
REPRÉSENTATIONS DE CARQUOIS ET THÉORÈMES DE GABRIEL

par Fabienne DUCROQUET et Sophie GRÈZES-RUEFF

Sujet proposé par Olivier SCHIFFMANN

★

Exposé de mathématiques du MMFAI
École normale supérieure
Année 2004-2005

★

Table des matières

1	Définitions	3
2	Étude d'exemples	4
2.1	Le carquois A_2	4
2.2	Les carquois A_n	6
3	Les foncteurs de Coxeter	9
3.1	Construction des foncteurs F_β^+ et F_α^-	10
3.1.1	Construction de F_β^+	11
3.1.2	Construction de F_α^-	12
3.2	Propriétés de ces foncteurs	13
3.3	Changement d'orientation d'un carquois	16
3.4	Les foncteurs de Coxeter	20
4	Racines et groupes de Weyl	21
4.1	Forme de Tits et groupe de Weyl	21
4.2	Cas où la forme quadratique est définie positive	23
4.3	Racines et transformation de Coxeter	26
5	Démonstration des théorèmes	27
6	Annexe : quelques définitions sur les catégories	29
	Références	30

Dans toute la suite, k désigne un corps algébriquement clos.

Si E et F sont des espaces vectoriels, $\mathcal{L}(E, F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F , et $\mathcal{GL}(E, F)$ l'ensemble des isomorphismes linéaires de E dans F .

1 Définitions

Définition 1.0.1 (Carquois). *Un carquois $Q = (G, \Lambda) = (G_0, G_1, d, a)$ est la donnée :*

- d'un graphe G composé
- d'un ensemble de sommets G_0 , qui sera toujours fini ici : $G_0 = \{1, \dots, n\}$,
- d'un ensemble de flèches G_1 , qui sera également fini ici,
- d'une orientation Λ donnée par deux applications d et a de G_1 dans G_0 qui définissent les points de départ et d'arrivée des flèches : si $\rho \in G_1$, on a

$$d(\rho) \xrightarrow{\rho} a(\rho)$$

Un carquois est donc simplement un graphe orienté.

Définition 1.0.2 (Représentation d'un carquois). *Une représentation V d'un carquois $Q = (G_0, G_1, d, a)$ est la donnée d'un k -espace vectoriel V_i pour chaque $i \in G_0$, et d'une application linéaire x_ρ de $V_{d(\rho)}$ dans $V_{a(\rho)}$ pour chaque $\rho \in G_1$.*

Définition 1.0.3 (Morphisme entre deux représentations). *Si $V = ((V_i)_{i \in G_0}, (x_\rho)_{\rho \in G_1})$ et $W = ((W_i)_{i \in G_0}, (y_\rho)_{\rho \in G_1})$ sont deux représentations d'un carquois Q , un morphisme θ entre V et W est une famille $(\theta_i)_{i \in G_0} \in \prod_{i=1}^n \mathcal{L}(V_i, W_i)$ telle que $\forall \rho \in G_1$, le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} V_{d(\rho)} & \xrightarrow{x_\rho} & V_{a(\rho)} \\ \theta_{d(\rho)} \downarrow & & \theta_{a(\rho)} \downarrow \\ W_{d(\rho)} & \xrightarrow{y_\rho} & W_{a(\rho)} \end{array}$$

Un morphisme est injectif si $\forall i \in G_0$, θ_i est injectif.

Il est surjectif si $\forall i \in G_0$, θ_i est surjectif.

C'est un isomorphisme si $\forall i \in G_0$, θ_i est un isomorphisme.

On note $\mathcal{L}(G, \Lambda)$ la catégorie (voir 6) des représentations du carquois $Q = (G, \Lambda)$.

Définition 1.0.4 (Somme directe de représentations). Si

$V = ((V_i)_{i \in G_0}, (x_\rho)_{\rho \in G_1})$ et $W = ((W_i)_{i \in G_0}, (y_\rho)_{\rho \in G_1})$ sont deux représentations d'un carquois Q , la somme directe $V \oplus W$ des représentations V et W est la représentation définie par : $\forall i \in G_0, (V \oplus W)_i = V_i \oplus W_i$, et $\forall \rho \in G_1, (V \oplus W)_\rho = x_\rho \oplus y_\rho$.

Définition 1.0.5 (Représentation indécomposable). Une représentation V d'un carquois Q est dite indécomposable si pour toutes représentations W, W' telles que $V = W \oplus W'$, $W = 0$ ou $W' = 0$.

2 Étude d'exemples

2.1 Le carquois A_2

Soit A_2 le carquois défini par :

$$A_2 = 1 \xrightarrow{x} 2$$

On définit les trois représentations S_1, S_2 et P de A_2 par :

$$\begin{aligned} S_1 &= k \xrightarrow{0} 0 \\ S_2 &= 0 \xrightarrow{0} k \\ P &= k \xrightarrow{Id} k \end{aligned}$$

Soit V une représentation de A_2 .

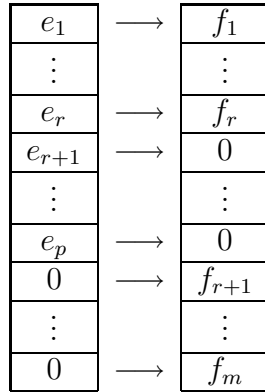
Il y a plusieurs façons de comprendre V : comme une somme directe ou comme un quotient.

Proposition 2.1.1. Si V est une représentation de A_2 , il existe $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{N}$ tels que $V = S_1^{d_1} \oplus S_2^{d_2} \oplus P^{d_3}$.

Démonstration. Si $V = V_1 \xrightarrow{v} V_2$ avec V_1 et V_2 de dimension finie, $\dim V_1 = p$ et $\dim V_2 = m$, on choisit des bases (e_1, \dots, e_p) et (f_1, \dots, f_m) de V_1 et V_2 telles que la matrice de v dans ces bases soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où r est le rang de v et I_r la matrice identité de dimension r . On peut alors prendre $d_3 = r$, $d_1 + r = p$ et $d_2 + r = m$, en envoyant (e_1, \dots, e_r) sur (f_1, \dots, f_r) , (e_{r+1}, \dots, e_p) sur 0 et 0 sur (f_{r+1}, \dots, f_m) .



□

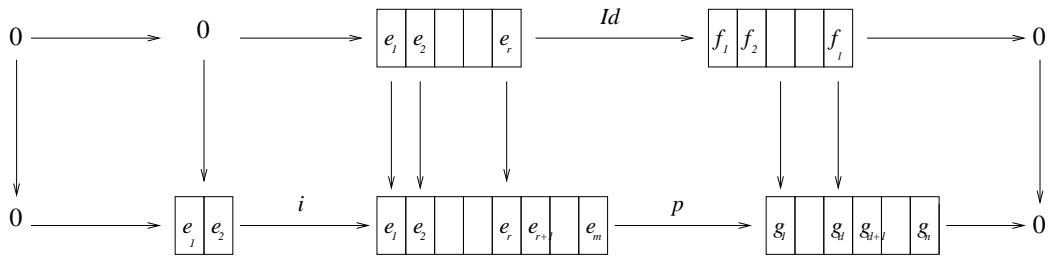
Proposition 2.1.2. *Si V est une représentation de A_2 , et d_1, d_2 et d_3 des entiers comme dans la proposition 2.1.1, alors la suite*

$$0 \longrightarrow S_2^{r_1} \longrightarrow P^{r_2} \oplus S_2^{r_3} \longrightarrow V \longrightarrow 0$$

avec $r_1 = d_1, r_2 = d_3 + d_1, r_3 = d_2$ est exacte.

Démonstration.

$$0 \longrightarrow S_2^{r_1} \longrightarrow P^{r_2} \oplus S_2^{r_3} \longrightarrow V \longrightarrow 0$$



On détermine r_1, r_2 et r_3 tels que la suite ci-dessus soit exacte. Il faut :

- que les diagrammes commutent ;
- que les suites où on ne tient compte que d'un des espaces vectoriels de chaque carquois soient exactes.

Pour la première suite, cela implique que $r_2 = \dim V_1$.

Pour la seconde : l'espace de dimension r_1 dans la représentation $S_2^{r_1}$ est envoyé sur 0 par $p \circ i$, donc en utilisant la commutativité, on obtient $r_1 = d_1$. □

2.2 Les carquois A_n

Les carquois A_n à n sommets et $n - 1$ arêtes ($n \geq 1$) sont les carquois dont le graphe est du type :

$$1 \text{ --- } 2 \text{ --- } \cdots \text{ --- } n - 1 \text{ --- } n$$

Nous allons étudier les représentations indécomposables du carquois A_n dans le cas où toutes les flèches sont orientées dans le même sens.

$$A_n = 1 \xrightarrow{\rho_1} 2 \xrightarrow{\rho_2} \cdots \longrightarrow n - 1 \xrightarrow{\rho_{n-1}} n$$

Pour $i, j \in 1, \dots, n$, on note $I_{i,j}$ la représentation de A_n définie par :

- $\forall m \in \mathbb{N}$, si $1 \leq m \leq n$, alors $(I_{i,j})_m = \begin{cases} k & \text{si } 1 \leq m \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- $\forall m \in \mathbb{N}$, si $1 \leq m \leq m - 1$, alors $l_{\rho_m} = \begin{cases} Id & \text{si } i \leq m \leq j - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$I_{i,j} = 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} k \xrightarrow{Id} k \xrightarrow{Id} \cdots \xrightarrow{Id} k \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \cdots$$

\uparrow
 i^e
 position

\uparrow
 j^e
 position

En particulier, si $i = j$, on obtient la représentation dans laquelle tous les espaces sont nuls sauf un qui est égal à k , et toutes les flèches sont nulles, qui est évidemment indécomposable.

$$I_{i,i} = 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} k \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \cdots$$

\uparrow
 i^e
 position

En fait tous les $I_{i,j}$ sont indécomposables : si on écrit $I_{i,j} = V \oplus W$, nécessairement tous les V_i et les W_i sont égaux à 0 ou à k . Si l'on suppose qu'il existe $m_1, m_2 \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $V_{m_1} = 0, W_{m_1} = k, V_{m_2} = k, W_{m_2} = 0$, on peut supposer que $m_1 < m_2$, et que $V_{m_1+1} = 0$, on voit alors que la somme de V et W ne peut pas être égale à A_n puisqu'une des flèches située entre deux espaces égaux à k est nulle.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & m_1 & & m_1 + 1 & & \cdots & & m_2 & & \\
V = & \cdots & \longrightarrow & k & \xrightarrow{0} & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
W = & \cdots & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{0} & \cdots & & \cdots & \longrightarrow & k & \longrightarrow & \cdots \\
V \oplus W = & \cdots & \longrightarrow & k & \xrightarrow{0} & k \text{ ou } 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & k & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Les $I_{i,j}$ sont deux à deux non isomorphes, car si $(i, j) \neq (i', j')$, les dimensions des $(I_{i,j})_m$ et des $(I_{i',j'})_m$ sont différentes.

