinés qu'avec un nombre infini de croisements. Pour éviter ce genre de pathologies, on impose aux plongements (et de manière plus générale aux applications et variétés considérées) d'être différentiables ou bien affines par morceaux. En réalité, le bon cadre pour étudier les nœuds est celui de la catégorie PL, avec les notions de variétés et applications linéaires par morceaux. Les aspects techniques de cette théorie seront passés sous silence, mais on pourra consulter la référence [4] pour en savoir plus. En particulier, la théorie met à notre disposition des théorèmes très agréables à utiliser, tels que le *théorème de Schönflies* dont l'équivalent purement topologique serait faux (cf. sphère cornue d'Alexander) :

Théorème 3. *Considérons un plongement PL de $\mathbb{S}_n \subset \mathbb{S}_{n+1}$. Alors $\mathbb{S}_{n+1} \setminus \mathbb{S}_n$ a deux composantes connexes, chacune PL-homéomorphe à une boule \mathbb{B}_{n+1} .*

On montre aussi le théorème suivant, qui montre que la définition d'équivalence qu'on a donné correspond à l'intuition qu'on a d'une déformation :

Théorème 4. *Deux entrelacs PL sont équivalents par un homéomorphisme PL si et seulement si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie de mouvements élémentaires, appelés **mouvements Δ** , décrits par le dessin suivant :*

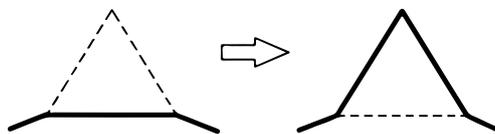


FIGURE 1 – Mouvement Δ

où le triangle (intérieur compris) le long duquel s'effectue la déformation n'intersecte pas le reste de l'entrelacs.

1 Surfaces de Seifert et factorisation des nœuds

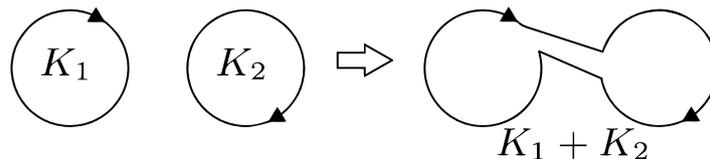
Dans cette partie, on introduit une loi de composition sur les nœuds. Puis via la notion de surface de Seifert, on montre diverses propriétés de cette opération et en particulier l'existence d'une unique décomposition de nœuds en somme de facteurs premiers.

1.1 Somme de nœuds

Le but ici est de ramener l'étude des nœuds à celle de nœuds élémentaires, que l'on appellera plus tard nœuds premiers, par analogie avec les entiers naturels. Mais pour cela, il nous faut introduire une loi de composition. Celle à laquelle nous pensons en premier est la suivante : ayant une corde, on fait deux nœuds l'un après l'autre, avant de recoller les deux bouts :

Définition 5. *Étant donnés deux nœuds orientés K_1 et K_2 plongés dans \mathbb{S}_3 , on définit leur **somme** de la manière suivante (voir illustration) :*

- on choisit un point sur chaque nœud, respectivement a_1 et a_2 ,
- sur chacun des nœuds, on enlève un petit voisinage du point choisi,
- on relie les deux arcs restant en un seul selon les bords créés, en respectant les orientations.



Le résultat est bien un nœud orienté, on le nomme $K_1 + K_2$.

Remarque 6. Cette définition n'est pas tout à fait complète. Il suffit cependant d'imposer que le rectangle de \mathbb{S}_3 bordé par les deux arcs rajoutés et les deux arcs supprimés n'intersecte pas K_1 ni K_2 en son intérieur. On voit alors que la somme ne dépend pas des points choisis sur les nœuds, ni des arcs ajoutés. En effet, quitte à rétrécir K_2 et à le rapprocher de K_1 avant de le faire coulisser sur ce dernier nœud, on voit bien que l'on peut choisir a_1 et a_2 de manière arbitraire.

Plus tard, nous aurons aussi besoin de la notion suivante :

Définition 7. Soit B une boule orientée et α un arc orienté dans B , intersectant ∂B exactement en ses deux extrémités. On dit que (B, α) est une σ -paire.

Définition 8. Deux σ -paires (B_1, α_1) et (B_2, α_2) sont **équivalentes** s'il existe un homéomorphisme de B_1 dans B_2 envoyant α_1 sur α_2 en préservant l'orientation.

Définition 9. Soit $K \subset \mathbb{S}_3$ un nœud orienté. En retirant à \mathbb{S}_3 une petite boule ouverte autour d'un point de K , on obtient une σ -paire dont la classe d'équivalence ne dépend pas du point choisi. On dit que cette σ -paire **représente** K .

Exercice 10. Définir la somme de deux nœuds par la notion de σ -paire.

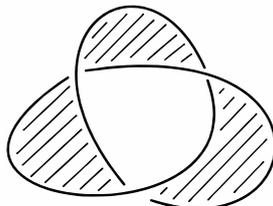
On vérifie alors aisément les propriétés suivantes :

Proposition 11. La loi $+$ définie ci-dessus sur l'ensemble des classes d'équivalence de nœuds est commutative, associative et admet le nœud trivial comme élément neutre.

1.2 Surfaces de Seifert

Définition 12. Une **surface de Seifert** pour un nœud orienté $K \subset \mathbb{S}_3$ est une surface compacte $F \subset \mathbb{S}_3$, connexe, orientée et dont le bord ∂F est exactement le nœud orienté K .

Remarque 13. Il n'est pas très difficile de construire des surfaces dont le bord est un nœud K donné. Cela peut se faire avec la technique du damier qui consiste à colorier les zones du plan délimitées par un diagramme du nœud en deux couleurs, noir et blanc, comme aux échecs, puis de relier les zones noires par des rubans faisant des demi-tours au niveau des croisements. Voici, une illustration avec le nœud de trèfle :



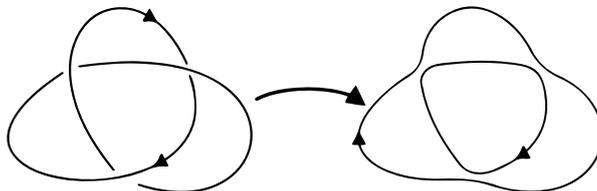
Toutefois, rien n'assure que cette méthode fournisse une surface **orientable**. En effet pour cet exemple précis, on remarque que la surface obtenue est un **ruban de Möbius**.

Remarque 14. Si un nœud K admet une surface de Seifert F , alors on peut construire une autre surface de Seifert pour K qui peut être très différente de F . Il suffit par exemple de retirer à F un petit disque et de le remplacer par une anse (tore privé d'un disque). Le bord $\partial F = K$ est alors inchangé mais le genre de la surface augmente de 1.

Théorème 15. Tout nœud K admet une surface de Seifert.

Démonstration

Projetons le nœud K pour obtenir un diagramme orienté D . Modifions chaque croisement du diagramme de D comme expliqué dans la figure ci-dessous



On obtient un nouveau diagramme D' , qui est alors une réunion disjointe de courbes fermées orientées simples, appelées **circuits de Seifert** du diagramme D . Au-dessus de ces courbes, considérons des demi-sphères disjointes deux à deux dont les bords coïncident avec ces circuits de Seifert. Enfin, relier ces demi-sphères entre elles par des rubans faisant des demi-tours au niveau de chaque croisement dans D . Les demi-sphères héritent de l'orientation des circuits de Seifert qui les bordent et les rubans font correspondre ces orientations convenablement. On obtient donc bien une surface de Seifert de K .

□

1.3 Genre d'un nœud

Les surfaces de Seifert permettent de définir l'invariant de nœud suivant

Définition 16. Le **genre** $g(K)$ d'un nœud K est le minimum des genres des surfaces de Seifert de K .

Remarque 17. Si F est une surface de Seifert. En tant que 2-variété à bord abstraite, son bord est \mathbb{S}_1 . En recollant F le long de son bord à un disque \mathbb{B}_2 , on obtient une surface orientée sans bord entièrement déterminée par son genre g . C'est ce qu'on appelle le genre de F .

Remarque 18. Un nœud K est trivial si et seulement si $g(K) = 0$ puisque dans ce cas, K est le bord d'un disque dans \mathbb{S}_3 .

Remarque 19. Si K est donné par un diagramme D , la surface de Seifert F donnée par la construction plus haut est une réunion disjointe de s disques où s est le nombre de circuits de Seifert de D et de n rubans où n est le nombre de croisement dans D . Comme la caractéristique d'Euler d'un disque est 1 et que celle d'un ruban (homéomorphe à $]0, 1[\times]0, 1[$) est -1 . On obtient que la caractéristique d'Euler de F vaut

$$\chi(F) = s - n$$

En utilisant la formule donnant le genre d'une surface (de bord \mathbb{S}_1) en fonction de sa caractéristique d'Euler $g = \frac{1}{2}(1 - \chi)$, on obtient la majoration

$$g(K) \leq g(F) = \frac{1}{2}(n - s + 1)$$

Le genre d'un nœud n'est pas un invariant facile à calculer en pratique mais il a un intérêt théorique certain grâce à la propriété fondamentale suivante.

Théorème 20. Soient K_1 et K_2 deux nœuds orientés et $K_1 + K_2$ leur somme, alors

$$g(K_1 + K_2) = g(K_1) + g(K_2)$$

Démonstration

On le démontre par double inégalité :

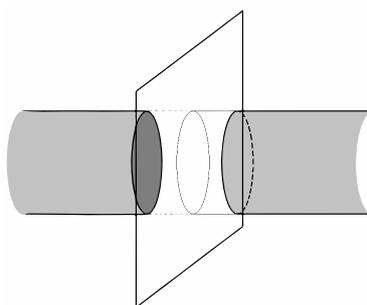
$g(K_1 + K_2) \leq g(K_1) + g(K_2)$: Donnons nous des surfaces de Seifert de genre minimal F_1 et F_2 pour chacun des nœuds $\partial F_1 = K_1$ et $\partial F_2 = K_2$ et plaçons-les chacune d'un côté de \mathbb{S}_3 , de telle sorte qu'elles ne s'intersectent pas. Alors $\mathbb{S}_3 \setminus F_1 \cup F_2$ est connexe (car F_1 et F_2 ont un bord non vide). Considérons alors un chemin c reliant un point de K_1 à un point de K_2 . On obtient alors une surface F en remplaçant le chemin c par une ruban recollé à F_1 d'un côté et à F_2 de l'autre (le recollement se fait le long de deux petits segments de K_1 et de K_2). De plus, on peut éventuellement tourner à moitié ce ruban pour faire correspondre les orientations de F_1 et de F_2 . La surface obtenue est alors orientable et vérifie $\partial F = K_1 + K_2$. C'est donc une surface de Seifert pour $K_1 + K_2$. Enfin, comme un ruban a pour caractéristique d'Euler -1 , on a

$$g(F) = \frac{1}{2}(1 - \chi(F)) = \frac{1}{2}(2 - \chi(F_1) - \chi(F_2)) = \frac{1}{2}(1 - \chi(F_1)) + \frac{1}{2}(1 - \chi(F_2)) = g(K_1) + g(K_2)$$

$g(K_1 + K_2) \geq g(K_1) + g(K_2)$: Considérons dans \mathbb{S}_3 une surface de Seifert F pour le nœud $K_1 + K_2 = \partial F$. Nous allons fabriquer, à partir de F , des surfaces de Seifert pour chacun des nœuds K_1 et K_2 . Par définition de $K_1 + K_2$, il existe une 2-sphère S qui intersecte $K_1 + K_2$ en deux points a et b et qui sépare $K_1 + K_2$ en deux arcs c_1 et c_2 joignant a et b chacun dans une des deux composantes connexes de $\mathbb{S}_3 \setminus S$ et tels que tout chemin reliant a à b dans S referme c_1 et c_2 en deux nœuds équivalents à K_1 et K_2 respectivement.

