

Géométrie tropicale

Alexandre Legrand & Charles Arnal

20 juin 2015

Résumé

Nous allons présenter les principes de base de la géométrie tropicale, suivant l'exposé qui en est fait dans [4] et [6], puis nous montrerons l'existence d'une relation de dualité entre les polynômes tropicaux et leur polytope de Newton. Nous prouverons ensuite les versions tropicales des théorèmes de Bézout et de Bernstein-Kushnirenko, avant d'évoquer le lien existant entre ces résultats et leurs équivalents en géométrie algébrique classique, dont nous donnerons également les énoncés.

Table des matières

1	Introduction et définitions	2
1.1	Opérations tropicales	2
1.2	Courbes et polynômes tropicaux	2
2	Théorème de dualité	4
2.1	Preliminaires	4
2.2	Enoncé et preuve du théorème	6
2.3	Compléments	8
3	Théorèmes de Bézout et de Bernstein tropicaux	10
3.1	Théorème de Bézout tropical, intersections simples	10
3.2	Théorème de Bézout tropical, intersections quelconques	12
3.3	Théorème de Bernstein tropical	16
4	Transition de \mathbb{R} à \mathbb{T}	18
4.1	Déquantification de Maslov	18
4.2	Exemple de la droite tropicale	18
4.3	Amibes complexes	19
5	Théorèmes de Bézout et de Bernstein classiques	20
5.1	Théorème de Bézout classique	20
5.2	Théorème de Bernstein classique	22

1 Introduction et définitions

Nous introduisons ici les définitions et objets de base de la géométrie tropicale dont nous ferons usage dans les sections à venir, suivant l'approche suivie chez [6].

1.1 Opérations tropicales

L'objet principal de notre étude sera l'ensemble des nombres tropicaux, $\mathbb{T} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, muni de l'addition et de la multiplication tropicales, qu'on dénotera par " + " et " \times ", ou simplement + et \times si aucune ambiguïté n'est possible. Elles sont définies comme suit :

$$"x + y" = \max(x, y), \quad "x \times y" = x + y.$$

On notera en particulier que ces opérations sont associatives et commutatives, et qu'il y a distributivité. L'élément neutre pour l'addition est $-\infty$, celui de la multiplication est 0. Tout $x \in \mathbb{T} \setminus \{-\infty\}$ admet un inverse multiplicatif, $-x$. Ces propriétés font qu'on appelle \mathbb{T} un *semi-corps*. Ce n'est toutefois pas un corps, car les éléments différents de $-\infty$ n'ont pas d'inverse additif. De plus, rajouter à l'ensemble de tels inverses rendrait l'addition non-associative; car pour $x \in \mathbb{R}$ on aurait :

$$" -\infty \stackrel{\text{def}}{=} x + (-x) = (x + x) + (-x) \neq x + (x + (-x)) \stackrel{\text{def}}{=} x + -\infty = x".$$

1.2 Courbes et polynômes tropicaux

Rappelons qu'on appelle $P \in \mathbb{R}[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_d, X_d^{-1}]$ (ou $P \in \mathbb{C}[X_1, X_1^{-1}, \dots, X_d, X_d^{-1}]$) un *polynôme de Laurent* en d variables; de tels polynômes ne sont en général définis que sur $(\mathbb{R}^*)^d$ (ou $(\mathbb{C}^*)^d$). Considérons le polynôme de Laurent réel :

$$P(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda_P} s_\lambda x^\lambda,$$

où Λ_P est un sous-ensemble fini de \mathbb{Z}^d , $x \in \mathbb{R}^d$, $s_\lambda \in \mathbb{R}$ et $x^\lambda = x_1^{\lambda_1} \dots x_d^{\lambda_d}$. On appellera *polytope de Newton* (respectivement *polygone de Newton* si $d = 2$) l'enveloppe convexe de Λ_P , notée $\text{Conv}(\Lambda_P)$.

Considérons maintenant le même polynôme, interprété au sens tropical. Pour $n \in \mathbb{Z}$, " x^n " = nx ; ce qui donne :

$$P(x) = " \sum_{\lambda \in \Lambda} s_\lambda x^\lambda " = \max_{\lambda \in \Lambda} \{s_\lambda + \lambda^\perp \cdot x\}, \quad (1)$$

où $\lambda^\perp \cdot x = \sum_{i=1}^d x_i \lambda_i$. On restreindra par la suite son ensemble de départ à \mathbb{R}^d , plutôt que \mathbb{T}^d , afin de simplifier un peu la formulation des définitions et affirmations. On verra alors P comme une fonction affine par morceaux de \mathbb{R}^d vers \mathbb{R} . Notons que deux polynômes différents peuvent définir la même fonction; on a par exemple :

$$"0 + x + x^2 = 0 + x^2" \quad \forall x \in \mathbb{T}.$$

Soit P le polynôme tropical de (1), et supposons $d \geq 2$. On appellera *courbe tropicale* associée à P (ou à la fonction $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ correspondant à P) l'ensemble C des $x \in \mathbb{R}^d$ tels qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_P$ distincts tels que :

$$P(x) = s_{\lambda_1} + \lambda_1^\perp \cdot x = s_{\lambda_2} + \lambda_2^\perp \cdot x,$$

i.e. l'ensemble des points au voisinage desquels P en tant que fonction n'est pas affine. On notera que de même que des polynômes distincts peuvent définir la même fonction, deux fonctions distinctes (définies par des polynômes tropicaux) peuvent donner la même courbe tropicale : on considèrera par exemple $\tilde{P}(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \tilde{s}_\lambda x^\lambda$, où pour tout λ on a posé $\tilde{s}_\lambda = s_\lambda + s$ avec $s \in \mathbb{R}$ fixé.

L'exemple non-trivial le plus simple est celui de la droite tropicale, définie par le polynôme $P(x, y) = "a + bx + cy" = \max(a, b + x, c + y)$. Elle est constituée des trois semi-droites classiques $\{a = b + x \geq c + y\}$, $\{a = c + y \geq b + x\}$ et $\{b + x = c + y \geq a\}$ et de leur point d'intersection, comme on le voit sur la figure 1.

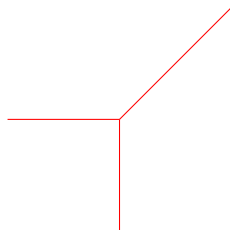


FIGURE 1 – Une droite tropicale

La figure 2, définie par le polynôme $"3 + 2x + 2y + 3xy + y^2 + x^2"$, donne un exemple plus complexe de courbe tropicale¹.

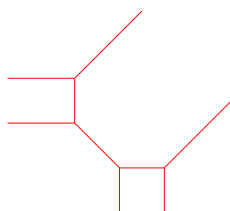


FIGURE 2 – Une conique tropicale

1. Image tirée de [4]

2 Théorème de dualité

Nous allons énoncer et prouver ici un important résultat de dualité entre une certaine subdivision du polytope de Newton d'un polynôme tropical et la courbe tropicale qu'il définit, en nous inspirant de l'approche suggérée chez [6]. Pour ce faire, quelques définitions et résultats intermédiaires nous seront nécessaires.

2.1 Préliminaires

Soit comme plus haut le polynôme tropical :

$$P(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} s_\lambda x^\lambda = \max_{\lambda \in \Lambda} \{s_\lambda + \lambda^\perp \cdot x\},$$

avec $x \in \mathbb{R}^d$ et Λ un sous-ensemble fini de \mathbb{Z}^d . On appellera C la courbe tropicale associée à P dans \mathbb{R}^d . On définit de plus Γ le graphe dans \mathbb{R}^{d+1} de la fonction :

$$\begin{aligned} s : \Lambda \subset \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\longmapsto s_\lambda, \end{aligned}$$

$\tilde{\Gamma}$ son enveloppe convexe et Γ^+ son enveloppe convexe supérieure, i.e. $\{a \in \tilde{\Gamma} : \forall b \in \tilde{\Gamma}, b_i = a_i \forall i \in \{1, \dots, d\} \Rightarrow b_{d+1} \leq a_{d+1}\}$. On appellera $A \subset \Gamma^+$ une *face* de Γ^+ s'il existe $a_1, \dots, a_n \in \Gamma$ tels que $A = \text{Conv}(a_1, \dots, a_n) \subsetneq \Gamma^+$ et si A est extrémal dans $\tilde{\Gamma}$, c'est-à-dire que si $b = \mu_1 c_1 + \mu_2 c_2 \in A$, où $c_1, c_2 \in \tilde{\Gamma}$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}_+$ et $\mu_1 + \mu_2 = 1$, alors $c_1, c_2 \in A$. On pose enfin Δ la projection sur \mathbb{R}^d des faces de Γ^+ . Notons que $\text{Conv}(\Delta) = \text{Conv}(\Lambda)$ est le polytope de Newton de P .