Proposition 2.2.1. *Les $I_{i,j}$ sont les seules représentations indécomposables de A_n .*

Démonstration. Soit $I = ((I_j)_{1 \leq j \leq n}, (f_m)_{1 \leq m \leq n-1})$ une représentation indécomposable de A_n , qu'on suppose différente des $I_{j,j}, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On va montrer que les dimensions des espaces I_j sont toutes nécessairement égales à 0 ou 1. Soit r le plus grand indice tel que $I_r \neq 0$. Alors f_{r-1} est surjective car sinon on pourrait prendre un supplémentaire non nul W de son image dans I_r et on aurait $I = V \oplus I_{r,r}^{\dim W}$, avec $V \neq 0$ car $I \neq I_{r,r}$. Soit $x \in I_r$, et $J \subset I_r$ tel que $I_r = kx \oplus J$.

On utilise alors le lemme suivant :

Lemme 2.2.1. *Si K, U, W sont des k -espaces vectoriels et $f : K \mapsto U \oplus W$ une application linéaire, il existe des sous-espaces U' et W' de K tels que $K = U' \oplus W'$ et $f(U') \subset U, f(W') \subset W$.*

Démonstration. Soit S un supplémentaire du noyau de f . On pose $\tilde{f} = f|_S$, $V_1 = \tilde{f}^{-1}(U), V_2 = \tilde{f}^{-1}(W)$. On a alors $K = V_1 \oplus V_2 \oplus S$, il suffit de poser $U' = V_1$ et $W' = V_2 \oplus \ker f$. \square

Le lemme permet de dire qu'il existe $x_{r-1} \in I_{r-1}$ et $J' \subset I_{r-1}$, tels que $f_{r-1}(x_{r-1}) \in kx$ et $I_{r-1} = kx_{r-1} \oplus J'$. On applique le même raisonnement pour $i \leq r$ tant que l'espace I_{i-1} n'est pas nul, et on obtient ainsi une décomposition de I en somme directe de deux carquois non nuls, ce qui est impossible.

On a donc montré que I_r est de dimension 1. Mais si un des $I_j, j < r$ est de dimension supérieure ou égale à deux, on peut en fait commencer le

raisonnement à partir de cet indice et obtenir une décomposition en somme directe de deux représentations non nulles. Donc tous les $I_j, 1 \leq j \leq n$ sont de dimension 0 ou 1.

Si on suppose maintenant que I n'est pas de la forme $I_{i,j}$ pour des $i, j \in [1, n]$, cela signifie qu'il existe $m < m'$ avec $I_m = k, I_{m'} = \bar{k}, I_{m+1} = 0$, et la représentation n'est pas indécomposable.

Donc I est bien égal à l'un des $I_{i,j}$. \square

Nous avons donc vu que dans le cas de A_n , il y a un nombre fini de représentations indécomposables deux à deux non isomorphes, ce n'est pas le cas de tous les carquois : si on considère le carquois $Q = \rho \circlearrowleft \bullet$, une représentation de Q correspond à la donnée d'un espace vectoriel et d'un endomorphisme de cet espace vectoriel. Une représentation indécomposable correspond à un endomorphisme n'ayant pas de sous-espace stable avec un supplémentaire stable.

Soit V un k -espace vectoriel de base (e_1, \dots, e_n) , et l l'endomorphisme dont la matrice dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

C'est un endomorphisme nilpotent. Si on suppose que la représentation correspondante n'est pas indécomposable, V se décompose en une somme directe de deux sous-espaces stables par l , W et W' . Les restrictions de l à W et W' sont nilpotentes, donc $\ker l|_W \neq 0$ et $\ker l|_{W'} \neq 0$, donc le noyau de l a une dimension supérieure ou égale à deux, ce qui est impossible.

On peut donc trouver des représentations indécomposables avec un espace vectoriel de n'importe quelle dimension, donc Q possède une infinité de représentations indécomposables deux à deux non isomorphes.

Cela amène à se poser la question de la classification des carquois en fonction du nombre d'indécomposables.

L'objectif des trois dernières parties est d'arriver à la démonstration des théorèmes de Gabriel, qui concernent le nombre de représentations indécomposables et les relations de celles-ci avec des vecteurs dimension particuliers, appelés racines.

Théorème 2.2.1 (Premier théorème de Gabriel). *S'il n'y a qu'un nombre fini de représentations indécomposables deux à deux non isomorphes du*

de carquois qui permettent d'obtenir de nouvelles représentations indécomposables à partir d'une représentation indécomposable, mais en inversant le sens des flèches.

Si $Q = (G, \Lambda)$ est un carquois et $\beta \in G_0$, on appelle L_β la représentation de Q dans laquelle tous les espaces vectoriels sont nuls sauf celui correspondant à β , et toutes les flèches sont nulles.

3.1 Construction des foncteurs F_β^+ et F_α^-

Pour chaque sommet $\alpha \in G_0$, on désigne par G^α l'ensemble des flèches dont l'une des extrémités est α . Si Λ est une orientation du graphe G , on désigne par $\sigma_\alpha \Lambda$ l'orientation obtenue à partir de Λ en inversant le sens de toutes les flèches $\rho \in G^\alpha$.

Définition 3.1.1. (i) On dit qu'un sommet α est une source ou est $(-)$ -accessible si $a(\rho) \neq \alpha$ pour tout $\rho \in G_1$, c'est-à-dire qu'il n'y a que des flèches qui partent de α , et qu'il n'y a pas de boucle en α .

(ii) On définit de même un puits ou sommet $(+)$ -accessible : c'est un sommet β tel que $d(\rho) \neq \beta$ pour tout $\rho \in G_1$.

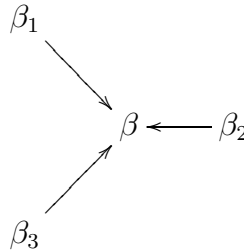


FIG. 1 – Puits ou sommet $(+)$ -accessible

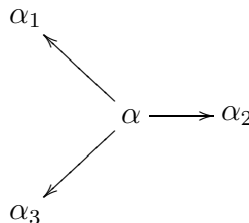


FIG. 2 – Source ou sommet $(-)$ -accessible

Si β est un puits du carquois (G, Λ) , nous allons pouvoir construire un foncteur F_β^+ de la catégorie $\mathcal{L}(G, \Lambda)$ dans la catégorie $\mathcal{L}(G, \sigma_\beta \Lambda)$, et si α est une source du carquois (G, Λ) , nous allons pouvoir construire un foncteur F_α^- de la catégorie $\mathcal{L}(G, \Lambda)$ dans la catégorie $\mathcal{L}(G, \sigma_\alpha \Lambda)$.

3.1.1 Construction de F_β^+

Soit β un puits du carquois $Q = (G, \Lambda)$. L'objectif est de construire une représentation $(W, g) = F_\beta^+(V)$ de $(G, \sigma_\beta \Lambda)$ à partir d'une représentation (V, f) de (G, Λ) .

Pour $\gamma \neq \beta$, on pose $W_\gamma = V_\gamma$, et pour $\rho \notin G^\beta$, $g_\rho = f_\rho$.

Pour construire W_β , on veut avoir des flèches de W_β dans chacun des $V_{d(\rho)}$, $\rho \in G^\beta$, le plus simple est donc de prendre pour W_β un sous-espace de $\bigoplus_{i=1}^k V_{d(\rho_i)}$, où $G^\beta = \{\rho_1, \dots, \rho_k\}$, et on peut alors prendre les projections sur les composantes de la somme directe comme flèches.

On va donc chercher à obtenir un sous-espace de $\bigoplus_{i=1}^k V_{d(\rho_i)}$ en utilisant les applications f_{ρ_i} de chacun des $V_{d(\rho_i)}$ dans V_β . On peut construire l'application $h : \bigoplus_{i=1}^k V_{d(\rho_i)} \longrightarrow V_\beta$ et un sous-espace naturel $(v_1, v_2, \dots, v_k) \longmapsto f_{\rho_1}(v_1) + \dots + f_{\rho_k}(v_k)$

de $\bigoplus_{i=1}^k V_{d(\rho_i)}$ que l'on peut prendre est le noyau de h .

On a donc $W_\beta = \{(v_1, v_2, \dots, v_k) \in \bigoplus_{i=1}^k V_{d(\rho_i)} \mid h(v_1, v_2, \dots, v_k) = f_{\rho_1}(v_1) + \dots + f_{\rho_k}(v_k) = 0\}$ et pour $i \in \{1, \dots, k\}$, l'application g_{ρ_i} est la composition de l'inclusion de W_β dans $\bigoplus_{i=1}^k V_{d(\rho_i)}$ et de la projection sur la i^e composante de la somme directe.