On suppose que les surfaces F et S sont linéaires par morceaux et on peut alors les voir comme des sous-complexes d'une triangulation de \mathbb{S}_3 . On peut donc, en les modifiant légèrement sommet par sommet, se ramener à une position générale où elles sont transverses en tout point de leur intersection. Alors $F \cap S$ est une sous-variété fermée de dimension 1 de bord $\{a, b\}$. C'est donc une réunion disjointe de courbes simples fermées et d'un arc c_3 joignant a et b . Le but, maintenant, est de faire de la chirurgie sur F , afin de réduire son intersection avec S jusqu'à ce qu'elle ne contienne plus que l'arc c_3 . Chaque courbe fermée $\gamma \subset F \cap S$ sépare S en deux disques. Un seul de ces disques ne contient pas c_3 . Appelons-le $D(\gamma)$. Choisissons γ telle que $D(\gamma)$ soit minimal pour l'inclusion. Alors $D(\gamma) \cap F = \gamma$.

Localement, la situation est alors celle d'un cylindre identifié à un voisinage annulaire de γ dans F qui intersecte transversalement un plan identifié à un voisinage de $D(\gamma)$ dans S , le long d'un cercle identifié à γ .



Ajoutons alors à F deux disques parallèles pris de part et d'autre de $D(\gamma)$ et éliminons de F le voisinage annulaire de γ délimité par les bord de ces deux disques. On obtient alors une nouvelle surface et, quitte à ne garder que la composante connexe qui contient $K_1 + K_2$, c'est une surface de Seifert pour $K_1 + K_2$ dont l'intersection avec S a moins de composantes. De plus, la surface obtenue a un genre plus petit ou égal que celui de F . Donc finalement,

en itérant ce processus, on obtient une surface de Seifert F' de genre $g(F') \leq g(F)$, et telle que $F' \cap S = c_3$. S sépare alors F' en deux surfaces F_1 et F_2 telles que $F_1 \cap F_2 = c_3$ et vérifiant $\partial F_i = c_i \cup c_3 \cong K_i$ pour $i = 1, 2$. F_1 et F_2 sont donc des surfaces de Seifert pour K_1 et K_2 . Et donc,

$$g(K_1) + g(K_2) \leq g(F_1) + g(F_2) = g(F') \leq g(F)$$

et ceci étant valable pour toute surface de Seifert F de $K_1 + K_2$, on obtient bien le résultat voulu. □

Corollaire 21. *Le nœud trivial n'est pas somme de nœuds non triviaux.*

1.4 nœuds premiers et factorisation

Définition 22. *Un nœud K est dit **premier** s'il ne peut pas s'écrire comme somme de nœuds non triviaux.*

Proposition 23. *Tout nœud se décompose en une somme finie de nœuds premiers.*

Démonstration

Par récurrence forte sur le genre, puisque tout nœud non premier se décompose en somme de deux nœuds de genre strictement plus petit. □

A priori, cette décomposition n'est pas unique. Pour le montrer on a besoin de l'analogie suivant du lemme de Gauss :

Théorème 24. *Soit un nœud $K = K_1 + K_2 = P + Q$ où P est un nœud premier. Alors on est dans l'une des deux situations suivantes :*

- il existe un nœud K'_1 tel que $K_1 = P + K'_1$ et $Q = K'_1 + K_2$
- il existe un nœud K'_2 tel que $K_2 = P + K'_2$ et $Q = K'_2 + K_1$

Pour la démonstration, on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 25. *Soit K un nœud. Alors $H^1(\mathbb{S}_3 \setminus K) \cong \mathbb{Z}$, engendré par un méridien quelconque de K . Soit c un lacet n'intersectant pas K . L'entier correspondant à la classe de c est appelé **nombre d'entrelacement de c avec K** .*

Revenons au théorème :

Démonstration

Par définition de $K_1 + K_2$, il existe une 2-sphère S qui intersecte K en deux points et le séparant en K_1 et K_2 . De même, il existe une boule B intersectant K en un arc α telle que la σ -paire (B, α) représente P . On suppose encore les variétés considérées linéaires par morceaux, et on peut alors supposer, comme dans le théorème précédent, que toutes les intersections sont transverses.

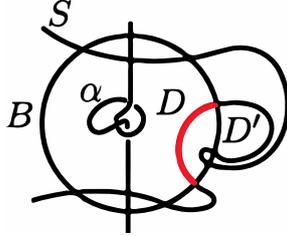
Dans le cas trivial où $B \cap S = \emptyset$ alors B est dans une des composantes connexes de $\mathbb{S}_3 \setminus S$, disons celle de K_1 , et P est donc un facteur de $K_1 = K'_1 + P$. Puis en remplaçant la σ -paire (B, α) par une σ -paire triviale, on change $P + Q$ en Q d'une part, et $K_1 + K_2$ en $K'_1 + K_2$ d'autre part d'où la conclusion.

Dans le cas général le but sera de réduire $S \cap \partial B$. On sait que c'est une réunion de courbes fermées simples. Leur nombre d'entrelacement avec K égal à 0 ou 1 puisque dans $S \setminus K$ toute courbe fermée simple est homologue soit à 0, soit à un méridien de K .

Traitons le cas de l'entrelacement 0 :

Soit, dans S , une courbe d'entrelacement 0 la plus à l'intérieur, les points de K étant considérés comme à l'extérieur (comme dans le théorème précédent). Dans S , celle-ci borde un

disque D tel que $D \cap K = \emptyset$ et $D \cap \partial B = \partial D$. Alors dans ∂B , ∂D étant d'entrelacement nul avec K , elle sépare ∂B en deux disques dont l'un des deux, appelé D' , n'intersecte pas K . On a alors $D \cap D' = \partial D = \partial D'$. Ainsi, $D \cup D'$ est une 2-sphère n'intersectant pas K , donc elle borde une boule n'intersectant pas K par le *théorème de Schönflies*. Cette boule n'intersecte ∂B que le long de D' et est donc soit à l'extérieur de B soit à l'intérieur. On modifie alors B en lui ajoutant ou en lui retranchant respectivement un voisinage de cette boule de manière à faire passer D' de l'autre côté de D et à éliminer ainsi ∂D de $S \cap \partial B$.

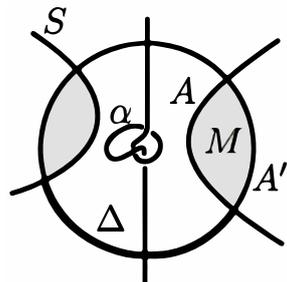


En répétant ce processus, on élimine toutes les courbes de $S \cap \partial B$ d'entrelacement 0 avec K .

Traisons le cas de l'entrelacement 1 :

Il ne reste maintenant plus que des courbes d'entrelacement 1. Ainsi, dans S comme dans ∂B , chaque courbe borde deux disques contenant chacun un point de K , telle une latitude par rapport aux deux pôles. Chaque composante de $B \cap S$ est donc soit un anneau bordé par deux de ces courbes, soit un disque (qui contient alors un point de K). Éliminons d'abord les disques. Soit D un disque dans $B \cap S$, alors comme $D \cap K$ est un point, D sépare la σ -paire (B, α) en deux σ -paires (B_1, α_1) et (B_2, α_2) dont l'une des deux, disons (B_1, α_1) , est triviale puisque P est premier. En retirant alors à B un voisinage de B_1 , on obtient une nouvelle boule qui a les mêmes propriétés que B tout en éliminant D de l'intersection avec S .

On peut donc maintenant supposer qu'il ne reste plus que des anneaux dans $B \cap S$. Chacun de ces anneaux A intersecte ∂B en ∂A formé par deux cercles entourant chacun un des 'pôles' (i.e les points de α). Cet anneau A sépare B en deux composantes connexes dont une seule, notée M , qui ne contient pas α . Choisissons A tel que M soit minimal pour l'inclusion. ∂A délimite aussi un anneau dans ∂B , noté A' . On a $\partial M = A \cup A'$ et A et A' ne s'intersectent qu'en leur bord $\partial A = \partial A' \subset \partial B \cap S$. Par minimalité de M , $A' \cap S$ est réduit à $\partial A'$. En effet, si A' contenait une autre latitude autre que celles ∂A , alors cette latitude borderait un autre anneau dans $B \cap S$ qui, par connexité, serait entièrement dans M contredisant sa minimalité.

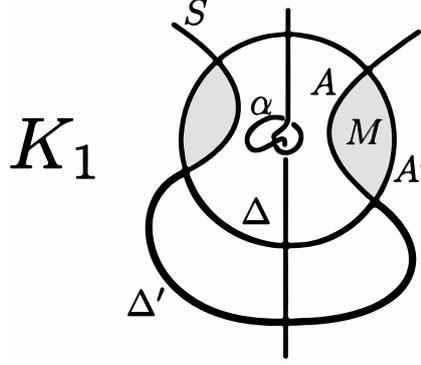


On a donc que $M \cap S = A$ avec M d'un seul côté de S . Un des cercles de ∂A délimite dans ∂B un unique disque Δ qui ne contient pas l'autre cercle de ∂A de telle sorte que

$\Delta \cap M = \Delta \cap A' = \Delta \cap A = \partial\Delta$. Epaissons Δ en un voisinage $N(\Delta)$ de Δ dans $B \setminus M$. Comme Δ intersecte α en un point, $\partial N(\Delta)$ l'intersecte en deux points. De plus, $M \cup N(\Delta)$ est une boule car son bord est une sphère (*Théorème de Schönflies*). Appelons cette boule X . $\partial X \cap \alpha = \partial N(\Delta) \cap \alpha$ est formé de deux points. Donc $(X, X \cap \alpha)$ forme une σ -paire contenue dans (B, α) . Puisque P est premier, deux cas se présentent. Dans le premier cas $(X, X \cap \alpha)$ est triviale, cela se produit quand M est un tore plein. Alors il suffit de retirer à B un voisinage de X et on élimine ainsi A de $B \cap S$. Le deuxième cas est plus intéressant.

