

Variétés hyperboliques : une introduction

François Guéritaud

mai 2003

Résumé

Ce texte présente une introduction à la théorie des variétés hyperboliques. Il s'agit de variétés riemanniennes dont tout point possède un voisinage isométrique à un ouvert de l'*espace hyperbolique*, qui est défini dans la première section. Toutes les surfaces de caractéristique d'Euler strictement négative admettent, par exemple, une métrique hyperbolique. Un théorème de Thurston [Th] assure que « beaucoup » de variétés de dimension 3 admettent une métrique hyperbolique. Parmi celles-ci, les complémentaires de nœuds et d'entrelacs dans la sphère \mathbb{S}^3 sont une riche source d'exemples.

1 L'espace hyperbolique

Étant donné un entier $n \geq 2$, considérons le demi-espace $\mathbb{H}^n = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^{n-1}$ muni au point $(x_0; x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ de la métrique riemannienne

$$\frac{1}{x_0^2} (dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_{n-1}^2)$$

Cette métrique est *homogène* et *isotrope* : pour tous x, y dans \mathbb{H}^n , si \mathcal{B} (resp. \mathcal{C}) est une base orthonormée de l'espace tangent en x (resp. y) à \mathbb{H}^n , alors il existe une isométrie de \mathbb{H}^n sur lui-même qui envoie \mathcal{B} sur \mathcal{C} .

Les géodésiques de \mathbb{H}^n sont les demi-droites ou demi-cercles (ouverts) orthogonaux à la frontière $0 \times \mathbb{R}^{n-1}$ en leurs extrémités : par deux points distincts passe exactement une géodésique. Tout hémisphère dont le bord est une sphère (euclidienne) de la frontière est une hypersurface totalement géodésique, sur laquelle la métrique induite est encore hyperbolique (Figure 1).

Enfin, en identifiant la frontière compactifiée de \mathbb{H}^2 à $\mathbb{P}^1\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, on remarque que l'action de $\text{Isom}_0(\mathbb{H}^2)$ (isométries directes) sur cette frontière est exactement celle de $PSL_2(\mathbb{R})$ vu comme groupe d'homographies (la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ désigne la transformation $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, et la multiplication matricielle coïncide avec la composition). De même, en identifiant la frontière de \mathbb{H}^3 à $\mathbb{P}^1\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, on observe que l'action de $\text{Isom}_0(\mathbb{H}^3)$ sur cette frontière est exactement celle de $PSL_2(\mathbb{C})$.

C'est le cas tridimensionnel, correspondant à $PSL_2(\mathbb{C})$, qui nous intéresse au premier chef. Les isométries directes de \mathbb{H}^3 , ou homographies complexes,

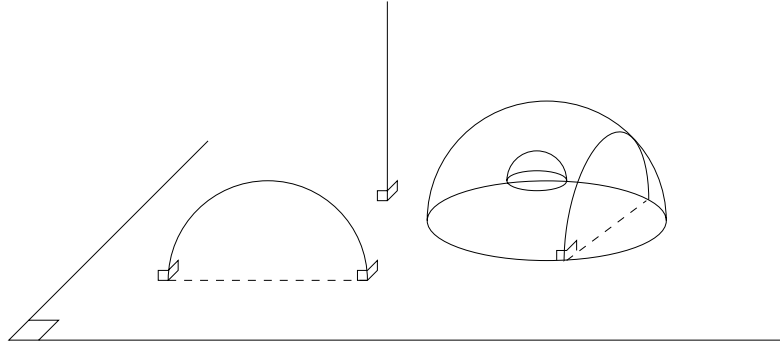


FIG. 1:

sont de quatre types, correspondant à autant de familles de classes de conjugaison :

1. L'identité ;
2. Éléments elliptiques ou rotations de \mathbb{H}^3 autour d'une géodésique fixe selon un angle $\theta \in]0, \pi]$: les éléments de $PSL_2(\mathbb{C})$ correspondants sont conjugués à $\pm \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$ i.e. à l'homographie $z \mapsto e^{i\theta} z$.
3. Éléments paraboliques, qui fixent un unique point de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ et aucun point de \mathbb{H}^3 : ils sont conjugués à $\pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i.e. à l'homographie $z \mapsto z+1$.
4. Éléments hyperboliques ou rotations-translations le long d'une unique géodésique (globalement fixe) de \mathbb{H}^3 : si $\rho \neq 0$ est la longueur de la translation et θ l'angle de la rotation, on peut conjuguer cet élément à $\pm \begin{pmatrix} e^{(\rho+i\theta)/2} & 0 \\ 0 & e^{-(\rho+i\theta)/2} \end{pmatrix}$ i.e. à l'homographie $z \mapsto e^{\rho+i\theta} z$.