Lemme 2.1 (Existence d'un hyperplan de support). *Sous de telles hypothèses, pour toute face $A = \text{Conv}(a_1, \dots, a_n)$ de Γ^+ , il existe un hyperplan translaté $F \subset \mathbb{R}^{d+1}$ tel que $F \cap \Gamma^+ = A$ et tel que tous les points de Γ^+ soient du même côté de F .*

Démonstration. Posons $H = \text{Vect}(a_1 - a_2, \dots, a_1 - a_n)$, H^\perp son supplémentaire orthogonal dans \mathbb{R}^{d+1} , et Π la projection sur H^\perp le long de H . Si on appelle L l'enveloppe convexe des points de $\Gamma \setminus A$, on a :

$$\Pi(A) \notin \Pi(L).$$

En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait $b \in L \cap (A + H)$. Par extrémalité de A , on en déduit que $b \in A$, mais en utilisant à nouveau l'extrémalité, on trouve que les points de $\Gamma \setminus A$ dont la combinaison linéaire convexe donne b appartiennent également à A , d'où une contradiction. Ainsi $\Pi(A)$ et $\Pi(L)$ sont deux compacts disjoints de H^\perp . Par la version géométrique du théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire f et $\delta \in \mathbb{R}$ telle que $f(\Pi(A)) = \delta$, $f_{|\Pi(L)} < \delta$. En l'étendant à la somme directe $H \oplus H^\perp$ par $f_{|H} = 0$, on a une forme linéaire sur \mathbb{R}^{d+1} telle que A est contenu dans l'hyperplan translaté $\{f = \delta\}$ et les autres points de Γ , donc de Γ^+ , sont contenus dans $\{f < \delta\}$.

q.e.d.

Lemme 2.2. *Soit la forme affine :*

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto v^\perp \cdot y + l, \end{aligned}$$

où $l \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}^d$. Appelons C la courbe tropicale associée comme plus haut au polynôme tropical :

$$P(x) = \text{''} \sum_{\lambda \in \Lambda} s_\lambda x^\lambda \text{''},$$

et \tilde{C} celle associée à

$$\tilde{P}(x) = \text{''} \sum_{\lambda \in \Lambda} (s_\lambda - L(\lambda)) x^\lambda \text{''}.$$

Alors \tilde{C} est la translation de C par v .

Démonstration. Pour tout $\lambda \in \Lambda$, posons $f_\lambda(y) = s_\lambda + \lambda^\perp \cdot x$ pour tout $y \in \mathbb{R}^d$; on a $P(x) = \max_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x)$. \tilde{C} (respectivement C) est entièrement déterminée par le graphe de \tilde{P} (respectivement P). Or soit $x \in \mathbb{R}^d$: il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que pour tout $\mu \in \Lambda$,

$$\tilde{P}(x) = s_\lambda - L(\lambda) + \lambda^\perp \cdot x \geq s_\mu - L(\mu) + \mu^\perp \cdot x.$$

Supposons d'abord $l = 0$: on voit que pour tout $\mu \in \Lambda$,

$$s_\mu - L(\mu) + \mu^\perp \cdot x = s_\mu + \mu^\perp \cdot (x - v) = f_\mu(x - v),$$

d'où :

$$\tilde{P}(x) = f_\lambda(x - v) \geq f_\mu(x - v)$$

pour tout $\mu \in \Lambda$: ainsi $\tilde{P}(x) = P(x - v)$, et on conclut.

On en déduit le cas général en observant que le graphe de

$$P'(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (s_\lambda - l) x^\lambda$$

est la translation de celui de P par un vecteur vertical : les courbes tropicales qu'ils définissent, et qui sont égales à leurs projections le long de l'axe vertical, coïncident. q.e.d.

On appellera *polyèdre de dimension n* , pour $0 \leq n \leq d$, un ensemble non-vide défini par une famille finie d'égalités et d'inégalités affines, donc de la forme

$$X = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax = a, Bx \leq b\},$$

tel que $X' := \{x \in \mathbb{R}^d : Ax = a, Bx < b\} \neq \emptyset$ et tel que $Ax = a$ soit un espace affine de dimension n , où $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{l \times n}(\mathbb{R})$. La notation $Bx \leq b$ (respectivement $Bx < b$) signifie que chaque entrée du vecteur Bx doit être plus petite (respectivement strictement plus petite) que l'entrée correspondante de b .

Remarquons qu'un tel ensemble est convexe par convexité des contraintes le définissant. Notons de plus que dans le cas de l'enveloppe convexe d'une famille de points, la dimension de $\text{Conv}(a_1, \dots, a_n)$ est égale à celle de $\text{Vect}(a_1 - a_2, \dots, a_1 - a_n)$. Nous appliquerons cette

notion de polyèdre de dimension n aussi bien à des sous-ensembles de Δ qu'à des sous-ensembles de l'espace \mathbb{R}^d dans lequel C est inclu ; on appellera les premiers *faces*, et les seconds *zones*, afin de mieux les distinguer.

2.2 Énoncé et preuve du théorème

Théorème 2.3. *Considérons le polynôme tropical :*

$$P(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} s_{\lambda} x^{\lambda},$$

et reprenons les notations utilisées plus haut.

Pour tout $0 \leq n \leq d$, la fonction

$$\begin{aligned} \Psi : \{ \text{Faces de } \Delta \text{ de dimension } n \} &\longrightarrow \{ \text{Zones de } C \text{ de dimension } d - n \} \\ \text{Conv}(\lambda_{f_1}, \dots, \lambda_{f_m}) &\longmapsto \{ x : P(x) = f_i \ \forall i = 1, \dots, m \} \end{aligned}$$

qui associe à chaque face de Δ la zone de domination des formes affines

$$f_i(x) = s(\lambda_{f_i}) + \sum_{j=1}^d x_j (\lambda_{f_i})_j = s(\lambda_{f_i}) + \lambda_{f_i}^{\perp} \cdot x$$

auxquelles elle correspond est bien définie, et est une bijection. De plus, la dualité induite par cette famille de fonctions renverse la relation d'incidence.

Démonstration. Montrons tout d'abord que la fonction est bien définie : en effet, soit $A = \text{Conv}(\lambda_{f_1}, \dots, \lambda_{f_m})$ une face de Δ de dimension n (i.e. que $\dim(\text{Vect}(\lambda_{f_1} - \lambda_{f_2}, \dots, \lambda_{f_1} - \lambda_{f_n})) = n$), et A^+ la face de Γ^+ dont elle est la projection. On sait par le lemme 2.1 qu'il existe un hyperplan affine de support F tel que $F \cap \Gamma^+ = A^+$ et tel que tous les points de Γ^+ soient du même côté de F . Soit $L : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction affine dont F est le graphe. Comme montré dans le lemme 2.2, remplacer le polynôme tropical $P(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} s_{\lambda} x^{\lambda}$ par $\tilde{P}(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (s_{\lambda} - L(\lambda)) x^{\lambda}$ correspond à appliquer à C une translation ϕ , ce qui ne change pas ses propriétés géométriques, et ramène la face A^+ dans l'hyperplan de dernière coordonnée nulle ; tous les autres points de $\tilde{\Gamma}$ sont maintenant strictement en-dessous de cet hyperplan.

Afin d'alléger les notations, on adoptera dans ce qui suit la convention d'écriture

$$\{ x \in \mathbb{R}^d \mid \text{Condition}(x) \} = \{ \text{Condition} \},$$

i.e. on écrira par exemple $\{ P = f \}$ pour $\{ x \in \mathbb{R}^d \mid P(x) = f(x) \}$.

Au point $0 \in \mathbb{R}$, on a $\{ s(\lambda) 0^{\lambda} \} = s(\lambda)$ pour chaque $\lambda \in \Lambda$; les formes affines $f_i = s(\lambda_{f_i}) + \sum_{j=1}^d x_j (\lambda_{f_i})_j$ correspondant à la face A dominant donc strictement dans \tilde{P} en 0, i.e. $\tilde{P}(0) = s(\lambda_{f_i})$ pour tout $i = 1, \dots, m$. Ceci revient à dire qu'elles dominaient dans P en $\phi^{-1}(0)$, et donc dans un voisinage ouvert autour de $\phi^{-1}(0)$ par continuité. Ceci montre

que :

$$Z := \{P = f_i \forall i = 1, \dots, m\} = \\ \{f_1 = f_i \forall i = 2, \dots, m\} \cap \{f_1 > f_\lambda \forall \lambda \in \Lambda - \{\lambda_{f_1}, \dots, \lambda_{f_m}\}\} \neq \emptyset,$$

et même que $Z' := Z \cap \{f_1 > f_\lambda \forall \lambda \in \Lambda - \{\lambda_{f_1}, \dots, \lambda_{f_m}\}\} \neq \emptyset$.

Z est donc bien de la forme voulue, car :

$$Z = \{f_1 = f_i \ i = 2, \dots, m\} \cap \{f_1 \geq f_\lambda \forall \lambda \in \Lambda - \{\lambda_{f_1}, \dots, \lambda_{f_m}\}\} = \\ \left\{ \sum_{j=1}^d x_j ((\lambda_{f_1})_j - (\lambda_{f_i})_j) = s(\lambda_{f_i}) - s(\lambda_{f_1}) \ i = 2, \dots, m \right\} \cap \{f_1 \geq f_\lambda \forall \lambda \in \Lambda - \{\lambda_{f_1}, \dots, \lambda_{f_m}\}\} = \\ \{Mx = b\} \cap \{f_1 \geq f_\lambda \forall \lambda \in \Lambda - \{\lambda_{f_1}, \dots, \lambda_{f_m}\}\},$$

où $M_{kl} = (\lambda_{f_1})_l - (\lambda_{f_k})_l$ et $b_k = s(\lambda_{f_k}) - s(\lambda_{f_1})$ pour $k = 1, \dots, m$, $l = 1, \dots, d$.
 $Z' = \{x : Mx = b\} \cap \{f_1 > f_\lambda \forall \lambda \in \Lambda - \{\lambda_{f_1}, \dots, \lambda_{f_m}\}\}$ étant non-vide et $\{x : Mx = b\}$ étant de dimension $d - n = d - \dim(\text{Vect}(\lambda_{f_1} - \lambda_{f_2}, \dots, \lambda_{f_1} - \lambda_{f_n}))$, on retrouve bien la définition. Remarquons par ailleurs que l'espace affine de dimension $d - n$ contenant Z est le translaté de $\text{Vect}(\lambda_{f_1} - \lambda_{f_2}, \dots, \lambda_{f_1} - \lambda_{f_n})^\perp = \text{Ker}(M)$. En particulier, pour $d = 2$, chaque segment de Δ est perpendiculaire au segment ou à la demi-droite de C qui lui correspond, comme on le verra plus loin sur les quelques exemples donnés.