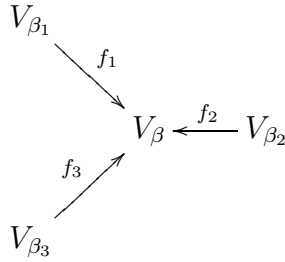
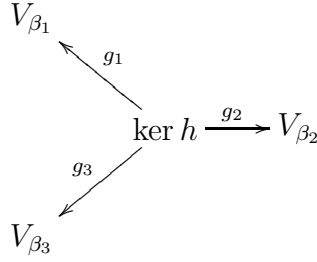


FIG. 3 – Situation de départ

Exemples :

- si on part de la représentation (indécomposable) $k \longrightarrow 0 \longleftarrow 0$, on arrive à la représentation $k \xleftarrow{Id} k \longrightarrow 0$, et on remarque qu'elle est également indécomposable ;
- si on part de $0 \longrightarrow k \longleftarrow 0$, on obtient la représentation nulle.

FIG. 4 – Situation après la transformation F_{β}^{+}

3.1.2 Construction de F_{α}^{-}

On considère cette fois une source α du carquois $Q = (G, \Lambda)$, et l'objectif est toujours de construire une représentation (W, g) de $(G, \sigma_{\alpha}\Lambda)$ à partir d'une représentation (V, f) de (G, Λ) .

Pour $\gamma \neq \alpha$, on pose $W_{\gamma} = V_{\gamma}$, et pour $\rho \notin G^{\alpha}$, $g_{\rho} = f_{\rho}$.

Il faut maintenant définir W_{α} . Cette fois, on veut construire des flèches de chacun des $V_{a(\rho_i)}$, $i \in \{1, \dots, k\}$ (où $G^{\alpha} = \{\rho_1, \dots, \rho_k\}$) dans W_{α} à partir de flèches de V_{α} dans chacun des $V_{a(\rho_i)}$.

À partir de ces applications, on définit l'application

$$\begin{aligned} \tilde{h} : V_{\alpha} &\longrightarrow \bigoplus_{i=1}^k V_{a(\rho_i)} && \text{qui donne un sous-espace } \text{Im } \tilde{h} \text{ de } \bigoplus_{i=1}^k V_{a(\rho_i)}. \\ v &\longmapsto (f_{\rho_1}(v), \dots, f_{\rho_k}(v)) \end{aligned}$$

On ne pose pas $W_{\alpha} = \text{Im } \tilde{h}$, car il n'y a pas de manière simple (autre que l'application nulle...) d'envoyer chaque $V_{a(\rho_i)}$ dans cet espace. On peut par contre prendre $W_{\alpha} = (\bigoplus_{i=1}^k V_{a(\rho_i)}) / \text{Im } \tilde{h}$, et considérer pour l'application g_{ρ_i} la composition de l'inclusion de $V_{a(\rho_i)}$ dans la somme directe, et du passage au quotient.

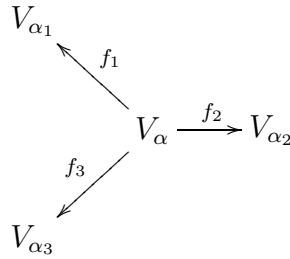


FIG. 5 – Situation de départ

Exemples :

– si on part de $k \xleftarrow{Id} k \longrightarrow 0$, on arrive à $k \longrightarrow 0 \longleftarrow 0$ (on est donc

$$\begin{array}{ccc}
V_{\alpha_1} & & \\
& \searrow^{g_1} & \\
& & (\bigoplus_{i=1}^3 V_{\alpha_i}) / \text{Im } \tilde{h} \\
& \nearrow_{g_3} & \longleftarrow^{g_2} V_{\alpha_2} \\
V_{\alpha_3} & &
\end{array}$$

FIG. 6 – Situation après la transformation F_α^-

revenus à la représentation de départ en appliquant F_2^+ puis F_2^- à la représentation $k \longrightarrow 0 \longleftarrow 0$;

– en partant de $0 \longleftarrow k \longrightarrow 0$, on obtient la représentation nulle.

3.2 Propriétés de ces foncteurs

Les foncteurs F_α^- et F_β^+ vérifient la propriété suivante :

Propriété 3.2.1. *Si V_1 et V_2 sont deux représentations d'un carquois \mathcal{Q} , et α un puits (resp. une source), alors $F_\alpha^+(V_1 \oplus V_2) = F_\alpha^+(V_1) \oplus F_\alpha^+(V_2)$ (resp. $F_\alpha^-(V_1 \oplus V_2) = F_\alpha^-(V_1) \oplus F_\alpha^-(V_2)$).*

Notation : pour β puits (respectivement α source), si $\rho \in G^\beta$ (respectivement $\rho \in G^\alpha$), on note $e(\rho)$ l'extrémité de ρ différente de β (respectivement α).

Si β est un puits par rapport à l'orientation Λ de G et (V, f) une représentation de (G, Λ) , β est une source par rapport à l'orientation $\sigma_\beta \Lambda$ de $F_\beta^+(V)$, et on peut donc définir la composée $F_\beta^- F_\beta^+(V)$ dont l'orientation est Λ . Pour « comparer » $F_\beta^- F_\beta^+(V)$ et V , on construit un morphisme i_V^β entre ces deux représentations : $i_V^\beta : F_\beta^- F_\beta^+(V) \rightarrow V$.

Pour $\gamma \neq \beta$, comme on a : $(F_\beta^- F_\beta^+(V))_\gamma = V_\gamma$, on pose $(i_V^\beta)_\gamma = Id$.

Pour définir $(i_V^\beta)_\beta$, on remarque qu'ici, \tilde{h} est simplement le plongement de $(F_\beta^+(V))_\beta = \ker h$ dans $\bigoplus_{\rho \in G^\beta}^k V_{e(\rho)}$. On a donc

$$(F_\beta^- F_\beta^+(V))_\beta = \bigoplus_{\rho \in G^\beta} V_{e(\rho)} / \text{Im } \tilde{h} = \bigoplus_{\rho \in G^\beta} V_{e(\rho)} / \ker h$$

et on peut prendre pour $(i_V^\beta)_\beta$ l'application h passée au quotient.

Maintenant, si α est une source de (G, Λ) et (V, f) une représentation de (G, Λ) , on construit $p_V^\alpha : V \rightarrow F_\alpha^+ F_\alpha^-(V)$.

Pour $\gamma \neq \alpha$, comme on a : $(F_\alpha^+ F_\alpha^-(V))_\gamma = V_\gamma$, on pose $(p_V^\alpha)_\gamma = Id$.

On remarque ensuite que cette fois-ci, h est le passage au quotient de $\bigoplus_{\rho \in G^\alpha} V_{e(\rho)}$ dans $(F_\alpha^-(V))_\alpha = \bigoplus_{\rho \in G^\alpha} V_{e(\rho)} / \text{Im } \tilde{h}$, donc $(F_\alpha^+ F_\alpha^-(V))_\alpha = \ker h = \text{Im } \tilde{h}$, et on pose $(p_V^\alpha)_\alpha = \tilde{h}$.

Les morphismes i_V^β et p_V^α vérifient les propriétés suivantes :

Proposition 3.2.1. (i) p_V^α est un morphisme surjectif.

(ii) i_V^β est un morphisme injectif.

(iii) Si i_V^β est un isomorphisme, les dimensions des espaces $(F_\beta^+(V))_\gamma$ vérifient :

$$\begin{aligned} \dim F_\beta^+(V)_\gamma &= \dim V_\gamma \text{ si } \gamma \neq \beta \\ \dim F_\beta^+(V)_\beta &= -\dim V_\beta + \sum_{\rho \in G^\beta} \dim V_{d(\rho)} \end{aligned} \quad (1)$$

(iv) Si p_V^α est un isomorphisme, les dimensions des espaces $(F_\alpha^-(V))_\gamma$ sont données par :

$$\begin{aligned} \dim F_\alpha^-(V)_\gamma &= \dim V_\gamma \text{ si } \gamma \neq \alpha \\ \dim F_\alpha^-(V)_\alpha &= -\dim V_\alpha + \sum_{\rho \in G^\alpha} \dim V_{a(\rho)} \end{aligned} \quad (2)$$

(v) Si $\gamma \neq \alpha$, $(\ker p_V^\alpha)_\gamma = 0$.

(vi) Si $\gamma \neq \beta$, $(V / \text{Im } i_V^\beta)_\gamma = 0$.

(vii) Si V est de la forme $F_\alpha^+(W)$ (resp. $F_\beta^-(W)$), alors p_V^α (resp. i_V^β) est un isomorphisme.

(viii) Si β est un puits, V est isomorphe à $F_\beta^- F_\beta^+(V) \oplus V / \text{Im } i_V^\beta$, et si α est une source, V est isomorphe à $F_\alpha^+ F_\alpha^-(V) \oplus \ker p_V^\alpha$.

Démonstration. Les démonstrations des points (i), (ii), (iii), (iv), (v) et (vi) sont immédiates.

(vii) Si $V = F_\alpha^+(W)$, il suffit de montrer que $(p_V^\alpha)_\alpha$ est injectif. Or si $V = F_\alpha^+(W)$, $(p_V^\alpha)_\alpha = \tilde{h}$ est le plongement¹ de W_α dans $\bigoplus_{\rho \in G^\alpha} V_{e(\rho)}$, ainsi qu'on l'a remarqué lors de la construction de i_V^β pour β puits. Le morphisme p_V^α est donc bien un isomorphisme.

Si $V = F_\beta^-(W)$, on a remarqué lors de la construction de p_V^α avec α source que h était alors un passage au quotient donc surjectif², d'où $(i_V^\beta)_\beta$ surjectif.

¹Il n'y a pas d'ambiguïté sur \tilde{h} car le foncteur F_α^- est appliqué seulement une fois à V .

²Là non plus, il n'y a pas d'ambiguïté sur h car on n'applique qu'une fois le foncteur F_β^+ .

(viii) Si β est un puits, comme i_V^β est injectif, $F_\beta^- F_\beta^+(V)$ est isomorphe à $\text{Im } i_V^\beta$, ce qui donne le résultat.