1.1 Modèles boules

À partir de ce modèle du demi-espace, dit parfois modèle de Lobatchevski, on peut pratiquer une inversion pour passer au modèle de la *boule* de Poincaré. C'est la boule unité de \mathbb{R}^n munie de la métrique riemannienne

$$\left(\frac{2}{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2} \right)^2 (dx_1^2 + \dots + dx_n^2)$$

pour laquelle les géodésiques sont les arcs de cercle (ou segments de droite) orthogonaux à la frontière \mathbb{S}^{n-1} en leurs extrémités. Comme le modèle du demi-espace, ce modèle (ou plongement $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$) a la propriété d'être *conforme*, i.e. la métrique est en tout point *proportionnelle* à celle de l'espace ambiant \mathbb{R}^n (et donc les angles sont localement préservés).

On utilise encore un dernier modèle, dit de Beltrami-Klein, obtenu en appliquant une "homothétie hyperbolique" de rapport 2 au modèle de la

boule précédent : le long de chaque demi-droite (géodésique) issue du centre, on envoie le point d'abscisse curviligne hyperbolique t sur le point d'abscisse curviligne $2t$, et on transporte la métrique. Toutes les géodésiques apparaissent alors comme des segments de droites, toujours dans la boule unité de \mathbb{R}^n , mais le modèle n'est plus conforme.

Des présentations étoffées figurent dans [BP] ou [MT].

2 Variétés

Considérons une variété (orientable, connexe) M de dimension 3, munie d'une *métrique hyperbolique* : tout point x de M possède un voisinage isométrique à un ouvert de \mathbb{H}^3 . On suppose de plus que cette métrique est complète, i.e. toute géodésique peut être prolongée indéfiniment (le "bord" de M , s'il existe, est donc à l'infini pour la métrique).

Comme \mathbb{H}^3 est simplement connexe, il existe alors un *revêtement universel* de M par \mathbb{H}^3 : c'est une surjection $\rho : \mathbb{H}^3 \rightarrow M$ qui au voisinage de tout point se restreint à une isométrie. Les isométries hyperboliques φ telles que $\rho = \rho \circ \varphi$ forment un groupe qu'on identifie d'une part comme le groupe fondamental de M , d'autre part comme un sous-groupe discret de $PSL_2(\mathbb{C})$.

Réciproquement, si Γ est un sous-groupe discret de $PSL_2(\mathbb{C})$ sans éléments elliptiques, le quotient $\Gamma \backslash \mathbb{H}^3$ est une variété hyperbolique.

Proposition 1 *Il y a une bijection canonique entre les classes d'isométrie de variétés hyperboliques orientées complètes de dimension trois d'une part, et les classes de conjugaison de sous-groupes discrets sans torsion de $PSL_2(\mathbb{C})$ d'autre part.*

"Sans torsion" signifie ici sans éléments elliptiques. Si l'on admet des éléments elliptiques (rotations d'ordre fini), alors la variété cesse d'être partout riemannienne et devient une *orbi-variété* : elle admet un lieu singulier, ensemble de points dont chacun admet un voisinage difféomorphe à un quotient de \mathbb{R}^3 par un groupe fini. Mais le résultat suivant assure que, sous une hypothèse de "type fini", toute orbi-variété hyperbolique n'est jamais qu'un quotient fini d'une variété hyperbolique.

