

Géométrie Différentielle
Notes de cours

Olivier Biquard

Table des matières

I	Variétés différentielles	9
1	Variété	9
1.a	Atlas	9
1.b	Topologie induite par un atlas	10
1.c	Variété	11
1.d	Exemples	12
2	Morphismes	13
3	Application tangente	15
3.a	Vecteur tangent	15
3.b	Application tangente	16
3.c	Inversion locale	17
4	Submersions	17
4.a	Forme normale des submersions	17
4.b	Image réciproque d'un point par une submersion, sous-variétés . .	18
4.c	Théorème de Sard	20
5	Immersion, plongements	21
5.a	Forme normale des immersions	21
5.b	Théorème du rang constant	22
5.c	Plongements	23
5.d	Groupes de Lie	24
6	Quotients	24
6.a	Aspects topologiques	25
6.b	Aspects différentiels	25
6.c	Exemples	27
7	Partitions de l'unité	29
8	Théorème de Sard et applications	31
8.a	Démonstration du théorème de Sard pour $n \leq p$	31
8.b	Le théorème de Whitney	32
II	Champs de vecteurs	35
9	Fibré tangent, champs de vecteurs	35
9.a	Le vocabulaire des fibrés	35
9.b	Fibré tangent	37

9.c	Champs de vecteurs	37
9.d	Exercices (fibré normal et voisinage tubulaire)	38
10	Champs de vecteurs et dérivations	39
10.a	Dérivations	39
10.b	Démonstration du théorème 10.2	41
10.c	Conséquences	42
10.d	Algèbre de Lie d'un groupe de Lie	43
11	Flots	44
11.a	Existence locale et unicité	44
11.b	Solution maximale	45
11.c	Exercices	46
12	Classification des variétés de dimension 1	47
12.a	Une cubique	47
12.b	La classification	48
12.c	Notion de métrique riemannienne	48
12.d	Fin de la démonstration du théorème 12.1	49
13	Exponentielle dans les groupes de Lie	50
14	Fibrations	51
15	Flot et crochet, dérivée de Lie	53
16	La représentation adjointe d'un groupe de Lie	55
III Formes différentielles		57
17	Le fibré des formes différentielles	57
17.a	Rappels sur l'algèbre extérieure	57
17.b	Fibrés associés à un fibré vectoriel	58
17.c	Formes différentielles	60
17.d	Image réciproque	60
18	Différentielle extérieure	61
18.a	Dérivation de degré r	61
18.b	Différentielle extérieure	62
18.c	Formule de Maurer-Cartan	65
18.d	Formule de Cartan	65
19	Intégration sur les variétés	66
19.a	Orientation d'une variété	66
19.b	Variété à bord	69
19.c	Intégration	71
19.d	Formule de Stokes	72
19.e	Applications	73
19.f	Exercices	73
20	Cohomologie de De Rham	74
20.a	Définitions	74
20.b	Invariance par homotopie	75

20.c	Approximation continue	76
20.d	Suite exacte de Mayer-Vietoris	77
20.e	Finitude des nombres de Betti	79
20.f	Action d'un groupe compact connexe	80
20.g	Cohomologie des groupes et algèbres de Lie	83
20.h	Exercices	85
21	Degré	86
21.a	Cohomologie à support compact	86
21.b	Degré	87
21.c	Indice d'un zéro isolé d'un champ de vecteurs	89
IV	Surfaces	91
22	Théorie élémentaire des surfaces	91
22.a	Première forme fondamentale	91
22.b	Application de Gauss et seconde forme fondamentale	91
22.c	Le théorème Egregium de Gauss	93
22.d	Exercices	95
23	Théorème de Gauss-Bonnet	96

Bibliographie

BREDON, G. E. 1997, *Topology and geometry*, Berlin : Springer, xiv + 557 p.. URL <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-6848-0>, corrected reprint of the 1993 original.

HIRSCH, M. W. 1994, *Differential topology, Graduate Texts in Mathematics*, vol. 33, Springer-Verlag, New York, ISBN 0-387-90148-5, x+222 p.. URL <https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9449-5>, corrected reprint of the 1976 original.

LAFONTAINE, J. 1996, *Introduction aux variétés différentielles*, Grenoble : Presses Universitaires de Grenoble ; Les Ulis : EDP Sciences, 299 p..

LEE, J. M. 2009, *Manifolds and differential geometry, Graduate Studies in Mathematics*, vol. 107, American Mathematical Society, Providence, RI, xiv+671 p.. URL <https://dx.doi.org/10.1090/gsm/107>.

MILNOR, J. W. 1965, *Topology from the differentiable viewpoint*, Based on notes by David W. Weaver, The University Press of Virginia, Charlottesville, Va., ix+65 p..

On réfère le lecteur essentiellement aux livres de LAFONTAINE et LEE. Les autres livres sont utilisés comme références ponctuelles dans le cours.

Chapitre I

Variétés différentielles

1 Variété

1.a Atlas

Soit M un ensemble. Une **carte** sur M est la donnée d'une partie $U \subset M$ et d'une bijection

$$\phi : U \rightarrow U',$$

où U' est un ouvert de \mathbb{R}^n .