Si α est une source, comme p_V^α est surjectif, $(F_\alpha^+ F_\alpha^-(V))$ est isomorphe à $V/\ker p_V^\alpha$, d'où le résultat. \square

Les foncteurs F_β^+ , avec β puits, et F_α^- avec α source ont la propriété de transformer des représentations indécomposables en d'autres objets indécomposables, c'est l'objet du théorème suivant :

Théorème 3.2.1. (i) Soient $Q = (G, \Lambda)$ un carquois et β un puits pour l'orientation Λ . Si V est une représentation indécomposable de Q , deux cas sont possibles :

1. $V = L_\beta$ et $F_\beta^+ V = 0$;
2. $F_\beta^+(V)$ est indécomposable, $F_\beta^- F_\beta^+(V) = V$ et les dimensions des espaces $F_\beta^+(V)_\gamma$ sont données par l'équation 1.

(ii) Si α est une source pour l'orientation Λ , si V est une représentation indécomposable de Q , deux cas sont possibles :

1. $V = L_\alpha$ et $F_\alpha^- V = 0$;
2. $F_\alpha^-(V)$ est indécomposable, $F_\alpha^+ F_\alpha^-(V) = V$ et les dimensions des espaces $F_\alpha^-(V)_\gamma$ sont données par l'équation 2.

Démonstration. (i) Soient V une représentation indécomposable de Q et β un puits pour l'orientation Λ . D'après le (viii) de la proposition 3.2.1, on a $V \approx F_\beta^- F_\beta^+(V) \oplus V/\text{Im } i_V^\beta$, d'où comme V est indécomposable, $V = V/\text{Im } i_V^\beta$ ou $V = F_\beta^- F_\beta^+(V)$.

Dans le premier cas, d'après le (vi) de la proposition 3.2.1, si $\gamma \neq \beta$, $V_\gamma = 0$, d'où comme V est indécomposable, $V = L_\beta$, et le fait que $F_\beta^+(V) = 0$ est évident.

Dans le second cas, i_V^β est un isomorphisme, donc d'après le (iii) de la proposition 3.2.1, les dimensions des $F_\beta^+(V)_\gamma$ sont données par l'équation 1. Il reste à montrer que $W = F_\beta^+(V)$ est indécomposable. Supposons que cette représentation n'est pas indécomposable : $W = W_1 \oplus W_2$. Alors d'après la propriété 3.2.1, on a $V = F_\beta^- F_\beta^+(V) = F_\beta^-(W_1) \oplus F_\beta^-(W_2)$, mais comme V est indécomposable, l'un des deux termes est nul, par exemple $F_\beta^-(W_2) = 0$. Mais comme d'après le (vii) de la proposition 3.2.1, $p_V^\beta : W \rightarrow F_\beta^+ F_\beta^-(W)$ est un isomorphisme, et $p_V^\beta(W_2) \subset F_\beta^+ F_\beta^-(W_2) = 0$, on a $W_2 = 0$, et W est bien indécomposable.

(ii) Soient V une représentation indécomposable de Q et α une source pour l'orientation Λ . D'après le (viii) de la proposition 3.2.1, on a

$V \approx F_\alpha^+ F_\alpha^-(V) \oplus \ker p_V^\alpha$, d'où comme V est indécomposable, $V = \ker p_V^\alpha$ ou $V = F_\alpha^+ F_\alpha^-(V)$.

Dans le premier cas, d'après le (v) de la proposition 3.2.1, si $\gamma \neq \alpha$, $V_\gamma = 0$, d'où comme V est indécomposable, $V = L_\alpha$, et le fait que $F_\alpha^-(V) = 0$ est évident.

Dans le second cas, p_V^α est un isomorphisme, donc d'après le (iv) de la proposition 3.2.1, les dimensions des $F_\alpha^-(V)_\gamma$ sont données par l'équation 2. Il reste à montrer que $W = F_\alpha^-(V)$ est indécomposable. Supposons que cette représentation n'est pas indécomposable : $W = W_1 \oplus W_2$. Alors d'après la propriété 3.2.1, on a $V = F_\alpha^+ F_\alpha^-(V) = F_\alpha^+(W_1) \oplus F_\alpha^+(W_2)$, mais comme V est indécomposable, l'un des deux termes est nul, par exemple $F_\alpha^+(W_2) = 0$. Mais comme d'après le (vii) de la proposition 3.2.1, $i_V^\alpha : F_\alpha^- F_\alpha^+(W) \rightarrow W$ est un isomorphisme, on a $W_2 \approx F_\alpha^- F_\alpha^+(W_2) = 0$, et W est bien indécomposable. \square

3.3 Changement d'orientation d'un carquois

Définition 3.3.1 (Suites (+) et (-)-accessibles). Soit $Q = (G, \Lambda)$ un carquois.

(i) On dit qu'une suite $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de sommets est (+)-accessible pour l'orientation Λ si α_1 est (+)-accessible pour l'orientation Λ , et pour $i \in [[2, k]]$, α_i est (+)-accessible pour l'orientation $\sigma_{\alpha_{i-1}} \dots \sigma_{\alpha_1}$.

(ii) On dit qu'une suite $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de sommets est (-)-accessible pour l'orientation Λ si α_1 est (-)-accessible pour l'orientation Λ , et pour $i \in [[2, k]]$, α_i est (-)-accessible pour l'orientation $\sigma_{\alpha_{i-1}} \dots \sigma_{\alpha_1}$.

En utilisant cette notion, on peut déduire un corollaire du théorème 3.2.1

Corollaire 3.3.1. Soit $Q = (G, \Lambda)$ un carquois et $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ une suite (+)-accessible.

(i) Pour $i \in [[1, k]]$, on considère L_{α_i} comme représentation de $(G, \sigma_{\alpha_{i-1}} \dots \sigma_{\alpha_1} \Lambda)$, on peut alors définir $F_{\alpha_1}^- \dots F_{\alpha_{i-1}}^- (L_{\alpha_i})$, et cette représentation est nulle ou indécomposable.

(ii) Si V est une représentation indécomposable de Q , et que $F_{\alpha_k}^+ \dots F_{\alpha_1}^+(V) = 0$, alors $\exists i \in [[1, k]], V \approx F_{\alpha_1}^- \dots F_{\alpha_{i-1}}^- (L_{\alpha_i})$.

Démonstration. (i) Découle du théorème 3.2.1 avec une récurrence sur i .

(ii) Découle du théorème 3.2.1 avec une récurrence sur k . \square

On a une proposition équivalente avec une suite (-)-accessible.

Nous allons maintenant voir comment les foncteurs F_α^+ et F_β^- permettent de modifier l'orientation d'un carquois donné.

Théorème 3.3.1 (Inversion du sens des flèches). *Soient G un graphe sans cycle (on ne tient pas compte de l'orientation), et Λ, Λ' deux orientations de G . Alors il existe une suite de sommets $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de G (+)-accessible par rapport à l'orientation Λ telle que $\Lambda' = \sigma_{\alpha_k} \dots \sigma_{\alpha_1} \Lambda$.*

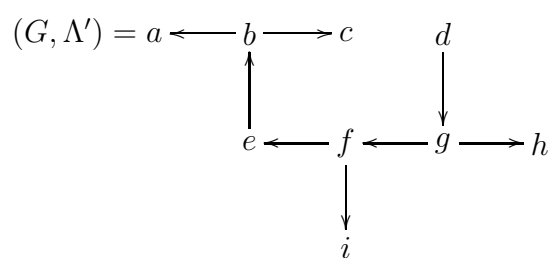
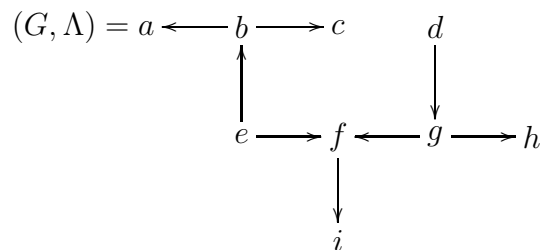
Démonstration. Il suffit de traiter le cas où Λ et Λ' ne diffèrent que par l'orientation d'une arête l . Comme G est sans cycle, lorsque l'on supprime l , on obtient un graphe avec deux composantes connexes. Soit G' la composante connexe qui contient $a(l)$. On numérote les sommets de G' dans un ordre tel que pour toute arête ρ de G' , le numéro du sommet $a(\rho)$ soit plus petit que celui de $d(\rho)$, autrement dit, toutes les flèches vont dans le sens des numéros décroissants. Une telle numérotation est possible car G est sans cycle : on peut par exemple appliquer l'algorithme :

- (1) choisir un sommet de G' ;
- (2) remonter dans le graphe jusqu'à atteindre un sommet sans « père » ;
- (3) mettre ce sommet dans une pile, puis empiler au-dessus tous ses fils, puis ses « petits-fils », et ainsi de suite ;
- (4) numérotter les sommets dans l'ordre croissant en commençant par le haut de la pile ;
- (5) si tous les sommets n'ont pas été numérotés, recommencer en partant d'un sommet pas encore numéroté et en n'empilant que les sommets non numérotés, et prendre des numéros plus grands que ceux déjà attribués.

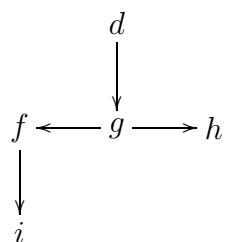
L'étape (2) se termine car G n'a pas de cycle, et à l'étape (3), on n'empile jamais deux fois le même sommet pour la même raison. Les flèches entre deux sommets numérotés au cours d'une même étape vérifient bien la propriété demandée. Si $d(\rho)$ et $a(\rho)$ n'ont pas été numérotés à la même étape, c'est forcément $a(\rho)$ qui a été numéroté en premier, puisque si un sommet est numéroté au cours d'une étape, tous ses fils le sont aussi, et on en déduit que le numéro de $d(\rho)$ est plus grand que celui de $a(\rho)$.