Théorème 2 (Lemme de Selberg) : *Tout sous-groupe discret de type fini de $PSL_2(\mathbb{C})$ admet un sous-groupe distingué d'indice fini (donc encore de type fini) sans torsion.*

2.1 Exemples de variétés

2.1.1 En dimension 2

Les surfaces différentielles compactes connexes orientables sans bord sont classées par leur genre qui est un entier positif ou nul g . Quand le genre d'une surface S est supérieur ou égal à 2, on peut munir S non pas d'une, mais de

toute une famille de métriques hyperboliques distinctes (non isométriques) : la dimension de cette famille, qui est une orbi-variété réelle [FLP], vaut alors $6g - 6$. L'aire de S est la même pour toutes ces structures : $4\pi(g - 1)$. Pour exhiber des structures hyperboliques sur S , on peut par exemple voir l'espace topologique S comme un polygone plan à $4g$ côtés identifiés deux à deux, puis exiger que ce polygone soit une partie de \mathbb{H}^2 et ses côtés des géodésiques : il y a un nombre fini de conditions à satisfaire en termes d'angles et de longueurs des côtés pour que le recollement soit possible (avec sommet[s] non singulier[s]). La même chose est possible pour des surfaces non compactes (figure 2).

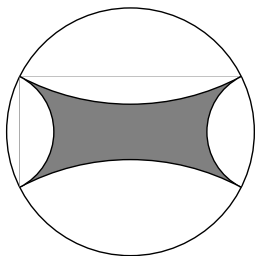


FIG. 2: Un recollement des côtés de ce rectangle idéal (haut sur bas, gauche sur droite) donne une surface hyperbolique complète non compacte d'aire finie : un tore privé d'un point.

2.1.2 En dimension 3

Considérons l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 , privé d'un nombre pair $2g$ de demi-espaces hyperboliques disjoints, dont les distances deux à deux sont minorées par une constante strictement positive. Identifions par paires les plans hyperboliques formant la frontière, de manière isométrique et en respectant les orientations (si A et B sont les deux plans d'une paire à identifier, la normale sortante de A est envoyée sur la normale rentrante de B). La figure 3 montre pourquoi l'espace topologique obtenu est à tout coup une "fougasse" pleine (ou corps à anses) de genre g . Comme on sait que le groupe fondamental d'une telle fougasse est libre, de rang g , on vient de faire d'une pierre deux coups :

- exhiber dans $PSL_2(\mathbb{C})$ un sous-groupe discret, libre à g générateurs (dit sous-groupe de Schottky classique) ;
- munir la fougasse topologique d'une structure hyperbolique complète (son bord, une surface de genre g , est à l'infini pour la métrique hyperbolique).

En fait, il y a là encore toute une famille (de dimension $6g - 6$) de métriques non équivalentes possibles sur la fougasse, puisque les demi-espaces au départ pouvaient être choisis de manière arbitraire. Toutefois il n'en est pas toujours ainsi : le résultat suivant a marqué une première rupture dans

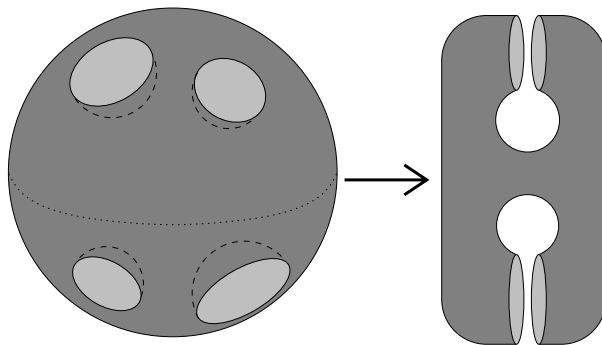


FIG. 3:

l'étude des variétés hyperboliques.

Théorème 3 de rigidité de Mostow : *Soient M_1 et M_2 deux variétés de même dimension supérieure ou égale à 3, munies chacune d'une métrique hyperbolique complète de volume fini. Si $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ est un difféomorphisme, alors φ est isotope à une isométrie.*

Ainsi, tout invariant géométrique des variétés hyperboliques à volume fini (comme le volume lui-même, la longueur de la plus courte géodésique fermée...) est promu invariant topologique ! Noter le fort contraste avec la situation en dimension 2. On montre sans difficulté que toute variété hyperbolique complète de volume fini est difféomorphe à l'intérieur d'une variété compacte à bord qui admet une triangulation finie : comme l'ensemble des complexes simpliciaux finis est dénombrable, le théorème 3 implique qu'en dimension trois ou plus, l'ensemble des variétés hyperboliques complètes et de volume fini, vues à isométrie près, est dénombrable.