Considérons maintenant une zone

$$Z := \{P = f_i \forall i = 1, \dots, m\}$$

de C , pour une certaine famille de $\{f_i\}_{i=1}^m$ de fonctions affines telle que si $\mu \in \Lambda - \{\lambda_{f_1}, \dots, \lambda_{f_m}\}$, il existe $x \in Z$ tel que $P(x) > f_\mu(x)$ (la famille $\{f_i\}_{i=1}^m$ est en quelque sorte "exhaustive"). Appelons $\{\lambda_{f_i}\}_{i=1}^m \subset \Lambda$ les points leur correspondant, \tilde{f}_λ la forme linéaire telle que $f_\lambda = \tilde{f}_\lambda + s(\lambda)$, et donnons à M et b le même sens que plus haut.

Soit maintenant $\{\mu_j\}_{j=1}^k$ une énumération des éléments de $\Lambda - \{\lambda_{f_1}, \dots, \lambda_{f_m}\}$. On sait qu'il existe $x_1 \in Z$ tel que $f_{\mu_1}(x_1) < P(x) = f_1(x_1)$, donc par continuité qu'il existe un voisinage ouvert V_1 de x_1 dans $\{x : Mx = b\}$ tel que $f_{\mu_1} < f_1$ sur V_1 . Supposons que $f_{\mu_2} = f_1$ sur tout V_1 . On aurait alors que $\text{Ker}(M) \subset \text{Ker}(f_{\mu_2} - \tilde{f}_1)$, donc que $f_{\mu_2} = f_1$ sur tout $\{x : Mx = b\}$, ce qui entre en contradiction avec l'exhaustivité de $\{f_i\}_{i=1}^m$. On en déduit donc qu'il existe $x_2 \in V_1$ tel que $f_{\mu_2}(x_2) < f_1(x_2)$, et donc un voisinage ouvert V_2 de x_2 dans V_1 dans lequel cette inégalité reste stricte. Par récurrence finie, on trouve $x_k \in Z$ et V_k voisinage de x_k ouvert dans Z tel que $f_\mu < P$ sur V_k pour tout $\mu \in \Lambda - \{\lambda_{f_1}, \dots, \lambda_{f_m}\}$. On voit alors qu'en posant $n = d - \dim(\text{Ker}(M))$, Z est bien un polyèdre de dimension $d - n$. Considérons maintenant les points $\lambda_{f_1}, \dots, \lambda_{f_m}$, et montrons qu'ils définissent une face A de dimension n de Δ ; l'application associant Z à A sera alors bien définie, et on aura ainsi montré que Ψ admet un inverse, prouvant par là sa bijectivité.

En effet, et par le même raisonnement que celui mené plus haut, $\dim(\text{Vect}(\lambda_{f_1} - \lambda_{f_2}, \dots, \lambda_{f_1} - \lambda_{f_n})) = n$. De plus, en appliquant le lemme 2.2, on peut translater la courbe tropicale C de $-x_k$, ce qui revient à soustraire à $s : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction affine L . Alors les fonctions dominant avant translation en x_k seront celles dominant après translation en 0 : ce seront les f_λ où $s(\lambda) - L(\lambda)$ est maximum. Donc

$$s(\lambda_{f_i}) - L(\lambda_{f_i}) = s(\lambda_{f_1}) - L(\lambda_{f_1}) > s(\mu) - L(\mu) \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad \forall \mu \in \Lambda - \{\lambda_{f_1}, \dots, \lambda_{f_m}\}$$

et $\text{Conv}((\lambda_{f_1}, s(\lambda_{f_1}) - L(\lambda_{f_1})), \dots, (\lambda_{f_m}, s(\lambda_{f_m}) - L(\lambda_{f_m})) \subset \mathbb{R}^{d+1}$ forme bien une face de l'enveloppe convexe supérieure du graphe de $s-L$, donc $\text{Conv}((\lambda_{f_1}, s(\lambda_{f_1})), \dots, (\lambda_{f_m}, s(\lambda_{f_m})))$ est une face de Γ^+ par convexité de la forme affine L , et $\text{Conv}(\lambda_{f_1}, \dots, \lambda_{f_m})$ une face (de dimension n) de Δ après projection, ce qui montre que Ψ^{-1} est bien définie.

Le renversement de la relation d'incidence est clair par ce qu'on a déjà vu, puisque

$$\text{Conv}(\lambda_{f_1}, \dots, \lambda_{f_l}) \subseteq \text{Conv}(\lambda_{f_1}, \dots, \lambda_{f_m}),$$

est équivalent à ce que

$$\{P = f_i \ \forall i = 1, \dots, l\} \supseteq \{P = f_i \ \forall i = 1, \dots, m\},$$

pour autant que la liste des f_i et des λ_{f_i} soit exhaustive, c'est-à-dire que pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \in \text{Conv}(\lambda_{f_1}, \dots, \lambda_{f_l})$ ou $f_\lambda = P$ sur $\{P = f_i \ \forall i = 1, \dots, l\}$ impliquent $\lambda \in \{\lambda_{f_1}, \dots, \lambda_{f_l}\}$ (et de même pour $\{\lambda_{f_1}, \dots, \lambda_{f_m}\}$).

q.e.d.

Sur la figure 3², deux courbes C_1 et C_2 avec les partitions Δ_i de leur polygone de Newton leur correspondant (le coin en bas à gauche des Δ_i est $(0, 0) \in \mathbb{Z}^2$). C_1 est une droite, C_2 est la conique déjà présentée sur la figure 2.

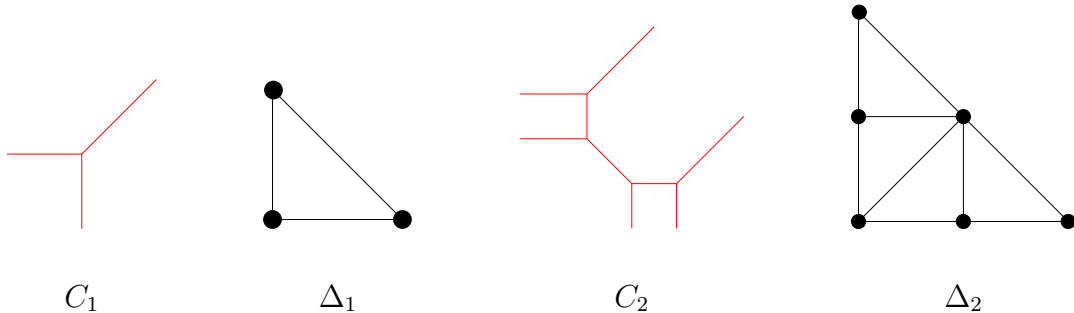


FIGURE 3 – Dualité

On notera que les segments de Δ sont bien envoyés sur des segments ou des demi-droites de C leur étant perpendiculaires. En particulier, la pente de chaque segment ou demi-droite d'une courbe tropicale en dimension 2 est rationnelle.

2.3 Compléments

On peut caractériser plus précisément la relation de dualité avec la proposition suivante, où on garde les notations du théorème 2.3.

Proposition 2.4. *Les zones de C de dimension plus grande ou égale à 1 non-bornées pour la norme euclidienne classique correspondent exactement aux faces situées sur l'enveloppe extérieure de Δ de dimension plus petite ou égale à $d - 1$.*

Prouvons d'abord le lemme suivant :

2. Image tirée de [4]

Lemme 2.5. *Tout polytope non borné dans \mathbb{R}^d*

$$H = \{x \in \mathbb{R}^d : Ax = a, Bx \leq b\},$$

où $b \in \mathbb{R}^l, a \in \mathbb{R}^m, A \in M_{m \times d}(\mathbb{R}), B \in M_{l \times d}(\mathbb{R})$, contient une demi-droite, i.e. qu'il existe $x_0 \in H$ et $v \in \mathbb{R}^d - \{0\}$ tels que $x_0 + \mathbb{R}_+v \subset H$, avec $Av = 0, Bv \leq 0$.