Cas où $(X, X \cap \alpha)$ est non triviale et conclusion :

On suppose maintenant que $(X, X \cap \alpha)$ est non triviale et donc représente le nœud P . Alors bien que M est bordée par le tore $A' \cup A$, elle n'est pas homéomorphe à un tore plein (penser au complémentaire d'un voisinage tubulaire de α). Dans ce cas-ci, on ne cherche plus à réduire l'intersection $B \cap S$, mais plutôt à conclure directement. L'intérieur de M est dans une des composantes connexes de $\mathbb{S}_3 \setminus S$, disons celle de K_1 . $\partial\Delta$ délimite dans S un unique disque ne contenant pas A , appelons-le Δ' . Epaissons Δ' du côté de K_1 en $N(\Delta')$ comme on l'a fait pour $N(\Delta)$. Comme Δ' intersecte K en un point exactement alors $(M \cup N(\Delta'), K \cap N(\Delta'))$ est une σ -paire, et elle est équivalente à $(X, X \cap \alpha)$. Donc on a trouvé une σ -paire qui représente P dans la boule de $\mathbb{S}_3 \setminus S$ qui contient K_1 . Ainsi, P est un facteur de K_1 et on peut écrire $K_1 = P + K'_1$.



Il reste à montrer que $Q = K'_1 + K_2$. Pour cela, on ne peut pas simplement 'remplacer' $(M \cup N(\Delta'), K \cap N(\Delta'))$ par une σ -paire triviale car $N(\Delta')$ intersecte Q et on risque alors de modifier Q . L'idée consiste plutôt à trivialisier $(X, X \cap \alpha)$ en 'forçant' M à être un tore plein. Pour ce faire, on retire tout simplement l'intérieur de M de \mathbb{S}_3 . Il reste alors une variété abstraite de dimension 3 dont le bord est un tore qu'on recolle à un vrai tore plein $T = \mathbb{S}_1 \times \mathbb{D}_2$ en identifiant chaque cercle méridien de T à un cercle dans $A \cup A'$ dont une moitié se trouve dans A et l'autre dans A' et qui intersecte $\partial\Delta$ en un point. L'espace obtenu après recollement est une nouvelle sphère \mathbb{S}_3 dans laquelle ∂B , S et K n'ont pas été touchés mais cette fois $(X, X \cap \alpha)$ est triviale, donc B aussi et $(T \cup N(\Delta'), K \cap N(\Delta'))$ aussi par le même raisonnement que précédemment. Ainsi de $K_1 + K_2$ il reste $K'_1 + K_2$ et de $P + Q$ il reste Q , d'où l'égalité annoncée. □

Corollaire 26. Soit K_1, K_2 et K_3 des nœuds tels que $K_1 + K_2 = K_1 + K_3$ alors $K_2 = K_3$.

Démonstration

Quite à écrire K_1 comme une somme de nœuds premiers et à raisonner par récurrence, il suffit de traiter le cas où $K_1 = P$ est premier. Alors par le théorème précédent appliqué avec $P = K_1$ et $Q = K_3$, deux cas se présentent. Soit $K_1 = K_1 + K'_1$ et $K_3 = K'_1 + K_2$, mais dans ce cas, le genre de K'_1 est nul donc K'_1 est trivial d'où $K_3 = K'_1 + K_2 = K_2$. Soit $K_2 = K_1 + K'_2$ et $K_3 = K_1 + K'_2$, et donc $K_2 = K_3$.

□

Théorème 27. *Tout nœud K se décompose de manière unique, à l'ordre des termes près, en une somme de nœuds premiers.*

Démonstration

L'existence a déjà été établie, il reste à montrer l'unicité. Soit $K = P_1 + P_2 + \dots + P_n = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_m$ avec les P_i et les Q_j premiers. On raisonne par récurrence sur n . Si $n = 0$, K est trivial et en regardant le genre on en déduit $m = 0$. Maintenant, pour $n \geq 1$, P_n est un facteur de Q_1 ou de $Q_2 + \dots + Q_m$ et par récurrence, P_n est un facteur de l'un des Q_j . Mais comme Q_j est premier, $P_n = Q_j$ et par le corollaire précédent, les deux peuvent être simplifiés et on conclut par l'hypothèse d'induction au rang $n - 1$.

□

Remarque 28. *Ce théorème permet de restreindre notre attention aux nœuds premiers. De plus, il montre, modulo l'affirmation qu'il existe une infinité dénombrable de nœuds premiers, que les nœuds munis de l'opération de somme forment un monoïde isomorphe à (\mathbb{N}^*, \times) .*

2 Théorie de Reidemeister et applications

La théorie de Reidemeister permet d'étudier les objets topologiques que sont les nœuds via les diagrammes obtenus en les projetant sur un plan. L'intérêt est que ces diagrammes sont des objets combinatoires, plus simple à étudier, et sur lesquels on peut faire des calculs. La théorie de Reidemeister permet de construire des invariants de nœuds simplement à partir d'invariants de diagrammes. Pour les détails des preuves de cette partie, nous renvoyons à la référence [1].

Comme application de cette théorie, on introduit ensuite un invariant intéressant. Il s'agit d'étudier différentes manières de colorier les branches d'un diagramme par des entiers modulo n . Nous verrons que toutes les informations sur la colorabilité peuvent être codées au sein d'un même groupe qui sera un nouvel invariant de nœud. Enfin, nous introduisons une déformation de ce groupe pour obtenir un invariant de type module, qui est plus précis.

2.1 Théorème de Reidemeister

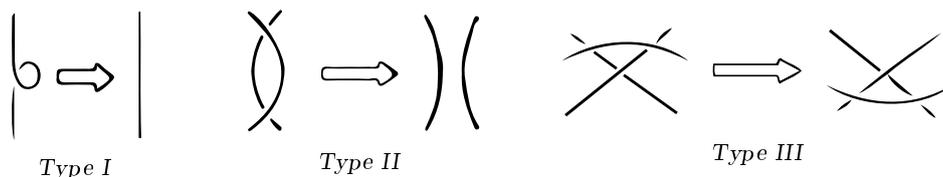
Définition 29. *Considérons un entrelacs L (linéaire par morceaux) dans \mathbb{R}^3 . Et π une projection sur un plan de \mathbb{R}^3 . On dit que $\pi(L)$ est une **projection régulière** de L si $|\pi^{-1}(p)| \leq 2$ pour tout point p de $\pi(L)$ et si l'égalité n'a lieu qu'en un nombre fini de points p tels que $\pi^{-1}(p)$ ne contient pas de sommets de L . Ces points sont appelés **croisements**.*

Remarque 30. *Les propriétés exigées d'une projection régulière sont spécialement choisies pour être stables. Une projection quelconque est presque sûrement stable. En fait, il n'est pas difficile de vérifier que pour un entrelacs L fixé, l'ensemble des directions de π qui donnent des projections régulières de L forment un ouvert dense de $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. De même, si on fixe la projection π , on peut déformer L en "bougeant" ses sommets. L'ensemble des positions de tous les sommets de L qui donnent un entrelacs équivalent à L forme un certain ouvert U d'un espace affine (de dimension trois fois le nombre de sommets de L) et le sous-ensemble de ces configurations qui donnent lieu à une projection régulière par rapport à π forment un ouvert dense de U .*

Pour retrouver l'entrelacs à partir de sa projection, il faut une information supplémentaire : à chaque croisement, il faut indiquer quelle branche passe au dessus de l'autre. La donnée d'une application PL π d'une réunion de n copies d'un cercle PL dans le plan, satisfaisant les mêmes conditions que celle de la définition précédente, ainsi qu'une information dessus-dessous pour chaque croisement constitue un **diagramme d'entrelacs**. On montre alors sans difficulté la proposition suivante :

Proposition 31. *Chaque diagramme d'entrelacs est le diagramme d'un et un seul entrelacs (à isotopie près).*

Le théorème de Reidemeister étudie en fait l'autre sens qui est beaucoup plus intéressant : quand est-ce que deux diagrammes représentent le même entrelacs ? Tout d'abord, il est clair que si on applique une isotopie plane au diagramme, on ne change pas l'entrelacs qu'il représente. Mais il y a aussi d'autres transformations autorisées mais qui ne peuvent pas être obtenues par des isotopies planes telles que les trois transformations suivantes, appelées *mouvements de Reidemeister* :



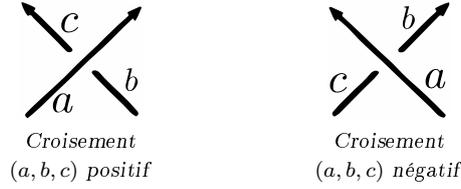
Théorème 32 (Reidemeister). *Deux diagrammes D_1 et D_2 représentent le même entrelacs si et seulement si on peut passer de l'un à l'autre par un nombre fini d'isotopies planes et de mouvements de Reidemeister.*

C'est le sens direct qui demande une preuve. Donnons-en un aperçu. Considérons L_1 et L_2 deux entrelacs qui se projettent régulièrement en D_1 et D_2 par une projection π . Si L_1 et L_2 sont isotopes, on peut passer de l'un à l'autre par un nombre fini de mouvements Δ . Grâce à la remarque faite plus haut, on peut toujours perturber légèrement la direction de π en π' pour que L_1 et L_2 et tous les entrelacs obtenus après chaque mouvement Δ soient réguliers par rapport à π' et que tous les triangles correspondant aux mouvements Δ soient projetés en des triangles non dégénérés par π' . Passer de π à π' modifie les diagrammes D_1 et D_2 par des isotopies planes. Maintenant, il suffit de traiter le cas d'un seul mouvement Δ . Pour cela, par une division barycentrique du triangle, on décompose le mouvement Δ en un nombre fini de mouvements Δ élémentaires. Un mouvement Δ est élémentaire si le triangle correspondant obtenu par projection ne contient qu'un seul croisement ou qu'une seule arête du diagramme. Il y a alors un nombre fini de cas à traiter et l'on vérifie facilement à la main que chacun de ces cas se fait par des mouvements de Reidemeister.

Malheureusement, comme on le devine dans la preuve, il n'existe pas de borne connue pour le nombre de mouvements de Reidemeister nécessaires pour passer d'un diagramme à un autre ce qui rend le théorème inutile en pratique. Toutefois, il a un très grand intérêt théorique puisqu'il permet de construire des invariants de nœuds en les construisant simplement comme des fonctions de diagrammes puis en vérifiant qu'ils sont invariants par mouvements de Reidemeister. En guise d'exemple, nous l'appliquons maintenant à la notion de colorabilité qui va nous permettre de distinguer nos premiers nœuds.

2.2 Colorabilité

Avant de commencer à étudier la colorabilité, précisons quelques notations. Si D est un diagramme, on note E_D l'ensemble des **branches** du diagramme. On dit qu'un triplet $(a, b, c) \in E_D^3$ forme un croisement s'il existe un croisement de D tel que a soit la branche haute de ce croisement, et b et c soient les branches basses. Si de plus D est orienté, on demande que b soit la branche située "à droite" de a . Le croisement est dit positif ou négatif selon que b est entrante ou sortante respectivement.