Soient deux cartes $\phi_1 : U_1 \rightarrow U'_1$ et $\phi_2 : U_2 \rightarrow U'_2$ telles que $U_{12} = U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, alors la **transition**, ou **changement de carte**, de U_2 à U_1 est l'application bijective

$$\phi_{12} = \phi_1 \circ \phi_2^{-1} : \phi_2(U_{12}) \rightarrow \phi_1(U_{12}).$$

Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, la transition ϕ_{12} est C^k -**compatible** si les $\phi_i(U_{12})$ sont des ouverts, et si ϕ_{12} est un C^k -difféomorphisme. Si $k > 0$, cela implique que les espaces vectoriels buts de ϕ_1 et ϕ_2 ont même dimension ; si $k = 0$ ce fait demeure vrai mais est un théorème topologique difficile, voir le théorème 1.7.

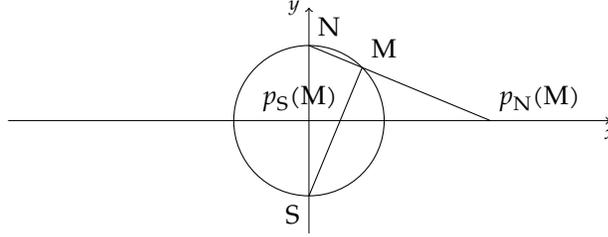
Un **atlas de classe C^k** sur M est la donnée d'une famille de cartes (U_α, ϕ_α) telle que :

- 1° M est recouvert par les ensembles U_α ;
- 2° toutes les transitions $\phi_{\alpha\beta}$ sont C^k -compatibles.

Exemple 1.1. On considère le cercle $S^1 = \{x^2 + y^2 = 1\}$. Soient les projections sur les axes de coordonnées, $p_1(x, y) = x$ et $p_2(x, y) = y$. Les restrictions ϕ_1^\pm de p_1 aux demi-cercles $U_1^\pm = S^1 \cap \{\pm y > 0\}$ sont des cartes sur S^1 , mais elles ne suffisent pas à faire un atlas de S^1 car elles ne recouvrent pas S^1 (pourquoi n'est-ce toujours pas un atlas si on prend plutôt les inégalités larges $\pm y \geq 0$?) ; aussi ajoutons-nous les restrictions ϕ_2^\pm de p_2 aux demi-cercles $U_2^\pm = S^1 \cap \{\pm x > 0\}$. Maintenant les sources des 4 cartes (U_1^\pm, ϕ_1^\pm) et (U_2^\pm, ϕ_2^\pm) recouvrent bien le cercle, et on vérifie que ces cartes sont C^∞ -compatibles : par exemple, $\phi_2^+(\phi_1^+)^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}$ est un difféomorphisme de $\phi_1^+(U_1^+ \cap U_2^+) =]0, 1[$ vers $\phi_2^+(U_1^+ \cap U_2^+) =]0, 1[$.

On peut trouver sur S^1 un atlas constitué de deux cartes seulement. On considère les pôles nord $N = (0, 1)$ et sud $S = (0, -1)$. La projection stéréographique de pôle nord, p_N , est définie sur un point $M \neq N$ par : $p_N(M)$ est l'intersection de la droite (NM) avec l'axe réel ; c'est une bijection $S^1 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}$, donnée explicitement par la formule $p_N(x, y) = \frac{x}{1-y}$. On définit de manière similaire la projection stéréographique de pôle sud

$p_S : S^1 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}$, donnée par $p_S(x, y) = \frac{x}{1+y}$. Vérifier que le changement de cartes $p_S p_N^{-1}$ est l'inversion $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui est un difféomorphisme $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$.



Vérifier que les cartes de cet atlas sont C^∞ -compatibles avec celles de l'atlas précédent, donc la réunion des cartes de ces deux atlas est encore un atlas.

Exemple 1.2. L'exemple précédent s'étend à une sphère de dimension quelconque $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ définie par

$$S^n = \{x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}.$$

On peut à nouveau décrire deux atlas différents, mais C^∞ -compatibles :

- l'atlas constitué par les projections sur les $(n+1)$ hyperplans $x_0 = 0, x_1 = 0, \dots, x_n = 0$, ce qui donne $2n+2$ cartes qui sont C^∞ -compatibles ;
- l'atlas constitué des deux projections stéréographiques p_N et p_S , de pôles nord $N = (1, 0, \dots, 0)$ et sud $S = (-1, 0, \dots, 0)$: prenons pour axe des x_0 l'axe vertical, alors les projections stéréographiques ont pour image l'hyperplan équatorial $\mathbb{R}^n = \{x_0 = 0\}$, et $p_N(M)$ (resp. $p_S(M)$) est défini comme l'intersection de la droite (NM) (resp. SM) avec \mathbb{R}^n ; écrivant $x = (x_0, y)$ avec $y \in \mathbb{R}^n$, on obtient les formules similaires à celles du cercle :

$$p_N(x_0, y) = \frac{y}{1-x_0}, \quad p_S(x_0, y) = \frac{y}{1+x_0},$$

avec les inverses

$$p_N^{-1}(y) = \left(\frac{1-|y|^2}{1+|y|^2}, \frac{2y}{1+|y|^2} \right), \quad p_S^{-1}(y) = \left(\frac{-1+|y|^2}{1+|y|^2}, \frac{2y}{1+|y|^2} \right). \quad (\text{I.1})$$

Le changement de carte est à nouveau donné par l'inversion

$$p_S p_N^{-1}(x) = \frac{x}{\|x\|^2},$$

qui est un difféomorphisme $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

1.b Topologie induite par un atlas

Proposition 1.3. Soit M muni d'un atlas $\mathcal{A} = ((U_\alpha, \varphi_\alpha))$ de classe C^k . Alors M admet une unique topologie telle que :

- 1° les sources U_α des cartes sont des ouverts de M ;
- 2° chaque carte $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow U'_\alpha$ est un homéomorphisme.