Démonstration. Fixons $x_0 \in H$ quelconque. Par hypothèse, pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $v_k \in \mathbb{R}^d$ tel que $x_0 + v_k \in H$ et $\|v_k\| \geq k$. Considérons maintenant la suite des vecteurs $\tilde{v}_k := \frac{v_k}{\|v_k\|}$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer par compacité de la boule unité dans \mathbb{R}^d qu'elle converge vers un vecteur $v \in \mathbb{R}^d$ de norme 1.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A(x_0 + v_k) = a = Ax_0$, d'où $v_k \in \text{Ker}(A)$, donc $\tilde{v}_k \in \text{Ker}(A)$ et par continuité $v \in \text{Ker}(A)$. De plus, supposons que $Bv \not\leq 0$. Il existe alors $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $B_i v > 0$, où B_i est la i -ème ligne de B . Mais alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_i \tilde{v}_k > \varepsilon$ pour tout k assez grand, donc $B_i v_k \rightarrow \infty$, ce qui est impossible car $B_i(x_0 + v_k) \leq b_i$ par définition de $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Ainsi v est tel que $A(x_0 + \lambda v) = Ax_0 = a, B(x_0 + \lambda v) \leq Bx_0 \leq b$ pour tout $\lambda > 0$, donc $x_0 + \mathbb{R}_+v \subset H$.

q.e.d.

Prouvons maintenant la proposition.

Démonstration. Soient $A = \text{Conv}(\lambda_{f_1}, \dots, \lambda_{f_m})$ une face de Δ (avec $\{\lambda \in A \cap \Lambda\} = \{\lambda_{f_1}, \dots, \lambda_{f_m}\}$), et Z la zone de C lui correspondant. Notons M_1 (respectivement M_2) la matrice dont les lignes sont les $\lambda_{f_1} - \lambda$ et b_1 (respectivement b_2) le vecteur dont les entrées sont les $s(\lambda) - s(\lambda_{f_1})$, pour $\lambda \in \{\lambda_{f_1}, \dots, \lambda_{f_m}\}$ (respectivement pour $\lambda \in \Lambda - \{\lambda_{f_1}, \dots, \lambda_{f_m}\}$). Comme exposé dans la preuve du théorème de dualité 2.3, Z peut s'écrire

$$Z = \{x \in \mathbb{R}^d : M_1 x = b_1, M_2 x \geq b_2\}.$$

Supposons d'abord que A est une face extérieure de Δ . La preuve du lemme 2.1 nous donne l'existence d'un hyperplan affine de support F , tel que $A \subset F$ et tel que tout Δ est du même côté de F . On peut donc choisir $f \in \mathbb{R}^d$ un vecteur non-nul perpendiculaire à F et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $F = \{x \in \mathbb{R}^d : f^\perp \cdot x = \alpha\}$ et que $\Delta \subset \{x \in \mathbb{R}^d : f^\perp \cdot x \leq \alpha\}$, quitte à remplacer f par son opposé.

Comme $\lambda_{f_1} \in A$, $f^\perp \cdot \lambda_{f_1} = \alpha$ et on en déduit que $f^\perp \cdot (\lambda_{f_1} - \lambda)$ est nul si $\lambda \in \{\lambda_{f_1}, \dots, \lambda_{f_m}\}$ et plus grand ou égal à 0 pour $\lambda \in \Lambda$ en général. Ainsi $M_1 f = 0$ et $M_2 f \geq 0$, d'où

$$x_0 + \mathbb{R}_+ f \subset Z,$$

pour tout $x_0 \in P$. Z n'est donc pas borné.

Supposons maintenant que Z ne soit pas borné. Le lemme 2.5 nous donne $v \in \mathbb{R}^d - \{0\}$ tel que $M_1 v = 0, M_2 v \geq 0$. Ceci est équivalent à ce que $v^\perp \cdot (\lambda_{f_1} - \lambda)$ soit nul (respectivement positif) pour tout $\lambda \in \{\lambda_{f_1}, \dots, \lambda_{f_m}\}$ (respectivement pour tout $\lambda \in \Lambda - \{\lambda_{f_1}, \dots, \lambda_{f_m}\}$). Si on pose $\alpha := v^\perp \cdot \lambda_{f_1}$, l'hyperplan affine $F := \{x : v^\perp \cdot x = \alpha\}$ contient la face A et on a $\Delta \subset \{x : v^\perp \cdot x \leq \alpha\}$; pour chaque $x \in A$ et $\mu > 0$, $v^\perp \cdot (x + \mu v) > \alpha$, donc $x + \mu v \notin \Delta$ et A est bien une face extérieure.

q.e.d.

On voit bien sur la courbe de la figure 4 la bijection entre faces extérieures de Δ et zones non-bornées de C^3 .

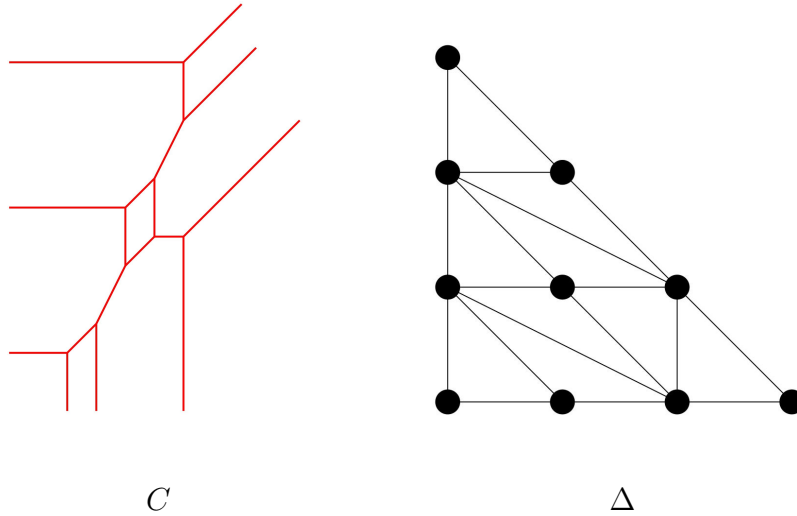


FIGURE 4 – Un exemple plus compliqué

Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ une courbe tropicale en dimension 2 et comme plus haut Δ son graphe dual. On définit la *longueur entière* d'un segment de Δ comme étant le nombre de points de \mathbb{Z}^d lui appartenant moins 1. On appellera par la suite *poids* d'un segment ou d'une demi-droite de C la longueur entière du segment de Δ lui correspondant.

3 Théorèmes de Bézout et de Bernstein tropicaux

L'objectif de cette partie est d'étudier les intersections de deux courbes tropicales dans \mathbb{R}^2 . Nous allons démontrer, en nous inspirant du traitement qui en est fait chez [4], que dans un cas simple, le nombre de points d'intersection est égal au produit des degrés des polynômes ; puis nous étendrons le résultat au cas général.

3.1 Théorème de Bézout tropical, intersections simples

On s'intéresse à un polynôme tropical en deux variables, à coefficients réels et tel qu'en reprenant les notations développées plus haut, on ait $\Delta_P = T_n := \{(k, l); k \geq 0, l \geq 0, k + l \leq n\}$:

$$P(x, y) = \sum_{(k,l) \in T_n} a_{k,l} x^k y^l.$$

On suppose donc que tous les monômes de degrés inférieurs à n apparaissent (avec des coefficients différents de $-\infty$). Les polynômes vérifiant ces propriétés seront appelés *complets de degré n* .

3. Image tirée de [4]

On note C sa courbe tropicale, et Π son polygone de Newton : c'est un triangle isocèle rectangle, de coté de longueur n . C'est en utilisant cette propriété que nous allons déduire le résultat annoncé.

Lemme 3.1. *Soient P_1 et P_2 deux polynômes tropicaux complets de degrés n_1 et n_2 respectivement. Alors la réunion de leurs courbes tropicales C_1 et C_2 est une courbe tropicale de degré $n_1 + n_2$ donnée par le polynôme tropical " $P_1 \times P_2$ ".*

Démonstration. Considérons la courbe tropicale C du polynôme " $P_1 \times P_2$ ". Cette courbe est de degré $n_1 + n_2$. Montrons qu'elle correspond à l'union des deux courbes C_1 et C_2 . Soit C'_1 le graphe du premier polynôme dans \mathbb{R}^3 . Considérons l'intersection de deux plans dominants " $a_{k_1, l_1} x^{k_1} y^{l_1}$ " et " $a_{k_2, l_2} x^{k_2} y^{l_2}$ " (qui donne une arête de C_1). Dans le graphe C' , les plans sont surélevés par la contribution du polynôme P_2 . Or, la partie dominante d'un graphe tropical dans \mathbb{R}^3 est convexe, ce qui signifie que le changement de domination ne peut être effacé par P_2 . Ainsi, cette arête apparaît également dans C' . On en déduit que les arêtes de C_1 et C_2 sont présentes dans C .

Inversement, une arête de C vient d'un changement de domination dans " $P_1 \times P_2$ ". S'il n'y a changement de domination dans aucun des deux polynômes, il ne peut y en avoir dans leur produit tropical. Donc toute arête de C est nécessairement présente dans C_1 ou C_2 .

q.e.d.

On remarque que deux courbes peuvent s'intersecter sur un sommet de l'une des deux, ou même avoir un segment en commun. Nous allons ignorer ces cas dans un premier temps, en disant que l'intersection est *simple* si elle ne contient qu'un nombre fini de points, et qu'aucun d'entre eux n'est sommet de l'une des deux courbes. La figure 5, tirée de [4], montre à gauche des exemples d'intersections non-simples, et à droite d'une intersection simple (celle d'une droite et de la conique de la figure 3).

