Variations autour d'un théorème d'Irving Segal

Olivier Guéant et Sylvain Gugger
Sujet proposé par Thierry Lévy,
initialement intitulé "Mesures gaussiennes et espaces de Fock".

24 juin 2004

Résumé

Les pages qui suivent sont consacrées à un théorème d'Irving Segal donnant une décomposition de certains espaces L^2 en somme directe orthogonale d'espaces vectoriels appelés chaos de Wiener.
La décomposition hilbertienne classique de $L^2(\mathbb{R}, d\gamma)$ obtenue en orthonormalisant les fonctions polynomiales et en obtenant donc la base hilbertienne des polynômes d'Hermite est un cas particulier de cette décomposition.

Table des matières

1 Rappel sur les variables aléatoires gaussiennes

Avant de commencer à traiter du sujet en tant que tel, il convient de rappeler quelques définitions et propriétés classiques concernant les variables aléatoires gaussiennes. Pour cela, fixons-nous tout d'abord un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Définition 1 (Variable aléatoire gaussienne) *Soit X une variable aléatoire réelle.*

- *On dit que X est une variable aléatoire gaussienne ou normale s'il existe $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \geq 0$ tels que la fonction caractéristique de X s'écrive $\Phi_X(\xi) = \exp(im\xi - \frac{\sigma^2\xi^2}{2})$.*
- *Si $\sigma > 0$ alors X est une variable aléatoire gaussienne non constante de densité $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2})$. On note $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.*
- *Si $\sigma = 0$, alors X est une variable aléatoire constante et $X = m$ p.s.*
- *On a $\mathbb{E}[X] = m$, $var(X) = \sigma^2$. Si $m = 0$, on dit que X est centrée.*

Définition 2 (Vecteur gaussien) *Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles. On dit que $(X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur gaussien si $\forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \xi.X = \sum_{i=1}^n \xi_i X_i$ est une variable aléatoire gaussienne.*

Remarque :

- Si $(X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur gaussien, alors $\forall j \in \{1, \ldots, n\}, X_j$ est une variable aléatoire gaussienne.
- Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes, alors $(X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur gaussien.

Définition 3 (Matrice de covariance) *Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur gaussien, on note $K_X = (cov(X_i, X_j))_{i,j}$ sa matrice de covariance.*

Proposition 1 (Fonction caractéristique d'un vecteur gaussien) *La fonction caractéristique d'un vecteur gaussien $X = (X_1, \ldots, X_n)$ est, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$:*

$$\begin{aligned}
\Phi_X(\xi) &= \exp(i\sum_{j=1}^n \xi_j \mathbb{E}[X_j] - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^n \xi_j\xi_k cov(X_j, X_k)) \\
&= \exp(i\xi.\mathbb{E}[X] - \frac{{}^t\xi K_X \xi}{2})
\end{aligned}$$

Preuve :
$\Phi_X(\xi) = \Phi_{X.\xi}(1) = \exp(im - \frac{1}{2}\sigma^2)$ avec $m = \mathbb{E}[X.\xi]$, et :

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \mathbb{E}[(X.\xi)^2] - m^2 \\
&= \mathbb{E}[\sum_{j,k} \xi_j X_j \xi_k X_k] - \sum_{j,k} \xi_j\xi_k \mathbb{E}[X_j]\mathbb{E}[X_k] \\
&= \sum_{j,k} \xi_j\xi_k \mathbb{E}[X_j X_k] - \sum_{j,k} \xi_j\xi_k \mathbb{E}[X_j]\mathbb{E}[X_k] \\
&= \sum_{j,k} \xi_j\xi_k cov(X_j, X_k)
\end{aligned}$$

■

Avant d'en finir avec ces rappels on aura besoin d'une propriété classique concernant les suites de variables aléatoires gaussiennes.

Proposition 2 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires gaussiennes, telle que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers X dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Alors X est une variable aléatoire gaussienne.*

Preuve :
Posons $m_n = \mathbb{E}[X_n]$, $m = \mathbb{E}[X]$, $\sigma_n^2 = var(X_n)$ et $\sigma^2 = var(X)$.
Alors $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\Phi_{X_n}(\xi) = \exp(im_n\xi - \frac{\sigma_n^2\xi^2}{2})$.
On a $m_n = \mathbb{E}[X_n] \to_{n\to\infty} \mathbb{E}[X] = m$ et $\sigma_n^2 = var(X_n) \to_{n\to\infty} var(X) = \sigma^2$.
Or la convergence dans L^2 implique la convergence en loi, donc $\Phi_X(\xi) = \exp(im\xi - \frac{\sigma^2\xi^2}{2})$ et X est bien une variable aléatoire gaussienne.

∎

Enfin, puisque nous aurons besoin de variables aléatoires complexes par la suite, introduisons-les tout de suite.
(A noter que, sauf mention du contraire, les variables aléatoires gaussiennes considérées ci-après seront toujours réelles.)

Définition 4 (Variables aléatoires complexes gaussiennes) *Soit X une variable aléatoire complexe. On dit que X est une variable aléatoire gaussienne si (ReX, ImX) est un vecteur gaussien.*
On dit de plus que X est centrée lorsque $\mathbb{E}[X] = 0$.

2 Espaces gaussiens

2.1 Définitions

L'une des notions centrales que nous allons étudier est celle d'espace vectoriel gaussien.

Définition 5 (Espace vectoriel gaussien) *Un espace vectoriel gaussien est la donnée d'un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et d'un sous-espace vectoriel G du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tel que $\forall X \in G, X$ est une variable aléatoire gaussienne centrée.*

Remarque : par la suite, on ne précisera que très rarement l'espace de probabilité sous-jacent.

Cette définition fort simple recèle déjà des informations importantes puisque si G est un espace vectoriel gaussien, $\forall X_1, \ldots, X_n \in G, (X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur gaussien.

Pour travailler avec les espaces vectoriels gaussiens, on se servira de la topologie induite par celle de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Il est alors naturel de s'intéresser à la famille des espaces vectoriels gaussiens qui vont être des espaces de Hilbert pour cette topologie.

Définition 6 (Espace de Hilbert gaussien) *Soit G un espace vectoriel gaussien, on dit que G est un espace de Hilbert gaussien si G est complet, autrement dit si G est un fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*

Exemple :
Soit X une variable aléatoire gaussienne, alors $\{tX, t \in \mathbb{R}\}$ est un espace vectoriel gaussien de dimension 1 (c'est donc aussi un espace de Hilbert gaussien).

Finissons alors par une propriété qui légitime le fait de ne s'intéresser finalement qu'aux espaces de Hilbert gaussiens.

Proposition 3 *Si G est un espace vectoriel gaussien, le complété de G est un espace de Hilbert gaussien.*

Preuve :
On a vu (proposition 2) que si une suite de variables aléatoires gaussiennes converge dans L^2 vers une variable aléatoire X alors celle-ci est gaussienne.

∎

2.2 Classification des espaces de Hilbert gaussiens de dimension finie

Le but de ce paragraphe est de comprendre la structure d'espace de Hilbert gaussien dans le cas le plus simple, à savoir celui de la dimension finie. Pour cela, introduisons tout d'abord la notion la plus naturelle possible d'isomorphisme entre espaces de Hilbert gaussiens.

Définition 7 (Isomorphisme d'espaces de Hilbert gaussiens) *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert gaussiens. On dit que $\phi \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert gaussiens si ϕ est isométrique et bijective.*
On dira que H_1 et H_2 sont isomorphes s'il existe un tel isomorphisme.

Remarque :
Il est naturel d'imposer qu'un isomorphisme d'espaces de Hilbert gaussiens soit isométrique et bijectif.
Qui plus est, cela est suffisant car cette propriété de nature géométrique permet à elle seule de conserver la structure probabiliste. De fait, si H_1 et H_2 sont deux espaces de Hilbert gaussiens et ϕ une isométrie bijective entre H_1 et H_2, alors $\forall X_1, \ldots, X_n \in H_1, (\phi(X_1), \ldots, \phi(X_n))$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ ont même loi.
En effet,

$$\begin{aligned}
\Phi_{(\phi(X_1),\ldots,\phi(X_n))}(\xi) &= \exp(-\frac{{}^t\xi K_{(\phi(X_1),\ldots,\phi(X_n))}\xi}{2}) \\
&= \exp(-\frac{{}^t\xi K_{(X_1,\ldots,X_n)}\xi}{2}) \\
&= \Phi_{(X_1,\ldots,X_n)}(\xi)
\end{aligned}$$

Ceci est dû au fait que $cov(X_i, X_j) = \mathbb{E}[X_i X_j] =< X_i, X_j >=< \phi(X_i), \phi(X_j) >= cov(\phi(X_i), \phi(X_j))$, d'où $K_{(X_1,\ldots,X_n)} = K_{(\phi(X_1),\ldots,\phi(X_n))}$.

Remarque :
Les espaces de probabilité sous-jacents à H_1 et H_2 peuvent être différents.

On est maintenant à même de classifier à isomorphisme près les espaces de Hilbert gaussiens de dimension finie.

Théorème 1 (Classification des espaces de Hilbert gaussiens de dimension finie) *Prenons $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \gamma)$ où γ est la mesure de densité $d\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d}\exp(-\frac{\|x\|^2}{2})dx$, alors $H = (\mathbb{R}^d)'$, l'espace dual de $\mathbb{R}^d$, est un espace de Hilbert gaussien.*
De plus, si $\tilde{H}$ est un espace de Hilbert gaussien de dimension d, alors $\tilde{H}$ est isomorphe à H.