Démonstration. Si une telle topologie existe sur M , alors si $V \subset M$ est ouvert et $\varphi : U \rightarrow U'$ est une carte, l'image $\varphi(V \cap U)$ est un ouvert dans U' . On convient donc de définir une topologie dont les ouverts sont les parties $V \subset M$ satisfaisant cette propriété pour toute carte. L'unicité est claire, il reste à vérifier les deux propriétés :

- 1° si $\varphi_1 : U_1 \rightarrow U'_1$ est une carte, alors pour toute carte $\varphi_2 : U_2 \rightarrow U'_2$, par C^0 -compatibilité $\varphi_2(U_{12})$ est ouvert dans U'_2 ; donc U_1 est ouvert;
- 2° soit $\varphi_1 : U_1 \rightarrow U'_1$ une carte; la définition de la topologie implique que l'image d'un ouvert de U_1 est un ouvert de U'_1 , donc φ_1^{-1} est continue, et il reste à montrer que φ_1 est continue en vérifiant que si $V \subset U'_1$ est ouvert, alors $\varphi_1^{-1}(V)$ est ouvert: il s'agit de vérifier que pour toute carte φ_2 , l'image

$$\varphi_2(\varphi_1^{-1}(V) \cap U_2) = \varphi_2\varphi_1^{-1}(V \cap \varphi_1(U_{12}))$$

est ouverte dans U'_2 , or par C^0 -compatibilité, $\varphi_2\varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_{12}) \rightarrow \varphi_2(U_{12})$ est un homéomorphisme et $V \cap \varphi_1(U_{12})$ est un ouvert de U'_1 , d'où l'énoncé. \square

En pratique, l'ensemble M est souvent donné a priori comme un espace topologique. D'après la proposition 1.3, la topologie induite par un atlas \mathcal{A} coïncide avec la topologie donnée si les sources des cartes sont des ouverts et les cartes sont des homéomorphismes. C'est le cas des exemples de la section 1.

Proposition 1.4. *Soit M muni d'un atlas \mathcal{A} de classe C^k . On considère la topologie induite sur M par l'atlas \mathcal{A} . Alors :*

- 1° M est séparé si et seulement si pour toutes cartes $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{A}$ le graphe du changement de cartes $\varphi_{12} : \varphi_2(U_{12}) \rightarrow \varphi_1(U_{12})$ est fermé dans $U'_2 \times U'_1$;
- 2° M est dénombrable à l'infini¹ si et seulement s'il existe un atlas dénombrable $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$.

Démonstration. L'espace M est séparé si et seulement si la diagonale $\Delta \subset M \times M$ est fermée. Or $M \times M$ est recouverte par les ouverts $U_i \times U_j$, donc M est séparé si et seulement si pour tout (i, j) , l'intersection $\Delta \cap (U_i \times U_j)$ est fermée dans $U_i \times U_j$, lequel est homéomorphe à $U'_i \times U'_j$ par $\varphi_i \times \varphi_j$. Or l'image $\varphi_i \times \varphi_j(\Delta \cap (U_i \times U_j))$ est exactement le graphe de $\varphi_j\varphi_i^{-1}$, d'où le premier énoncé.

Pour le second énoncé, commençons par observer que tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est réunion dénombrable des compacts $K_j = \{x \in U, |x| \leq j, d(x, \partial U) \geq \frac{1}{j}\}$. Donc si M admet un atlas dénombrable, il est union dénombrable de compacts. Réciproquement, si M est dénombrable à l'infini, alors M est réunion dénombrable de compacts, mais chaque compact est recouvert par un nombre fini d'ouverts de cartes, donc M est recouvert par un nombre dénombrable d'ouverts de cartes, ce qui fournit un sous-atlas dénombrable. \square

1.c Variété

Lemme 1.5. *Soit \mathcal{A} un atlas de classe C^k sur M . Alors \mathcal{A} est contenu dans un unique atlas maximal de classe C^k .*

Démonstration. Il s'agit de vérifier que

$$\mathcal{A}_{\max} = \{\text{cartes } C^k \text{ compatibles à toute carte de } \mathcal{A}\}$$

est encore un atlas, c'est-à-dire que les changements de carte sont des difféomorphismes de classe C^k . Prenons donc dans \mathcal{A}_{\max} deux cartes $\psi_1 : V_1 \rightarrow V'_1$ et $\psi_2 : V_2 \rightarrow V'_2$. Nous avons une bijection

$$\psi_{21} = \psi_2\psi_1^{-1} : \psi_1(V_{12}) \rightarrow \psi_2(V_{12})$$

1. M est dénombrable à l'infini s'il est réunion dénombrable de compacts.

et il faut montrer que ψ_{21} est un C^k -difféomorphisme. La question étant locale, il suffit de le faire dans le voisinage d'un point $\psi_1(x)$ où $x \in V_{12}$. Or il existe dans \mathcal{A} une carte $\varphi : U \rightarrow U'$ telle que $x \in U$. Par définition de l'atlas maximal, les cartes ψ_1 et ψ_2 sont compatibles à φ , donc les $\psi_i\varphi^{-1}$ sont des C^k -difféomorphismes, donc

$$\psi_{21}|_{\psi_1(U \cap V_{12})} = (\psi_2\varphi^{-1})(\psi_1\varphi^{-1})^{-1} : \psi_1(U \cap V_{12}) \rightarrow \psi_2(U \cap V_{12})$$

est un C^k -difféomorphisme. \square

Définition 1.6. Une structure de **variété de classe C^k** sur M est la donnée d'un atlas maximal de classe C^k sur M , tel que la topologie induite sur M soit séparée, et dénombrable à l'infini. Pour $k \geq 1$, l'entier n est qui est la dimension des buts des cartes est localement constant et est appelé la **dimension** de M .