En rangeant ensuite les sommets dans l'ordre des numéros croissants $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, on a une suite de sommets de G (+)-accessible pour l'orientation Λ (puisque G' était la composante connexe contenant $a(l)$), et cette suite vérifie $\sigma_{\alpha_k} \dots \sigma_{\alpha_1} \Lambda = \Lambda'$: en effet, une arête de G' est inversée deux fois, une fois pour le sommet de départ et une pour l'arrivée (pour l'orientation Λ), la seule arête à n'être inversée qu'une fois est l qui n'a que son point d'arrivée dans G' . \square

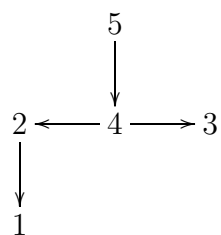
Exemple d'une telle suite :



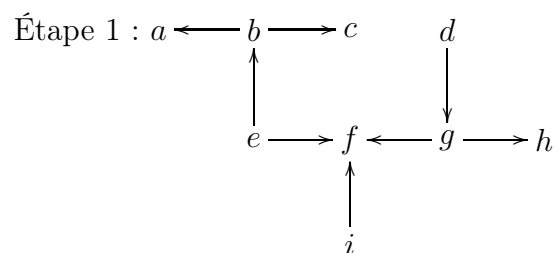
G' est donc le graphe :

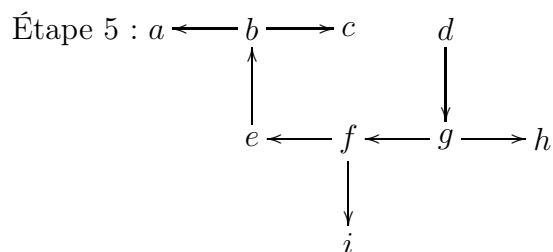
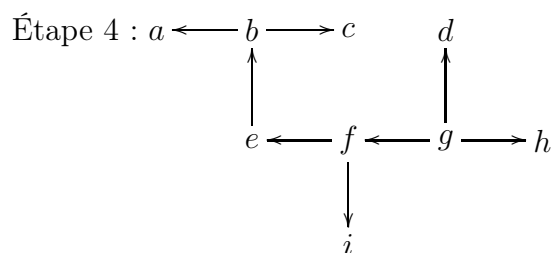
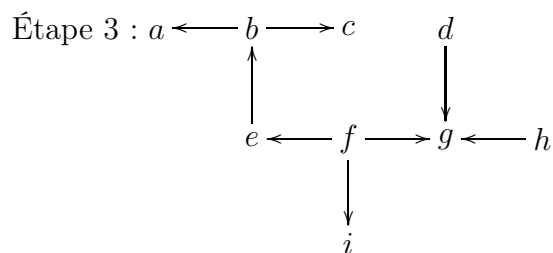
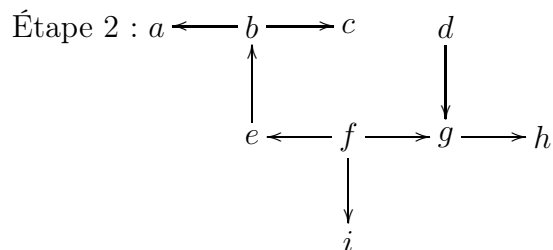


qu'on peut numéroté ainsi :



et les transformations successives donnent :





Remarque : on a le même résultat avec des suites $(-)$ -accessibles, pour le prouver il suffit de considérer la composante connexe contenant le point de départ de la flèche concernée dans la démonstration, et de numéroter les sommets de façon à ce que les flèches aillent dans le sens des numéros croissants.

Cela permet de considérer les problèmes sur des carquois sans cycle comme indépendants de l'orientation en quelque sorte.

Théorème 3.3.2. *Soient G un graphe sans cycle (on ne tient pas compte de l'orientation) et Λ, Λ' deux orientations de G .*

Soient $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ les ensembles de classes de représentations indécomposables de $\mathcal{L}(G, \Lambda)$ et $\mathcal{L}(G, \Lambda)$, $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}$ l'ensemble des classes des objets $F_{\alpha_1}^- \cdots F_{\alpha_{i-1}}^-(L_{\alpha_i})$ pour $1 \leq i \leq k$, et $\tilde{\mathcal{M}}' \subset \mathcal{M}'$ l'ensemble des classes des objets $F_{\alpha_k}^+ \cdots F_{\alpha_{i+1}}^+(L_{\alpha_i})$ pour $1 \leq i \leq k$. Alors le foncteur $F_{\alpha_k}^+ \cdots F_{\alpha_1}^+$ est une bijection entre $\mathcal{M} \setminus \tilde{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{M}' \setminus \tilde{\mathcal{M}}'$.

3.4 Les foncteurs de Coxeter

Définition 3.4.1 (les foncteurs de Coxeter). Soit (G, Λ) un carquois sans cycle. On numérote les sommets de G_0 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de telle sorte que le numéro associé au sommet $d(\rho)$ soit plus grand que celui associé à $a(\rho)$, pour tout ρ dans G_1 . On note alors $\Phi^+ = F_{\alpha_n}^+ \cdots F_{\alpha_2}^+ F_{\alpha_1}^+$, et $\Phi^- = F_{\alpha_1}^- F_{\alpha_2}^- \cdots F_{\alpha_n}^-$. Φ^+ et Φ^- sont appelés les foncteurs de Coxeter.

Lemme 3.4.1. (i) La suite $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ est (+)-accessible et la suite $\alpha_n, \dots, \alpha_1$ est (-)-accessible.

(ii) Les foncteurs Φ^+ et Φ^- envoient la catégorie $\mathcal{L}(G, \Lambda)$ dans elle-même.

(iii) Φ^+ et Φ^- ne dépendent pas de la suite choisie pour numéroter les sommets.

Démonstration. Pour le (i), le sommet 1 doit clairement être un puits, et pour chaque sommet numéroté j , les flèches qui en partent ont été renversées par $F_{\alpha_{j-1}}^+ \cdots F_{\alpha_1}^+$, donc le sommet j est (+)-accessible pour l'orientation $\sigma_{\alpha_{j-1}} \cdots \sigma_{\alpha_1} \Lambda$. Donc $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ est (+)-accessible. De même pour $\alpha_n, \dots, \alpha_1$.

Pour le (ii), on voit clairement que chaque flèche est changée deux fois d'orientation, donc l'orientation de G est conservée.

On prouve le (iii) pour Φ^+ . Remarquons d'abord que pour deux sommets α_1 et α_2 qui ne sont pas reliés par une flèche, $F_{\alpha_1}^+$ et $F_{\alpha_2}^+$ commutent. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n$ deux suites qui conviennent pour l'orientation de G . Soit m' l'indice tel que $\alpha_1 = \alpha'_{m'}$. Alors si $i < m'$, les sommets numérotés α_1 et α'_i ne peuvent être reliés car le sommet α_1 est un puits (s'ils étaient reliés par une arête ρ , on aurait nécessairement $d(\rho) = \alpha'_{m'} = \alpha_1$ d'après le choix de la suite $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n$). Donc d'après la remarque précédente, on a : $F_{\alpha'_m}^+ \cdots F_{\alpha'_1}^+ = F_{\alpha'_{m-1}}^+ \cdots F_{\alpha'_1}^+ F_{\alpha_1}^+$.

On continue de même pour $\alpha_2, \alpha_3 \dots$ Pour chaque sommet α_i , correspondant à α'_p , les sommets voisins reliés par une flèche qui sort ont un numéro j plus petit, donc ont déjà été traités et donc le $F_{\alpha_j}^+$ a déjà commuté. Il n'y a donc pas de sommet α'_q , $q < p$ qui soit relié au sommet α_i et qui n'ait pas encore été traité, et donc on peut de nouveau faire commuter $F_{\alpha_i}^+$. Et donc on a bien l'égalité : $F_{\alpha'_n}^+ \cdots F_{\alpha'_1}^+ = F_{\alpha_n}^+ \cdots F_{\alpha_1}^+$.

On le démontre de même pour Φ^- . □

Les foncteurs de Coxeter permettent d'introduire les définitions des représentations régulières et irrégulières.

Définition 3.4.2 (Représentations régulières et irrégulières). Soit (G, Λ) un carquois sans cycle. On dit que $V \in \mathcal{L}(G, \Lambda)$ est $(+)$ - (resp. $(-)$ -) irrégulière si $(\Phi^+)^k V = 0$ (resp. $(\Phi^-)^k V = 0$) pour tout k .

On dit qu'une représentation V est régulière si $V \approx (\Phi^+)^k (\Phi^-)^k V \approx (\Phi^-)^k (\Phi^+)^k V$ pour tout k .

Théorème 3.4.1. Soit (G, Λ) un carquois sans cycle.

(i) Chaque représentation indécomposable $V \in \mathcal{L}(G, \Lambda)$ est soit régulière, soit irrégulière.

(ii) Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ une numérotation des sommets de G telle que $\forall \rho \in G_1$ le numéro de $d(\rho)$ soit plus grand que celui de $a(\rho)$. Soient $V_i = F_{\alpha_1}^- \cdots F_{\alpha_{i-1}}^- (L_{\alpha_i}) \in \mathcal{L}(G, \Lambda)$, $\hat{V}_i = F_{\alpha_n}^+ \cdots F_{\alpha_{i+1}}^+ (L_{\alpha_i}) \in \mathcal{L}(G, \Lambda)$. Alors $\Phi^+(V_i) = 0$ et toute représentation indécomposable $V \in \mathcal{L}(G, \Lambda)$ telle que $\Phi^+(V) = 0$ est isomorphe à un des V_i . De même $\Phi^-(\hat{V}_i) = 0$, et si V est indécomposable et $\Phi^-(V) = 0$, alors V est isomorphe à un \hat{V}_i .