Pour démontrer ce théorème nous aurons besoin du lemme simple suivant :

Lemme 1 *Avec les notations du théorème ci-dessus, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^d$, les variables aléatoires $e_1^*, \ldots, e_n^*$ sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes.*

Preuve :
$\forall a_1, \ldots, a_d, b_1, \ldots, b_d \in \mathbb{R}$, avec $\forall i, a_i < b_i$, on a :

$$\begin{aligned}
\gamma(e_1^* \in [a_1, b_1], \ldots, e_d^* \in [a_d, b_d]) &= \gamma(\{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d | \forall i, x_i \in [a_i, b_i]\}) \\
&= \int_{\prod_i [a_i, b_i]} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^d} \exp(-\frac{\|x\|^2}{2}) dx \\
&= \prod_i \int_{[a_i, b_i]} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x_i^2}{2}) dx_i \\
&= \prod_i \gamma(e_i^* \in [a_i, b_i])
\end{aligned}$$

■

Preuve du théorème :

Soit $l \in (\mathbb{R}^d)'$. Il existe $(a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ tel que $l = \sum_{i=1}^d a_i e_i^*$. Comme $e_1^*, \ldots, e_d^*$ sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes, $(e_1^*, \ldots, e_d^*)$ est un vecteur gaussien, et l est par conséquent une variable aléatoire gaussienne. Ainsi, $(\mathbb{R}^d)'$ est bien un espace vectoriel gaussien de dimension d et est donc un espace de Hilbert gaussien.

Soit alors $\tilde{H}$ un espace de Hilbert gaussien de dimension d. Prenons en une base orthonormée $(f_1, \ldots, f_d)$ et posons

$$\phi : \left\{ \begin{array}{lll} H & \rightarrow & \tilde{H} \\ \sum_{i=1}^d a_i e_i^* & \mapsto & \sum_{i=1}^d a_i f_i \end{array} \right.$$

Comme les e_i^* sont indépendantes,

$$< e_i^*, e_j^* >= \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{E}[e_i^* e_j^*] = 0 & si\ i \neq j \\ var(e_i^*) = \int_{\mathbb{R}} x_i^2 \frac{\exp(-\frac{x_i{}^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} dx_i = 1 & sinon \end{array} \right.$$

D'où $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base orthonormée de $(\mathbb{R}^d)'$ et ϕ est une isométrie bijective.

■

2.3 Cas complexe

On aura besoin des variables aléatoires gaussiennes complexes dans la démonstration du théorème de Segal et il est alors naturel d'introduire la notion d'espace vectoriel gaussien dans le cas complexe.

Définition 8 (Espace vectoriel et espace de Hilbert gaussiens complexes) *Un espace vectoriel gaussien complexe est un sous-espace vectoriel G du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tel que $\forall X \in G, X$ est une variable aléatoire gaussienne complexe et centrée.*
Si de plus G est fermé (dans $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$), on parle comme dans le cas réel d'espace de Hilbert gaussien (complexe dans ce contexte).

Proposition 4 (Complexification) *Soit G est un espace vectoriel gaussien réel.*
$G_{\mathbb{C}} = G + iG = \{X_1 + iX_2 | X_1, X_2 \in G\}$ est un espace vectoriel gaussien complexe.
Si de plus G est un espace de Hilbert gaussien, $G_{\mathbb{C}}$ est un espace de Hilbert gaussien complexe.

Preuve :

- $\forall X = X_1 + iX_2 \in G_{\mathbb{C}}$, on a $ReX = X_1$ et $ImX = X_2$ donc comme (X_1, X_2) est un vecteur gaussien, X est bien une variable aléatoire gaussienne (complexe).
  De plus, $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + i\mathbb{E}[X_2] = 0$.
- Si G est fermé, soit $(X_p)_{p \in \mathbb{N}} \in G_{\mathbb{C}}^{\mathbb{N}}$ tel que $X_p \rightarrow_{p \rightarrow \infty} X$ dans L^2. Notant $X_p = X_p^1 + iX_p^2, \forall p \in \mathbb{N}$ et $X = X_1 + iX_2$ $(X_1, X_2, X_p^1, X_p^2, p \in \mathbb{N}$ étant des variables aléatoires gaussiennes réelles) on a $X_p^1 = ReX_p \rightarrow_{p \rightarrow \infty} X_1$ et de même $X_p^2 \rightarrow_{p \rightarrow \infty} X_2$.
  Comme G est fermé, on a $X_1, X_2 \in G$, et donc $X \in G_{\mathbb{C}}$.
  Ceci permet de conclure que $G_{\mathbb{C}}$ est fermé.

■

3 Chaos de Wiener et théorème de Segal

3.1 Introduction des chaos de Wiener

Dans cette partie nous allons en quelque sorte formaliser et étudier la notion de polynômes sur un espace de Hilbert gaussien.

Il convient pour cela de constater que les espaces de Hilbert gaussiens appartiennent à bon nombre d'espace L^p. Plus précisement, nous avons le résultat très utile suivant :

Proposition 5 *Soit H un espace de Hilbert gaussien.*
Alors,

$$H \subset \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

Preuve :
Soit $X \in H$.
Si X est constante, trivialement $X \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Sinon, $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, avec $\sigma > 0$, et $\mathbb{E}[|X|^p] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |x|^p \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})dx < +\infty$, donc $X \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

$\blacksquare$

Corollaire 1 *Soit H un espace de Hilbert gaussien.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall X_1, \dots, X_n \in H, X_1 \dots X_n \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

En particulier, $X_1 \dots X_n \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Preuve :
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

- Si $n = 1$, c'est la proposition précédente.
- Si le résultat est vrai au rang $n-1$, alors $\forall p \geq 1, X_1 \dots X_{n-1} \in L^{2p}$ et $X_n \in L^{2p}$, donc $X_1 \dots X_n \in L^p$ par Cauchy-Schwarz.
  On en conclut donc que $X_1 \dots X_n \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

$\blacksquare$

Définition 9 (Chaos de Wiener) *Soit H un espace de Hilbert gaussien. $\forall n \geq 0$, posons*

$$\mathcal{P}_n(H) = \{Q(X_1, \dots, X_m) | m \in \mathbb{N}, Q \in \mathbb{R}[Y_1, \dots, Y_m], deg(Q) \leq n, X_1, \dots, X_m \in H\}$$

Le chaos de Wiener d'ordre n de H est défini par

$$H^{:n:} = \overline{\mathcal{P}_n(H)} \ominus \overline{\mathcal{P}_{n-1}(H)} = \overline{\mathcal{P}_n(H)} \cap \overline{\mathcal{P}_{n-1}(H)}^{\perp}$$

où, par convention, $\mathcal{P}_{-1}(H) = \{0\}$.

Remarques :

- Par le corollaire précédent $\mathcal{P}_n(H) \subset L^2$, donc l'adhérence dans la définition de $H^{:n:}$ a bien un sens.
- $H^{:0:} = \overline{\mathcal{P}_0(H)}$ est l'espace des constantes.
- $\forall n \in \mathbb{N}, H^{:n:} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
- Par définition des chaos, on a $\overline{\mathcal{P}_n(H)} = \bigoplus_{k=0}^n H^{:k:}$ et donc $\overset{\perp}{\bigoplus}_{n \in \mathbb{N}} H^{:n:} = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{\mathcal{P}_n(H)}}$.
- Dans la suite on notera parfois $\mathcal{P}(H)$ l'ensemble $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n(H)$

3.2 Théorème d'Irving Segal

Nous avons maintenant à notre disposition tous les outils pour énoncer le théorème de Segal qui permet de décomposer l'espace L^2 en somme de chaos de Wiener.

Plus précisement :

Théorème 2 (Théorème de Segal) *Soit H un espace de Hilbert gaussien.*

$$\overset{\perp}{\bigoplus}_{n\in\mathbb{N}} H^{:n:} = L^2(\Omega, \sigma(H), \mathbb{P})$$

où $\sigma(H)$ est la plus petite tribu rendant les variables aléatoires de H mesurables.

Pour démontrer le théorème d'Irving Segal, nous aurons besoin des quelques lemmes qui suivent :

Lemme 2 *Soit H un espace de Hilbert gaussien réel. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, H_{\mathbb{C}}^{:n:} = H^{:n:} + iH^{:n:}$.*

Preuve :
C'est à peu près évident, car $\mathcal{P}_n(H_{\mathbb{C}}) = \mathcal{P}_n(H) + i\mathcal{P}_n(H)$.

▪

Lemme 3 *Soit H un espace de Hilbert gaussien réel. Alors $\sigma(H) = \sigma(H_{\mathbb{C}})$.*

Preuve :
On a $\sigma(H) \subset \sigma(H_{\mathbb{C}})$ car $H \subset H_{\mathbb{C}}$. Réciproquement, si $X \in H_{\mathbb{C}}$, il existe $X_1, X_2 \in H$ telles que $X = X_1 + iX_2$, donc $\sigma(X) \subset \sigma(X_1, X_2) \subset \sigma(H)$. D'où $\sigma(H_{\mathbb{C}}) \subset \sigma(H)$.

▪

Lemme 4 *(Avec axiome du choix)*
Soit H un espace de Hilbert gaussien et X une variable aléatoire $\sigma(H)$-mesurable. Alors il existe une famille dénombrable $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ telle que X soit $\sigma(X_n, n \in \mathbb{N})$-mesurable.

Preuve :
Il suffit de montrer que si $H = \{X_j, j \in J\}$ est une énumération de H, $\sigma(H) = \bigcup_{I\in\mathcal{A}} \sigma(X_i, i \in I)$, où $\mathcal{A}$ est l'ensemble des parties dénombrables de J.
En effet, on aura alors pour X $\sigma(H)$-mesurable, et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de boréliens engendrant la tribu de l'ensemble d'arrivée des variables aléatoire ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $X^{-1}(B_n) \in \sigma(X_i, i \in I_n)$, et ce $\forall n \in \mathbb{N}$, donc X sera $\sigma(X_i, i \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n)$-mesurable (avec $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ dénombrable).

Or $\bigcup_{I\in\mathcal{A}} \sigma(X_i, i \in I)$ est clairement une classe monotone stable par intersection finie, donc c'est une tribu par le lemme des classes monotones, et comme elle rend tous les éléments de H mesurables, c'est $\sigma(H)$.