Pour $k = 0$, on parle de **variété topologique**, pour $k = \infty$ de **variété différentielle**. Quand on dit juste variété, on entend variété différentielle.

Par le lemme, un atlas \mathcal{A} sur M suffit à déterminer une structure de variété. Comme les topologies induites sur M par \mathcal{A} et par l'atlas maximal associé sont les mêmes, il suffit de vérifier les conditions topologiques sur \mathcal{A} .

Comme indiqué dans la définition, si $k \geq 1$, la notion de dimension est invariante par changement de carte puisqu'un C^k -difféomorphisme ne peut exister qu'entre ouverts d'espaces vectoriels de même dimension. La notion de dimension s'étend néanmoins au cas des variétés topologiques, grâce au théorème topologique suivant² :

Théorème 1.7 (Théorème d'invariance du domaine). Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^p$ des ouverts homéomorphes, alors $n = p$.

On abrège souvent « variété M de dimension n » en « variété M^n ».

Remarque 1.8. Toute variété est métrisable, c'est-à-dire qu'il existe une distance qui induit la topologie. C'est une conséquence du théorème de métrisabilité d'Urysohn : tout espace topologique régulier³ et admettant une base dénombrable de la topologie est métrisable.

1.d Exemples

1° Un ouvert de \mathbb{R}^n est une variété de dimension n . La sphère $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ munie de l'un des atlas de l'exemple 1.2 est une variété de dimension n .

2° Le produit de deux variétés $M_1^{n_1} \times M_2^{n_2}$ est une variété de dimension $n_1 + n_2$, dont l'atlas est fourni par les produits de cartes de M_1 et de M_2 .

3° Soit $\mathbb{R}P^n$ l'espace des droites vectorielles de \mathbb{R}^{n+1} , appelé **espace projectif réel**. On va mettre sur $\mathbb{R}P^n$ une structure de variété de dimension n . Si $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, on note $[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{R}P^n$ la droite vectorielle engendrée par x . Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a $[\lambda x_0 : \dots : \lambda x_n] = [x_0 : \dots : x_n]$; les $[x_0 : \dots : x_n]$ sont appelées les **coordonnées homogènes** sur $\mathbb{R}P^n$.

Notons $U_i = \{[x_0 : \dots : x_n], x_i \neq 0\}$. On définit une carte $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$\varphi_i([x_0 : \dots : x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\widehat{x_i}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right), \quad (I.2)$$

2. Après avoir lu la partie du cours sur la cohomologie de De Rham (section 20), la démonstration de ce théorème est accessible, voir LEE, Théorème 17.26.

3. Un espace topologique est régulier si un point et un fermé peuvent toujours être séparés, c'est-à-dire qu'étant donné un point x n'appartenant pas au fermé F , il existe des ouverts disjoints $U \ni x$ et $V \supset F$.

où le chapeau signifie que le terme correspondant est omis. Alors le changement de carte est donné par

$$\varphi_i \varphi_j^{-1}(x_0, \dots, x_i, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_n) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \widehat{1}, \dots, \frac{1}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

qui est un difféomorphisme $\mathbb{R}^n \setminus \{x_i = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{x_j = 0\}$. On obtient ainsi un atlas fini sur $\mathbb{R}P^n$, il reste à vérifier que la topologie induite est séparée, c'est-à-dire que les graphes des transitions $\varphi_i \varphi_j^{-1}$ sont fermés (laissé au lecteur).

Une autre manière de voir la topologie de $\mathbb{R}P^n$ consiste à voir $\mathbb{R}P^n$ comme muni a priori d'une topologie comme quotient $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{R}^*$ ou bien S^n / \mathbb{Z}_2 . Pour voir que la topologie quotient coïncide avec celle induite par l'atlas, on appliquera la proposition 1.3 (laissé au lecteur). Le fait que la topologie soit séparée vient du critère suivant :

Proposition 1.9. *Soit X un espace topologique séparé et G un groupe d'homéomorphismes de X , alors le quotient $Y = X/G$ est séparé si et seulement si le graphe de l'action, $\mathcal{R} = \{(x, g \cdot x), x \in X, g \in G\}$, est fermé dans $X \times X$.*

Démonstration. Soit $p : X \rightarrow Y$ la projection, et $\Delta_Y \subset Y \times Y$ la diagonale. Alors

$$(p \times p)^{-1}(\Delta_Y) = \mathcal{R}.$$

Si Y est séparé, alors la diagonale Δ_Y est fermée, donc \mathcal{R} est fermé. Réciproquement, si \mathcal{R} est fermée, alors $X \times X \setminus \mathcal{R}$ est ouvert, donc, par définition de la topologie quotient, $(p \times p)(X \times X \setminus \mathcal{R}) = Y \times Y \setminus \Delta_Y$ est ouvert, donc Δ_Y est fermée et Y est séparé. \square

On peut appliquer ce critère au quotient $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{R}^*$ (c'est un bon exercice), mais l'application au quotient S^n / \mathbb{Z}_2 est plus immédiate : \mathcal{R} est fermé car compact.