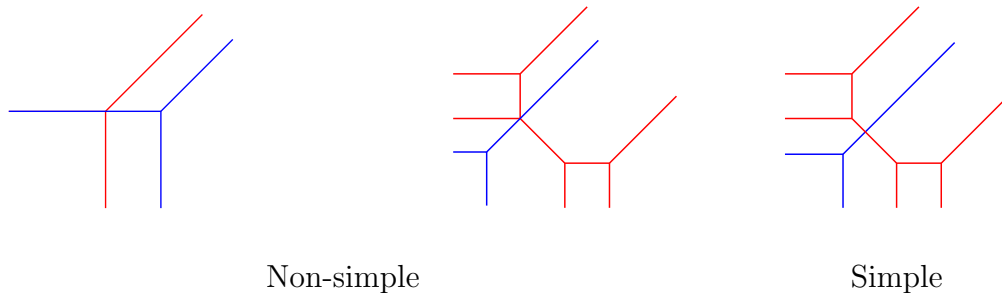


FIGURE 5 – Intersections de courbes tropicales

Soient deux courbes tropicales qui s'intersectent simplement. On définit la *multiplicité* d'un point d'intersection de ces courbes de la façon suivante : dans le graphe dual de la courbe union, ce point correspond à un polygone, plus précisément un parallélogramme. La multiplicité de l'intersection est définie comme étant l'aire du parallélogramme correspondant. En notant w_1, w_2 les poids des arêtes des courbes C_1 et C_2 s'intersectant, et en posant (a_1, b_1) et (a_2, b_2) leurs plus petits vecteurs directeurs à coordonnées entières, on

vérifie aisément par le théorème de dualité que cette aire vaut exactement :

$$w_1 w_2 |a_1 b_2 - a_2 b_1|.$$

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 3.2 (Bézout, intersections simples). *Soient C_1 et C_2 deux courbes tropicales, correspondants à des polynômes complets de degrés n_1 et n_2 , en position d'intersection simple. Alors la somme des multiplicités des intersections vaut $n_1 n_2$.*

Démonstration. Considérons les polygones Π_1, Π_2 , et Π correspondant à C_1, C_2 et $C_1 \cup C_2$ respectivement. Comme C_1 est définie par un polynôme complet de degré n_1 , Π_1 est un triangle isocèle rectangle de côté n_1 . Son aire totale est donc $\frac{n_1^2}{2}$. De même, Π_2 est d'aire $\frac{n_2^2}{2}$, et par le lemme 3.1 Π est d'aire $\frac{(n_1+n_2)^2}{2}$.

De plus, la subdivision de Π duale de C est composée exactement des polygones des subdivisions duales de C_1 et C_2 , auxquels on rajoute les parallélogrammes correspondants aux intersections, comme illustré sur la figure 6⁴. En notant a l'aire totale des parallélogrammes, a est égal à la somme des multiplicités des intersections ; et l'égalité des aires donne :

$$\frac{(n_1 + n_2)^2}{2} = \frac{n_2^2}{2} + \frac{n_1^2}{2} + a.$$

On en déduit alors $a = n_1 n_2$.

q.e.d.

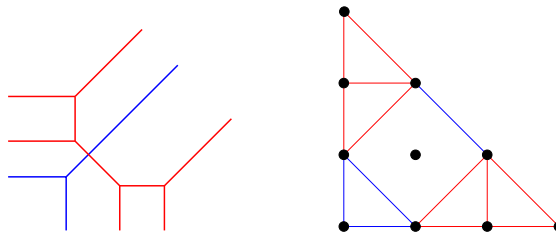


FIGURE 6 – Union des courbes et dual de l'union

Ce théorème, bien qu'intéressant, ne s'applique dans cette version qu'à des courbes tropicales confortablement choisies (polynômes complets et intersections simples). Pour généraliser ce résultat, nous allons d'abord nous intéresser aux intersections générales, en utilisant la notion de graphe *équilibré* ; et ensuite nous verrons le théorème de Bernstein, qui s'applique à des courbes tropicales issues de polynômes quelconques.

3.2 Théorème de Bézout tropical, intersections quelconques

Soit dans \mathbb{R}^2 un graphe affine par morceaux, à arêtes pondérées (i.e. qu'un poids, un scalaire réel, est attaché à chaque arête). On suppose que toutes les arêtes de ce graphe sont à pente rationnelle (c'est-à-dire qu'étant donné un vecteur directeur de cette arête

4. Tirée de [4]

exprimé dans le repère cartésien usuel, le quotient de ses deux coordonnées est rationnel). Considérons un sommet s de ce graphe, qui joint les arêtes e_1, \dots, e_n . Pour chaque arête, prenons l'unique vecteur directeur avec les coefficients entiers les plus petits possible (premiers entre eux), dans le sens fuyant le sommet; notons-les $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$. En notant w_1, \dots, w_n les poids de ces arêtes, le sommet s est dit *équilibré* si la condition suivante est vérifiée :

$$\sum_{k=1}^n w_k \vec{e}_k = 0.$$

Le graphe est dit *équilibré* si chaque sommet l'est.

Et c'est là que cette définition devient intéressante :

Théorème 3.3. *Les graphes équilibrés sont exactement les courbes tropicales*

Démonstration. L'implication directe n'étant pas nécessaire pour la suite, elle ne sera pas prouvée. Démontrons que les courbes tropicales avec les poids sont des graphes équilibrés. Considérons sur une courbe tropicale C un de ses sommets s , et les arêtes en partant e_1, \dots, e_n dirigées selon les vecteurs directeurs $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ (définis comme précédemment). Intéressons-nous à Δ dual à C .

En notant $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ la famille de vecteurs obtenue en effectuant une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ sur les $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, chacun des \vec{v}_i dirige le côté du polygone dual de s correspondant à l'arête dont \vec{e}_i est le vecteur directeur (par le théorème de dualité). De plus, les côtés du polygone sont exactement de longueur $w_1 \|\vec{v}_1\|, \dots, w_n \|\vec{v}_n\|$ par définition du poids d'une arête. Comme le polygone est un cycle fermé du plan, on a l'identité :

$$\sum_{k=1}^n w_k \vec{v}_k = 0$$

qui est préservée par rotation de $-\frac{\pi}{2}$; ce qui donne la relation souhaitée. La figure 7⁵ illustre l'idée de la preuve. q.e.d.



FIGURE 7 – Un sommet v d'une courbe tropicale et son polygone dual Δ_v

On voit donc que les courbes tropicales dans le plan sont équilibrées. À présent, nous pouvons effectuer la première généralisation.

5. Tirée de [4]

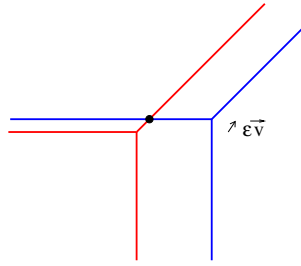


FIGURE 8 – Intersection de deux courbes après translation par un vecteur irrationnel

Considérons deux courbes tropicales (issues de polynômes complets) C_1 et C_2 , s'intersectant en un point s sommet de C_1 (remarquez que l'intersection peut avoir une infinité de points, comme illustré dans la figure 5). Soit (α, β) un vecteur irrationnel (i.e. $\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$). Alors pour $t > 0$ suffisamment petit, la courbe C_1 et la courbe C_2 translatée de $(t\alpha, t\beta)$, sont en position d'intersection simple (plus en s , mais avec de nouvelles intersections sur les arêtes issus de s), comme le montre la figure 8⁶. Le théorème de Bézout est donc vérifié. De plus, la propriété suivante nous assure que le résultat est indépendant du choix de vecteur :

Proposition 3.4. *Soient C_1, C_2 deux courbes tropicales (non nécessairement issues de polynômes complets) s'intersectant en un point s . Alors, pour tout vecteur irrationnel (α, β) , la translation de la courbe C_2 par $(t\alpha, t\beta)$ (où $t > 0$ suffisamment petit) donne une intersection simple des deux courbes. De plus, la somme des multiplicités des points d'intersection au voisinage de s est indépendante du vecteur (α, β) choisi et de t pour t suffisamment petit.*

Démonstration. D'abord, justifions que l'intersection est simple :

Une intersection non simple signifie qu'au moins un sommet d'une courbe est point d'intersection. Or il n'y a qu'un nombre fini de sommets pour chaque courbe. Ainsi, si l'intersection est déjà simple, toute translation selon un vecteur de norme suffisamment petite ne changera pas la nature de l'intersection ; et les points d'intersections seront caractérisés par les mêmes arêtes, donc par les mêmes directions et poids. Les multiplicités seront donc exactement les mêmes.

Si l'intersection n'est pas simple, considérons un point d'intersection contenant un sommet d'une courbe (éventuellement un de chaque). Alors le choix d'une direction irrationnelle assure que le vecteur n'est parallèle à aucune arête issue de n'importe quel sommet. Après translation par $(t\alpha, t\beta)$ où t assez petit, aucun sommet de C_2 ne peut encore intersecter une arête ou un sommet de C_1 , et l'intersection est bel et bien simple.