▪

Lemme 5 *Si H est un espace de Hilbert gaussien réel et si $X \in L^1_{\mathbb{C}}(\Omega, \sigma(H), \mathbb{P})$ est telle que $\forall Y \in H, \mathbb{E}[X \exp(-iY)] = 0$, alors $X = 0$ p.s.*

Preuve :
Si H est de dimension finie m, considérons $(Y_1, \ldots, Y_m)$ une base de H et notons μ la loi de $(Y_1, \ldots, Y_m)$.
X est $\sigma(H)$-mesurable donc il existe ϕ, mesurable, telle que $X = \phi(X_1, \ldots, X_n)$.
Mais alors $\forall (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m, \mathbb{E}[\phi(Y_1, \ldots, Y_m) \exp(-i \sum_{j=1}^m t_j Y_j)] = 0$, c'est à dire

$$\int_{\mathbb{R}^m} \phi(y_1, \ldots, y_m) \exp(-i \sum_{j=1}^m t_j y_j) d\mu(y) = 0$$

On a alors $\widehat{\phi d\mu} = 0$ donc $\phi = 0$ μ-p.p., et par conséquent $X = 0$ p.s.

Si H est de dimension infinie, on a par le lemme qui précède une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de H telle que X soit $\sigma(Y_n, n \in \mathbb{N})$-mesurable. Soient alors $\forall n \in \mathbb{N}, H_n = vect(Y_1, \ldots, Y_n)$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(H_n) = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$.
La martingale $(\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est fermée, donc converge p.s. et dans L^1 vers $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\infty] = X$ puisque $\mathcal{F}_\infty = \sigma(Y_n, n \in \mathbb{N})$ et donc X est $\mathcal{F}_\infty$-mesurable.
Or $\forall n \in \mathbb{N}, \forall Y \in H_n, \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] \exp(-iY)] = \mathbb{E}[X \exp(-iY)] = 0$, donc par le premier cas (H_n est de dimension finie), $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] = 0$ p.s.,$\forall n \in \mathbb{N}$ et donc $X = 0$ p.s.

▪

Démonstration du théorème de Segal :
On montre le théorème dans le cas de $H_{\mathbb{C}} = H + iH$ et le résultat en découlera grâce aux lemmes 2 et 3.
On pose

$$H'_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_{\mathbb{C}}^{:n:} = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathcal{P}_n(H_{\mathbb{C}})}} \subset L^2(\Omega, \sigma(H_{\mathbb{C}}), \mathbb{P})$$

Nous voulons montrer que $H'^{\perp}_{\mathbb{C}} = \{0\}$.
Soient $X \in H'^{\perp}_{\mathbb{C}}$ et $Y \in H$ (variable aléatoire réelle).

$$\left| \exp(iY) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(iY)^k}{k!} \right| \leq 1+\exp(|Y|) \leq 1+\exp(Y)+\exp(-Y) \in L^2(\Omega, \sigma(H), \mathbb{P}) = L^2(\Omega, \sigma(H_{\mathbb{C}}), \mathbb{P})$$

Donc $\sum_{k=0}^{n} \frac{(iY)^k}{k!} \to_{n\to\infty} \exp(iY)$ dans $L^2(\Omega, \sigma(H), \mathbb{P})$.
Donc $\mathbb{E}[X \exp(-iY)] =< X, \exp(iY) >= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} < X, \frac{(iY)^k}{k!} >= 0$, car $\frac{(iY)^k}{k!} \in \mathcal{P}_k(H_{\mathbb{C}}), \forall k \in \mathbb{N}$.
Grâce au lemme 5, on obtient $X = 0$ p.s., et $H'^{\perp}_{\mathbb{C}} = \{0\}$.

■

4 Produits de Wick

4.1 Projections et produit de Wick

Pour pouvoir manipuler la décomposition en somme de chaos de Wiener donnée par le théorème de Segal, il est naturel d'introduire les projections orthogonales suivantes :

Définition 10
- $\forall n \geq 0, \pi_n \in \mathcal{L}(L^2(\Omega, \sigma(H), \mathbb{P}))$ *est la projection orthogonale sur* $H^{:n:}$.
- $\forall n \geq 0, \pi_{\leq n} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega, \sigma(H), \mathbb{P}))$ *est la projection orthogonale sur* $\bigoplus_{k=0}^{n} H^{:k:}$ *(i.e.* $\pi_{\leq n} = \sum_{k=0}^{n} \pi_k$*)*

Remarque :
Le théorème de Segal permet alors d'écrire $\forall X \in L^2(\Omega, \sigma(H), \mathbb{P}), X = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(X)$ avec convergence dans L^2.

Pour mieux comprendre ces projections orthogonales, introduisons la notion de produit de Wick qui apparait naturellement lorsque l'on veut projeter des "polynômes" sur les chaos de Wiener.

Définition 11 (Produit de Wick) *Soit H un espace de Hilbert gaussien.*
Soient $X_1, \ldots, X_n \in H$.
On appelle produit de Wick des X_i, noté : $X_1 \ldots X_n$:, la variable aléatoire $\pi_n(X_1 \ldots X_n)$.

4.2 Diagrammes de Feynman.

Pour étudier le concept de produit de Wick, il est utile d'introduire une représentation graphique des variables que l'on considère via des graphes appelés diagrammes de Feynman.

Définition 12 (Diagramme de Feynman) *Un diagramme de Feynman est un graphe constitué de n sommets et de r arêtes n'ayant aucun sommet en commun.*
Un diagramme de Feynman est dit complet lorsque $n = 2r$.
Dans le cadre probabiliste qui nous intéresse ici on va associer à chaque sommet i d'un diagramme de Feynman γ une variable aléatoire X_i ce qui permet de définir la valeur $v(\gamma)$ de γ :

$$v(\gamma) = \prod_{k=1}^{r} \mathbb{E}[X_{i_k} X_{j_k}] \prod_{i\in A} X_i$$

où les couples (i_k, j_k) correspondent aux sommets joints dans le diagramme de Feynman γ et les $i \in A$ aux sommets isolés.

Remarque : Dans le cas général, la valeur d'un diagramme de Feynman est une variable aléatoire. Cependant, on voit qu'il s'agit d'une constante dans le cas des diagrammes de Feynman complets.

Pour comprendre comment et pourquoi ces diagrammes de Feynman nous éclairent sur le produit de Wick, commençons par énoncer un théorème dû à Wick.

Théorème 3 (Théorème de Wick) *Soit H un espace de Hilbert gaussien et soient $X_1, \ldots, X_n \in H$.*
Alors :

$$\mathbb{E}[X_1 \ldots X_n] = \sum_{\substack{\{i_1,j_1\},\ldots,\{i_k,j_k\} \\ \textit{partionnement en paires} \\ \textit{de } \{1,\ldots,n\}}} \prod_{l=1}^{k} \mathbb{E}[X_{i_l} X_{j_l}]$$

Preuve :
Les deux membres de l'égalité précédente sont des formes $n-$linéaires symétriques donc par polarisation il suffit de vérifier la formule pour $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.
Le membre de gauche est alors $\mathbb{E}[X^n]$ donc si n est impair on obtient bien le résultat annoncé puisque d'une part $\mathbb{E}[X^n] = 0$ et d'autre part il est impossible de partitionner un ensemble de cardinal impair en paires d'élements.
Si maintenant n est pair, disons $n = 2m$, alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^{2m}] &= \frac{\sigma^{2m}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2m} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx \\
&= \frac{2\sigma^{2m}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (2u)^m \exp(-u) \frac{du}{\sqrt{2u}} \\
&= \frac{2^m \sigma^{2m}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} u^{m-\frac{1}{2}} \exp(-u) du \\
&= \frac{2^m \sigma^{2m}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(m + \frac{1}{2}) \\
&= \frac{2^m \sigma^{2m}}{\sqrt{\pi}} (m - \frac{1}{2})(m - \frac{3}{2}) \ldots \frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) \\
&= \frac{\sigma^{2m}}{\sqrt{\pi}} (2m-1)(2m-3) \ldots 3 \times 1 \times \Gamma(\frac{1}{2}) \\
&= \sigma^{2m} \frac{(2m)!}{2^m m!} \\
&= \mathbb{E}[X^2]^m \frac{(2m)!}{2^m m!}
\end{aligned}$$

Or le nombre I_m de façons de partionner $\{1, \ldots, 2m\}$ en paires vérifie :

$$\begin{cases} I_1 = 1 \\ I_m = (2m-1) I_{m-1} \textit{ si } m \geq 2 \end{cases}$$

En effet, pour partitionner $\{1, \ldots, 2m\}$ en paires il faut et il suffit de choisir l'élément k qui sera dans la même paire que 1 ($2m - 1$ choix) et de partitionner en paires l'ensemble restant (i.e. $\{1, \ldots, 2m\} - \{1, k\}$).
On en déduit alors que $I_m = \frac{(2m)!}{2^m m!}$ et le résultat en découle trivialement.

∎

On peut réinterpréter cette formule grâce aux diagrammes de Feynman mais avant cela introduisons quelques notations bien utiles.
Notons $\mathcal{DF}(X_1, \ldots, X_n)$ l'ensemble des diagrammes de Feynman dont les sommets sont les

variables $X_1, \dots, X_n$.
De même, notons $\mathcal{DF}_c(X_1, \dots, X_n)$ l'ensemble des diagrammes de Feynman complets dont les sommets sont les variables $X_1, \dots, X_n$.

On a alors de manière élémentaire :

Théorème 4 (Réinterprétation du théorème de Wick en termes de diagrammes de Feynman) *Soit H un espace de Hilbert gaussien et soient $X_1, \dots, X_n \in H$.*
Alors :

$$\mathbb{E}[X_1 \dots X_n] = \sum_{\gamma \in \mathcal{DF}_c(X_1,\dots,X_n)} v(\gamma)$$

En fait l'intérêt des diagrammes de Feynman réside dans le fait qu'ils vont nous permettre de calculer "explicitement" $: X_1 \dots X_n :$.