On remarquera que $\mathbb{R}P^n = U_0 \cup \{[0 : x_1 : \dots : x_n], (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$. Or U_0 s'identifie à \mathbb{R}^n par la carte φ_0 , et le second terme est un espace projectif réel de dimension $n - 1$, ce qu'on résume en écrivant

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}^n \cup \mathbb{R}P^{n-1}. \quad (\text{I.3})$$

Le $\mathbb{R}P^{n-1}$ est l'hyperplan à l'infini de la géométrie projective. Par exemple, la droite projective réelle, $\mathbb{R}P^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, est obtenue en ajoutant à la droite réelle (représentée par les $[1 : x]$ pour $x \in \mathbb{R}$) le point à l'infini $[0 : 1]$.

4° La même construction s'étend verbatim à l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ des droites vectorielles complexes de \mathbb{C}^{n+1} : les mêmes formules, interprétées avec des coefficients x_i complexes, donnent des cartes à valeurs dans $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$. On obtient ainsi sur $\mathbb{C}P^n$ une structure de variété de dimension $2n$. La décomposition (I.3) s'étend aussi au cas complexe⁴.

5° Le tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ l'inclusion $B(x, \frac{1}{4}) \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ fournit une carte φ_x sur \mathbb{T}^n . On obtient ainsi un atlas sur \mathbb{T}^n , dont les transitions sont des translations.

2 Morphismes

Définition 2.1. *Soit (M, \mathcal{A}) une variété. Une fonction de classe C^k sur M est une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour toute carte $\varphi : U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^n$ de \mathcal{A} , la fonction $f \circ \varphi^{-1} : U' \rightarrow \mathbb{R}$ soit de classe C^k .*

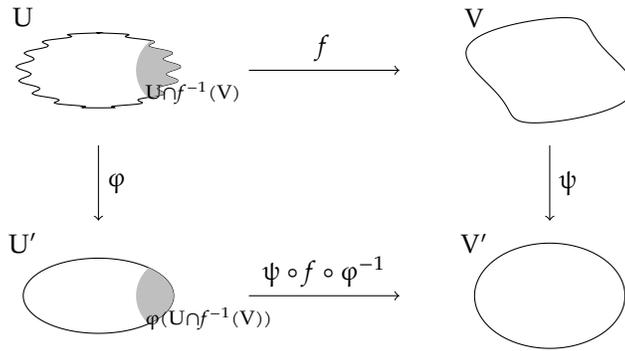
4. L'exposant n dans $\mathbb{C}P^n$ désigne une dimension complexe, car $\mathbb{C}P^n$ est un exemple de variété complexe de dimension complexe n , c'est-à-dire de variété dont les changements de cartes sont des difféomorphismes bi-holomorphes (différentiables au sens complexe) entre ouverts de \mathbb{C}^n .

Bien entendu, une fonction C^k en ce sens est nécessairement continue.

Pour que la propriété soit vraie, il suffit qu'elle le soit sur un sous-atlas $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$. En effet, dans ce cas, si $\varphi : U \rightarrow U'$ est une carte de \mathcal{A} , alors pour toute carte $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow U'_\alpha$ dans \mathcal{A}' , on a $f \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap U_\alpha)} = (f \circ \varphi_\alpha^{-1}) \circ (\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1})$, donc $f \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap U_\alpha)}$ est de classe C^k ; comme les $U \cap U_\alpha$ sont des ouverts qui recouvrent U , la fonction $f \circ \varphi^{-1}$ est de classe C^k sur U' .

La démonstration qui précède montre que la notion de fonction de classe C^k garde un sens sur une variété de classe C^ℓ pourvu que $\ell \geq k$.

Passons à présent à la définition des morphismes entre variétés. Soient (M, \mathcal{A}) et (N, \mathcal{B}) deux variétés, et $f : M \rightarrow N$. Soient deux cartes $(\varphi, U) \in \mathcal{A}$ et $(\psi, V) \in \mathcal{B}$.



L'expression locale de f dans les cartes φ et ψ est

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow V'.$$

Lemme 2.2. *L'application f est continue si et seulement si pour toutes cartes $(\varphi, U) \in \mathcal{A}$ et $(\psi, V) \in \mathcal{B}$, on a $f^{-1}(V)$ est un ouvert, et l'expression locale de f est continue.*

Démonstration. Si f est continue, les propriétés énoncées sont claires. Réciproquement, si les $f^{-1}(V)$ sont des ouverts et les expressions locales de f sont continues, alors soit $O \subset N$ un ouvert, pour chaque $(\varphi, U) \in \mathcal{A}$ et $(\psi, V) \in \mathcal{B}$, on a $U \cap f^{-1}(V \cap O) = \varphi^{-1}(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^{-1}\psi(V \cap O)$ est ouvert, donc $f^{-1}(O) = \cup U \cap f^{-1}(V \cap O)$ est ouvert. \square

Définition 2.3. Une **application de classe C^k** entre deux variétés M et N est une application $f : M \rightarrow N$ telle que pour toutes cartes $(\varphi, U) \in \mathcal{A}$ et $(\psi, V) \in \mathcal{B}$, on a :

- 1° $f^{-1}(V)$ est un ouvert;
- 2° l'expression locale de f est de classe C^k .

On dit que $f : M \rightarrow N$ est un **difféomorphisme de classe C^k** si f est une bijection et f et f^{-1} sont de classe C^k .

Remarques. 1° Par le lemme 2.2, la définition implique que f est continue.

2° Comme pour les fonctions, il suffit de vérifier la définition sur des sous-atlas $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ et $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$, et la définition continue à avoir un sens pour des variétés de classe C^ℓ pourvu que $\ell \geq k$.