À présent, démontrons que les multiplicités sont indépendantes de $(t\alpha, t\beta)$. Elles sont indépendantes de t comme expliqué au premier paragraphe, tant que t assez petit. Pour montrer l'indépendance en (α, β) , considérons le cas d'une intersection sommet-arête. Soient $a_{k_1, l_1} x^{k_1} y^{l_1}, a_{k_2, l_2} x^{k_2} y^{l_2}$ les monômes de P_1 correspondant à l'arête de C_1 . D'après

6. Tirée de [4]

le théorème de dualité, l'arête a pour vecteur normal :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} k_1 - k_2 \\ l_1 - l_2 \end{pmatrix}.$$

Notons comme précédemment $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ les vecteurs directeurs des arêtes issues de s dans C_2 . Notons $\vec{e}_{i_1}, \dots, \vec{e}_{i_p}$ ceux qui vérifient $\langle \vec{e}_{i_k} | \vec{u} \rangle < 0$ et $\vec{e}_{j_1}, \dots, \vec{e}_{j_q}$ ceux qui vérifient $\langle \vec{e}_{j_k} | \vec{u} \rangle > 0$. On remarque que $\langle \vec{e}_k | \vec{u} \rangle = 0$ est parfaitement possible (cas d'une intersection infinie, si une des arêtes de C_2 est parallèle à l'arête de C_1), mais ces vecteurs ne nous intéresseront pas. En effet, lorsqu'on effectue la translation par (α, β) (que nous noterons $\vec{\alpha}$ pour clarifier les expressions), deux cas sont possibles : si $\langle \vec{\alpha} | \vec{u} \rangle > 0$, alors C_1 intersectera C_2 en les arêtes e_{j_1}, \dots, e_{j_q} . Et si $\langle \vec{\alpha} | \vec{u} \rangle < 0$, ce seront les arêtes e_{i_1}, \dots, e_{i_p} . On remarque que produit scalaire ne peut être nul, car le vecteur $\vec{\alpha}$ est irrationnel.

Plaçons-nous d'abord dans le cas $\langle \vec{\alpha} | \vec{u} \rangle < 0$. Alors pour chaque arête e_{i_k} , la multiplicité de l'intersection sera, d'après la définition :

$$w_1 w_{e_{i_k}} |\det(\vec{u}^\perp, \vec{e}_{i_k})| = w_1 w_{e_{i_k}} |\langle \vec{u} | \vec{e}_{i_k} \rangle|.$$

En effectuant la somme des multiplicités (en sachant que tous les produits scalaires ont même signe, donc que les valeurs absolues se somment) on obtient :

$$\left| \sum_{k=1}^p w_1 w_{e_{i_k}} \langle \vec{u} | \vec{e}_{i_k} \rangle \right|.$$

Dans le deuxième cas, on obtient de la même manière :

$$\left| \sum_{k=1}^q w_1 w_{e_{j_k}} \langle \vec{u} | \vec{e}_{j_k} \rangle \right|.$$

Cependant, le graphe est équilibré en s . Cela signifie que $\sum_{k=1}^n w_{e_k} \vec{e}_k = 0$, d'où

$$\sum_{k=1}^n w_{e_k} \langle \vec{u} | \vec{e}_k \rangle = 0.$$

De plus, les arêtes de C_2 parallèles à celle de C_1 ne contribuent pas à la somme. On peut donc séparer la somme et obtenir l'égalité :

$$\sum_{k=1}^p w_{e_{i_k}} \langle \vec{u} | \vec{e}_{i_k} \rangle = - \sum_{k=1}^q w_{e_{j_k}} \langle \vec{u} | \vec{e}_{j_k} \rangle.$$

D'où le résultat attendu :

$$\sum_{k=1}^p w_1 w_{e_{i_k}} |\langle \vec{u} | \vec{e}_{i_k} \rangle| = \left| \sum_{k=1}^p w_1 w_{e_{i_k}} \langle \vec{u} | \vec{e}_{i_k} \rangle \right| = \left| \sum_{k=1}^q w_1 w_{e_{j_k}} \langle \vec{u} | \vec{e}_{j_k} \rangle \right| = \sum_{k=1}^q w_1 w_{e_{j_k}} |\langle \vec{u} | \vec{e}_{j_k} \rangle|.$$

Le seul cas non traité ici est lorsque l'intersection est entre un sommet de C_1 et un sommet

de C_2 . La démonstration est similaire à celle effectuée précédemment, en effectuant le même travail sur chaque arête issue du sommet de C_1 ; puis en sommant sur celles-ci (il faut utiliser la linéarité du produit scalaire à droite pour C_2 , et à gauche pour C_1 , ainsi que les deux conditions d'équilibre).

q.e.d.

Cette proposition nous permet de définir rigoureusement les multiplicités des intersections non simples. En effet, pour $t \rightarrow 0$, la proposition montre que tous les points d'intersections tendent vers des limites indépendantes du vecteur (α, β) irrationnel choisi. Ces limites sont les *intersections stables* des deux courbes. On peut alors poser la *multiplicité* d'un point d'intersection stable comme étant la somme des multiplicités des points d'intersection simple (après translation par $(t\alpha, t\beta)$) dont il est la limite. Avec ces définitions, on formule une première généralisation du théorème de Bézout :

Théorème 3.5 (Bézout, intersections stables). *Soient C_1 et C_2 deux courbes tropicales, correspondants à des polynômes complets de degrés n_1 et n_2 . Alors la somme des multiplicités des points intersections stables vaut $n_1 n_2$.*

Ce théorème nous permet donc d'étudier toutes les intersections de courbes tropicales, à condition qu'elle soient issues de polynômes complets à coefficients réels. Dans le cas où certains monômes sont à coefficient $-\infty$ (c'est-à-dire qu'ils n'apparaissent pas dans le polynôme), le polygone de Newton associé à la courbe tropicale n'est pas forcément un triangle isocèle rectangle; par conséquent, l'identité de Bézout n'est plus valide, et il nous faut effectuer un travail supplémentaire pour obtenir un résultat semblable.

3.3 Théorème de Bernstein tropical

Pour pouvoir généraliser le théorème de Bézout, nous introduisons d'abord la notion de *volume mixte* de polytopes. Soient Π_1, \dots, Π_n des polytopes convexes de \mathbb{R}^n . On définit la *somme* (ou somme de Minkowski) des polytopes comme l'ensemble des $x_1 + \dots + x_n$, $x_i \in \Pi_i$. On remarque que c'est un polytope convexe également. De plus, cette somme va "contribuer" au volume total du polytope de différentes manières pour (x_1, \dots, x_n) parcourant $\Pi_1 \times \dots \times \Pi_n$, en valorisant alternativement les polytopes. Pour mieux comprendre le phénomène, donnons d'abord une première intuition en dimension 2 : soient $\Pi_1 = [0, 1]^2$ le carré unité et $\Pi_2 = \{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x + y \leq 1\}$ un triangle. On dessine ces polytopes, ainsi que leur somme, dans la figure 9 :

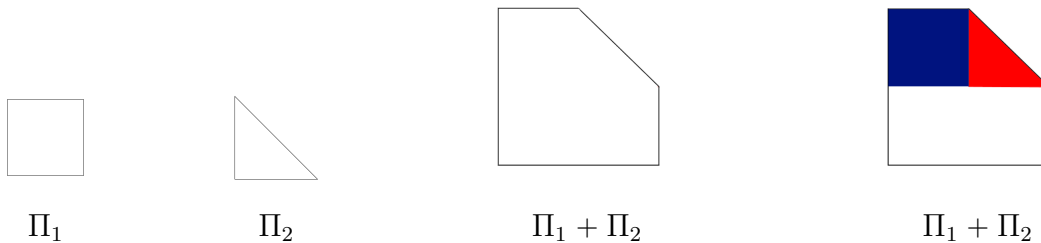


FIGURE 9 – Sommes de Minkowski

Si on pose $x_2 = (0, 1)$, et on fait varier x_1 dans Π_1 , alors $x_1 + x_2$ parcourt l'aire colorée en bleu (représentée sur l'image d) de la figure 9). Si on pose $x_1 = (1, 1)$, et on fait varier x_2 dans Π_2 , alors $x_1 + x_2$ parcourt l'aire colorée en rouge. Ainsi, ces "parties" du polytope peuvent s'exprimer uniquement à partir de Π_1 et Π_2 respectivement, en fixant un point dans l'autre (on reconnaît les deux figures dans la grande). En revanche, la totalité de l'aire ne s'exprime pas comme somme des aires des polytopes : il y a un "excédent d'aire". Ce surplus correspond à l'*aire mixte* des polytopes, qui s'écrit en dimension 2 : $\text{Vol}(\Pi_1 + \Pi_2) - \text{Vol}(\Pi_1) - \text{Vol}(\Pi_2)$.

On remarque cependant qu'il n'est pas "localisé" dans Π : en effet, au sein des parties colorées de l'image 4, et même partout dans le polytope (excepté aux bords), les points peuvent être écrits de nombreuses manières différentes comme $x_1 + x_2$, en faisant varier x_1 et x_2 dans Π_1 et Π_2 . Par conséquent, il ne fait pas sens de vouloir identifier directement des régions de Π par rapport aux formes de Π_1 et Π_2 (même si elles peuvent être reconnues). En dimension quelconque n , le volume mixte d'une famille de n polytopes Π_1, \dots, Π_n est défini de la façon suivante : on considère $\text{Vol}(\lambda_1\Pi_1 + \dots + \lambda_n\Pi_n)$ comme fonction des variables $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. C'est une fonction polynomiale de degré n (voir [8] pour une démonstration).

Définition 3.6. Le coefficient du monôme en $\lambda_1 \dots \lambda_n$ dans le polynôme $\text{Vol}(\lambda_1\Pi_1 + \dots + \lambda_n\Pi_n)$ est appelé *volume mixte* des polytopes Π_1, \dots, Π_n .