Théorème 5 (Explicitation du produit de Wick) *Soit H un espace de Hilbert gaussien et soient $X_1, \dots, X_n \in H$.*
Alors :

$$: X_1 \dots X_n := \sum_{\gamma \in \mathcal{DF}(X_1,\dots,X_n)} (-1)^{r(\gamma)} v(\gamma)$$

(où $r(\gamma)$ est le nombre d'arêtes de γ)

Preuve :
Si nous notons ω le membre de droite, il faut et il suffit de montrer que $\begin{cases} \omega \in H^{:n:} \\ X_1 \dots X_n - \omega \in (H^{:n:})^\perp \end{cases}$

Or, si l'on analyse la somme que représente ω, il y a un terme produit de n variables $(X_1 \dots X_n)$, les autres étant des produits de moins de $n-2$ variables. Ainsi, $X_1 \dots X_n - \omega \in \mathcal{P}_{n-2}(H) \subset \overline{\mathcal{P}_{n-1}(H)} \subset (H^{:n:})^\perp$.
Il reste alors à prouver que $\omega \in H^{:n:}$ et donc, puisque c'est la seule difficulté que $\omega \in (\overline{\mathcal{P}_{n-1}(H)})^\perp = (\mathcal{P}_{n-1}(H))^\perp$.
Soient alors $m \leq n-1$ et $X_{n+1}, \dots, X_{n+m} \in H$.
On a :

$$\mathbb{E}[\omega X_{n+1} \dots X_{n+m}] = \sum_{\gamma \in \mathcal{DF}(X_1,\dots,X_n)} (-1)^{r(\gamma)} \mathbb{E}[v(\gamma) X_{n+1} \dots X_{n+m}]$$

donc par le théorème de Wick,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\omega X_{n+1} \dots X_{n+m}] &= \sum_{\gamma \in \mathcal{DF}(X_1,\dots,X_n)} (-1)^{r(\gamma)} \sum_{\substack{\gamma' \in \mathcal{DF}_c(X_1,\dots,X_{n+m}) \\ \text{extension de } \gamma}} v(\gamma') \\
\mathbb{E}[\omega X_{n+1} \dots X_{n+m}] &= \sum_{\gamma' \in \mathcal{DF}_c(X_1,\dots,X_{n+m})} v(\gamma') \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{DF}(X_1,\dots,X_n) \\ \text{tel que } \gamma \subset \gamma'.}} (-1)^{r(\gamma)}
\end{aligned}$$

Si dans γ' il y a l arêtes reliant entre eux les $(X_i)_{i \leq n}$ alors on peut choisir d'en garder $k \in \{0, \dots, l\}$ dans γ donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\omega X_{n+1} \dots X_{n+m}] &= \sum_{\gamma' \in \mathcal{DF}_c(X_1,\dots,X_{n+m})} v(\gamma') \sum_{k=0}^{l} C_l^k (-1)^k \\
&= \sum_{\gamma' \in \mathcal{DF}_c(X_1,\dots,X_{n+m})} \delta_{l0} v(\gamma') \\
&= 0
\end{aligned}$$

car il n'existe pas de diagramme de Feynman complet ayant pour sommets $\{X_1, \ldots, X_{n+m}\}$ et sans arête joignant les n sommets $\{X_1, \ldots, X_n\}$ ($m \leq n-1$).
On en déduit par linéarité que $\omega \perp \mathcal{P}_{n-1}(H)$ ce qui termine la preuve.

$\blacksquare$

Remarques :

- Ce théorème entraîne l'indépendance du produit de Wick vis-à-vis de l'espace de Hilbert gaussien sous-jacent.

- En reprenant la preuve précédente on voit que la formule suivante a en fait été obtenue $\forall n \geq 1, \forall m \geq 1, \forall X_1, ..., X_{n+m} \in H$,

$$\mathbb{E}[: X_1 \ldots X_n : X_{n+1} \ldots X_{n+m}] = \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{DF}_c(X_1, \ldots, X_{n+m}) \\ \text{sans arêtes entre les } X_i, i \leq n}} v(\gamma)$$

De cette seconde remarque on déduit un résultat fort intéressant sur le produit scalaire de 2 produits de Wick.

Théorème 6 (Produit scalaire de produits de Wick) *Soit H un espace de Hilbert gaussien et soient $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m \in H$.*
Alors :

$$\mathbb{E}[: X_1 \ldots X_n :: Y_1 \ldots Y_m :] = \delta_{m,n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i Y_{\sigma(i)}]$$

Preuve :
Si $m \neq n$ c'est évident par définition des chaos de Wiener et du produit de Wick.
Si maintenant $m = n$, par définition du produit de Wick,

$$\mathbb{E}[: X_1 \ldots X_n : (Y_1 \ldots Y_n - : Y_1 \ldots Y_n :)] = 0$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[: X_1, \ldots, X_n :: Y_1 \ldots Y_n :] &= \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{DF}_c(X_1, \ldots, Y_n) \\ \text{sans arêtes entre les } X_i}} v(\gamma) \\
&= \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{DF}_c(X_1, \ldots, Y_n) \\ \text{chaque arête entre un } X_i \text{ et un } Y_j}} v(\gamma) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i Y_{\sigma(i)}]
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Avant de voir une application du produit de Wick démontrons un théorème qui est en quelque sorte le théorème dual du théorème qui explicitait le produit de Wick et qui nous servira par la suite.

Théorème 7 (Expression du produit standard en termes du produit de Wick) *Soit H un espace de Hilbert gaussien et soient $X_1, \ldots, X_n \in H$.*
Alors :

$$X_1 \ldots X_n = \sum_{\gamma \in \mathcal{DF}(X_1, \ldots, X_n)} : v(\gamma) :$$

Preuve :
Soient $m \leq n$ et $Y_1, \ldots, Y_m \in vect(X_1, \ldots, X_n) \subset H$.

Notons $W =: Y_1 \dots Y_m :$.
On a :

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{E}[(X_1 \dots X_n)W] & = & \mathbb{E}[(X_1 \dots X_n) : Y_1 \dots Y_m :] \\ & = & \displaystyle\sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{DF}_c(X_1,\dots,Y_m) \\ \text{sans arêtes entre les } Y_i}} v(\gamma)\end{array}$$

Maintenant,

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{E}[\displaystyle\sum_{\gamma\in\mathcal{DF}(X_1,\dots,X_n)} : v(\gamma) : W] & = & \displaystyle\sum_{\gamma\in\mathcal{DF}(X_1,\dots,X_n)} \mathbb{E}[: v(\gamma) :: Y_1 \dots Y_m :] \\ & = & \displaystyle\sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{DF}_c(X_1,\dots,Y_m) \\ \text{sans arêtes entre les } Y_i}} v(\gamma)\end{array}$$

Le passage à la dernière ligne s'obtient grâce au produit scalaire de deux produits de Wick.
On a donc $\mathbb{E}[(X_1 \dots X_n - \sum_{\gamma\in\mathcal{DF}(X_1,\dots,X_n)} : v(\gamma) :)W] = 0$.
Par linéarité, on voit que ce résultat est en fait vrai pour $W \in \mathcal{P}_n(H)$. Ainsi, si $W = X_1 \dots X_n - \sum_{\gamma\in\mathcal{DF}(X_1,\dots,X_n)} : v(\gamma) :$, on obtient le résultat.

∎

4.3 Espaces de Fock

Les propriétés qui sont apparues précédemment grâce à l'introduction des diagrammes de Feynman vont nous permettre de formuler le théorème de Segal en termes d'un objet algébrique appelé espace de Fock.

Définition 13 (Espace de Fock) *Soit H un espace de Hilbert. On note $Sym^n(H)$ la $n-$ème puissance tensorielle symétrique de H : c'est un espace préhilbertien pour le produit scalaire vérifiant $(x_1 \cdot x_2 \dots \cdot x_n, y_1 \cdot y_2 \dots \cdot y_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^n < x_i, y_{\sigma(i)} >$.*
De plus, on note $Sym(H) = \sum_{n\in\mathbb{N}} Sym^n(H)$ qui est préhilbertien pour le p.s. induit par ceux des $Sym^n(H)$.
Enfin, l'espace de Fock de H noté $\Gamma(H)$ est l'espace de Hilbert obtenu en complétant $Sym(H)$.

Les résultats sur le produit scalaire de deux produits de Wick vont en fait nous permettre de mettre en lumière un isomorphisme isométrique entre $L^2(\Omega, \sigma(H), \mathbb{P})$ et $\Gamma(H)$.
Plus précisement, on a le théorème suivant :

Théorème 8 (Deuxième version du théorème de Segal) *Soit H un espace de Hilbert gaussien.*
$H^{:n:}$ et $\overline{Sym^n(H)}$ sont isomorphes via l'unique application linéaire continue coïncidant sur $Sym^n(H)$ avec :

$$\phi_n = \left\{ \begin{array}{l} Sym^n(H) \to H^{:n:} \\ x_1 \cdot \dots \cdot x_n \mapsto : x_1 \dots x_n : \end{array}\right.$$

Aussi, via $\oplus_n \phi_n$, on a un isomorphisme canonique entre $\Gamma(H)$ et $L^2(\Omega, \sigma(H), \mathbb{P})$.

Preuve :
Par un résultat vu précédemment,

$$\mathbb{E}[: x_1 \dots x_n :^2] = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[x_i x_{\sigma(i)}] = \|x_1 \cdot \dots \cdot x_n\|^2_{Sym^n(H)}$$

Donc l'application ϕ_n est isométrique et son image est par définition l'espace vectoriel engendré par les $: x_1 \dots x_n :$ avec $x_1, \dots, x_n$ parcourant H, c'est à dire $\pi_n(\mathcal{P}_n(H))$ puisqu'il suffit, pour projeter une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n sur $H^{:n:}$, de

projeter sa composante de degré n.
$\pi_n(\mathcal{P}_n(H))$ étant dense dans $H^{:n:}$ on en déduit que ϕ_n est isométrique d'image dense et qu'elle se prolonge donc en une isométrie de $\overline{Sym^n(H)}$ dans $H^{:n:}$ (grâce au lemme qui suit).

Si l'on définit alors $\phi : Sym(H) \to \overset{\perp}{\bigoplus}_{n\in\mathbb{N}} H^{:n:}$ prolongeant les ϕ_n, ϕ est une application isométrique dont l'image I contient $\mathcal{P}(H)$ grâce au théorème reliant le produit classique au produit de Wick.

Puisque $\mathcal{P}(H)$ est dense dans $\overset{\perp}{\bigoplus}_{n\in\mathbb{N}} H^{:n:}$ on conclut encore par le lemme suivant l'existence d'un isométrie bijective entre $\Gamma(H)$ et $\overset{\perp}{\bigoplus}_{n\in\mathbb{N}} H^{:n:}$ ce qui termine la preuve via le théorème de Segal.