En dimension strictement supérieure à 2, il a longtemps été difficile de construire des variétés hyperboliques de volume fini. Voici un exemple compact attribué à Seifert-Weber (années 30) :

Considérer un dodécaèdre régulier (compact) dans \mathbb{H}^3 dont la taille est telle que tous les angles dièdres intérieurs valent $2\pi/5$. Identifier chaque face à la face opposée par une translation-rotation dont l'axe passe par le centre et dont l'angle est $+3\pi/5$. Les sommets se trouvent alors tous identifiés selon un motif "icosaédrique", et les arêtes sont envoyées cinq par cinq sur six petites géodésiques fermées.

2.1.3 Un exemple historique

L'exemple suivant a joué un rôle déterminant dans la genèse du théorème d'hyperbolisation (théorème 7 de la prochaine section).

Observation 4 *Le complémentaire M du nœud en huit dans S^3 admet une métrique hyperbolique complète de volume fini.*

Cette observation est due à Riley [Ri] : elle découle de la construction de M par recollement de deux tétraèdres topologiques privés de leurs sommets (le sens de cette phrase sibylline est explicité dans la légende de la figure 4 page 12).

Dans cette construction, les arêtes viennent coïncider par groupes de six : donc si on munit chaque tétraèdre d'une métrique hyperbolique pour laquelle les faces sont portées par des plans hyperboliques formant entre eux des angles dièdres de $\pi/3$, alors la métrique recollée sera encore hyperbolique en tout point des faces et des arêtes.

À isométrie près, le seul tétraèdre dont tous les angles dièdres valent $\pi/3$ est le tétraèdre régulier idéal (dont les sommets sont rejetés à l'infini). Il se trouve que la métrique obtenue en recollant deux tels tétraèdres est bien complète : aucune géodésique ne va à l'infini en un temps fini, même à supposer qu'elle puisse traverser une infinité de fois la frontière entre les tétraèdres.

Cette propriété de complétude revient précisément à demander que le développement plan donné au bas de la figure 4, où les angles des triangles (égaux aux angles dièdres des tétraèdres) sont imposés, définisse bien un pavage de \mathbb{R}^2 . De manière équivalente, il faut et il suffit que les trois conditions suivantes soient vérifiées :

- Si les angles au voisinage d'un sommet sont notés a_1, \dots, a_n (dans le sens direct), alors $\sum_{i=1}^n a_i = 2\pi$.
- Si b_i, c_i désignent les deux autres angles du triangle contenant a_i , avec pour convention que (a_i, b_i, c_i) soit direct, alors $\prod_{i=1}^n \sin b_i = \prod_{i=1}^n \sin c_i$.
- La similitude plane qui envoie l'une sur l'autre deux copies d'une même face grise (par exemple F_{II}) est toujours une translation.

Comme ces conditions peuvent être formulées en termes analytiques à partir de la seule donnée des angles dièdres des tétraèdres idéaux, on donne à la propriété de complétude un nom venu de l'analyse complexe en disant que le système d'angles dièdres doit posséder une *holonomie triviale*.

3 Théorème(s) d'hyperbolisation

Le théorème d'hyperbolisation de Thurston, annoncé en 1977, munit toute variété de dimension trois suffisamment "indécomposable", en un certain sens, et cependant assez "complexe", en un autre sens, d'une structure hyperbolique — et précise quand celle-ci est de volume fini. Les articles [Ot1] et [Ot2] donnent ensemble une preuve de ce résultat. Pour l'énoncer précisément, il faut introduire quelques définitions et la condition technique de Haken sur les variétés.