3° Étant donnée une carte $(\varphi, U) \in \mathcal{A}$, il suffit de vérifier que l'expression locale de f est de classe C^k pour une collection de cartes $(\psi_\alpha, V_\alpha) \in \mathcal{B}$ telle que les V_α recouvrent $f(U)$.

4° *Exercice.* Si on a des applications de classe C^k entre variétés $f : M_1 \rightarrow M_2$ et $g : M_2 \rightarrow M_3$, alors $g \circ f : M_1 \rightarrow M_3$ est encore une application de classe C^k .

Exemples

1° L'inclusion $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ est C^∞ . Il suffit de calculer l'expression locale dans les deux cartes données par les deux projections stéréographiques. Puisque f est l'inclusion, l'expression locale de f dans la carte fournie par la projection stéréographique p_N n'est autre que $p_N^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, calculée en (I.1), qui est C^∞ .

2° La projection $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ est C^∞ . Il suffit de vérifier que pour chaque carte (φ_i, U_i) définie par (I.2), alors $\varphi_i \circ f : \varphi_i^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^n$ est C^∞ ; or $\varphi_i \circ f(x_0, \dots, x_n) = (\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i})$ qui est C^∞ .

3° L'application $f : \mathbb{C}P^1 \rightarrow S^2$, définie par $f([0 : 1]) = N$ et $f([1 : z]) = p_N^{-1}(z)$ pour $z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, est un difféomorphisme.

Il s'agit de vérifier que les expressions locales de f et f^{-1} sont C^∞ . Nous avons sur $\mathbb{C}P^1$ les deux ouverts de carte $U_i = \{z_i \neq 0\}$ pour $i = 0, 1$, avec cartes φ_i ; sur S^2 les deux ouverts $V_0 = S^2 \setminus \{N\}$ et $V_1 = S^2 \setminus \{S\}$ avec les projections stéréographiques p_N et p_S . On a $f(U_i) = V_i$, et l'expression locale de f de U_0 vers V_0 est

$$p_N \circ f \circ \varphi_0^{-1}(z) = p_N \circ f([1 : z]) = p_N(p_N^{-1}(z)) = z$$

donc les expressions locales de f et f^{-1} dans les ouverts de cartes U_0 et V_0 sont C^∞ . L'expression locale de f de U_1 vers V_1 est, pour $z \neq 0$,

$$p_S \circ f \circ \varphi_1^{-1}(z) = p_S \circ f([z : 1]) = p_S \circ p_N^{-1}(\frac{1}{z}) = \bar{z};$$

puisque l'inversion dans \mathbb{C} s'écrit $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$; comme $f([0 : 1]) = N$, cette formule est valable aussi pour $z = 0$, et donc à nouveau les expressions locales de f et f^{-1} sont C^∞ .

4° *Exercice.* L'application $\mathbb{R}P^1 \rightarrow S^1$, définie par $f([x : y]) = \frac{(x+iy)^2}{x^2+y^2}$, est un difféomorphisme.

3 Application tangente

3.a Vecteur tangent

Définition 3.1. Soit M une variété de classe C^1 et $a \in M$. Deux courbes $c_1, c_2 :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ de classe C^1 telles que $c_i(0) = a$ sont des **courbes tangentes** en a s'il existe une carte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $a \in U$ et

$$(\varphi \circ c_1)'(0) = (\varphi \circ c_2)'(0). \quad (I.4)$$

Si on choisit une autre carte ψ en a , alors $\psi \circ c_i = (\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ c_i)$, donc

$$(\psi \circ c_i)'(0) = d_{\varphi(a)}(\psi \circ \varphi^{-1})((\varphi \circ c_i)'(0)), \quad (I.5)$$

donc la condition (I.4) pour φ est équivalente à la même condition pour ψ . Ainsi la définition ne dépend-elle pas de la carte choisie en a .

Définition 3.2. Sous les mêmes hypothèses, la relation « être tangent en a » est une relation d'équivalence, dont l'ensemble quotient est appelé l'**espace tangent en a à M** et noté $T_a M$.

Soit $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une carte en a , alors on définit une application $\varphi_* : T_a M \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$\varphi_*[c] = (\varphi \circ c)'(0).$$

La définition de $T_a M$ implique qu'il s'agit d'une bijection. Si on a une autre carte ψ en a , la formule (I.5) donne $\psi_* = d_{\varphi(a)}(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi_*$, autrement dit le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 & T_a M & \\
 \varphi_* \swarrow & & \searrow \psi_* \\
 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{d_{\varphi(a)}(\psi \circ \varphi^{-1})} & \mathbb{R}^n
 \end{array}$$

La bijection $\varphi_* : T_a M \rightarrow \mathbb{R}^n$ munit $T_a M$ d'une structure d'espace vectoriel réel. Parce que $d_{\varphi(a)}(\psi \circ \varphi^{-1})$ est un isomorphisme linéaire, la bijection ψ_* donne la même structure d'espace vectoriel. La structure d'espace vectoriel construite ne dépend donc pas de la carte choisie, et il en résulte :

Proposition 3.3. *L'espace tangent en un point à une variété est canoniquement muni d'une structure d'espace vectoriel réel.*

Exemples. 1° Si M est un ouvert de \mathbb{R}^n , alors $T_a M = \mathbb{R}^n$. Si $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$, alors le vecteur tangent $[c]$ s'identifie à $c'(0) \in \mathbb{R}^n$.