2.3 n -coloration

Définition 33. Soit D un diagramme d'un entrelacs L non orienté. Une n -coloration de D est une fonction $f : E_D \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ telle que $2f(a) = f(b) + f(c)$ pour tout triplet (a, b, c) qui forme un croisement.

La mystérieuse condition $2f(a) = f(b) + f(c)$ est justifiée par la propriété suivante.

Proposition 34. Soit D un diagramme d'un entrelacs L et D^* un autre diagramme de L obtenu par un mouvement de Reidemeister à partir de D . Alors il existe une bijection canonique entre les n -colorations de D et les n -colorations de D^* .

Notons pour $x, y \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $x \triangleright y = 2x - y$. La condition de la définition précédente se réécrit $f(c) = f(a) \triangleright f(b)$. La proposition se vérifie alors très facilement en utilisant pour chaque mouvement de Reidemeister, l'une des trois propriétés clés de \triangleright :

1. $a \triangleright a = a$
2. $a \triangleright (a \triangleright b) = b$
3. $a \triangleright (b \triangleright c) = (a \triangleright b) \triangleright (a \triangleright c)$

On obtient alors, grâce au théorème de Reidemeister :

Corollaire 35. Le nombre de n -colorations d'un entrelacs L est indépendant du diagramme choisit pour L . C'est donc un invariant de l'entrelacs L .

Définition 36. Tout entrelacs L admet au moins n n -colorations triviales qui consiste à colorier toutes les arêtes par le même élément $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. L'entrelacs est dit n -colorable si il admet au moins une n -coloration non triviale.

Cet invariant permet déjà de distinguer plusieurs nœuds. Le nœud trivial n'est n -colorable pour aucun n . Cependant, on peut vérifier que le nœud de trèfle est 3-colorable. Par contre le nœud de 8 n'est pas 3-colorable mais on peut vérifier qu'il est 5-colorable. Ces trois nœuds sont donc distincts.

2.3.1 Groupe de colorabilité

Nous allons maintenant introduire un groupe universel C_L qui code toutes les propriétés de colorabilités d'un entrelacs L donné en un seul objet.

Soit D un diagramme de L . Considérons G_D le groupe abélien libre engendré par les branches de D .

Alors C_L sera le groupe quotient de G_D par les relations suivantes $2a = b + c$ pour tout croisement (a, b, c) .

On montre alors exactement de la même façon que la proposition 34 :

Proposition 37. Le groupe C_L défini ci-dessus en fonction de D est invariant par mouvements de Reidemeister, à isomorphisme canonique près. C'est donc un invariant de l'entrelacs orienté L .

Proposition 38. Soit L un entrelacs trivial à n composantes. Alors $C_L \cong \mathbb{Z}^n$.

La proposition suivante est une reformulation de la notion de n -coloration.

Proposition 39. Soit L un entrelacs et D un diagramme de L . L'espace des n -colorations de D est canoniquement isomorphe à $\text{hom}(C_L, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

De plus, il existe $p \in \text{hom}(C_L, \mathbb{Z})$ telle que $p(x) = 1$ pour toute branche x de D et telle que $\psi \in \text{hom}(C_L, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ correspond à une coloration triviale si et seulement si il existe $i \in \text{hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ qui factorise ψ en $\psi = i \circ p$.

C_L est un groupe abélien (\mathbb{Z} -module) de type fini. On peut donc lui appliquer le théorème de classification et l'écrire $\mathbb{Z}^r \times \Lambda C_L$ où r est un entier et ΛC_L est le sous-groupe de torsion de C_L , c'est un groupe fini.

Proposition 40. Soit L un entrelacs à n composantes, alors le $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -espace vectoriel $V := C_L/(2\mathbb{Z})C_L$ est de dimension n . En particulier, le groupe abélien libre $C_L/\Lambda C_L$ est de rang au plus $\dim(V) = n$.

Si de plus $L = K$ est un nœud, de diagramme D , $C_K/\Lambda C_K$ est de rang 1 engendré par la classe d'une branche quelconque de D et $p : C_K/\Lambda C_K \rightarrow \mathbb{Z}$ est un isomorphisme (où p est le morphisme de la proposition précédente).

Démonstration

Montrons d'abord le premier point. Notons $V = C_L/(2\mathbb{Z})C_L$. Modulo 2, les relations qui définissent C_L dégènèrent et deviennent $b = c$ où b et c sont les deux branches basses d'un croisement. De sorte que si deux branches x et y sont dans la même composante de L , on peut les relier par un chemin en parcourant les branches pour obtenir $x = y$ dans V . Et deux branches qui ne sont pas dans la même composantes sont complètement indépendantes d'où le résultat sur la dimension de V .

Regardons ce qui se passe maintenant pour un nœud K . On sait d'après ce qui précède que $C_K/\Lambda C_K$ est isomorphe à \mathbb{Z}^r pour un certain $r \leq 1$. Il suffit de montrer que $r \geq 1$, c'est-à-dire que C_K n'est pas entièrement de torsion. Mais ceci est clair en utilisant le morphisme p de la proposition précédente. Le fait que $p(x) = 1$ montre qu'une branche x engendre $C_K/\Lambda C_K$.

□

Corollaire 41. Si K est un nœud, $C_K \cong \mathbb{Z} \times \Lambda C_K$ où ΛC_K est un groupe fini d'ordre impair.

Corollaire 42. L'espace des n -colorations modulo l'espace des n -colorations triviales pour un nœud K est isomorphe à $\text{hom}(\Lambda C_K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Corollaire 43. Soit p un nombre premier, un nœud K est p -colorable si et seulement si p divise l'ordre de ΛC_K .

Définition 44. L'ordre de ΛC_K s'appelle le **déterminant** de K noté $\det(K)$.

$\Lambda C_K/p\Lambda C_K$ est un \mathbb{F}_p -espace vectoriel. En particulier,

$$\text{hom}(\Lambda C_K, \mathbb{F}_p) \cong (\Lambda C_K/p\Lambda C_K)^* \cong \Lambda C_K/p\Lambda C_K$$

sa dimension s'appelle le degré de p -colorabilité de K notée $\deg_p(K)$.

$p^{\deg_p(K)}$ divise $\det(K)$.

Proposition 45. Soit K_1 et K_2 deux nœuds. Alors $\Lambda C_{K_1+K_2} \cong \Lambda C_{K_1} \times \Lambda C_{K_2}$.

Démonstration

Soit D_1 et D_2 les diagrammes de K_1 et K_2 et D le diagramme de $K_1 + K_2$ obtenu en recollant D_1 et D_2 avec deux branches a et b après avoir enlevé deux branches x et y de D_1 et D_2 .

Montrons que $a = b$ dans $C_{K_1+K_2}$. Soit γ un chemin orienté en position générale avec le diagramme D . Et soit $S_\gamma \in C_{K_1+K_2}$ la somme alternée des branches rencontrées en parcourant γ . Alors S_γ ne dépend que des extrémités de γ et pas de γ lui-même. Pour cela, il suffit de vérifier que S_γ ne change pas lorsqu'on déforme γ et il suffit de faire lorsqu'on traverse un seul croisement, mais ceci est vrai justement grâce aux relations qui définissent $C_{K_1+K_2}$. En particulier, on obtient que si γ est une courbe fermée alors $S_\gamma = 0$. Appliquons

ce principe à une courbe fermée dans le plan qui sépare D_1 et D_2 et n'intersecte D qu'en a et b (possible par construction du diagramme D) alors $S_\gamma = a - b = 0$. D'où $a = b$.

Maintenant, $\Lambda C_{K_1+K_2}$ s'identifie, par la proposition précédente, au quotient de $C_{K_1+K_2}$ par a . Considérons, dans ce quotient, le groupe G_1 engendré par les branches de D_1 et G_2 celui engendré par les branches de D_2 . Comme $a = b = 0$, les éléments de G_1 et de G_2 sont indépendants et engendrent $\Lambda C_{K_1+K_2}$ tout entier de sorte que $\Lambda C_{K_1+K_2} \cong G_1 \times G_2$. Mais par ailleurs, en identifiant $a = b$ à x et comme $a = b = 0$ dans $\Lambda C_{K_1+K_2}$, on voit que G_1 est isomorphe à C_{K_1} quotienté par x , d'où $G_1 \cong \Lambda C_{K_1}$. De même $G_2 \cong \Lambda C_{K_2}$, d'où la conclusion. □

Corollaire 46. *On a $\det(K_1 + K_2) = \det(K_1) \det(K_2)$. Soit p un nombre premier, $K_1 + K_2$ est p -colorable si et seulement si K_1 ou K_2 est p -colorable et on a même $\deg_p(K_1 + K_2) = \deg_p(K_1) + \deg_p(K_2)$.*

Exemple On peut, pour un diagramme D d'un entrelacs L , calculer facilement C_L en calculant le sous- \mathbb{Z} -module de G_D engendré par les relations qui définissent C_L . Il s'agit simplement de réduire une matrice à coefficients entiers par des opérations sur les lignes et les colonnes afin de faire apparaître ses facteurs invariants. On peut calculer alors C_L pour les entrelacs suivant.

- Pour le nœud de trèfle : $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
- Pour le nœud de huit : $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
- Pour l'entrelacs de Hopf : $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Le plus petit nœud de déterminant 1 (donc de groupe \mathbb{Z} identique à celui du nœud trivial) est un nœud à 10 croisements.

2.3.2 $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module associé à un entrelacs

Il est possible de généraliser la construction précédente pour un obtenir un invariant encore plus puissant.

Soit t une indéterminée. Nous allons associer à chaque entrelacs L orienté un $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module qui est un invariant M_L indépendant du diagramme D orienté choisi, à isomorphisme canonique près.

Ce sera le $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module engendré par les branches de D et les relations $c = (1-t)a + tb$ pour chaque croisement (a, b, c) (avec, on rappelle, b la branche de droite par rapport à a) On réécrit ces relations $c = a \triangleright b$ où $x \triangleright y = (1-t)x + ty$. L'invariance par Reidemeister est alors assurée (comme pour le proposition 34) par chacune des propriétés suivantes (la 2 étant plus faible que celle de la n -colorabilité, mais encore suffisante) :

1. $x \triangleright x = x$
2. Pour tout x et tout z , il existe un et un seul y tel que $z = x \triangleright y$
3. $x \triangleright (y \triangleright z) = (x \triangleright y) \triangleright (x \triangleright z)$

On obtient donc facilement :

Proposition 47. *Le $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module M_L ne dépend pas, à isomorphisme canonique près, du diagramme choisi pour le définir. C'est donc un invariant de l'entrelacs L . De plus, le \mathbb{Z} -module obtenu en quotientant M_L par l'idéal engendré par $(t+1)$ est isomorphe à C_L .*

M_L est donc une généralisation de C_L . En réalité, on verra que M_L est très relié au **polynôme d'Alexander** de L et possède une profonde interprétation topologique que nous allons exposer dans les sections suivantes.