En dimension 2, cette grandeur vaut exactement $\text{Vol}(\Pi_1 + \Pi_2) - \text{Vol}(\Pi_1) - \text{Vol}(\Pi_2)$. Il est alors possible de généraliser le théorème de Bézout vu en dimension 2, pour des courbes dont les polygones duaux ne sont pas des triangles isocèles rectangles.

En effet, si on regarde la réunion C de deux courbes tropicales C_1 et C_2 quelconques, on remarque que le polygone dual Π de l'union est exactement la somme des polygones duaux des deux courbes (la preuve est très similaire à celle de 3.1). De plus, comme la subdivision duale de C est constituée des polygones des subdivisions duales de C_1 et C_2 , auxquels on rajoute les parallélogrammes des intersections, on voit que la somme des multiplicités correspond bien à la différence d'aires $\text{Vol}(\Pi_1 + \Pi_2) - \text{Vol}(\Pi_1) - \text{Vol}(\Pi_2)$. Or cet excédent d'aire est exactement l'aire mixte des polytopes, donc il y a égalité entre l'aire mixte et la somme des multiplicités des intersections. Ce qui est résumé par le théorème suivant :

Théorème 3.7 (Bernstein, énoncé tropical). *Soient C_1, C_2 des courbes tropicales quelconques, de polygones duaux Π_1, Π_2 . Alors la somme des multiplicités des points d'intersections stables des deux courbes est exactement l'aire mixte des deux polygones.*

Ce théorème très puissant a le mérite de couvrir tous les cas de courbes et d'intersections, mais aussi de pouvoir se formuler en dimension n quelconque : en effet, en étendant les définitions de *multiplicité d'intersection* et *intersection stable* aux dimensions supérieures, cet énoncé peut se réécrire de manière encore plus générale (voir [8] par exemple).

4 Transition de \mathbb{R} à \mathbb{T}

Le lecteur pourrait soupçonner la géométrie tropicale de n'être que simples jeux d'esprits, où l'on change notre algèbre pour faire de beaux dessins et avoir des propriétés élégantes sur des objets très particuliers. Ce qui va rendre la géométrie tropicale vraiment intéressante, c'est la possibilité de la relier à la géométrie algébrique classique ; et de faire un lien entre les théorèmes que nous avons énoncés ici, et leurs formulations analogues en géométrie algébrique.

4.1 Déquantification de Maslov

L'algèbre tropicale, ou algèbre max-plus, apparaît naturellement comme limite d'une famille de semi-corps. En effet, considérons les opérations suivantes sur \mathbb{T} , où t est un réel strictement supérieur à 1 :

$$\begin{aligned} a +_t b &:= \log_t(t^a + t^b) \\ a \cdot_t b &:= a + b \end{aligned}$$

Ces deux opérations sur \mathbb{T} lui donnent une structure de semi-corps. Il est isomorphe à \mathbb{R}_+ , par l'application $a \mapsto \log_t(a)$ pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, et $0 \mapsto -\infty$. De plus, on remarque que l'inégalité évidente dans \mathbb{R}_+ : $\max(a', b') \leq a' + b' \leq 2 \max(a', b')$; devient dans \mathbb{T} :

$$\max(a, b) \leq a +_t b \leq \max(a, b) + \log_t(2)$$

par croissance du logarithme ; ce qui signifie, pour $t \rightarrow +\infty$, qu'on obtient $a +_{+\infty} b = \max(a, b)$.

Ainsi, le semi-corps $(\mathbb{T}, \max, +)$ peut être vu comme limite de semi-corps isomorphes à $(\mathbb{R}_+, +, \cdot)$. Ce procédé s'appelle *déquantification de Maslov*, et établit un lien entre géométries algébrique et tropicale.

4.2 Exemple de la droite tropicale

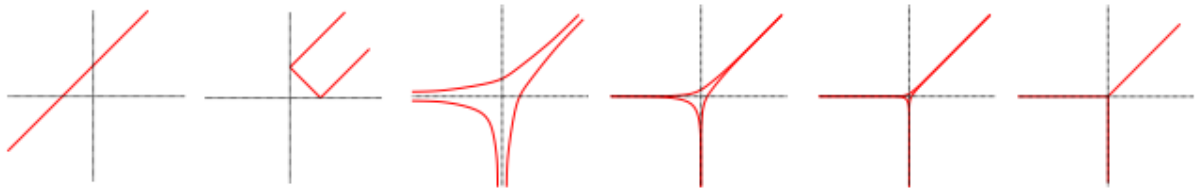


FIGURE 10 –

Maintenant, observons ce procédé appliqué à une équation de droite simple $x - y + 1 = 0$ dans \mathbb{R}^2 (image 1 de la figure 10⁷). Pour pouvoir appliquer le logarithme, il nous faut considérer les valeurs absolues des coordonnées : la droite devient affine par morceaux, contenue dans le cadran supérieur droit du plan (image 2). Puis, en effectuant le changement de

7. Tirée de [4]

coordonnées $x \rightarrow \log_t(x)$ de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} , on obtient la courbe de l'image 3. Comme ce changement de coordonnées revient à prendre le logarithme népérien, et à rééchelonner par $\frac{1}{\ln t}$, les trois composantes de cette courbe se contractent autour de l'origine quand t augmente (images 4 puis 5); et, dans la limite $t \rightarrow +\infty$ la courbe se transforme en une droite tropicale (image 6)!

4.3 Amibes complexes

Ce procédé de déquantification peut aussi s'appliquer à des courbes complexes. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, définissons un "logarithme" Log_t sur $(\mathbb{C}^*)^2$, de la façon suivante;

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}^*)^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (z, w) &\mapsto (\log_t|z|, \log_t|w|) \end{aligned}$$

Alors l'image d'une courbe algébrique dans $(\mathbb{C}^*)^2$ par cette application est appelé une *amibe*. Par exemple⁸, la courbe complexe définie par $z + w + 1 = 0$ a pour image l'amibe de la figure 11; qui se forme autour de trois directions $(0, -1)$, $(-1, 0)$ et $(1, 1)$. De plus, on rappelle que le logarithme en base t est une contraction du logarithme népérien par $\frac{1}{\ln t}$; et donc, pour $t \rightarrow +\infty$, la courbe se contracte jusqu'à devenir une droite tropicale.

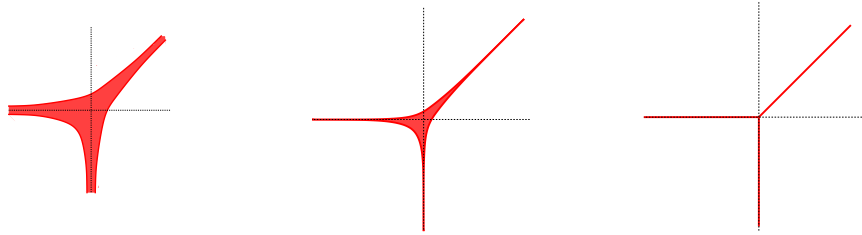


FIGURE 11 – Déquantification d'une courbe complexe

Ce résultat peut s'appliquer à n'importe quelle courbe classique pour obtenir un résultat similaire à la limite. Mais il peut aussi s'appliquer à une famille de courbes : par exemple, en notant $(C_t)_{t>1}$ la famille de courbes d'équation $1 - z - w + t^2 z^2 + t^2 w^2 - t z w = 0$, alors leur images par Log_t tend vers une conique tropicale (figure 12).

Ce résultat est compris dans le théorème suivant :

Théorème 4.1. *Soit $P_t(z, w) = \sum_{i,j \in \Lambda} \alpha_{i,j}(t) z^i w^j$ une fonction polynomiale, dont les coefficients sont des fonctions $\alpha_{i,j} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui vérifient $\alpha_{i,j}(t) \sim_{+\infty} \beta_{i,j} t^{\gamma_{i,j}}$ avec $\beta_{i,j}, \gamma_{i,j}$ des constantes (respectivement complexes non-nulles et réelles). Alors, en notant C_t la courbe de P_t dans $(\mathbb{C}^*)^2$, l'amibe $\text{Log}_t(C_t)$ converge pour $t \rightarrow +\infty$ vers la courbe tropicale définie par le polynôme (tropical) $P(x, y) = \sum_{i,j \in \Lambda} \gamma_{i,j} x^i y^j$.*

Ainsi, il est possible d'obtenir n'importe quelle courbe tropicale par cette transformation à partir de courbes algébriques bien choisies. De plus, cette transformation vérifie une propriété très intéressante : elle "conserve" les points d'intersections.

8. Les deux exemples donnés ici et les images les illustrant sont tirés de [3]

 $\text{Log}_t(C_t)$ $\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{Log}_t(C_t)$ FIGURE 12 – $C_t : 1 - z - w + t^{-2}z^2 - t^{-1}zw + t^{-2}w^2 = 0$

En effet, considérons deux familles de polynômes $(P_t(z, w))$ et $(P'_t(z, w))$ et les courbes algébriques C_t et C'_t leur étant associées. Alors d'après le théorème 4.1, elles induisent deux polynômes tropicaux $P(x, y)$ et $P'(x, y)$, de courbes C et C' . On a la propriété suivante :

Proposition 4.2. *Soit $s \in C \cap C'$ un point d'intersection de multiplicité m . Alors il existe exactement m points de $C_t \cap C'_t$ qui convergent vers s pour $t \rightarrow +\infty$.*

On remarque notamment que ce résultat ne dépend que de l'ordre à l'infini des P_t (c'est à dire de la famille $\gamma_{i,j}$ avec les notations précédentes).