2° Soit $i : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Si $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow S^n$ est C^1 , alors $i \circ c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ est C^1 . Comme $|i \circ c(t)| = 1$ pour tout t , on a $(i \circ c)'(0) \in a^\perp$ où $a = c(0)$. L'application $[c] \mapsto (i \circ c)'(0)$ est un isomorphisme $T_a S^n \rightarrow a^\perp$. (Pour le vérifier, on pourra montrer que la projection orthogonale sur a^\perp est une carte de S^n dans un voisinage de a .)

3.b Application tangente

Définition 3.4. Soit $f : M \rightarrow N$ une application de classe C^1 entre deux variétés M et N . On définit l'**application tangente à f** en $a \in M$,

$$T_a f : T_a M \longrightarrow T_{f(a)} N$$

par $T_a f[c] = [f \circ c]$. On note aussi souvent l'application tangente f_* .

Commençons par vérifier que cette définition a un sens, et pour cela, exprimons $T_a f$ dans des cartes locales φ en a sur M et ψ en $f(a)$ sur N . Nous avons l'expression locale $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow V'$ pour f . Soit $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ avec $c(0) = a$, alors, comparant c dans la carte φ (i.e. $\varphi \circ c$) à $f \circ c$ dans la carte ψ (i.e. $\psi \circ f \circ c$), nous obtenons

$$\psi \circ f \circ c = F \circ (\varphi \circ c)$$

et par conséquent

$$(\psi \circ f \circ c)'(0) = d_{\varphi(a)} F((\varphi \circ c)'(0)). \quad (\text{I.6})$$

Il en résulte que si on a un autre chemin d équivalent à c , c'est-à-dire $(\varphi \circ d)'(0) = (\varphi \circ c)'(0)$, alors $(\psi \circ f \circ d)'(0) = (\psi \circ f \circ c)'(0)$, donc $f \circ d$ et $f \circ c$ sont équivalents. Ainsi l'application tangente $T_a f$ est bien définie.

D'après (I.6) nous avons en outre un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 T_a M & \xrightarrow{T_a f} & T_{f(a)} N \\
 \downarrow \varphi_* & & \downarrow \psi_* \\
 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{d_{\varphi(a)} F} & \mathbb{R}^p
 \end{array}$$

Comme φ_* et ψ_* sont des isomorphismes d'espaces vectoriels, et $d_{\varphi(a)} F$ est linéaire, l'application tangente $T_a f$ est une application linéaire.

Propriétés. Elles découlent immédiatement des propriétés de la différentielle :

1° Si $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$ avec f et g de classe C^1 , alors $T_a(g \circ f) = T_{f(a)}g \circ T_af$.

2° Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ alors on note l'application tangente $d_af : T_aM \rightarrow \mathbb{R}$ (différentielle de f); si f et g sont deux fonctions sur M , alors on a la règle de Leibniz $d_a(fg) = f(a)d_ag + g(a)d_af$.

Exemple 3.5. Soit $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ la projection. Soit $U_i = \{x_i \neq 0\} \subset \mathbb{R}P^n$. Sur $f^{-1}(U_i)$, on dispose de l'expression locale dans la carte φ_i définie en (I.2),

$$\varphi_i \circ f(x_0, \dots, x_n) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{\widehat{x_i}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right).$$

Soit $x \in f^{-1}(U_i)$, cette expression permet de calculer $T_x f$ et de constater que $T_x f$ est surjective, avec noyau $\ker T_x f = \mathbb{R}x$. On obtient ainsi un isomorphisme

$$T_x f : \mathbb{R}^{n+1} / \mathbb{R}x \xrightarrow{\sim} T_{[x]} \mathbb{R}P^n.$$

Exercice. Cet isomorphisme dépend du choix de $x \in \Delta = \mathbb{R}x$. Montrer qu'on obtient un isomorphisme ne dépendant que de Δ (donc, pas de x), en considérant la composition

$$\text{Hom}(\Delta, \mathbb{R}^{n+1} / \Delta) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} / \Delta \xrightarrow{T_x f} T_\Delta \mathbb{R}P^n,$$

où la première flèche est le morphisme $u \mapsto u(x)$.

3.c Inversion locale

On commence par rappeler l'énoncé du théorème d'inversion locale :

Théorème 3.6. Soit $f : O \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^k ($k \geq 1$) d'un ouvert O de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^n . Si $a \in O$ et d_af est inversible, alors il existe des ouverts $O \supset U \ni a$ et $V \ni f(a)$ tels que $f|_U : U \rightarrow V$ soit un C^k -difféomorphisme.

En appliquant ce théorème aux applications entre variétés, qui sont localement des applications entre ouverts de \mathbb{R}^n , on obtient :

Théorème 3.7 (Inversion locale). Soit $f : M \rightarrow N$ une application de classe C^k ($k \geq 1$) entre variétés. Si $a \in M$ et T_af est inversible, alors il existe des ouverts $U \ni a$ et $V \ni f(a)$ tels que

$$f|_U : U \rightarrow V$$

soit un C^k -difféomorphisme.

En particulier, on déduit :

Corollaire 3.8. Soit $f : M \rightarrow N$ une application de classe C^k entre variétés. Alors f est un C^k -difféomorphisme si et seulement si f est une bijection et T_af est inversible en tout point $a \in M$.

4 Submersions

4.a Forme normale des submersions

Définition 4.1. Une application $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^1 est

- une **submersion** au point $a \in U$ si $d_a f$ est surjective ;
- une submersion si f est une submersion en tout point.

Exemple. Si $p \leq n$, l'application linéaire

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_{n-p+1}, x_n) \quad (\text{I.7})$$

est une submersion. Le théorème suivant montre que toute submersion en un point se ramène à la forme (I.7).