Définition 5 *Soit M une variété à bord, orientable, de dimension 3. Soit F une sous-variété à bord (immergée) de dimension 2 de M , orientable, telle*

que $\partial F = F \cap \partial M$ (les bords peuvent être vides). Si F est une sphère, on dit que F est incompressible lorsqu'elle n'est pas le bord d'une boule plongée. Si F est un disque, on dit que F est incompressible quand il n'existe pas d'homotopie à bord fixé entre F et un disque plongé dans ∂M . Dans tous les autres cas, on dit que F est incompressible quand les morphismes $\pi_1(F) \rightarrow \pi_1(M)$ et $\pi_1(F, \partial F) \rightarrow \pi_1(M, \partial M)$ sont injectifs.

Définition 6 Une variété M de dimension 3, compacte, orientable et à bord est dite variété compacte de Haken quand elle ne contient pas de sphère ni de disque incompressibles mais contient une surface incompressible.

Remarque : quand M n'est pas une boule \mathbb{B}^3 , on peut montrer que la seconde condition est toujours remplie si le bord de M est non-vide.

Théorème 7 d'hyperbolisation [Th] Soit M une variété compacte de Haken. L'intérieur de M admet une métrique hyperbolique complète si et seulement si M est atoroidale, i.e. tout tore incompressible est homotope à une composante du bord de M . De plus, le volume de la structure hyperbolique est fini si et seulement si le bord de M est une union (éventuellement vide) de tores.

L'hypothèse de Haken n'est pas nécessaire pour l'existence d'une métrique hyperbolique (on connaît une infinité de contre-exemples). La conjecture de géométrisation formulée par Thurston au début des années 80 vise donc à étendre le théorème 7. Elle propose de découper l'intérieur d'une variété compacte quelconque M de dimension 3 le long des sphères et des tores incompressibles, et stipule qu'on obtient alors des morceaux dont "le plus gros" est le plus souvent hyperbolique, et dont tous les autres admettent une structure géométrique remarquable, localement isométrique à une variété riemannienne homogène, complète et simplement connexe, appartenant à une liste connue et finie (espaces homogènes *maximaux*). Grâce notamment au théorème 7, cette conjecture est maintenant établie dans le cas des variétés de Haken. La conjecture de Poincaré — selon laquelle \mathbb{S}^3 est la seule variété de dimension trois compacte connexe sans bord, orientable, ayant un groupe fondamental trivial — est une conséquence de la conjecture de géométrisation, dont Grigori Perelman a annoncé une démonstration à la fin de l'année 2002 (une longue relecture est en cours en 2003).

Pour munir de structures hyperboliques des variétés non encore couvertes par le théorème 7, on a recours à différentes constructions, notamment la *chirurgie de Dehn*, esquissée maintenant.

Soit M une variété orientée à bord telle que ∂M possède une composante connexe C difféomorphe au tore \mathbb{T}^2 ; soit $T = \mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1$ un tore plein orienté. Fixons une fois pour toutes un difféomorphisme $C \simeq \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$. On souhaite identifier C au bord de T de manière à obtenir une variété orientée dont le bord aura une composante connexe de moins que M (la normale sortante de M étant envoyée sur la normale rentrante de T , et les deux orientations

induites par M et T sur la surface de recollement étant opposées). Une telle identification est possible *via* n'importe quel difféomorphisme $\varphi : \partial T \rightarrow C$ renversant l'orientation, et le résultat \widetilde{M} ne dépend, à homéomorphisme près, que de la classe d'isotopie de φ . Topologiquement, \widetilde{M} ne dépend donc *a priori* que du choix d'un élément de $SL_2(\mathbb{Z})$; en fait \widetilde{M} dépend de moins encore : il suffit de connaître la classe de conjugaison de l'élément premier $\lambda \in \pi_1(C)$ qui sera identifié au *méridien* $(\partial\mathbb{B}^2) \times \{*\}$ de T , et donc rendu trivial après le recollement. Autrement dit, \widetilde{M} ne dépend (après choix d'une base de $\pi_1(C)$) que d'un couple (p, q) d'entiers premiers entre eux, avec p positif. Au niveau des groupes fondamentaux, si $\langle \lambda \rangle$ désigne le sous-groupe distingué engendré par λ , on a $\pi_1(\widetilde{M}) = \pi_1(M)/\langle \lambda \rangle$. On dit que \widetilde{M} est un "remplissage de Dehn" de M ; le terme imagé de "chirurgie de Dehn" s'emploie quand M est elle-même obtenue en retirant un tore plein de bord C à une autre variété.