3 Groupe fondamental et quandle d'un entrelacs

Soit L un entrelacs. En tant que variété abstraite, L n'est qu'une réunion de r copies de \mathbb{S}_1 mais son complément dans \mathbb{S}_3 , c'est-à-dire \mathbb{S}_3 privé d'un voisinage tubulaire de l'entrelacs, est un espace beaucoup plus intéressant à étudier. On le note X_L . Il est naturel de s'intéresser à des invariants de X_L pour en déduire des invariants de nœud. En particulier le groupe fondamental de X_L (appelé, par abus, groupe fondamental de L) est un invariant puissant qu'on peut présenter de manière purement algébrique à partir d'un diagramme. Enfin, nous nous intéresserons à la notion de quandle qui fournit un invariant encore plus fin que le groupe fondamental, et nous en donnerons deux constructions : algébrique puis topologique. Notre référence sur le sujet est [3].

3.1 Présentation de Wirtinger

Soit L un entrelacs. La présentation de Wirtinger est une présentation du groupe fondamental de X_L par générateurs et relations, à partir d'un diagramme orienté D . Les générateurs seront les éléments de E_D et les relations seront $c = a \cdot b \cdot a^{-1}$ pour tout croisement (a, b, c) .

$[a]$ représente alors dans le groupe le lacet qui part du point de base (situé "au dessus" du plan du diagramme par exemple), fait le tour de la branche a dans le sens positif et remonte jusqu'au point de base. Il n'est pas difficile de vérifier que ces $[a]$ engendrent bien tout le groupe fondamental ni de montrer que les relations données sont bien vérifiées. Montrer qu'elles sont suffisantes est plus difficile (voir [3]).

Les relations de Wirtinger (ou bien l'intuition topologique) montrent que si (a, b, c) forme un croisement alors $[b]$ et $[c]$ sont conjugués dans le groupe fondamental. On en déduit facilement, que deux générateurs sont conjugués si et seulement ils correspondent à des branches appartenant à la même composante de L . En particulier, en abélianisant, on retrouve que $H_1(X_L) = \mathbb{Z}^r$ où r est le nombre de composantes de X_L .

3.2 Quandle d'un entrelacs L

Nous avons vu en étudiant la colorabilité qu'elle reposait sur l'existence d'une loi de composition \triangleright vérifiant certains axiomes assurant son invariance par les mouvements de Reidemeister. Ceci justifie la définition suivante (qui rappelle au passage ces axiomes) :

Définition 48. *Un quandle est un ensemble Q muni d'une loi de composition interne \triangleright qui vérifie les trois propriétés :*

1. Pour tout $x \in E$, $x \triangleright x = x$
2. Pour tout x et tout z , il existe un et un seul y tel que $z = x \triangleright y$
3. Pour tous x, y et z , $x \triangleright (y \triangleright z) = (x \triangleright y) \triangleright (x \triangleright z)$

On supposera dans la suite que les notions naturelles de sous-quandles, morphismes de quandles, quandles libres, quotients etc. vont de soi. En particulier les quandles forment une catégorie.

Exemple Soit M un A -module et u un inversible de A . La loi \triangleright définie sur M par $x \triangleright y = (1 - u)x + uy$ confère à M une structure de quandle. C'est l'exemple général de quandle que nous avons utilisé dans la partie précédente en prenant $A = \mathbb{Z}$ et $u = -1$ pour $M = C_L$ puis $A = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ et $u = t$ pour $M = M_L$.

Ces exemples nous poussent à généraliser les modules C_L et M_L en définissant le **quandle associé à L** .

Définition 49. *Le quandle Q_D associé au diagramme orienté D de l'entrelacs L est le quandle engendré par les branches E_D et les relations $c = a \triangleright b$ pour chaque croisement (a, b, c) .*

On démontre alors de la même façon qu'avant, en utilisant les axiomes de quandle, la proposition suivante :

Proposition 50. *Le quandle Q_D défini ci-dessus est invariant par mouvements de Reidemeister, à isomorphisme canonique près.*

On a donc défini pour un entrelacs L un quandle invariant $Q_L = Q_D$ pour un diagramme D quelconque de L . Beaucoup d'invariants de nœuds (dont C_L et M_L comme on l'a vu) sont en fait des invariants de quandle. Le groupe fondamental n'y échappe pas comme nous allons le voir.

3.3 Relation entre groupe fondamental et quandle d'un entrelacs L : point de vue algébrique

On remarque l'analogie entre la présentation de Q_L : pour tout croisement (a, b, c)

$$c = a \triangleright b$$

et la présentation de $\pi_1(X, x_0)$: pour tout croisement (a, b, c)

$$c = a \cdot b \cdot a^{-1}$$

Voici comment préciser le lien entre les deux.

Si G un groupe, on peut mettre sur G une structure de quandle en posant $x \triangleright y = xyx^{-1}$. En fait, ce quandle est précisément ce qui reste lorsqu'on oublie la loi de composition du groupe, l'élément neutre etc... et qu'on ne garde que la conjugaison. Tout partie de G stable par conjugaison forme encore un sous-quandle de G . Formellement, on a en fait un foncteur d'oubli noté Oub , de la catégorie des groupes dans la catégorie des quandles. On fera parfois l'abus de confondre G et $\text{Oub}(G)$. Et si f est un morphisme entre un groupe G et un quandle Q , il faudra comprendre qu'il s'agit d'un morphisme de quandles entre $\text{Oub}(G)$ et Q .

Réciproquement, on peut construire un foncteur de la catégorie des quandles dans la catégorie des groupes comme ceci. Soit Q un quandle. Considérons le groupe libre Q^* engendré par les éléments de Q . Maintenant on quotiente Q^* par les relations $x = yzy^{-1}$ dès que $x = y \triangleright z$ dans Q . On obtient alors un groupe $F(Q)$. $Q \mapsto F(Q)$ définit alors un foncteur F de la catégorie des quandles dans la catégorie des groupes.

En outre, l'application naturelle $p : Q \rightarrow F(Q)$ (en réalité, $\text{Oub}(F(Q))$) est la solution du problème universel suivant : pour tout morphisme de quandle p' de Q dans un groupe G , il existe un unique morphisme f de $F(Q)$ dans G tel que $p' = f \circ p$. Ce que l'on interprète en disant que F est un foncteur adjoint à gauche de Oub i.e

$$\text{hom}(Q, \text{Oub}(G)) \cong \text{hom}(F(Q), G)$$

Remarque 51. $p(Q)$ est un sous-quandle de $F(Q)$. En général, $p(Q)$ n'est pas isomorphe à Q : il y a une perte d'information. Par exemple, dans un quandle, si $x = y \triangleright x$ on n'a pas forcément $y = x \triangleright y$ alors que dans un groupe si.

Qu'obtient-t-on si on applique ce foncteur F au quandle Q_L de l'entrelacs L ?

Proposition 52. $F(Q_L)$ est isomorphe à $\pi_1(X_L)$.

Démonstration

D'abord, fixons D un diagramme de L et E l'ensemble de ses branches. On a une présentation $s : E \rightarrow \pi_1(X_L)$ de $\pi_1(X_L)$ avec les relations de Wirtinger. Ainsi qu'une présentation $s' : E \rightarrow Q_L$ de Q_L avec les relations données plus haut. Mais on remarque alors que ces relations sont vérifiées pour s dans $\pi_1(X_L)$ vu comme un quandle. La propriété universelle de s' assure alors qu'il existe un unique morphisme de quandle $f : Q_L \rightarrow \pi_1(X_L)$ tel que $s = f \circ s'$. Mais alors, la propriété universelle de $p : Q_L \mapsto F(Q_L)$ donne l'existence d'un unique morphisme de groupes $h : F(Q_L) \rightarrow \pi_1(X_L)$ tel que $f = h \circ p$.

Réciproquement, les relations qui définissent $\pi_1(X_L)$ pour la présentation s , sont aussi vérifiées pour la présentation $p \circ s' : E \mapsto F(Q_L)$ de $F(Q_L)$. La propriété universelle de s assure alors qu'il existe un unique morphisme $k : \pi_1(X_L) \rightarrow F(Q_L)$ tel que $p \circ s' = k \circ s$.

En combinant toutes ces identités, on trouve finalement

$$h \circ k \circ s = h \circ p \circ s' = f \circ s' = s$$

donc $h \circ k = id$ car $s(E)$ engendre $\pi_1(X_L)$ et

$$k \circ h \circ p \circ s' = k \circ f \circ s' = k \circ s = p \circ s'$$

donc $k \circ h = id$ car $p \circ s'(E)$ engendre $F(Q_L)$.

Finalement, on a bien que h et k sont des isomorphismes réciproques. □

En adoptant une démarche similaire, on remarque (voir exemple plus haut) qu'un $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module admet une structure naturelle de quandle qui définit un foncteur d'oubli de la catégorie des $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -modules dans celle des quandles. Ce foncteur admet aussi un adjoint à gauche, et on peut montrer de manière similaire que si on l'applique à Q_L on retombe sur le module M_L de la section précédente.

3.4 Construction topologique du quandle d'un entrelacs

La discussion précédente motive une construction topologique intrinsèque (sans référence à un diagramme) de Q_L . Cela se fait de la façon suivante :

Considérons X_L le complément de l'entrelac L . ∂X_L est un tore et à chaque point x de ∂X_L est associé un méridien m_x de l'entrelac L , qui est un lacet basé en x de nombre d'entrelacement $+1$ avec l'entrelacs. Fixons un point de base, vu comme le point à l'infini ∞ . Soit α un chemin allant de ∞ à un point $x \in \partial X_L$. La fermeture de α , notée $\hat{\alpha}$, est le chemin $\alpha \cdot m_x \cdot \alpha^{-1}$. Sur les chemins tels que α , on considère la relation d'homotopie à origine fixée en ∞ et extrémité dans ∂X_L (c'est-à-dire qu'on peut déformer le chemin α en gardant l'origine en ∞ et en déplaçant l'extrémité dans ∂X_L). L'ensemble de ces classes d'équivalence sera Q_L . La classe d'homotopie de $\hat{\alpha}$ (qui est donc un élément de $\pi_1(X_L, \infty)$) ne dépend que de la classe $[\alpha]$ de α pour cette relation d'équivalence. Maintenant, définissons une loi de quandle sur Q_L . Soit $[\alpha]$ et $[\beta]$ deux éléments de Q_L . La classe du chemin $\hat{\alpha} \cdot \beta$ dans Q_L ne dépend que de la classe de α et de β . Elle est notée $[\alpha] \triangleright [\beta]$.