Mais cette propriété permet surtout d'obtenir (quoique la preuve n'en soit pas triviale) les théorèmes de Bézout et de Bernstein tels qu'on les retrouve en géométrie algébrique classique (i.e. non-tropicale), dont nous donnerons les énoncés dans la section suivante, ainsi que les définitions permettant de leur donner un sens satisfaisant.

5 Théorèmes de Bézout et de Bernstein classiques

Nous ne nous attarderons pas sur les notions d'algèbre rencontrées dans cette section ; davantage de détails peuvent être trouvés dans [7].

5.1 Théorème de Bézout classique

Commençons par considérer un corps K et l'anneau des polynômes à deux variables sur K , noté $K[X, Y]$. Un polynôme $P = P(X, Y) \in K[X, Y]$ est dit *homogène* si tous ses monômes sont de même degré.

Étant donné

$$P(X, Y) = \sum_{i+j \leq n} c_{i,j} X^i Y^j \in K[X, Y]$$

un polynôme quelconque dont le monôme de plus haut degré est de degré n , notons

$$P_h(X, Y, Z) := \sum_{i+j \leq n} c_{i,j} X^i Y^j Z^{n-i-j} \in K[X, Y, Z]$$

le polynôme homogénéisé en trois variable lui correspondant, et étudions les racines d'un tel polynôme. Remarquons que $P_h(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n P_h(x, y, z)$ pour tous $\lambda \in K$ et $x, y, z \in K$, et donc en particulier que $P_h(0, 0, 0) = 0$. On voit qu'il peut être intéressant de considérer les racines de P_h non pas dans K^3 , mais dans l'espace projectif $\mathbb{P}K^2$, le quotient de $K^3 - 0$ par la relation d'équivalence $(x, y, z) \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ avec $\lambda \in K^*$, puisque tout multiple d'une racine par un scalaire est également racine. De plus $(x, y) \in K^2$ est une racine au sens classique de P si et seulement si $(x, y, 1) \in \mathbb{P}K^2$ est racine projective de P_h , et si on identifie la droite projective $\{z = 0\} \subset \mathbb{P}K^2$ aux points à l'infini de K^2 , les racines de P_h ne pouvant s'écrire sous la forme $(x, y, 1) \in \mathbb{P}K^2$ correspondent à des points à l'infini pour K^2 . Le polynôme réel

$$P(X, Y) = X^2 - Y$$

admet par exemple une racine à l'infini correspondant à la droite $\{x = 0\} \subset \mathbb{R}^2$, qui correspond à la racine projective $(0, 1, 0) \in \mathbb{P}K^2$ de $P_h(X, Y, Z) = X^2 - YZ$. Remarquons enfin que si on note \overline{K} la clôture algébrique de K , ce qui précède tient encore si on considère les racines de P (respectivement de P_h) dans \overline{K}^2 (respectivement dans $\mathbb{P}\overline{K}^2$), ce qu'on fera dans ce qui suit.

Considérons maintenant $P, Q \in K[X, Y]$ de degrés respectifs n et m n'ayant pas de facteur irréductible commun dans $\overline{K}[X, Y]$ (qui est un anneau factoriel), et remarquons que P_h et Q_h n'en auront pas non plus dans $\overline{K}[X, Y, Z]$. En effet, supposons que f soit un tel facteur, i.e. $P_h = pf, Q_h = qf$ avec $p, q, f \in \overline{K}[X, Y, Z]$. On aura

$$P(X, Y) = P_h(X, Y, 1) = p(X, Y, 1)f(X, Y, 1)$$

et de même pour Q . Par hypothèse Q et P n'ont pas de facteurs communs, donc $f(X, Y, 1) \in K$, i.e. $f = f[Z] \in \overline{K}[Z]$. N'importe quel monôme de degré total n en X, Y apparaissant dans P sera aussi dans p à multiplication par un scalaire près, et apparaîtra donc dans P_h avec un degré total strictement supérieur à n si $f \in \overline{K}[Z] - \overline{K}$, ce qui entre en contradiction avec la construction de P_h . On en déduit donc que f est un scalaire et que la factorisation est triviale, ce qui permet de conclure.

Soit $a = (x, y, z) \in \mathbb{P}\overline{K}^2$ de P_h et de Q_h et notons

$$O_a := \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in \overline{K}[X, Y, Z], g(a) \neq 0 \right\}$$

l'anneau $\overline{K}[X, Y, Z]$ localisé en a . On définira la *multiplicité* de l'intersection des courbes $P_h = 0$ et $Q_h = 0$ en a (correspondant à une intersection de P et Q , potentiellement en un point à l'infini si $a_z = 0$), comme la dimension de $O_a/(P, Q)$ en tant que \overline{K} -espace vectoriel, où (P, Q) dénote l'idéal engendré par P et Q dans O_a .

On notera que si a n'est pas racine d'un des polynômes, disons P sans perdre de généralité, alors P est inversible dans O_a , donc $(P, Q) = O_a$, le quotient $O_a/(P, Q)$ est trivial et la multiplicité nulle. À l'inverse, si a est racine commune de P et de Q , $1 \notin (P, Q)$, car sinon il existerait $f, g \in O_a$ tels que $P \cdot f + Q \cdot g = 1$ et on aboutirait à une contradiction en évaluant cette expression en a (bien défini par définition de O_a). Le quotient $O_a/(P, Q)$ n'est donc pas trivial et la multiplicité est strictement positive.

Une fois ces bases jetées, on peut énoncer le théorème de Bézout algébrique comme suit :

Théorème 5.1 (Bézout). *Soient deux polynômes $P, Q \in K[X, Y]$ comme ci-dessus. Alors P_h et Q_h ont exactement $n \cdot m$ racines communes dans $\mathbb{P}\overline{K}^2$, comptées avec leur multiplicité.*

Grâce aux observations faites plus haut quant aux liens unissant les racines projectives de P_h et les racines usuelles de P , on en déduit également que les polynômes P et Q ont au plus $m \cdot n$ racines communes dans K^2 .

On trouvera une preuve géométrique de ce théorème chez [2], et une autre preuve s'appuyant sur un algorithme de division euclidienne en plusieurs variables permettant de trouver explicitement les racines communes chez [5].

5.2 Théorème de Bernstein classique

Le théorème de Bernstein⁹, proche de celui de Bézout, donne sous certaines conditions le nombre d'intersections communes dans $(\mathbb{C}^*)^n$ d'une famille de n polynômes de Laurent complexes en n variables (on rappelle que de tels polynômes ne sont en général pas définis sur tout \mathbb{C}^n).

Soient $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_n\}$ une famille de sous-ensembles finis de \mathbb{Z}^n , et notons $L(\Lambda_i)$ l'ensemble des polynômes de Laurent dont $Conv(\Lambda_i)$ est le polytope de Newton, i.e. des polynômes de la forme

$$P_i(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda_i} s_{i,\lambda} x^\lambda.$$

On dira d'une propriété portant sur les n -tuples $\{(P_1, \dots, P_n) \in L(\Lambda_1) \times \dots \times L(\Lambda_n)\}$ qu'elle est vraie pour (P_1, \dots, P_n) choisis *génériquement* s'il existe un polynôme non nul Q en les coefficients $s_{i,\lambda}$ tel que la propriété est vérifiée pour tous $(P_1, \dots, P_n) \in L(\Lambda_1) \times \dots \times L(\Lambda_n)$ dont les coefficients n'annulent pas Q . Le théorème de Bernstein s'énonce alors comme suit :

Théorème 5.2 (Bernstein). *Soient $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_n\}$ une famille de sous-ensembles finis de \mathbb{Z}^n et $(P_1, \dots, P_n) \in L(\Lambda_1) \times \dots \times L(\Lambda_n)$ n'ayant qu'un nombre fini de zéros communs dans $(\mathbb{C}^*)^n$. Alors ce nombre est borné supérieurement par le volume mixte des $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_n\}$, et il y a égalité pour (P_1, \dots, P_n) choisis génériquement.*

9. Initialement exposé et prouvé dans [1]

Références

- [1] David BERNSTEIN : The number of roots of a system of equations. *Funct. Anal. Appl.*, 9:183–185, 1975.
- [2] Egbert BRIESKORN et Horst KNÖRRER : *Plane Algebraic Curves*. Birkhauser, 1986.
- [3] Erwan BRUGALLÉ, Ilya ITENBERG, Grigory MIKHALKIN et Kristin SHAW : Brief introduction to tropical geometry. *In Proceedings of 21st Gökova Geometry-Topology Conference*, 2014.
- [4] Erwan BRUGALLÉ et Kristin SHAW : A bit of tropical geometry. *Amer. Math. Monthly* 121, pages 563–589, 2014.
- [5] Jan HILMAR et Chris SMYTH : Euclid meets bezout : Intersecting algebraic plane curves with the euclidian algorithm. 2009.
- [6] Ilya ITENBERG : Introduction à la géométrie tropicale. *In Géométrie tropicale*, pages 1–25. Editions de l’Ecole Polytechnique, 2008.
- [7] Jan NEKOVÁR : *Algèbre 2*. ENS, Paris, 2015.
- [8] Bernd STURMFELS et Diane MACLAGAN : *Introduction to Tropical Geometry*, volume 161 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 2015.