(iii) Chaque représentation $(+)$ - (resp. $(-)$ -) irrégulière indécomposable V est de la forme $(\Phi^-)^k V_i$ (resp. $(\Phi^+)^k \hat{V}_i$).

Démonstration. Ce théorème découle du corollaire 3.3.1 (récurrence sur i). \square

4 Racines et groupes de Weyl

Nous allons maintenant définir les *racines* qui permettent d'établir un lien entre les représentations indécomposables et les dimensions des espaces vectoriels de la représentation.

4.1 Forme de Tits et groupe de Weyl

On suppose que G est un graphe sans boucle, c'est-à-dire sans flèche reliant un sommet à lui même, mais pas forcément sans cycle.

Définition 4.1.1. On appelle \mathcal{E}_G le \mathbb{Q} -espace vectoriel \mathbb{Q}^{G_0} .

Un vecteur $x = (x_\alpha)$ est dit entier si $\forall \alpha \in G_0, x_\alpha \in \mathbb{Z}$.

Il est dit positif si $x \neq 0$, et $\forall \alpha \in G_0, x_\alpha \geq 0$.

Un vecteur entier positif correspond à un vecteur dimension possible pour une représentation de $Q = (G, \Lambda)$.

Si $\alpha \in G_0$, on note $\bar{\alpha}$ le vecteur tel que $(\bar{\alpha})_\beta = 0$ si $\alpha \neq \beta$, et $(\bar{\alpha})_\alpha = 1$.

Définition 4.1.2 (Forme quadratique de Tits). La forme quadratique de Tits B est définie sur \mathcal{E}_G par $B(x) = \sum_{\alpha \in Q_0} x_\alpha^2 - \sum_{\rho \in G_1} x_{d(\rho)} x_{a(\rho)}$, où $x = (x_\alpha)$ et les applications d et a donnent l'orientation des flèches. La forme bilinéaire symétrique correspondante est notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Définition 4.1.3. Pour chaque $\alpha \in G_0$, on définit une application linéaire σ_α sur \mathcal{E}_G par :

$$\begin{aligned} (\sigma_\alpha x)_\beta &= x_\beta & \text{si } \alpha \neq \beta \\ (\sigma_\alpha x)_\alpha &= -x_\alpha + \sum_{\rho \in Q^\alpha} x_{e(\rho)} \end{aligned}$$

où G^α désigne l'ensemble des arêtes passant par α et $e(\rho)$ l'extrémité de ρ différente de α .

On remarque que si α est un puits (resp. une source) pour une représentation donnée V , et que $F_\alpha^+(V)$ (resp. $F_\alpha^-(V)$) est indécomposable, l'action de σ_α sur $\dim V = (\dim V_\beta)_{\beta \in G_0}$ correspond à l'action de F_α^+ (resp. F_α^-) sur ces dimensions.

Soit W le semi-groupe engendré par les σ_α dans $(\mathcal{L}(\mathcal{E}_G), \circ)$ (ce n'est pas un groupe a priori).

Nous avons alors les propriétés suivantes :

Proposition 4.1.1. (i) $\forall \alpha \in G_0, \langle \bar{\alpha}, \bar{\alpha} \rangle = 1$;
(ii) $\forall \alpha, \beta \in G_0, \alpha \neq \beta, -2\langle \bar{\alpha}, \bar{\beta} \rangle$ est égal au nombre d'arêtes joignant α et β ;
(iii) W est un groupe : $\forall \alpha \in G_0, \forall x \in \mathcal{E}_G, \sigma_\alpha(x) = x - 2\langle \bar{\alpha}, x \rangle \bar{\alpha}$, et $\sigma_\alpha^2 = 1$;
(iv) W préserve les vecteurs entiers de \mathcal{E}_G et la forme quadratique B ;
(v) Si B est définie positive, alors W est fini.

Démonstration. Le point (i) est évident car G n'a pas de boucle.

(ii) La forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ s'écrit :

$$\forall x, y \in \mathcal{E}_G, \langle x, y \rangle = \sum_{\alpha \in G_0} x_\alpha y_\alpha - \frac{1}{2} \sum_{\rho \in G_1} (x_{d(\rho)} y_{a(\rho)} + x_{a(\rho)} y_{d(\rho)})$$

La première somme de $\langle \bar{\alpha}, \bar{\beta} \rangle$ est évidemment nulle si $\alpha \neq \beta$, pour la seconde on a :

$$\begin{aligned} -\bar{\alpha}_{d(\rho)} \bar{\beta}_{a(\rho)} &= \begin{cases} 1 & \text{si } \rho \text{ est une arête partant de } \alpha \text{ et arrivant à } \beta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ -\bar{\alpha}_{a(\rho)} \bar{\beta}_{d(\rho)} &= \begin{cases} 1 & \text{si } \rho \text{ est une arête partant de } \beta \text{ et arrivant à } \alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

ce qui montre le (ii).

(iii) Pour la première égalité, il suffit de comparer les deux quantités : si

$\alpha \neq \beta$ on a : $(x - 2\langle \bar{\alpha}, x \rangle \bar{\alpha})_\beta = x_\beta = (\sigma_\alpha(x))_\beta$, et

$$\begin{aligned} (x - 2\langle \bar{\alpha}, x \rangle \bar{\alpha})_\alpha &= x_\alpha - 2 \sum_{\beta \in G_0} x_\beta \langle \bar{\alpha}, \bar{\beta} \rangle \\ &= -x_\alpha + \sum_{\beta \neq \alpha} x_\beta (\text{nombre d'arêtes entre } \alpha \text{ et } \beta) \text{ d'après le (ii)} \\ &= -x_\alpha + \sum_{\rho \in G^\alpha} x_{e(\rho)} = (\sigma_\alpha(x))_\alpha \end{aligned}$$

On utilise cette formule pour calculer

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^2(x) &= \sigma_\alpha(x) - 2\langle \bar{\alpha}, x \rangle \sigma_\alpha(\bar{\alpha}) \\ &= x - 2\langle \bar{\alpha}, x \rangle \bar{\alpha} + 2\langle \bar{\alpha}, x \rangle \bar{\alpha} \text{ car } \sigma_\alpha(\bar{\alpha}) = -\bar{\alpha} \\ &= x \end{aligned}$$

(iv) Le fait que W préserve les vecteurs entiers est évident, pour montrer qu'il préserve B , on calcule :

$$\begin{aligned} B(\sigma_\alpha(x)) &= B(x - 2\langle \bar{\alpha}, x \rangle \bar{\alpha}) \\ &= B(x) - 4\langle \bar{\alpha}, x \rangle^2 B(\bar{\alpha}) + 4\langle \bar{\alpha}, x \rangle^2 \\ &= B(x) \end{aligned}$$

(v) On remarque que si B est définie positive, pour tout $N \in \mathbb{N}$, le nombre d'éléments entiers tels que $B(x) < N$ est fini.

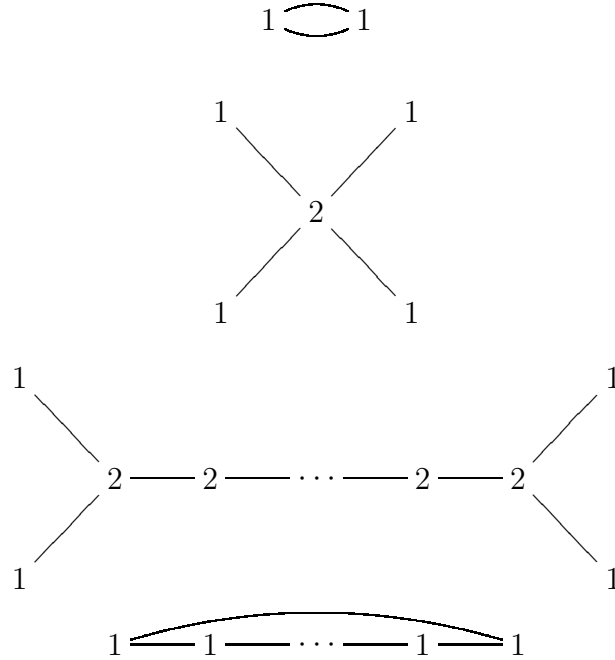
Or \mathcal{E}_G est engendré comme \mathbb{Q} -espace vectoriel par les $\bar{\alpha}$ qui sont tous de norme 1 pour la norme associée à B , un élément de W est donc défini par la donnée des images des $\bar{\alpha}$, qui doivent être de norme 1 par le (iv), il n'y a donc qu'un nombre fini de possibilités pour choisir ces images, donc W est fini. □

4.2 Cas où la forme quadratique est définie positive

Le cas où la forme de Tits est définie positive est utilisé pour la démonstration des théorèmes de Gabriel, nous allons donc voir pour quels carquois cette forme est définie positive.

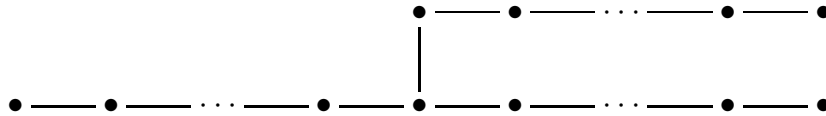
Théorème 4.2.1. *La forme quadratique B est définie positive si et seulement si G est de la forme A_n, D_n, E_6, E_7 ou E_8 .*

Démonstration. Nous pouvons éliminer les cas où G contient un sous-graphe d'une des formes suivantes :



En effet, si on met les valeurs qui sont sur les schémas aux sommets du sous-graphe et qu'on complète par des zéros, on obtient dans les quatre cas un vecteur non nul de \mathcal{E}_G dont l'image par B est négative ou nulle.