$\blacksquare$

Lemme 6 *Soit E un espace préhilbertien et soit H son complété.*
Soit F un Hilbert.
Soit $\phi : E \to F$ une application isométrique d'image dense.
Alors le prologement canonique de ϕ à H est une isométrie bijective de H dans F.

Preuve :
Seule la surjectivité pose en fait problème.
Soit donc $y \in F$. Par densité, il existe une suite $(x_p)_p$ d'éléments de E telle que $\lim_{p\to\infty} \phi(x_p) = y$.
Comme la suite $(\phi(x_p))_p$ est de Cauchy, $(x_p)_p$ l'est aussi de par le caractère isométrique de ϕ.
Il existe donc $x \in H$ (la limite des x_p) telle que $\phi(x) = y$.

$\blacksquare$

Les théorèmes précédents nous ont donc finalement apporté deux visions différentes de l'espace $L^2(\Omega, \sigma(H), \mathbb{P})$.
D'un point de vue analytique il peut être décomposé via la notion de chaos de Wiener comme le montre le théorème de Segal.
D'autre part, la seconde version du théorème de Segal insiste sur une vision plus géométrique que l'on peut avoir de cet espace puisqu'il est isomorphe à $\Gamma(H)$.

Dans les trois parties qui vont suivre, on va faire s'exprimer le théorème abstrait de Segal pour voir ce qu'il nous révèle sur des espaces qui nous sont familiers.
On s'intéressera tout d'abord au cas où H est un espace de Hilbert gaussien de dimension finie puis on abordera un cas plus compliqué faisant intervenir le mouvement brownien.

5 Cas de la dimension finie

5.1 Forme des chaos de Wiener

Soit H un espace de Hilbert gaussien de dimension finie d. On veut étudier un peu plus en détail la décomposition en chaos de Wiener $L^2(\Omega, \sigma(H), \mathbb{P}) = \overset{\perp}{\bigoplus}_{n\in\mathbb{N}} H^{:n:}$. Pour cela, on va se limiter (et c'est suffisant grâce au théorème de classification en dimension finie) à $H = (\mathbb{R}^d)'$ et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \gamma)$.

Lemme 7 $\sigma(H) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

Preuve :
L'inclusion $\sigma(H) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est évidente puisque H n'est constitué que d'applications mesurables.
Ensuite, $\forall a_1 < b_1, \ldots, a_d < b_d \in \mathbb{R}, \bigcap_{i=1}^d {e_i^*}^{-1}(]a_i, b_i[) = \prod_{i=1}^d]a_i, b_i[\in \sigma(e_1^*, \ldots, e_d^*)$ donc tous les rectangles ouverts sont dans $\sigma(H)$ et donc $\sigma(H) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

∎

Lemme 8 $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n(H) = \{Q(e_1^*, \ldots, e_d^*) | Q \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_d], deg(Q) \leq n\}$ *est fermé.*

Preuve : $\mathcal{P}_n(H) = \{Q(l_1, \ldots, l_d) | Q \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_d], deg(Q) \leq n, l_1, \ldots l_d \in H\}$ et, puisque $(e_1^*, \ldots, e_d^*)$ est une base des formes linéaires, on a immédiatement :

$$\mathcal{P}_n(H) = \{Q(e_1^*, \ldots, e_d^*) | Q \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_d], deg(Q) \leq n\}$$

$\mathcal{P}_n(H)$ est donc un espace vectoriel de dimension finie de même dimension que $\{Q \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n] | deg(Q) \leq n\}$. Ainsi $\mathcal{P}_n(H)$ est fermé.

∎

On voit donc que les chaos $H^{:n:}$ sont des ensembles de fonctions polynomiales de degré exactement n, et leur description est donc à mettre en parallèle avec l'orthonormalisation de la base canonique de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_d]$ pour le produit scalaire induit par $L^2(\Omega, \sigma(H), \mathbb{P})$: $(P, Q) = \int_{\mathbb{R}} P(x)Q(x)\gamma(dx)$.
Pour résoudre ce problème, on introduit $\forall k \in \{1, \ldots, d\}, \partial_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_d])$ l'opérateur de dérivation par rapport à X_k ainsi que son adjoint.

5.2 Polynômes de Hermite

Définition 14 *On définit* $\forall k \in \{1, \ldots, d\}$, $\partial_k^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_d])$ *par* $\partial_k^*(P) = -\partial_k P + x_k P$.
$\forall k \in \{1, \ldots, d\}$, ∂_k^* *est l'adjoint de* ∂_k.

Preuve :
Une simple intégration par parties montre que :

$$\begin{aligned}
(\partial_k P, Q) &= \int_{\mathbb{R}^d} \partial_k P(x) Q(x) \frac{\exp(-\frac{\|x\|^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} P(x)(\partial_k Q(x) - x_k Q(x)) \frac{\exp(-\frac{\|x\|^2}{2})}{\sqrt{2\pi}} dx \\
&= (P, \partial_k^* Q)
\end{aligned}$$

Proposition 6 *Les* ∂_k^* *commutent entre eux.*

Preuve :
Les ∂_k commutent également entre eux.

$\blacksquare$

Introduisons alors les polynômes de Hermite qui vont répondre à la question initiale.

Définition 15 *Soit $d \geq 1$ fixé. La famille $(H_p)_{p\in\mathbb{N}^d}$ des polynômes de Hermite de dimension d est donnée par les formules de récurrence suivantes :*

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{(0,\ldots,0)} = 1 \\ H_{p+\epsilon_k} = \partial_k^* H_p \quad \forall k \in \{1,\ldots,d\} \end{array} \right.$$

avec $\epsilon_k = (\delta_{i,k})_{1\leq i\leq n}$.

Proposition 7 *$\forall p = (p_1,\ldots,p_n) \in \mathbb{N}^d, H_p$ est de degré p_i par rapport à X_i et le terme dominant est $X_1^{p_1}\ldots X_d^{p_d}$*

Preuve :
Il s'agit d'une simple récurrence.

$\blacksquare$

Notation :
On notera $\forall p = (p_1,\ldots,p_d) \in \mathbb{N}^d, p! = p_1!\ldots p_d!$.

Montrons alors le résultat central qui va permettre de décrire les chaos en termes de polynômes de Hermite.

Proposition 8 *$(\frac{H_p}{(p!)^{\frac{1}{2}}})_{p\in\mathbb{N}^d}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_d]$.*

Preuve :
Le fait que ce soit une base ne pose guère de problème grâce à la proposition précédente.
Soient donc $p = (p_1,\ldots,p_d), q = (q_1,\ldots,q_d) \in \mathbb{N}^d$.
Si $p \neq q$, quitte à interchanger p et q, on peut supposer qu'il existe $i \in \{1,\ldots,d\}$ tel que $p_i > q_i$. Alors :

$$(H_q, H_p) = (H_q, \partial_1^{*p_1}\ldots\partial_d^{*p_d}1) = (\partial_i^{p_i}H_q, \partial_1^{*p_1}\ldots\partial_{i-1}^{*p_{i-1}}\partial_{i+1}^{*p_{i+1}}\ldots\partial_d^{*p_d}1) = 0$$

Si $p = q$ alors, par la proposition précédente :

$$\begin{array}{rcl} (H_p, H_p) & = & (H_p, \partial_1^{*p_1}\ldots\partial_d^{*p_d}1) \\ & = & (\partial_1^{p_1}\ldots\partial_d^{p_d}H_p, 1) \\ & = & (p_1!)\ldots(p_d!) \\ & = & p! \end{array}$$

$\blacksquare$

On en déduit immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 2

$$\mathcal{P}_n(H) = vect(H_p(e_1^*,\ldots,e_d^*), |p| \leq n)$$
$$H^{:n:} = vect(H_p(e_1^*,\ldots,e_d^*), |p| = n)$$

5.3 Le théorème de Segal en dimension finie

On peut donc réécrire le théorème de Segal et donner la dimension des chaos de Wiener :

Théorème 9

$$L^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \gamma) = \overset{\perp}{\bigoplus}_{n\in\mathbb{N}} H^{:n:}$$

où $H^{:n:} = vect(H_p(e_1^*,\ldots,e_d^*), |p| = n)$ est un sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \gamma)$ de dimension C_{n+d-1}^{d-1}.

Preuve :
La seule chose à démontrer est que $dimH^{:n:} = C_{n+d-1}^{d-1}$.
Or

$$dimH^{:n:} = Card\{p \in \mathbb{N}^d, |p| = n\} = Card\{(p_1, \ldots, p_d) \in \mathbb{N}^d, p_1 + \ldots + p_d = n\}$$

On note $u_{n,d}$ cette quantité et on voit facilement que :

$$\begin{cases} u_{n,1} = 1 & \forall n \in \mathbb{N} \\ u_{n,d} = \sum_{p_d=0}^{n} u_{n-p_d,d-1} = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k,d-1} & \forall n \in \mathbb{N}, \forall d \geq 2 \end{cases}$$

Donc si $G(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{d=1}^{\infty} u_{n,d} x^n y^d$, on a :

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \frac{y}{1-x} + y \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{d=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} u_{n-k,d-1} x^n y^{d-1} \\ &= \frac{y}{1-x} + y \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} u_{n-k,d} x^n y^d \\ &= \frac{y}{1-x} + y \sum_{d=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,d} x^{n+k} y^d \\ &= \frac{y}{1-x} + \frac{y}{1-x} G(x,y) \end{aligned}$$

Donc $G(x,y) = \frac{y}{1-(x+y)}$. En redeveloppant en séries entières on obtient alors :

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \frac{y}{1-(x+y)} = y \sum_{n=0}^{\infty} (x+y)^n \\ &= y \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} \\ &= y \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k x^k y^{n-k} \\ &= y \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k}^k x^k y^n \\ &= y \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{n-1+k}^k x^k y^n \end{aligned}$$

Et donc $u_{n,d} = C_{n+d-1}^n = C_{n+d-1}^{d-1}$ ce qui termine la preuve.