Proposition 53. *L'ensemble Q_L ci-dessus, muni de la loi \triangleright est un quandle. Il coïncide avec le quandle construit par générateurs et relations à partir d'un diagramme quelconque de L . De plus, $[\alpha] \mapsto [\hat{\alpha}]$ est un morphisme de quandle de Q_L dans $\pi_1(X_L, \infty)$. Il s'identifie précisément au morphisme $p : Q_L \rightarrow F(Q_L)$ lorsqu'on identifie $\pi_1(X_L, \infty)$ à $F(Q_L)$.*

Enfin, citons le théorème suivant qui est démontré dans [3]

Théorème 54. *Le quandle est un invariant de nœuds quasi-complet : il distingue tous les nœuds modulo les symétries miroirs et les changements d'orientation.*

4 Module et polynôme d'Alexander

On a vu que $\pi_1(X, x_0)$ était un invariant intéressant pour le nœud K mais qu'il n'est pas très facile à calculer. Dans cette partie, nous allons chercher à définir, à partir de X , un invariant moins puissant mais plus maniable, de type $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module. C'est le module d'Alexander. Ensuite, on va exhiber le lien intime qui le relie au module M_L , introduit à la partie 2.

4.1 Définition du module d'Alexander

Soit K un nœud, X son complément et $x_0 \in X$ un point de base. On sait que $\pi_1(X, x_0)$ se projette via le morphisme d'abélianisation sur $H_1(X) \cong \mathbb{Z}$. La théorie des revêtements nous dit alors qu'il existe un unique revêtement galoisien \tilde{X} de X (à isomorphisme près) dont le groupe de Galois est exactement $H_1(X) = \langle t \rangle$ où t est un générateur de ce groupe (que nous choisirons correspondant à un élément de $H_1(X)$ de nombre d'entrelacement $+1$). En tant qu'homéomorphisme de \tilde{X} , t agit aussi sur le \mathbb{Z} -module $H_1(\tilde{X})$ et permet donc de mettre sur $H_1(\tilde{X})$ une structure de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module où $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ est l'anneau des polynômes de Laurent en t . Le module obtenu s'appelle le **module d'Alexander du nœud K** .

Cette définition est conceptuellement satisfaisante mais elle ne donne pas de moyen de calculer le module d'Alexander en pratique. Notre but sera maintenant de donner une présentation de ce module à partir de la donnée d'un diagramme D du nœud K .

4.2 Présentation du module d'Alexander

Notre objectif principal dans cette partie est d'établir un lien entre le module d'Alexander d'un nœud et le module présenté M_K , défini à la partie 2, ce qui nous fournira au passage une présentation du module d'Alexander.

Théorème 55. *Soit K un nœud, et M_K le $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module défini par générateurs et relations à la partie 2. Soit F la fibre du revêtement $\tilde{X} \rightarrow X$ au dessus d'un point donné x_0 de X .*

Alors M_K est isomorphe à $H_1(\tilde{X}, F)$ le groupe d'homologie relative de \tilde{X} par rapport à F muni de sa structure naturelle de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module.

De plus, le module d'Alexander $H_1(\tilde{X})$ est isomorphe au sous-module de torsion de $M_K = H_1(\tilde{X}, F)$.

Remarque 56. *En se rappelant de ce qui a été fait à la partie 2 on voit ainsi que le module d'Alexander est à M_K ce que ΛC_K est à C_K (pour passer des premiers aux seconds, on quotiente par la relation $t = -1$).*

En vue de démontrer le théorème, on va chercher à donner une présentation de $H_1(\tilde{X}, F)$ en fonction de $\pi_1(X, x_0)$. Pour cela, on passe par le **groupoïde fondamental** $\pi_1(\tilde{X}, F)$. Il s'agit du groupoïde dont les objets sont les éléments de F , et les flèches de $f \in F$ vers $f' \in F$ sont les classes d'homotopies de chemins de \tilde{X} d'extrémités f et f' . Le lien entre $\pi_1(X, x_0)$ et $\pi_1(\tilde{X}, F)$ est simple.

Proposition 57. *Soit $e : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \langle t \rangle$ le morphisme d'abélianisation. Rappelons-nous que $\langle t \rangle = H_1(X)$ est le groupe de Galois de $\tilde{X} \rightarrow X$ qui agit librement et transitivement sur F .*

Soit G le groupoïde dont les objets sont F et les flèches de $f \in F$ à $f' \in F$ sont les (f, f', γ) pour $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ tel que $e(\gamma)f = f'$ avec la loi de composition évidente.

Alors $\pi_1(\tilde{X}, F) \cong G$.

Démonstration

L'isomorphisme de $\pi_1(\tilde{X}, F)$ sur G est donné par $\alpha \mapsto (f, f', p(\alpha))$ où f et f' sont les extrémités de α et $p(\alpha)$ est la projection naturelle de α sur $\pi_1(X, x_0)$. Les propriétés élémentaires des revêtements assurent que c'est bien un isomorphisme. □

Remarque 58. *$\langle t \rangle$ agit naturellement sur $\pi_1(\tilde{X}, F)$ et cette action s'identifie par l'isomorphisme plus haut à l'action sur G donnée par $t \cdot (f, f', \gamma) = (t \cdot f, t \cdot f', \gamma)$*

Maintenant, quel est le lien entre $H_1(\tilde{X}, F)$ et $\pi_1(\tilde{X}, F)$? Pour cela, on a besoin de la notion d'**abélianisé d'un groupoïde**.

Définition 59. *Soit G un groupoïde. L'abélianisé de G , noté G^{ab} est le groupe abélien libre engendré par les éléments de G et quotienté par les relations $[\alpha \cdot \beta] = [\alpha] + [\beta]$ pour tout α et β qui sont composables dans G . On a un morphisme de groupoïdes naturel $p : G \rightarrow G^{ab}$ qui*

satisfait à la propriété universelle suivante : pour tout groupe abélien H et p' un morphisme de G dans H , il existe un unique morphisme f de G^{ab} sur H tel que $p' = f \circ p$.

Cette définition généralise bien sûr la notion d'abélianisé d'un groupe. On a alors la propriété suivante qui généralise l'identité $\pi_1(Y, y_0)^{ab} = H_1(Y, y_0)$.

Proposition 60. *Soit $A \subset Y$ avec A non vide et discret et Y connexe. Alors on a*

$$\pi_1(Y, A)^{ab} \cong H_1(Y, A)$$

Démonstration

Soit R le groupe abélien libre engendré par les chemins de Y à extrémités dans A . On a $R \subset Z_1(Y, A)$ et l'inclusion est stricte en général. $\pi_1(Y, A)^{ab}$ est le quotient de R par le groupe engendré par les $f - g - h$ avec f homotope à $g \circ h$. On note $p : R \rightarrow \pi_1(Y, A)^{ab}$ le morphisme quotient.

Montrons que $\ker p = B_1(Y) \cap R$. L'inclusion $\ker p \subset B_1(Y) \cap R$ est claire puisque si f est homotope à $g \circ h$, $f - g - h$ est le bord du 2-simplexe de côtés f , g et h .

Le point difficile est de montrer la réciproque. Soit $\partial s \in B_1(Y) \cap R$ avec $s \in C_2(Y)$ une 2-chaîne. Il faut montrer que ∂s est dans le groupe engendré par les $f - g - h$, c'est-à-dire que $p(\partial s) = 0$.

Ecrivons $\partial s = \sum_i \lambda_i \alpha_i$ avec α_i des chemins à extrémités dans A et α_i^+ et α_i^- les extrémités de α_i .

Fixons $x \in A$ et considérons pour chaque point a de A un chemin k_a fixé une fois pour toute allant de x à a .

Considérons le lacet basé en x défini par

$$\gamma = \prod_i (k_{\alpha_i^-} \circ \alpha_i \circ k_{\alpha_i^+}^{-1})^{\lambda_i}$$

On a d'une part $p(\gamma) = p(\partial s) + \sum_i \lambda_i (p(k_{\alpha_i^-}) - p(k_{\alpha_i^+})) = p(\partial s)$ car pour tout $a \in A$, la somme des $\pm \lambda_i$ pour i tel que $a = \alpha_i^\pm$ est le coefficient devant a dans $\partial \partial s = 0$.

Et d'autre part, en homologie, dans $H_1(Y)$, on a $\bar{\gamma} = \overline{\partial s} = 0$. Mais $H_1(Y)$ est l'abélianisé $\pi_1(Y, x)^{ab}$ donc γ est dans le sous-groupe dérivé de $\pi_1(Y, x)$ et s'écrit *a fortiori* comme un produit de commutateurs de lacets à extrémités dans A , donc $p(\gamma) = 0$ puisque $\pi_1(Y, A)^{ab}$ est abélien.

D'où finalement, $p(\partial s) = p(\gamma) = 0$ comme voulu.

On a donc finalement $\ker p = B_1(Y) \cap R$ et donc $\pi_1(Y, A)^{ab} \cong R/B_1(Y) \cap R$. Or par le théorème d'isomorphisme, $R/B_1(Y) \cap R \cong R + B_1(Y)/B_1(Y)$. Et il n'est pas difficile de vérifier que $B_1(Y) + R = Z_1(Y, A)$ (tout élément de $Z_1(Y, A)/B_1(Y)$ admet un représentant dans R).

D'où le résultat suivant

$$\pi_1(Y, A)^{ab} \cong Z_1(Y, A)/B_1(Y)$$

Maintenant, comme A est discret, $B_1(X) = B_1(X, A)$ donc

$$\pi_1(Y, A)^{ab} \cong Z_1(Y, A)/B_1(Y, A) = H_1(Y, A)$$

□

Ainsi, en appliquant directement cette proposition à $Y = \tilde{X}$ et $A = F$, on obtient que $H_1(\tilde{X}, F) \cong \pi_1(\tilde{X}, F)^{ab}$. *A priori*, cet isomorphisme est un isomorphisme de groupes abéliens. En réalité, l'action de $\langle t \rangle$ sur \tilde{X} et donc sur $\pi_1(\tilde{X}, F)$ induit une structure de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module sur $\pi_1(\tilde{X}, F)^{ab}$. On vérifie facilement que l'isomorphisme donné par la proposition précédente est compatible avec cette structure de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module. On a donc le corollaire suivant :

Corollaire 61. *Les $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -modules suivants sont isomorphes*

$$H_1(\tilde{X}, F) \cong \pi_1(\tilde{X}, F)^{ab}$$

Nous sommes maintenant en mesure de donner une présentation de $H_1(\tilde{X}, F)$ en fonction de $\pi_1(X, x_0)$.

Proposition 62. *Le $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module $H_1(\tilde{X}, F)$ admet une présentation dont les générateurs sont les éléments de $\pi_1(X, x_0)$ et les relations sont les suivantes, pour tous γ et δ dans $\pi_1(X, x_0)$*

$$[\gamma\delta] = [\gamma] + e(\gamma) \cdot [\delta]$$

où $e : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \langle t \rangle$.

Démonstration

Bien sûr, d'après la proposition précédente, il suffit de montrer que $\pi_1(\tilde{X}, F)^{ab}$ admet cette présentation. On a vu qu'on pouvait identifier les éléments de $\pi_1(\tilde{X}, F)$ aux (f, f', γ) avec f et f' dans F et $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ tel que $e(\gamma) \cdot f = f'$. Maintenant, fixons f_0 dans F . Dans le $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module $\pi_1(\tilde{X}, F)^{ab}$, $[(f, f', \gamma)] = [(f, e(\gamma) \cdot f, \gamma)] = t^n \cdot [(f_0, e(\gamma)f_0, \gamma)]$ où n est l'unique entier tel que $t^n \cdot f_0 = f$. Ceci montre que les $[\gamma] := [(f_0, e(\gamma)f_0, \gamma)]$ pour γ dans $\pi_1(X, x_0)$ engendrent le $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module $\pi_1(\tilde{X}, F)^{ab}$. Il est clair que les relations

$$[\gamma\delta] = [\gamma] + e(\gamma) \cdot [\delta]$$

sont satisfaites. Ceci donne un morphisme θ du module présenté dans l'énoncé (noté M) vers le module $\pi_1(\tilde{X}, F)^{ab}$.