Théorème 8 [Th] *Soit M une variété (sans bord) de dimension 3, orientable, admettant une structure hyperbolique complète de volume fini. Alors M est difféomorphe à l'intérieur d'une variété compacte \overline{M} à bord, dont le bord est une union finie disjointe de tores incompressibles de dimension 2. De plus, si l'on effectue un remplissage de Dehn au niveau d'un ou plusieurs de ces tores, la variété obtenue admet toujours une structure hyperbolique complète de volume fini, à condition que l'on évite pour chaque tore un nombre fini de paramètres (p, q) interdits.*

3.1 Nœuds

Les complémentaires de nœuds et d'entrelacs ("nœuds" à plusieurs brins) dans des variétés compactes fournissent des variétés candidates à admettre une structure hyperbolique de volume fini (un tel complémentaire est bien difféomorphe à l'intérieur d'une variété compacte dont le bord est une union de tores). À cause du théorème 3 (qui promet des invariants topologiques), la théorie des nœuds et celle des variétés hyperboliques s'intéressent donc de près l'une à l'autre. Nous allons expliquer quels complémentaires de nœuds exactement admettent une structure hyperbolique.

Définition 9 *Soit K un nœud dans un tore plein T , non isotope à l'âme de T et tel qu'aucune boule plongée dans T ne contienne K . Si T est plongé dans \mathbb{S}^3 comme voisinage tubulaire d'un nœud non trivial Y , on dit que l'image de K par ce plongement est un nœud satellite de Y .*

Enfin, un nœud torique dans \mathbb{S}^3 est un nœud contenu dans le bord d'un tore plein plongé non noué.

Le nœud de trèfle, par exemple, est torique. La somme connexe de deux nœuds non triviaux K et K' , notée $K \# K'$, est satellite de K et de K' .

Théorème 10 *Si un nœud dans \mathbb{S}^3 n'est ni torique, ni satellite, son complémentaire est atoroidal et admet une métrique hyperbolique de volume fini.*

3.2 Fibrés sur \mathbb{S}^1

Une autre façon d'engendrer des variétés hyperboliques consiste à se donner une surface S obtenue en retirant un nombre fini de points à une surface compacte de genre g (au moins un point si $g = 1$, au moins trois si $g = 0$), puis à considérer un homéomorphisme direct $\varphi : S \rightarrow S$ (en fait seule la classe d'isotopie de φ importe).

On construit alors $M = S \times [0, 1] / \sim$ où la relation d'équivalence \sim est définie par $(\varphi(x), 0) \sim (x, 1)$ pour tout x de S . La variété M est souvent hyperbolique, au sens suivant.

Si S est un tore privé d'un point, φ est donné par un élément de $SL_2(\mathbb{Z})$: M admet une structure hyperbolique si et seulement si cet élément admet deux valeurs propres réelles distinctes. Si S est autre, on peut trouver dans la classe d'isotopie de φ un élément canonique ϕ (celui qui minimise l'entropie topologique) : M admet alors une structure hyperbolique si et seulement si ϕ est une application *pseudo-Anosov*, condition technique analogue à celle qui porte sur les valeurs propres, mais où les vecteurs propres (i.e. vecteurs invariants) sont remplacés par des *feuilletages mesurés* invariants (systèmes particuliers de courbes, globalement invariants, tracés sur la surface).

4 Directions de recherche

Le processus décrit à la section 2.1.3 pour calculer la structure hyperbolique d'une variété est grosso modo celui suivi par le programme SnapPea de Jeffrey Weeks [We] : le programme commence par trouver une *triangulation idéale* de la variété, i.e. une décomposition topologique en tétraèdres épointés ou "idéaux" du type de celle de Riley (figure 4 page 12) ; puis il recherche un système d'angles dièdres positifs (de somme 2π autour de chaque arête) ; enfin il modifie ce système d'angles de façon à obtenir une holonomie triviale. Lorsqu'il n'y parvient pas, il modifie la triangulation initiale selon une heuristique assez simple, et recommence. Le critère d'arrêt (échec de la recherche de la métrique) est lui aussi heuristique. Le programme a été testé de façon systématique sur toutes les familles de variétés dont on avait pu montrer qu'elles admettaient une métrique hyperbolique, et n'a jamais connu d'échec. Toutefois, on ne sait pas prouver que l'algorithme qu'il utilise (ni aucun autre) donne à tout coup la métrique quand elle existe, car tous les résultats généraux d'existence de métriques hyperboliques connus comportent des éléments non constructifs.