∎

5.4 Polynômes de Hermite et produit de Wick

Avant d'en finir avec le cas de la dimension finie, nous allons expliciter les polynômes de Hermite en dimension 1 en nous servant des diagrammes de Feynman via le produit de Wick. De fait, les polynômes de Hermite en dimension 1 n'étant en fin de compte que des projections, on peut utiliser la formule du produit de Wick pour calculer leurs coefficients.
$H_n(x) = \pi_n(x^n) =: x^n$: donc,

$$H_n(x) = \sum_{\gamma \in \mathcal{DF}(x,\ldots,x)} (-1)^{r(\gamma)} v(\gamma)$$

Si $c_{n,r}$ est le nombre de familles de r couples disjoints de $\{1,\ldots,n\}$ alors,

$$\begin{aligned} H_n(x) &= \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^r c_{n,r} \mathbb{E}[x^2]^r x^{n-2r} \\ &= \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^r c_{n,r} x^{n-2r} \end{aligned}$$

(Le passage à la dernière ligne résulte simplement de $\int x^2 d\gamma(x) = 1$).

Il nous faut donc calculer le coefficient $c_{n,r}$:

Lemme 9

$$c_{r,n} = C_n^{2r} \frac{(2r)!}{2^r r!}$$

Preuve :
On choisit d'abord les $2r$ éléments qui vont apparaître dans les r couples disjoints (il y a C_n^{2r} possibilités).
Ensuite, tous revient à partitionner l'ensemble à $2r$ éléments considéré en paires et nous savons déjà qu'il y a $\frac{(2r)!}{2^r r!}$ façon de le faire.

$\blacksquare$

Pour résumer on peut énoncer un théorème donnant H_n de manière explicite.

Théorème 10 (Forme explicite des polynômes de Hermite en dimension 1)

$$H_n(x) = \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^r C_n^{2r} \frac{(2r)!}{2^r r!} x^{n-2r}$$

6 De la dimension finie à la dimension infinie

Si les polynômes de Hermite sont apparus jusqu'ici via des cas particuliers du théorème de Segal en dimension finie, il font en fait partie intégrante de la théorie en raison du théorème suivant :

Théorème 11 (Base orthonormée de L^2 adaptée à la décomposition en chaos de Wiener) *Soit H un espace de Hilbert gaussien et $(X_i)_{i\in I}$ une base orthonormée de H.*
Si $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille presque nulle d'entiers naturels on note $\alpha! = \prod_i \alpha_i!$ et $X^\alpha = \prod_i X_i^{\alpha_i}$.
On a :

1. *Si $(\alpha_i)_i \in \mathbb{N}^I$ est presque nulle alors :*

$$: X^\alpha := \prod_i h_{\alpha_i}(X_i)$$

2. *$\{\frac{1}{\sqrt{\alpha!}} : X^\alpha : |\alpha \in \mathbb{N}^I$ presque nul $\}$ est une base orthonormée de $L^2(\Omega, \sigma(H), \mathbb{P})$.*
De plus, $\{\frac{1}{\sqrt{\alpha!}} : X^\alpha : |\alpha \in \mathbb{N}^I, |\alpha| \leq n\}$ est une b.o.n. de $\overline{\mathcal{P}_n(H)}$ et $\{\frac{1}{\sqrt{\alpha!}} : X^\alpha : |\alpha \in \mathbb{N}^I, |\alpha| = n\}$ une b.o.n. de $H^{:n:}$.

Pour démontrer ce théorème, on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 10 *Soit H un espace de Hilbert gaussien et soient $X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_m \in H$ tels que $\mathbb{E}[X_iY_j] = 0$ $\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \forall j \in \{1,\ldots,m\}$*
Alors :

$$: X_1 \ldots X_n Y_1 \ldots Y_m :=: X_1 \ldots X_n :: Y_1 \ldots Y_m :$$

Preuve :
Ecrivons la formule donnant le produit de Wick :

$$: X_1 \dots X_n Y_1 \dots Y_m := \sum_{\gamma \in \mathcal{DF}(X_1,\dots,Y_m)} (-1)^{r(\gamma)} v(\gamma)$$

Or dans cette somme, de par la relation entre les X_i et les Y_j, les seuls diagrammes de Feynman de valeurs non nulles sont des graphes ne reliant jamais entre eux un X_i et un Y_j (i.e. la réunion de deux diagrammes de Feynman γ_1 et γ_2 appartenant respectivement à $\mathcal{DF}(X_1,\dots,X_n)$ et $\mathcal{DF}(Y_1,\dots,Y_m)$).
On a alors :

$$: X_1 \dots X_n Y_1 \dots Y_m := \sum_{\gamma_1 \in \mathcal{DF}(X_1,\dots,X_n)} \sum_{\gamma_2 \in \mathcal{DF}(Y_1,\dots,Y_m)} (-1)^{r(\gamma_1 \cup \gamma_2)} v(\gamma_1 \cup \gamma_2)$$

Puisque dans ces conditions $r(\gamma_1 \cup \gamma_2) = r(\gamma_1) + r(\gamma_2)$ et $v(\gamma_1 \cup \gamma_2) = v(\gamma_1)v(\gamma_2)$ on a finalement :

$$\begin{aligned} : X_1 \dots X_n Y_1 \dots Y_m : &= \sum_{\gamma_1 \in \mathcal{DF}(X_1,\dots,X_n)} (-1)^{r(\gamma_1)} v(\gamma_1) \sum_{\gamma_2 \in \mathcal{DF}(Y_1,\dots,Y_m)} (-1)^{r(\gamma_2)} v(\gamma_2) \\ &= \ : X_1 \dots X_n :: Y_1 \dots Y_m : \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Preuve du théorème :
$: X^\alpha :=: \prod_i X_i^{\alpha_i}$: donc en utilisant le lemme par récurrence et la définition des polynômes de Hermite, $: X^\alpha := \prod_i : X_i^{\alpha_i} := \prod_i h_{\alpha_i}(X_i)$ ce qui prouve le premier point.
Pour la seconde assertion, remarquons tout d'abord que $\forall \alpha, \alpha' \in \mathbb{N}^I$ presque nulle on a

$$\mathbb{E}[: X^\alpha :: X^{\alpha'} :] = \begin{cases} 0 \ si \ \alpha \neq \alpha' \\ \alpha! \ si \ \alpha = \alpha' \end{cases}$$

C'est en fait une simple application du théorème sur les produits scalaires de produits de Wick.
Montrons alors que $V = vect\{: X^\alpha :, \alpha$ presque nulle $\}$ est dense dans $L^2(\Omega, \sigma(H), \mathbb{P})$. Si $G = vect\{X_i, i \in I\}$ (SEV dense de H), grâce à la forule duale de celle exprimant le produit de Wick on voit que $\mathcal{P}(G) \subset V$.
Or on a clairement $\mathcal{P}(G)$ dense dans $\mathcal{P}(H)$ donc dans L^2 (puisque $\mathcal{P}(H)$ est dense dans L^2). Ainsi, V est bel et bien dense dans L^2 ce qui prouve que $\{\frac{1}{\sqrt{\alpha!}} : X^\alpha :, \alpha \in \mathbb{N}^I$ presque nul $\}$ est une base orthonormée de $L^2(\Omega, \sigma(H), \mathbb{P})$.
En reprenant la preuve précédente on a de même $\mathcal{P}_n(G) \subset vect\{: X^\alpha :, |\alpha| \leq n\} \subset \mathcal{P}_n(H)$ d'où en prenant l'adhérence $\{\frac{1}{\sqrt{\alpha!}} : X^\alpha : |\alpha \in \mathbb{N}^I, |\alpha| \leq n\}$ est une b.o.n. de $\overline{\mathcal{P}}_n(H)$. On en déduit alors par définition des chaos que $\{\frac{1}{\sqrt{\alpha!}} : X^\alpha : |\alpha \in \mathbb{N}^I, |\alpha| = n\}$ est une b.o.n. de $H^{:n:}$

$\blacksquare$

7 Le théorème de Segal en dimension infinie : cas du mouvement brownien

Dans toute cette partie, on considère $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un mouvement Brownien standard.
On suppose connus l'existence et les propriétés élémentaires du mouvement brownien. Se reporter à [1] ou à [2] en cas de problème.

7.1 Intégrale stochastique

Lorsque l'on considère le mouvement brownien, apparaît de manière canonique un espace de Hilbert gaussien donné dans la proposition suivante :

Proposition 9 *Considérons*

$$H = H(B) = \overline{vect\{B_t, t \in \mathbb{R}_+\}}$$

$H(B)$ est un Hilbert gaussien.

Preuve :
Il suffit de démontrer que $vect\{B_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ est un espace vectoriel gaussien (son adhérence sera alors un espace de Hilbert gaussien).
Or si $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, on sait que $(B_{t_1} - B_{t_0}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ est un vecteur gaussien centré. Par conséquent une combinaison linéaire des B_{t_i}, qui est aussi une combinaison linéaire des $B_{ti} - B_{t_{i-1}}$ est une variable aléatoire gaussienne centrée ce qui prouve le résultat puisque $B_0 = 0 \in H(B)$.

▪

Proposition 10

$$\forall t, u \geq 0, \mathbb{E}[B_t B_u] = t \wedge u = \int_0^{\infty} \mathbb{1}_{[0,t]}(s)\mathbb{1}_{[0,u]}(s)ds$$

Preuve :
Supposons $t \geq u$. Il suffit de montrer que $\mathbb{E}[B_t B_u] = u$.
Or B_u est indépendante de $B_t - B_u$ donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_t B_u] &= \mathbb{E}[(B_t - B_u)B_u] + \mathbb{E}[B_u^2] \\ &= \mathbb{E}[B_t - B_u]\mathbb{E}[B_u] + \mathbb{E}[B_u^2] \\ &= u \end{aligned}$$

Le passage à la dernière ligne est dû au fait que, par définition même, $B_u \sim \mathcal{N}(0, u)$.

▪

Remarque :
La proposition précédente montre que l'application I définie sur l'ensemble des fonctions en escalier, à valeurs dans $vect\{B_t, t \in \mathbb{R}_+\}$, vérifiant $I(\sum a_i \mathbb{1}_{[0,t_i]}) = \sum a_i B_{t_i}$ est une isométrie. Comme l'ensemble des fonctions en escalier est dense dans $L^2([0, +\infty[)$, on peut étendre I en une isométrie de $L^2([0, +\infty[)$ dans $H(B)$ (car $\overline{vect\{B_t, t \in \mathbb{R}\}} = H(B)$).