On en déduit que G est de la forme :

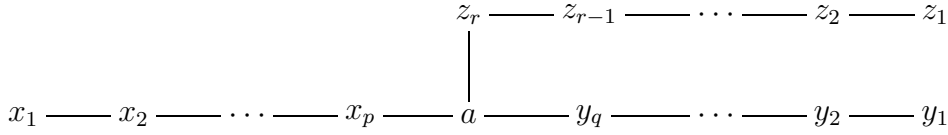


On introduit ensuite une seconde forme quadratique sur \mathbb{Q}^{p+1} qui va permettre d'étudier la forme de Tits pour des carquois de ce type :

$$\begin{aligned}
 C_p(x_1, \dots, x_{p+1}) &= - \sum_{i=1}^p x_i x_{i+1} + \sum_{i=1}^p x_i^2 + \frac{p}{2(p+1)} x_{p+1}^2 \\
 &= \sum_{i=1}^p \frac{i}{2(i+1)} \left(x_{i+1} - \frac{i+1}{i} x_i \right)^2
 \end{aligned}$$

La seconde écriture permet de voir que C_p est positive, non définie, qu'elle est nulle sur un espace de dimension 1 et que si $x = (x_1, \dots, x_p) \neq 0$ est tel que $C_p(x) = 0$, toutes les coordonnées de x sont non nulles.

Si on prend alors un vecteur dimension comme sur la figure suivante :



on a une relation entre B et C_p, C_q, C_r :

$$\begin{aligned}
 B(x, y, z, a) &= C_p(x, a) + C_q(y, a) + C_r(z, a) \\
 &+ \left(1 - \frac{p}{2(p+1)} - \frac{q}{2(q+1)} - \frac{r}{2(r+1)} \right) a^2
 \end{aligned}$$

avec $x = (x_1, \dots, x_p)$, $y = (y_1, \dots, y_q)$, $z = (z_1, \dots, z_r)$ On voit alors que B est définie positive si et seulement si $\left(1 - \frac{p}{2(p+1)} - \frac{q}{2(q+1)} - \frac{r}{2(r+1)} \right) > 0$. En effet si $\left(1 - \frac{p}{2(p+1)} - \frac{q}{2(q+1)} - \frac{r}{2(r+1)} \right) \leq 0$, d'après les remarques précédentes, on peut choisir x, y, z non nuls tels que $C_p(x, a) = C_q(y, a) = C_r(z, a) = 0$, comme $a \neq 0$, $B(x, y, z, a) \leq 0$. Et si $\left(1 - \frac{p}{2(p+1)} - \frac{q}{2(q+1)} - \frac{r}{2(r+1)} \right) > 0$, B est définie positive car C_p, C_q et C_r sont positives et qu'un vecteur x non nul tel $B(x) = 0$ a toutes ses coordonnées non nulles, d'où $a \neq 0$ donc $B(x) > 0$... Donc B est définie positive si et seulement si

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2(p+1)} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2(p+1)} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2(p+1)} < 1$$

soit

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{r+1} > 1$$

En supposant $p \leq q \leq r$, cette inégalité n'est vraie que dans l'un des cas

	p	q	r	Graphe
	0	quelconque	quelconque	A_{q+r+1}
	1	1	≥ 1	D_{r+3}
suyvants :	1	2	2	E_6
	1	2	3	E_7
	1	2	4	E_8

Ce qui prouve le théorème. □

4.3 Racines et transformation de Coxeter

Définition 4.3.1 (Racines). (i) Un élément $x \in \mathcal{E}_G$ est appelé racine s'il existe $\alpha \in G_0, w \in W$ tels que $x = w\bar{\alpha}$.

(ii) Les $\bar{\alpha}, \alpha \in G_1$ sont des racines simples.

(iii) Les racines positives sont les racines x telles que $x > 0$.

On remarque l'analogie de l'écriture d'une racine avec le résultat de la proposition 3.3.1.

Les racines vérifient les propriétés suivantes :

Proposition 4.3.1. (i) Les racines sont des vecteurs entiers et vérifient $B(x) = 1$.

(ii) Si x est une racine, alors $-x$ est aussi une racine.

(iii) Si x est une racine, alors x ou $-x$ est une racine positive.

Démonstration. (i) Découle de la proposition 4.1.1.

(ii) On sait qu'il existe $\alpha \in G_0, w \in W$ tels que $x = w(\bar{\alpha})$, et comme W est un groupe, on peut calculer $w\sigma_\alpha w^{-1}(x) = w(\sigma_\alpha(\bar{\alpha})) = w(-\bar{\alpha}) = -x$.

(iii) On le démontre uniquement dans le cas où B est définie positive car c'est le seul cas utile pour la démonstration des théorèmes de Gabriel.

Comme on peut écrire $x = \sigma_{\beta_1} \circ \sigma_{\beta_2} \circ \dots \circ \sigma_{\beta_k} \bar{\alpha}$, il suffit de montrer que pour y racine positive, si $\beta \in Q_0$, alors $\sigma_\beta y > 0$ ou $-\sigma_\beta y > 0$. En fait on montre que $\sigma_\beta y > 0$ ou $y = \bar{\beta}$.

On sait que $B(y) = B(\bar{\beta}) = 1$, donc $|\langle \bar{\beta}, y \rangle| \leq 1$ (par l'inégalité de Cauchy-Schwarz) et $2\langle \bar{\beta}, y \rangle \in \mathbb{Z}$ d'après la proposition 4.1.1, donc il ne peut prendre que les valeurs $-2, -1, 0, 1, 2$.

- Cas 1 : $2\langle \bar{\beta}, y \rangle = 2$, soit $\langle \bar{\beta}, y \rangle = 1$. C'est le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz : $y = r\bar{\beta}, r \in \mathbb{Q}$, et $\langle \bar{\beta}, y \rangle = r = 1$, c'est-à-dire $y = \bar{\beta}$.
- Cas 2 : $2\langle \bar{\beta}, y \rangle = 1$. Or $2\langle \bar{\beta}, y \rangle = 2y_\beta - \sum_{\rho \in G^\beta} y_{e(\rho)}$, d'où comme y est entier positif, $y_\beta \geq 1$. Et comme d'après la proposition 4.1.1, $\sigma_\beta(y) = y - \bar{\beta}$, on a bien $\sigma_\beta(y) > 0$.
- Cas 3 : $2\langle \bar{\beta}, y \rangle < 0$, alors $\sigma_\beta(y) = y - 2\langle \bar{\beta}, y \rangle \bar{\beta} > 0$ puisque $y > 0$.

□

Définition 4.3.2 (Transformation de Coxeter). Si G est un graphe sans boucle, et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ une énumération de ses sommets, on appelle transformation de Coxeter un élément $c = \sigma_{\alpha_n} \circ \dots \circ \sigma_{\alpha_1}$ de W . L'application c dépend de l'énumération choisie.

Remarque : Si on choisit une orientation Λ sur G pour laquelle le carquois $Q = (G, \Lambda)$ est sans cycle et qu'on prend pour $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ une suite

(+)-accessible, l'action de la transformation de Coxeter sur un vecteur entier positif correspond à l'action des foncteurs de Coxeter Φ^+ et Φ^- correspondants sur les dimensions d'une représentation indécomposable de cette dimension, à condition qu'on n'obtienne jamais de représentation nulle en appliquant les F_α^- et F_β^+ (autrement dit, à condition qu'on n'obtienne que des représentations indécomposables).

Proposition 4.3.2. *Si la forme bilinéaire B est définie positive, on a :*

- (i) *la transformation n'a pas de vecteur invariant non nul ;*
- (ii) *pour tout $x \in \mathcal{E}_G$, il existe $i \in \mathbb{N}$, tel que $c^i x$ ne soit pas positif.*

Démonstration. (i) Supposons qu'il existe $x \in \mathcal{E}_G$ tel que $x \neq 0$ et $cx = x$. Comme $\alpha_n, \dots, \alpha_2$ ne modifient pas x_{α_1} , on a $(\sigma_{\alpha_1} x)_{\alpha_1} = (cx)_{\alpha_1}$, soit $\sigma_{\alpha_1} x = x$. De même on montre $\forall i \in [1, n], \sigma_{\alpha_i} x = x$. Comme on avait pris une énumération de tous les sommets de G , on a $\forall \alpha \in G_0, \sigma_\alpha x = x - 2\langle \bar{\alpha}, x \rangle \bar{\alpha} = x$, d'où $\langle \bar{\alpha}, x \rangle = 0$. Or les $\bar{\alpha}$ forment une base de \mathcal{E}_G et que B est non dégénérée, on en déduit que $x = 0$.

(ii) Comme W est un groupe fini, c est d'ordre fini m dans W . Soit x non nul dans \mathcal{E}_G . Si les vecteurs $x, cx, \dots, c^{m-1}x$ sont tous positifs, le vecteur $y = x + cx + \dots + c^{m-1}x$ est positif donc non nul et vérifie $cy = y$, ce qui contredit le point (i). \square

5 Démonstration des théorèmes

Grâce aux notions et aux théorèmes introduits dans les sections 3 et 4, nous allons maintenant pouvoir démontrer les théorèmes énoncés plus hauts.

Si V est une représentation du carquois $Q = (G, \Lambda)$, on note $\dim V \in \mathcal{E}_G$ le vecteur $(\dim V_\alpha)_{\alpha \in G_0}$.

Théorème 5.0.1 (Premier théorème de Gabriel). *S'il n'y a qu'un nombre fini de représentations indécomposables deux à deux non isomorphes du carquois $Q = (G, \Lambda)$, alors G est de la forme A_n, D_n, E_6, E_7 ou E_8 .*

Démonstration. Soit (G, Λ) un carquois. On considère les représentations (V, f) d'une dimension fixée $\dim V = m = (m_\alpha)_{\alpha \in G_0}$.

On peut supposer que G n'a pas de boucle car on a vu que s'il y a une boucle, il y a un nombre infini de représentations indécomposables.