Dans l'article [Gu], j'examine sous quelles conditions existe P , un *polyèdre idéal* (dont les sommets sont à l'infini) possédant un système prescrit d'angles dièdres. Le problème revient à étendre le système d'angles à toute une triangulation de P en tétraèdres idéaux, tout en veillant à conserver (déjà ici) une holonomie triviale. Dans ce cas, on montre qu'il y a une solution avec holonomie triviale du moment que le système d'angles dièdres

prescrits sur P satisfait un certain nombre d'*inégalités affines*, ce qui fournit un critère purement combinatoire pour l'existence (ou non) de P . La solution, si elle existe, est unique à isométrie près, ce qui rappelle fortement le théorème 3.

Dans le cas d'une variété triangulée M (au lieu d'un polyèdre), la donnée initiale se limite à celle d'une triangulation topologique (il n'y a pas d'angles dièdres à imposer sur la frontière, faute de frontière). Pour donner un cadre conceptuel à la recherche effective de métriques hyperboliques on aimerait donc, là encore, ramener le problème de l'existence d'une solution avec holonomie triviale à la vérification de conditions combinatoires sur la triangulation. Ces conditions devront refléter les propriétés topologiques globales de M , en particulier les obstructions topologiques (hypothèses du théorème 7) à l'existence d'une métrique hyperbolique.

On est assez loin de disposer de telles conditions. L'article [La] propose certains critères suffisants, quantitatifs et formulables en termes de triangulations, pour qu'une variété obtenue par remplissage de Dehn admette un groupe fondamental hyperbolique au sens de Gromov — propriété qui fait pendant à l'hyperbolicité géométrique dans des formes plus faibles de la conjecture de géométrisation [Mo]. D'autres auteurs ([Hi], [Ka], [Ne]) emploient différentes techniques algébriques (quantification, déformation) pour extraire de l'information topologique de la donnée d'une triangulation, et retrouvent par exemple les équations d'holonomie en passant à la "limite classique". Ces techniques produisent de nouveaux invariants qu'une conjecture de [Ka] tente de relier au volume hyperbolique.

Références

- [BP] Riccardo Benedetti et Carlo Petronio, *Lectures on hyperbolic geometry*, Springer 1992
- [FLP] Albert Fathi, François Laudenbach, Valentin Poénaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astérisque **66-67**, 1979 et 1991
- [Gu] François Guéritaud, *On an elementary proof of Rivin's characterization of convex ideal polyhedra by their dihedral angles*, mémoire de D.E.A. (2002)
- [Hi] Kazuhiro Hikami, *Hyperbolic structure arising from a knot invariant*, arXiv :math-ph/0105039 v1 (2001)
- [Ka] Rinat M. Kashaev, *The hyperbolic volume of knots from quantum dilogarithm*, arXiv :q-alg/9601025 v2 (1996)
- [La] Marc Lackenby, *Word hyperbolic Dehn surgery*, *Inventiones Mathematicae* **140** (2000) 243-282
- [Mo] L. Mosher, *Geometry of cubulated manifolds*, *Topology* **34** (1995) 789-814

- [MT] Katsuhiko Matsuzaki et Masahiko Taniguchi, *Hyperbolic manifolds and Kleinian groups*, Oxford mathematical monographs, Clarendon Press, 1998
- [Ne] Walter D. Neumann, *Combinatorics of triangulations and the Chern-Simons invariant for hyperbolic 3-manifolds*, *Topology* **90** (1992) 243-272
- [Ot1] Jean-Pierre Otal, *Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3*, *Astérisque* **235**, Société mathématique de France (1996)
- [Ot2] Jean-Pierre Otal, *Thurston's hyperbolization of Haken manifolds*, *Surveys in Differential Geometry*, Vol. III (Cambridge, MA, 1996), International Press (1998), 77-194
- [Ri] Robert Riley, *Discrete parabolic representations of link groups*, *Mathematika* **22** (1975) 141-150
- [Th] William P. Thurston, *Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **6** (1982) 357-381
- [We] Jeffrey Weeks et al., *SnapPea* (programme informatique) Geometry Center, University of Minnesota (1990-1997)