Cette remarque va nous permettre de définir l'intégrale stochastique relativement au brownien.

Définition 16 (Intégrale stochastique) *Soit $f \in L^2([0, +\infty[)$.*
On appelle intégrale stochastique de f par rapport à B, et on note $\int_0^\infty f(t)dB_t$ la variable aléatoire $I(f)$.
De plus, pour $t > 0$, on notera $\int_0^t f(s)dB_s = \int_0^\infty f(s)\mathbb{1}_{[0,t]}(s)dB_s$.

Remarque :
Cette notation est justifiée car, pour une fonction indicatrice $f = \mathbb{1}_{[a,b]}$, $(0 < a < b)$, on a $I(f) = I(\mathbb{1}_{[0,b]} - \mathbb{1}_{[0,a]}) = B_{t_b} - B_{t_a}$.

Grâce à l'isométrie $I : f \mapsto \int_0^\infty f(t)dB_t$ mise en évidence plus haut, on peut expliciter $H(B)$. C'est l'objet du théorème suivant :

Théorème 12 (Nature de l'espace $H(B)$)

$$H(B) = \{\int_0^\infty f(t)dB_t, f \in L^2([0, +\infty[)\}$$

Proposition 11 *$\forall n \in \mathbb{N}$, il existe une isométrie K_n de $\overline{Sym^n(L^2([0, +\infty[))}$ dans $H(B)^{:n:}$ telle que $K_n(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n) =: \int f_1 dB \ldots \int f_n dB :, \forall f_1, \ldots, f_n \in L^2([0, +\infty[)$.*

Preuve :

Soit $I : \left\{ \begin{array}{lll} L^2([0,+\infty[) & \rightarrow & H(B) \\ f & \mapsto & \int_0^\infty f(t)dB_t \end{array} \right.$ l'isométrie déjà considérée précédemment.
On pose alors $J_n : Sym^n(L^2([0,+\infty[)) \rightarrow Sym^n(H(B))$ telle que

$$J_n(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n) = I(f_1) \cdot \ldots \cdot I(f_n) = \int f_1 dB \cdot \ldots \cdot \int f_n dB$$

J_n est une application isométrique surjective donc, grâce à un lemme maintes fois utilisé précédemment, J_n se prolonge en une isométrie entre $\overline{Sym^n(L^2([0,+\infty[))}$ et $\overline{Sym^n(H(B))}$ que l'on continue de noter J_n.
Or, il existe une isométrie ϕ_n entre $\overline{Sym^n(H(B))}$ et $H(B)^{:n:}$ vérifiant $\phi_n(X_1 \cdot \ldots \cdot X_n) =: X_1 \ldots X_n :$ pour $X_1, \ldots, X_n \in H(B)$.
Si l'on considère alors l'application $K_n = \phi_n \circ J_n$, on obtient une isométrie de $\overline{Sym^n(L^2([0,+\infty[))}$ dans $H(B)^{:n:}$ vérifiant bien la propriété de l'énoncé.

■

Proposition 12 *Soit $L^2_{sym}([0,+\infty[^n) = \{f \in L^2([0,+\infty[^n, \frac{1}{n!}dx), f$ est symétrique $\}$.
On va identifier $\overline{Sym^n(L^2([0,+\infty[))}$ à $L^2_{sym}([0,+\infty[^n)$ via $f_1 \cdot \ldots \cdot f_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^n f_i(x_{\sigma(i)})$.*

Preuve :

Soit
$$\psi : \left\{ \begin{array}{lll} (L^2([0,+\infty[))^n & \rightarrow & L^2_{sym}([0,+\infty[^n) \\ (f_1, \ldots, f_n) & \mapsto & \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^n f_i(x_{\sigma(i)}) \end{array} \right.$$

ψ est $n-$linéaire symétrique donc on peut en fait redéfinir ψ sur $Sym^n(L^2([0,+\infty[))$ de sorte que $\psi(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^n f_i(x_{\sigma(i)})$ pour $f_1, \ldots, f_n \in L^2(]0,+\infty])$.
Montrons dans un premier temps que ψ est isométrique.

$$\begin{aligned}
\|\psi(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n)\|^2_{L^2_{sym}([0,+\infty[^n)} &= \int (\psi(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n)(x_1, \ldots, x_n))^2 \frac{dx}{n!} \\
&= \int \sum_{\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^n f_i(x_{\sigma(i)}) \prod_{j=1}^n f_j(x_{\sigma'(j)}) \frac{dx_1 \ldots dx_n}{n!} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n} \int \prod_{i=1}^n f_{\sigma(i)}(x_i) f_{\sigma'(i)}(x_i) dx_1 \ldots dx_n \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^n \int f_{\sigma(i)}(t) f_{\sigma'(i)}(t) dt \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^n \int f_{\sigma(i)}(t) f_{\sigma'(i)}(t) dt \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^n \int f_{\sigma(\sigma'^{-1}(i))}(t) f_i(t) dt \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^n \int f_{\sigma(i)}(t) f_i(t) dt \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^n \int f_{\sigma(i)}(t) f_i(t) dt \\
&= \|f_1 \cdot \ldots \cdot f_n\|^2_{Sym^n(L^2([0,+\infty[))}
\end{aligned}$$

Ainsi, ψ est isométrique.
Montrons alors que l'image de ψ est l'ensemble des fonctions de $L^2_{sym}([0,+\infty[^n)$ à variables séparées.

Les fonctions qui sont dans l'image de ψ sont bien à variables séparées.
Soit alors une fonction f de $L^2_{sym}([0,+\infty[^n)$ à variables séparées, disons $f(x_1,\ldots,x_n) = f_1(x_1)\ldots f_n(x_n)$ (on raisonnerait de manière similaire dans le cas d'une combinaison linéaire).
On a $\psi(\frac{1}{n!}f_1\cdot\ldots\cdot f_n) = f$ de manière évidente puisque f est symétrique ce qui prouve le résultat sur l'image.
Si on démontre donc que $Im\psi$ est dense dans $L^2_{sym}([0,+\infty[^n)$, on pourra bien prolonger ψ en une isométrie de $\overline{Sym^n(L^2([0,+\infty[))}$ dans $L^2_{sym}([0,+\infty[^n)$.
Reste à montrer la densité en question.
Pour cela, soient $f \in L^2_{sym}([0,+\infty[^n)$ et $\varepsilon > 0$. f est dans $L^2([0,+\infty[^n, \frac{dx}{n!})$ donc par densité des fonctions continues à support compact (cet ensemble est noté $C_c([0,+\infty[^n))$ dans cet espace, il existe $g \in C_c([0,+\infty[^n)$ telle que $\|g-f\|_{L^2_{sym}([0,+\infty[^n)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Notons alors K le support de g. Un corollaire du théorème de Stone-Weierstrass montre qu'il existe $h \in C(K)$ à variables séparées telle que $\|g-h\|_\infty \leq \frac{\sqrt{n!}\varepsilon}{2\sqrt{diam(K)}}$.
Ainsi $\|g-h\|_{L^2_{sym}([0,+\infty[^n)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et finalement $\|f-h\|_{L^2_{sym}([0,+\infty[^n)} \leq \varepsilon$.
h étant à variables séparées, il nous suffit de la symétriser pour obtenir le résultat.
En effet, si $h_s(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} h(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})$, h_s est symétrique à variables séparées et :

$$\|f-h_s\|_{L^2_{sym}([0,+\infty[^n)} \leq \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \|f-h\|_{L^2_{sym}([0,+\infty[^n)} \leq \varepsilon$$

puisque f est symétrique.

▪

Proposition 13 *On note $\forall n \in \mathbb{N}, D_n = \{(t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^n, 0 < t_1 < \ldots < t_n < \infty\}$.
$L^2(D_n)$ (muni de la tribu des boréliens et de la mesure de Lebesgue) s'identifie clairement à $L^2_{sym}([0,+\infty[^n)$.*

Preuve :
Soit $f \in L^2_{sym}([0,+\infty[^n)$.
La restriction de f à D_n est dans $L^2(D_n)$ et on a, puisque f est symétrique :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n = n!\int_{D_n} f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n$$

▪

On aboutit finalement au théorème suivant :

Théorème 13 *Il existe une isométrie I_n de $L^2(D_n)$ dans $H^{:n:}$ telle que, via les identifications faites précédemment, $\forall f_1,\ldots,f_n \in L^2([0,+\infty[)$, si $f_1\cdot\ldots\cdot f_n(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\prod_{i=1}^n f_i(x_{\sigma(i)})$, alors $I_n(f_1\cdot\ldots\cdot f_n) =: \int f_1 dB \ldots \int f_n dB$:*

Pour mieux comprendre les identifications et les isométries mises en jeu, on pourra se référer au diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
& \overline{Sym^n(H(B))} \arrow[r, "\phi_n"'] & H(B)^{:n:} \\
\overline{Sym^n(L^2([0,+\infty[))} \arrow[ur, "J_n"'] \arrow[dr, "\psi"'] & & \\
& L^2_{sym}([0,+\infty[^n) \arrow[r] & L^2(D_n) \arrow[uu, "I_n"']
\end{tikzcd}$$

7.2 Intégrale stochastique itérée

Définition 17 (Processus élémentairement prévisible) *On note $\mathcal{F}_t = \sigma(\{B_s, s \leq t\})$. Un processus élémentairement prévisible est une variable aléatoire $\{X_t\}_{t\geq 0}$ de l'espace mesuré $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathbb{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \sigma(H), dtd\mathbb{P})$ qui peut s'écrire $X_t = \sum_{i=1}^N Y_i \mathbb{1}_{]t_i,u_i]}(t)$ où les Y_i sont des variables mesurables pour les tribus $\mathcal{F}_{t_i}$, et $0 \leq t_i \leq u_i, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Remarque :
Pour un tel processus élémentairement prévisible X_t, on pose $\int_0^\infty X_t dB_t = \sum_{i=1}^N Y_i(B_{u_i} - B_{ti})$. Il est facile de voir que cette somme ne dépend pas de la représentation de X_t choisie, et qu'on prolonge bien ainsi la définition de l'intégrale stochastique.