Le groupe $H = (\prod_{\alpha \in G_0} \mathcal{GL}(V_\alpha))$ agit sur l'ensemble A des représentations de dimension $\dim V$: si $g = (g_\alpha)_{\alpha \in G_0} \in H$, et $(V, f) = ((V_\alpha)_{\alpha \in G_0}, (f_\rho)_{\rho \in G_1}) \in \mathcal{E}_G$, on définit $g \cdot (V, f) = (V, l)$ par $\forall \rho \in G_1, l_\rho = g_{a(\rho)} f_\rho g_{d(\rho)}^{-1}$. Deux représentations de (G, Λ) de dimension $\dim V$ sont isomorphes si et seulement si

elles sont dans la même orbite pour l'action du groupe H . On remarque que le sous-groupe de H formé des $(\lambda Id, \dots, \lambda Id)_{\lambda \in k^*}$ agit sur A comme l'identité, donc on a aussi une action du groupe quotient H/k^* , et deux représentations de (G, Λ) de dimension $\dim V$ sont isomorphes si et seulement si elles sont dans la même orbite pour l'action du groupe H/k^* .

S'il n'y a qu'un nombre fini de représentations indécomposables non isomorphes dans $\mathcal{L}(G, \Lambda)$, en particulier il n'y en a qu'un nombre fini de dimension $\dim V$, donc le nombre d'orbites de A sous l'action de H/k^* est fini. Or A et H/k^* sont des variétés de dimensions respectivement $\sum_{\rho \in G_1} m_{a(\rho)} m_{d(\rho)}$ et $\sum_{\alpha \in G_0} m_\alpha^2 - 1$, pour que leur quotient n'ait qu'un nombre fini de points, on doit avoir $\dim A \leq \dim(H/k^*)$. Cela signifie que pour tout vecteur positif x de \mathcal{E}_G , $B(x) > 0$ où B est la forme quadratique introduite à la section 4. Comme $\forall x \in \mathcal{E}_G, B(x) \geq B(|x|)$, B est définie positive sur les vecteurs entiers, et on déduit de $B(\lambda x) = \lambda^2 B(x)$, $\forall x \in \mathcal{E}_G, \forall \lambda \in \mathbb{Q}$, que B est définie positive sur \mathcal{E}_G . D'après le théorème 4.2.1, cela n'est possible que si G est de la forme A_n, D_n, E_6, E_7 , ou E_8 , ce qui prouve le théorème. \square

L'étude faite à la section 4 permet de reformuler le théorème 3.2.1 de la façon suivante, utile pour la démonstration du second théorème :

Théorème 5.0.2. (i) Soient $Q = (G, \Lambda)$ un graphe orienté, β un puits pour l'orientation Λ , et V une représentation indécomposable de Q . Alors on a deux possibilités :

- $F_\beta^+(V)$ est indécomposable et vérifie $\dim F_\beta^+(V) = \sigma_\beta(\dim V)$ et $F_\beta^- F_\beta^+(V) = V$;
- $V = L_\beta$, $F_\beta^+(V) = 0$ et $\sigma_\beta(\dim V) < 0$.

(ii) Soient $Q = (G, \Lambda)$ un graphe orienté, α une source pour l'orientation Λ , et V une représentation indécomposable de Q . Alors on a deux possibilités :

- $F_\alpha^-(V)$ est indécomposable et vérifie $\dim F_\alpha^-(V) = \sigma_\alpha(\dim V)$ et $F_\alpha^+ F_\alpha^-(V) = V$;
- $V = L_\alpha$, $F_\alpha^-(V) = 0$ et dans ce cas $\sigma_\alpha(\dim V) < 0$.

On en déduit le corollaire :

Corollaire 5.0.1. Soit $Q = (G, \Lambda)$ un carquois, $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ une suite (+)-accessible et V une représentation indécomposable de Q .

Pour $j \in \{0, \dots, k\}$, on pose $V_j = F_{\alpha_j}^+ \cdots F_{\alpha_1}^+(V)$ et $m_j = \sigma_{\alpha_j} \cdots \sigma_{\alpha_1}(\dim V)$. Soit p le plus grand entier tel que pour tout $j \leq p$, $\sigma_{\alpha_j} > 0$. Alors :

(i) Pour $j \leq p$, la représentation V_j est indécomposable (et $\dim V_j = m_j$), et $V = F_{\alpha_1}^- \cdots F_{\alpha_j}^-(V_j)$.

(ii) Si $p < k$, on a $V_{p+1} = \dots = V_k = 0$, et on a $V_p = L_{\alpha_{p+1}}$ et $V = F_{\alpha_1}^- \cdots F_{\alpha_p}^-(L_{\alpha_{p+1}})$.

Démonstration. (i) se déduit du théorème 5.0.2 avec une récurrence sur j .

(ii) $V_p = L_{\alpha_{p+1}}$ se déduit du théorème, et on applique le (i). \square

Théorème 5.0.3 (Second théorème de Gabriel). *Si G est un graphe du type A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 , et Λ une orientation de G , alors (G, Λ) a un nombre fini de représentations indécomposables non isomorphes deux à deux, et il y a une bijection entre les représentations indécomposables de (G, Λ) et les racines positives dans \mathcal{E}_G .*

Démonstration. On choisit une numérotation $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des sommets de G telle que les flèches aillent dans le sens des numéros décroissants. Soit c la transformation de Coxeter correspondante.

(i) Soit V une représentation indécomposable de (G, Λ) . On cherche à lui associer une racine positive. D'après la proposition 4.3.2, il existe h tel que le vecteur $c^h(\dim V)$ ne soit pas positif. Comme la suite $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ est $(+)$ -accessible et que c'est une énumération de tous les sommets de G_0 , la suite $(\beta_1, \dots, \beta_{nh}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (h fois) est aussi $(+)$ -accessible. Donc $c^h(\dim V) = \sigma_{\beta_{nh}} \cdots \sigma_{\beta_1}(\dim V)$ n'est pas positif. On déduit alors du corollaire 5.0.1 qu'il existe $i < nh$ tel que $V = F_{\beta_1}^- \cdots F_{\beta_i}^-(L_{\beta_{i+1}})$, donc $\dim V = \sigma_{\beta_1} \cdots \sigma_{\beta_i}(\dim V)$. On a donc $\dim V$ est une racine positive, et V est bien déterminée par $\dim V$ puisque W est un groupe, autrement dit, l'application $V \mapsto \dim V$ est injective.

(ii) Soit maintenant une racine positive x .

D'après la proposition 4.3.2, il existe h tel que $c^h(x)$ ne soit pas positif. En posant comme pour le sens direct $(\beta_1, \dots, \beta_{nh}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (h fois), on a $c^h(x) = \sigma_{\beta_{nh}} \cdots \sigma_{\beta_1}(x)$ n'est pas positif. Soit i le plus grand indice tel que $\sigma_{\beta_i} \cdots \sigma_{\alpha_1}(x) > 0$. D'après la démonstration du point (iii) de la proposition 4.3.1, $\sigma_{\beta_i} \cdots \sigma_{\alpha_1}(x) = \sigma_{\beta_{i+1}}^-$.

Soit alors $V = F_{\beta_1}^- \cdots F_{\beta_i}^-(L_{\beta_{i+1}})$. Alors d'après le théorème 5.0.1, V est une représentation indécomposable de (G, Λ) de dimension x .

Ceci achève la démonstration du théorème. \square

6 Annexe : quelques définitions sur les catégories

Définition 6.0.3 (Catégorie). *Une catégorie \mathcal{C} est la donnée :*

- d'une classe d'objets $\mathcal{O}(\mathcal{C})$;
 - pour deux objets $A, B \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$, d'un ensemble $\text{Hom}(A, B)$ des morphismes entre A et B , tel que $1_A \in \text{Hom}(A, A)$, que pour trois objets A, B, C on ait une application $\text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(B, C) \longrightarrow \text{Hom}(A, C)$
- $$(f, g) \longmapsto g \circ f$$

associative : si $f \in \text{Hom}(A, B)$, $g \in \text{Hom}(B, C)$, $h \in \text{Hom}(C, D)$, alors $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, et telle que si $f \in \text{Hom}(A, B)$, $1_B \circ f = f$, $f \circ 1_A = f$.

Quelques exemples de catégories :

- \mathcal{C} la classe des ensembles et pour deux ensembles A, B , $\text{Hom}(A, B)$ l'ensemble des applications de A dans B .
- \mathcal{C} la classe des groupes et pour des groupes G, H , $\text{Hom}(G, H)$ l'ensemble des morphismes de groupes de G vers H .

On définit ensuite les foncteurs entre deux catégories, ce ne sont pas des applications car les catégories ne sont pas des ensembles.

Définition 6.0.4 (Foncteur). Soient \mathcal{C}, \mathcal{D} deux catégories. Un foncteur (covariant) entre \mathcal{C} et \mathcal{D} , $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ est la donnée pour $A \in \mathcal{C}$, de $F(A) \in \mathcal{D}$, et pour $u \in \text{Hom}(A, B)$, $A, B \in \mathcal{C}$, de $F(u) \in \text{Hom}(F(A), F(B))$, avec $F(1_A) = 1_{F(A)}$, et $\forall (u, v) \in \text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(B, C)$, $F(v \circ u) = F(v) \circ F(u)$.

Par exemple, si on prend pour \mathcal{C} les groupes, avec $\text{Hom}(G, H)$ les morphismes de groupes dont le noyau contient le sous-groupe dérivé $D(G)$ engendré par les commutateurs $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$, $x, y \in G$, et pour \mathcal{D} les groupes abéliens, on a un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, et pour $u \in \text{Hom}(G, H)$,

$$G \longmapsto G/D(G)$$

$F(u)$ est l'application quotient.

Références

- [1] I.N. BERNSTEIN, I.M. GEL'FAND et V.A. PONOMAREV, *Coxeter functors and Gabriel's theorem*, Uspehi Mat. Nauk 28, (1973) no. 2(170), p 19-33
- [2] Peter GABRIEL, *Représentations indécomposables*, Séminaire Bourbaki, 26e année (1973/1974), Exp. No. 444, pp. 143–169. Lecture Notes in Math., Vol. 431, Springer, Berlin, 1975.