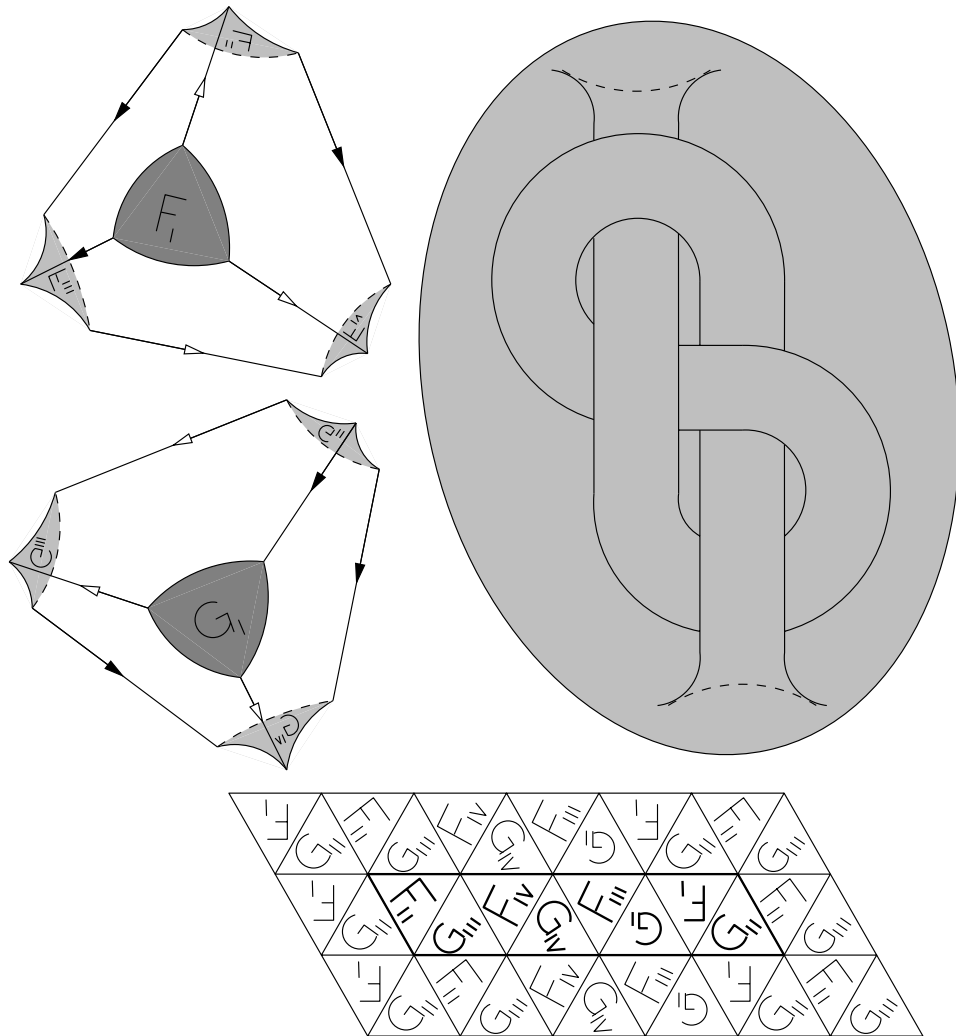


FIG. 4: *En déformant dans \mathbb{R}^3 les deux objets de gauche, sans déchirer, on peut coller chaque face blanche de celui du haut à une face blanche de celui du bas de façon à respecter la couleur et le sens des flèches. On obtient un compact dont le bord est l'union des faces grises, et qui est représenté à droite : c'est une boule traversée d'un tunnel qui se noue selon un nœud en huit. Le bord est intrinsèquement un tore, dont le développement plan est donné en bas avec un domaine fondamental en gras.*