Proposition 14 *Soit X_t un processus élémentairement prévisible.*
On a :

$$\mathbb{E}[(\int_0^\infty X_t dB_t)^2] = \int_0^\infty \mathbb{E}[X_t^2]dt$$

Preuve :
On prend une représentation de $X_t = \sum_{i=1}^N Y_i \mathbb{1}_{]t_i,u_i]}(t)$, avec $u_i < t_{i+1}, \forall i \in \{1, \ldots, N-1\}$. Alors pour $i > j$, $(B_{u_i} - B_{t_i})$ et $Y_i Y_j (B_{u_j} - B_{t_j})$ sont indépendantes donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(\int_0^\infty X_t dB_t)^2] &= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[(Y_i(B_{u_i} - B_{t_i}))^2] \\
&= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[Y_i^2]\mathbb{E}[(B_{u_i} - B_{t_i})^2] \\
&= \sum_{i=1}^N (u_i - t_i)\mathbb{E}[Y_i^2] \\
&= \int_0^\infty \mathbb{E}[X_t^2]dt
\end{aligned}$$

■

Remarque :
Ceci démontre que si $(X_t)_{t\geq 0} \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathbb{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \sigma(H), dtd\mathbb{P})$, alors $\int_0^\infty X_t dB_t \in L^2(\Omega, \sigma(H), \mathbb{P})$.

Définition 18 (Processus prévisibles de carré intégrable) *On appelle espace des processus prévisibles de carré intégrable, et on note Π^2 l'adhérence dans $L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathbb{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \sigma(H), dtd\mathbb{P})$ de l'ensemble des processus élémentairement prévisibles qui sont dans $L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathbb{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \sigma(H), dtd\mathbb{P})$.*

Remarque :
On a vu que pour les processus élémentairement prévisibles, on avait une définition de $\int_0^\infty X_t dB_t$, cette définition peut donc être prolongée à tout Π^2, et donne, par la proposition précédente, des variables aléatoires de $L^2(\Omega, \sigma(H), \mathbb{P})$.

Définition 19 *Soit $F \in L^2(D_n)$.*
On pose :

$$\forall t \geq 0, F_t(t_1, \ldots, t_{n-1}) = \begin{cases} F(t_1, \ldots, t_{n-1}, t) & \textit{si } 0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Remarque :
On a pour presque tout $t \geq 0, F_t \in L^2(D_{n-1})$ puisque $\int_0^\infty \|F_t\|^2_{L^2(D_{n-1})} dt = \|F\|^2_{L^2(D_n)} < \infty$.

Théorème 14 (Intégrales itérées) *Si $n \geq 1$ et $F \in L^2(D_n)$, alors $(I_{n-1}(F_t))_{t\geq 0}$ est un processus prévisible de carré intégrable, et $I_n(F) = \int_0^\infty I_{n-1}(F_t)dB_t$*

Preuve :
On considére tout d'abord le cas où F est la fonction indicatrice d'un rectangle $\prod_{i=1}^{n}]a_i, b_i] \subset D_n$, i.e. $0 \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < \ldots < b_{n-1} \leq a_n < b_n$.
On a pour $(t_1, \ldots, t_n) \in D_n$:

$$\mathbb{1}_{]a_1,b_1]} \cdot \ldots \cdot \mathbb{1}_{]a_n,b_n]}(t_1, \ldots, t_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{]a_i,b_i]}(t_{\sigma(i)}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{]a_i,b_i]}(t_i) = F(t_1, \ldots, t_n).$$

Donc, de part les identifications faites précédemment, on peut voir $F \in L^2(D_n)$ comme si c'était $\mathbb{1}_{]a_1,b_1]} \cdot \ldots \cdot \mathbb{1}_{]a_n,b_n]} \in \overline{Sym^n(L^2([0, +\infty[))}$.
En outre, $\int_0^\infty \mathbb{1}_{]a_i,b_i]}(t)dB_t = B_{b_i} - B_{a_i}$ et ces variables sont orthogonales car les $\mathbb{1}_{]a_i,b_i]}$ le sont (n'oublions pas que $I : f \mapsto \int f dB$ est une isométrie).
Ainsi, en utilisant par exemple le lemme 10 :

$$\begin{aligned} I_n(F) &= :\int \mathbb{1}_{]a_1,b_1]} dB \ldots \int \mathbb{1}_{]a_n,b_n]} dB : \\ &= :\prod_{i=1}^{n} (B_{b_i} - B_{a_i}) : \\ &= \prod_{i=1}^{n} : B_{b_i} - B_{a_i} : \\ &= \prod_{i=1}^{n} (B_{b_i} - B_{a_i}) \end{aligned}$$

De plus on a facilement $F_t = 0$ si $t \notin]a_n, b_n]$ et dans le cas contraire, $F_t = \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{1}_{]a_i,b_i]}$. Clairement, par ce qui précède, $I_{n-1}(F_t) = \mathbb{1}_{]a_n,b_n]}(t) \prod_{i=1}^{n-1}(B_{b_i} - B_{a_i})$. D'où, comme pour $i \leq n-1$, B_{a_i} et B_{b_i} sont $\mathcal{F}_{a_n}$-mesurables, $I_{n-1}(F_t)$ est un processus élémentairement prévisible, avec

$$\int_0^\infty I_{n-1}(F_t) dB_t = \prod_{i=1}^{n} (B_{b_i} - B_{a_i}) = I_n(F)$$

et

$$\int_0^\infty \mathbb{E}[I_{n-1}(F_t)^2] dt = \mathbb{E}[(\int_0^\infty I_{n-1}(F_t) dB_t)^2] = \mathbb{E}[I_n(F)^2]$$

Or $\mathbb{E}[I_n(F)^2] < +\infty$ car I_n est à valeurs dans $H^{:n:}$ donc $I_{n-1}(F_t)$ est bien un processus prévisible de carré intégrable.

On a donc le résultat pour les indicatrices de rectangle, le résultat général en découle par continuité puisque I_n et I_{n-1} sont des isométries en utilisant comme de coutume le lemme des classes monotones ainsi que la densité des fonctions étagées dans L^2.

■

Muni de ce théorème sur les intégrales itérées on obtient de manière assez simple une description des chaos dans le cas de $H(B)$.
En effet, $\forall n \geq 1, I_n$ est une isométrie de $L^2(D_n)$ dans $H(B)^{:n:}$ donc les élements du chaos d'ordre n sont de la forme $I_n(F)$ pour $F \in L^2(D_n)$.
Or, en itérant le théorème précédent on obtient :

$$\forall n \geq 1, I_n(F) = \int_0^\infty \int_0^{t_n} \ldots \int_0^{t_2} F(t_1, \ldots, t_n) dB_{t_1} \ldots dB_{t_n}$$

On va donc pouvoir conclure avec un théorème qui explicite le théorème de Segal dans ce contexte.
Avant cela, rappelons ce qu'est l'espace de Wiener, cadre idéal pour énoncer un tel théorème :

Définition 20 (Espace de Wiener) *Soit* $W = \{w \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) | w(0) = 0\}$.
On munit W *de la tribu* $\mathcal{F}_c$ *engendrée par les cylindres (i.e. la plus petit tribu rendant mesurables les applications coordonnées) et de la mesure de probabilités* $\mathbb{P}_0$ *vérifiant, pour* $0 < t_1 < \ldots < t_n$ *et pour* $A_1, \ldots, A_n$ *sous-ensembles mesurables de* $\mathbb{R}$, $\mathbb{P}_0(\{w | w(t_1) \in A_1, \ldots, w(t_n) \in A_n\}) = \mathbb{P}(B_{t_1} \in A_1, \ldots, B_{t_n} \in A_n)$.
L'espace de Wiener est simplement l'espace de probabilité $(W, \mathcal{F}_c, \mathbb{P}_0)$.

Dans ce contexte, si l'on considère les applications coordonnées $B_t : w \mapsto w(t)$, $(B_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un mouvement brownien.

On obtient finalement le théorème suivant :

Théorème 15 (Théorème de Segal et espace de Wiener) *Pour* $n \geq 1$ *:*

$$H^{:n:} = \{\int_0^\infty \int_0^{t_n} \ldots \int_0^{t_2} F(t_1, \ldots, t_n) dB_{t_1} \ldots dB_{t_n} | F \in L^2(D_n)\}$$

Aussi, par le théorème de Segal, si $F \in L^2(W, \mathcal{F}_c, \mathbb{P}_0)$, *il existe une constante* F_0 *et une suite de fonctions* $(F_n)_n$ *avec* $F_n \in L^2(D_n)$ *telle que*

$$F = F_0 + \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \int_0^{t_n} \ldots \int_0^{t_2} F_n(t_1, \ldots, t_n) dB_{t_1} \ldots dB_{t_n}$$

8 Conclusion

En partant de la notion d'espace de Hilbert gaussien, nous avons obtenu une décomposition de L^2 en somme de chaos isomorphes au complété de la puissance tensorielle symétrique de l'espace de Hilbert gaussien sous-jacent.
Ensuite, nous nous sommes attachés à faire parler cette décomposition dans des cas particuliers non triviaux en commençant par le cas de la dimension finie, qui nous a permis de reconstruire les polynômes d'Hermite avec une vision originale, puis en s'interessant à un cas lié au mouvement brownien.
Nous aurions aimé pouvoir "réaliser" la décomposition en somme de chaos de fonctionnelles simples du brownien comme par exemple $sup_{t \leq 1} B_t$ mais nous ignorons comment obtenir une telle décomposition.

Références

[1] Jean-François Le Gall. Processus aléatoires. Cours donné à l'Ecole Normale Supérieure, 2004.

[2] Jr. McKean Henry P. *Stochastic integrals.* New York NY London Academic Press, 1969.

[3] Malliavin Paul. *Stochastic analysis.* Springer, 1997.

[4] Janson Svante. *Gaussian Hilbert spaces.* Cambridge Cambridge University Press, 1997.