Réciproquement, on peut définir le morphisme $\varphi : \pi_1(\tilde{X}, F) \rightarrow M$ par

$$\varphi((f, f', \gamma)) = t^n \cdot [\gamma]$$

où n est l'unique entier tel que $t^n \cdot f_0 = f$. M étant un groupe abélien, φ passe au quotient et définit un morphisme $\varphi : \pi_1(\tilde{X}, F)^{ab} \rightarrow M$ qui est en fait un morphisme de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -modules et on vérifie facilement que φ et θ sont inverses l'un de l'autre, ce qui permet de conclure. \square

Grâce à tout ce qui a été fait, nous pouvons enfin démontrer le résultat suivant

Proposition 63. *$H_1(\tilde{X}, F)$ est isomorphe au $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module M_K défini à la partie 2.*

Démonstration

Soit D un diagramme orienté de K . On rappelle que M_K est engendré par les éléments de E_D et les relations $[c] = (1-t)[a] + t[b]$ pour tout croisement (a, b, c) . D'autre part, la présentation de Wirtinger dit que $\pi_1(X, x_0)$ est engendré par les éléments de E_D et les relations $c = aba^{-1}$ pour tout croisement (a, b, c) . Or d'après la proposition précédente, $H_1(\tilde{X}, F)$ est engendré par les $[\gamma]$ pour $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$. On en déduit que $H_1(\tilde{X}, F)$ est engendré par les $[a]$ pour $a \in E_D$. De plus, en utilisant

$$[\gamma\delta] = [\gamma] + e(\gamma) \cdot [\delta]$$

et le fait que $ca = ab$ dans $\pi_1(X, x_0)$ pour un croisement (a, b, c) , on obtient

$$[c] + t[a] = [a] + t[b]$$

ou encore

$$[c] = (1-t)[a] + t[b]$$

qui sont les relations qui définissent M_K . Ainsi, on obtient un morphisme $\theta : M_K \rightarrow H_1(\tilde{X}, F)$.

Dans l'autre sens, on va chercher à étendre l'application naturelle de E_D dans M_K à $\pi_1(X, x_0)$ tout entier. Pour cela, définissons un morphisme de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -modules $r : M_K \rightarrow \mathbb{Z}$ par $f([a]) = 1$ pour tout $a \in E_D$, où \mathbb{Z} est muni de sa structure de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module qui fait agir t par l'identité. r est bien défini, car on a bien $(1-t)r([a]) + tr([b]) = r([b]) = 1 = r([c])$.

Et définissons une loi $*$ sur M_K par $x * y = x + t^{r(x)}y$. Alors on vérifie facilement que $*$ est une loi de groupe sur M_K . De plus, on a

$$[a] * [b] = [a] + t[b] = [c] + t[a] = [c] * [a]$$

Ainsi, d'après la présentation de Wirtinger, l'application $a \mapsto [a]$ de E_D dans M_K se prolonge en un morphisme de groupes de $\pi_1(X, x_0)$ dans $(M_k, *)$. On note $[\gamma]$ l'image de $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$. On a alors

$$[\gamma\delta] = [\gamma] * [\delta] = [\gamma] + t^{r([\gamma])}[\delta]$$

Or $\gamma \mapsto t^{r([\gamma])}$ est un morphisme de $\pi_1(X, x_0)$ dans $\langle t \rangle$ qui envoie les générateurs sur t . Donc il coïncide avec e . D'où

$$[\gamma\delta] = [\gamma] + e(\gamma) \cdot [\delta]$$

qui sont les relations qui présentent $H_1(\tilde{X}, F)$ d'après la proposition précédente. Ceci donne le morphisme $\varphi : H_1(\tilde{X}, F) \rightarrow M_K$. On vérifie facilement que θ et φ sont inverses l'un de l'autre et donc que $H_1(\tilde{X}, F)$ est isomorphe à M_K □

La première partie du théorème principal est donc démontrée. Enfin, on démontre la deuxième partie du théorème qui fait le lien avec le module d'Alexander $H_1(\tilde{X})$.

Proposition 64.

$$H_1(\tilde{X}, F) = \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \times H_1(\tilde{X})$$

Démonstration

Pour démontrer cet isomorphisme, on utilise la suite exacte longue d'homologie relative :

$$\cdots \rightarrow H_1(F) \rightarrow H_1(\tilde{X}) \rightarrow H_1(\tilde{X}, F) \rightarrow H_0(F) \rightarrow H_0(\tilde{X}) \rightarrow 0$$

Maintenant, on voit que $H_1(F) = 0$ car F est discret. On a aussi $H_0(\tilde{X}) = \mathbb{Z}$ avec t agissant trivialement dessus. Ce que l'on peut écrire $H_0(\tilde{X}) = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]/(t-1)$. Quant à $H_0(F)$, il est isomorphe à une somme d'une infinité de copies de \mathbb{Z} indexées par F et $\langle t \rangle$ agissant transitivement et librement sur F , on a en fait $H_0(F) = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. De plus, le morphisme

$$H_0(F) \rightarrow H_0(\tilde{X})$$

est simplement l'évaluation en 1 notée e . Avec tout ceci, on obtient une suite exacte :

$$0 \rightarrow H_1(\tilde{X}) \rightarrow H_1(\tilde{X}, F) \rightarrow \ker e \rightarrow 0$$

Et comme $\ker e = (t-1)$ est l'idéal principal engendré par $t-1$ qui, en tant que $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module est isomorphe à $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. On a en fait :

$$0 \rightarrow H_1(\tilde{X}) \rightarrow H_1(\tilde{X}, F) \rightarrow \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \rightarrow 0.$$

d'où :

$$H_1(\tilde{X}, F) = \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \times H_1(\tilde{X}).$$

□

Pour achever de démontrer le théorème, il nous reste à justifier pourquoi $H_1(\tilde{X})$ est la partie de torsion de $H_1(\tilde{X}, F) = M_K$, ce qui revient à montrer que la partie libre de $H_1(\tilde{X}, F)$ est de rang au plus 1 d'après la proposition précédente. Or ceci découle du fait que $H_1(\tilde{X}, F)$ quotienté par l'idéal engendré par $(t-1)$ est isomorphe à $H_1(X)$ qui est libre de rang 1 sur \mathbb{Z} .

4.3 Matrice de présentation et polynôme d'Alexander

Un module M sur un anneau A est dit de présentation finie, s'il s'insère dans une suite exacte

$$A^m \xrightarrow{P} A^n \rightarrow M \rightarrow 0.$$

La matrice $n \times m$ de P s'appelle alors une matrice de présentation de M . La base canonique de A^n correspond alors à des générateurs de M et les colonnes de P correspondent aux relations entre ces générateurs.

On peut alors montrer que pour $k \geq 0$, l'idéal $I_k(M)$ engendré par les mineurs d'ordre $(n - k)$ de P si $k < n$, et $I_k(M) = A$ sinon, ne dépend pas de la présentation de M choisie. On l'appelle le k^{eme} idéal de Fitting de M .

Le module M_K pour un nœud K est de présentation finie. En effet, supposons que l'on a un diagramme D de K qui possède au moins un croisement (donc n'importe quel diagramme autre que le diagramme usuel du nœud trivial). Alors D possède autant de croisements que de branches, disons n . Alors M_K admet une présentation P de matrice carrée $n \times n$ qui correspond à la présentation de M_K par n générateurs associés aux branches et n relations associées aux croisements. Le fait que M_K ne soit pas entièrement de torsion donne que $I_0(M_K) = (\det(P)) = (0)$.

Le module $H_1(\tilde{X})$ est le quotient de M_K par la classe d'une branche quelconque de D dans M_K . Donc on peut obtenir une matrice de présentation de $H_1(\tilde{X})$ en supprimant n'importe quelle ligne de P . On a alors $I_1(M_K) = I_0(H_1(\tilde{X}))$.

On peut alors montrer le résultat suivant :

Proposition 65 (Définition). *L'idéal $I_1(M_K) = I_0(H_1(\tilde{X}))$ de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ est principal. On appelle **polynôme d'Alexander de K** , un générateur quelconque Δ_K de cet idéal. Δ_K est donc défini à un facteur $\pm t^n$ près.*

On remarque que pour C_K vu comme \mathbb{Z} -module, on a $I_1(C_K) = I_0(H_1(\Delta C_K)) = \det(K)\mathbb{Z}$. Grâce à cela, et le fait que C_K est le quotient de M_K par $t = -1$, on obtient :

Proposition 66. $\det(K) = |\Delta_K(-1)|$

Enfin, on peut généraliser des propriétés vues pour $\det(K)$, comme par exemple :

Proposition 67. $\Delta_{K_1} \cdot \Delta_{K_2} = \pm t^n \Delta_{K_1 + K_2}$

5 Polynômes de Jones

La découverte du polynôme de Jones fut une avancée cruciale dans la théorie des nœuds. D'abord, son histoire est surprenante. V.Jones l'a découvert en étudiant certaines propriétés des algèbres de Von Neumann (objets importants en géométrie non commutative), qui ne semblaient *a priori* pas avoir de lien avec la théorie des nœuds. Aujourd'hui, nous disposons de constructions beaucoup plus simple du polynôme de Jones. Par ailleurs, tous les invariants de nœuds que nous avons vus jusque là sont des invariants du quandle du nœud. Le quandle ne distingue jamais un nœud de son miroir, contrairement au polynôme de Jones.

5.1 Construction du polynôme de Jones : méthode de Kauffman

Kauffman a proposé une construction combinatoire simple du polynôme de Jones qui utilise le **Crochet de Kauffman**.

Définition 68. *Le **crochet de Kauffman** est une fonction qui associe à un diagramme D d'un entrelacs (dans le plan) un polynôme $\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ de la manière suivante :*

- $\langle \bigcirc \rangle = 1$,
- $\langle D \sqcup \bigcirc \rangle = (-A^{-2} - A^2)\langle D \rangle$,
- $\langle \times \rangle = A\langle \rangle \langle \rangle + A^{-1}\langle \asymp \rangle$.

où \bigcirc désigne une courbe fermée simple n'ayant aucune intersection et $D \sqcup \bigcirc$ désigne le diagramme composé de D et de \bigcirc les deux n'ayant aucun croisement entre eux.

Quelques précisions restent à apporter à cette définition. Dans un premier temps, Comme on le verra, ce polynôme n'est pas un invariant, ce qui veut dire qu'il dépend du diagramme choisi pour représenter un entrelacs. On ne peut donc pas simplifier un diagramme par mouvements de Reidemeister avant de calculer son crochet de Kauffman. De plus, pour le troisième point, on observera que si l'on rencontre le croisement "inverse" dans un diagramme, il suffit de le faire pivoter d'un quart de tour pour se ramener au bon croisement.

Enfin, il reste à vérifier que le crochet est bien défini, c'est-à-dire que le calcul de $\langle D \rangle$ ne dépend pas de l'ordre selon lequel on choisit de défaire les croisements et de supprimer les composantes de type \bigcirc . Cette vérification ne pose aucun problème en intervertissant deux à deux l'ordre de croisements traités consécutivement.

Remarque 69. À l'aide des deux premiers points, si D est composé de n \bigcirc disjoints, alors $\langle D \rangle = (-A^{-2} - A^2)^{n-1}$.

Voyons maintenant comment se comporte le crochet de Kauffman vis-à-vis des mouvements de Reidemeister.

Proposition 70. Le crochet de Kauffman obéit aux règles suivantes sous l'effet d'un mouvement de Reidemeister de type I :

$$\langle \overline{\mathcal{D}} \rangle = -A^3 \langle \overline{\mathcal{C}} \rangle, \quad \langle \overline{\mathcal{G}} \rangle = -A^{-3} \langle \overline{\mathcal{C}} \rangle.$$

Démonstration

On a :

$$\langle \overline{\mathcal{D}} \rangle = A \langle \overline{\mathcal{O}} \rangle + A^{-1} \langle \overline{\mathcal{U}} \rangle = (A(-A^{-2} - A^2) + A^{-1}) \langle \overline{\mathcal{C}} \rangle.$$

Il en va de même pour le croisement inverse. □

Remarque 71. On peut remarquer que la deuxième équation s'obtient à partir de la première : Changer tous les croisements d'un diagramme D en intervertissant les dessus et dessous revient à échanger A et A^{-1} dans $\langle D \rangle$. Cela se vérifie directement dans la définition.

Proposition 72. Le crochet de Kauffman est invariant par mouvements de Reidemeister de type II et III :

$$\langle \overline{\mathcal{A}} \rangle = \langle \overline{\mathcal{B}} \rangle, \quad \langle \overline{\mathcal{C}} \rangle = \langle \overline{\mathcal{D}} \rangle$$

Démonstration

Pour le premier point :

$$\langle \overline{\mathcal{A}} \rangle = A \langle \overline{\mathcal{C}} \rangle + A^{-1} \langle \overline{\mathcal{D}} \rangle = -A^{-2} \langle \overline{\mathcal{C}} \rangle + \langle \overline{\mathcal{B}} \rangle + A^{-2} \langle \overline{\mathcal{C}} \rangle.$$

Et pour le second :

$$\langle \overline{\mathcal{C}} \rangle = A \langle \overline{\mathcal{D}} \rangle + A^{-1} \langle \overline{\mathcal{A}} \rangle = A \langle \overline{\mathcal{B}} \rangle + A^{-1} \langle \overline{\mathcal{C}} \rangle = \langle \overline{\mathcal{D}} \rangle$$

En utilisant le premier point. □

Afin d'obtenir un invariant de nœuds il suffirait donc d'apporter une modification au crochet de Kauffman pour devenir invariant par mouvement de Reidemeister de type I. Pour cela il faut introduire la notion suivante.

Définition 73. Étant donné un entrelacs orienté et un diagramme D le représentant, on définit $w(D)$ le **nombre de torsion** de D comme la somme des signes des croisements valant $+1$ ou -1 selon que le croisement est positif ou négatif.

On remarque que la torsion est invariante par mouvements de Reidemeister de type II et III, et change de manière simple par mouvement de type I, tout comme le crochet de Kauffman. En combinant les deux on obtient l'invariant de Jones :

Théorème 74. Soit L un entrelacs et D un diagramme le représentant. Alors l'expression

$$(-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle$$

est un invariant de l'entrelacs orienté L .

Démonstration

Cette expression est, comme on l'a déjà dit, invariante par les mouvements de Reidemeister de type II et III. Il reste ceux de type I pour pouvoir conclure par le théorème de Reidemeister. Mais $w(D)$ change de $+1$ ou -1 quand on supprime une boucle par un mouvement type I (dépendant du sens dans le quel on tourne la boucle). Il suffit alors, d'après la proposition 70, de multiplier par $(-A)^{-3w(D)}$ pour corriger le défaut d'invariance. On obtient bien la formule citée. □

Définition 75. Soit L un entrelacs. On définit alors le **polynôme de Jones** de L par :

$$V(L)(t) = (-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle \text{ avec } A^{-2} = t^{1/2}$$

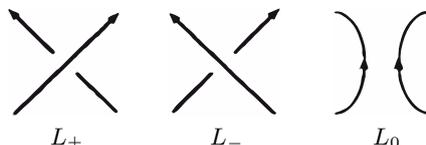
Maintenant, le nombre de torsion d'un entrelacs est congru à son nombre de croisements modulo 2, donc par récurrence sur le nombre de croisements, on montre facilement que le polynôme de Jones $V(L)$ d'un entrelacs L appartient à $\mathbb{Z}[t^{-1/2}, t^{1/2}]$. On montre par ailleurs assez facilement que les entrelacs avec un nombre impair de composantes ont un polynôme de Jones dans $\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$. On observe de plus que si l'on change toutes les orientations des composantes de L , son polynôme de Jones ne change pas. En particulier, le polynôme de Jones d'un nœud ne dépend pas de son orientation.

5.2 Equation fonctionnelle et propriétés du polynôme de Jones

Proposition 76. L'application V qui à un entrelacs lui associe son polynôme de Jones envoie le nœud trivial sur 1, et vérifie l'équation fonctionnelle suivante :

$$t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) + (t^{-1/2} - t^{1/2})V(L_0) = 0$$

où L_+ , L_- et L_0 sont représentés par des diagrammes identiques sauf autour d'un croisement comme suit :



Démonstration

On a :

$$\langle \times \rangle = A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \asymp \rangle \text{ et } \langle \rangle \langle \rangle = A^{-1} \langle \rangle \langle \rangle + A \langle \asymp \rangle.$$

Donc en éliminant le terme en \asymp :

$$A \langle \times \rangle - A^{-1} \langle \rangle \langle \rangle = (A^2 - A^{-2}) \langle \rangle \langle \rangle.$$

Donc en multipliant par $(-A)^{-3w(L_0)}$ et en observant que $w(L_0) = w(L_+) - 1 = w(L_-) + 1$, on obtient :

$$-A^4 V(L_+) + A^{-4} V(L_-) = (A^2 - A^{-2}) V(L_0),$$

d'où le résultat en posant $A^{-2} = t^{1/2}$. □

Il est intéressant de remarquer que les conditions de la proposition 76 caractérisent complètement l'invariant de Jones. En effet, un exercice simple consiste à montrer que tout diagramme d'un entrelacs peut être ramené à une représentation d'un entrelacs composé de nœuds triviaux disjoints, par seule modification des dessus et dessous des croisements. Mais dans ce dernier cas, l'équation fonctionnelle permet sans problème de calculer le polynôme de Jones. Il suffit alors de procéder par récurrence sur le nombre de croisements : étant

donné un diagramme, on utilise la formule pour simplifier l'entrelacs, et on saura calculer les polynômes de Jones des diagrammes de type L_0 par l'hypothèse de récurrence. Il est alors amusant de remarquer, grâce à cette caractérisation, que pour tout entrelacs L , $V(L)(e^{2i\pi/3}) = 1$.

Proposition 77. *Soient K_1 et K_2 des nœuds. Alors :*

$$V(K_1 + K_2) = V(K_1)V(K_2)$$

Démonstration

Supposons fixée une fois pour toutes l'arête de K_1 à laquelle on vient "greffer" K_2 . Dans un premier temps, on simplifie K_1 sans toucher à K_2 . Alors dans le calcul de $V(K_1 + K_2)$, par l'équation de la proposition 76, on obtient des polynômes P_i presque tous nuls tels que

$$V(K_1 + K_2) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i V(L_i)$$

où les L_i sont composés de i composantes connexes disjointes : une correspondant à K_2 , les autres représentant le nœud trivial. Dans le cas où K_2 est le nœud trivial, on a $V(L_i) = (-t^{-1/2} - t^{1/2})^{i-1}$ et $V(K_1) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i (-t^{-1/2} - t^{1/2})^{i-1}$. Pour tout i , on recommence en simplifiant K_2 : on obtient des Q_j tels que

$$V(L_i) = \sum_{j=1}^{\infty} Q_j V(L_{i,j})$$

où les $L_{i,j}$ sont cette fois composés de $(i-1)+j$ composantes connexes disjointes représentant le nœud trivial. On a alors :

$$\begin{aligned} V(K_1 + K_2) &= \sum_{i,j} P_i Q_j V(L_{i,j}) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i (-t^{-1/2} - t^{1/2})^{i-1} \sum_{j=1}^{\infty} Q_j (-t^{-1/2} - t^{1/2})^{j-1} \\ &= V(K_1)V(K_2) \end{aligned}$$

□

Remarque 78. *Cette démonstration permet par la même occasion de montrer, via une toute petite modification de la preuve précédente : $V(K_1 \sqcup K_2) = (-t^{-1/2} - t^{1/2})V(K_1)V(K_2)$ où l'union ne génère pas d'entrelacement.*

Contrairement à tous les invariants que nous avons rencontrés, le polynôme de Jones permet parfois de distinguer un nœud de son miroir. Si le diagramme D représente un nœud K et que \overline{D} représente son miroir, on a $V(\overline{D})(t) = V(D)(t^{-1})$. Il suffit donc, pour générer un exemple, de trouver un nœud dont le polynôme de Jones n'est pas symétrique en t et t^{-1} . L'exemple du nœud de trèfle suffit :

$$\begin{aligned} \langle \text{Trèfle} \rangle &= A \langle \text{Trèfle} \rangle + A^{-1} \langle \text{Trèfle} \rangle \\ &= A \times A^6 + A^{-1} \left(A \langle \text{Trèfle} \rangle + A^{-1} \langle \text{Trèfle} \rangle \right) \\ &= A^7 + A^{-1} (A \times (-A^3) + A^{-1} \times (-A^{-3})) = A^7 - A^3 - A^{-5} \end{aligned}$$

On vérifie par ailleurs que pour le nœud de trèfle considéré, la torsion vaut $w = -3$. D'où finalement, avec $A^{-4} = t$:

$$V(\text{Trèfle})(t) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$$

qui n'est pas symétrique en t et t^{-1} .

Références

- [1] C.Livingston. *Knot Theory*. The Carus Mathematical Monographs, 1993.
- [2] W.B. Raymond Lickorish. *An Introduction to Knot Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1991.
- [3] Vassily Manturov. *Knot Theory*. CHAPMAN and HALL/CRC, 2004.
- [4] P.Alexandroff and H.Hopf. *Topologie I*. Springer, 1945.