Théorème 4.2 (Forme normale des submersions). *Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, de classe C^k , est une submersion en $a \in U$, alors il existe un ouvert $U_a \ni a$ et un difféomorphisme $\varphi : U_a \rightarrow U'_a \subset \mathbb{R}^n$ de classe C^k tels que*

$$f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_{n-p+1}, \dots, x_n) \text{ pour tout } x \in U'_a.$$

Démonstration. Écrivons $f = (f_1, \dots, f_p)$, et, en décomposant $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-p} \oplus \mathbb{R}^p$,

$$d_a f = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix},$$

où A est une matrice $p \times (n-p)$ et B une matrice $p \times p$. Puisque $d_a f$ est surjective, quitte à permuter les coordonnées de \mathbb{R}^n , nous pouvons supposer B inversible. Posons

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-p}, f_1(x), \dots, f_p(x)).$$

Alors

$$d_a \varphi = \begin{pmatrix} \text{Id}_{n-p} & 0 \\ A & B \end{pmatrix}$$

est inversible, donc φ est un difféomorphisme local $U_a \rightarrow U'_a$, et

$$f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_{n-p+1}, \dots, x_n).$$

□

4.b Image réciproque d'un point par une submersion, sous-variétés

La notion de submersion s'étend aux applications C^1 entre variétés, en disant que $f : M^n \rightarrow N^p$ est une submersion en $a \in M$ si $T_a f$ est surjective. Si φ et ψ sont des cartes locales en a et $c = f(a)$ respectivement, il est équivalent de dire que l'expression locale de f , à savoir $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$, est une submersion en $\varphi(a)$. Par le théorème des submersions, il existe un difféomorphisme ρ , défini sur un voisinage ouvert de $\varphi(a)$, tel que $f \circ \rho$ soit de la forme canonique (I.7). Posant $\varphi_a = \rho^{-1} \circ \varphi$, on a donc construit un voisinage ouvert $U_a \ni a$ et une carte $\varphi_a : U_a \rightarrow U'_a \subset \mathbb{R}^n$ tels que pour tout $x \in U'_a$ on ait

$$\psi \circ f \circ \varphi_a^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_{n-p+1}, \dots, x_n). \quad (\text{I.8})$$

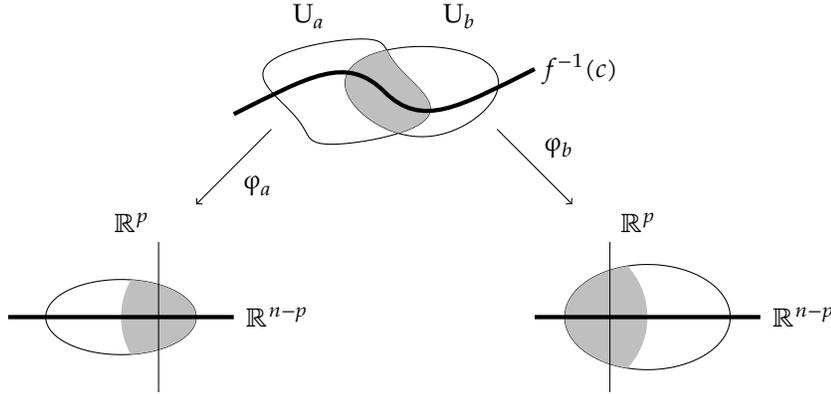
En particulier, si on a fixé la carte ψ de sorte que $\psi(c) = 0$, alors

$$\varphi_a(f^{-1}(c) \cap U_a) = (\mathbb{R}^{n-p} \times \{0\}) \cap U'_a. \quad (\text{I.9})$$

Soit à présent un autre point $b \in f^{-1}(c)$. Gardant la même carte ψ en c sur N , nous obtenons de même une carte $\varphi_b : U_b \ni b \rightarrow U'_b \subset \mathbb{R}^n$ satisfaisant (I.8) et (I.9). En particulier, le changement de carte défini sur $\varphi_a(U_a \cap U_b)$ doit avoir la forme

$$\varphi_b \circ \varphi_a^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (\Phi_{ba}(x), x_{n-p+1}, \dots, x_n), \quad (\text{I.10})$$

où $\Phi_{ba} : \varphi_a(U_a \cap U_b) \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$.



Restreignons maintenant ces cartes à $f^{-1}(c)$. Par (I.9), on voit que les $\varphi_a|_{f^{-1}(c) \cap U_a} : f^{-1}(c) \cap U_a \rightarrow \mathbb{R}^{n-p} \subset \mathbb{R}^n$ sont des cartes sur $f^{-1}(c)$, dont les transitions, par (I.10), sont les $\Phi_{ba}|_{\varphi_a(U_a \cap U_b \cap f^{-1}(c))}$. On a ainsi défini un atlas, et donc une structure de variété de dimension $n - p$, sur $f^{-1}(c)$. Il est immédiat de vérifier que la topologie de l'atlas coïncide avec celle induite par M sur son sous-ensemble $f^{-1}(c)$.

En réalité, la construction des φ_a satisfaisant (I.9) donne une structure plus forte sur $f^{-1}(c)$, précisée dans la définition suivante :

Définition 4.3. *Un sous-ensemble $S \subset M^n$ est une **sous-variété** de dimension d de M si, pour tout $a \in S$, il existe une carte $\varphi : U \ni a \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^n$ telle que*

$$\varphi(S \cap U) = (\mathbb{R}^d \times \{0\}) \cap U'.$$

Exemple 4.4. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application de classe C^∞ , alors le graphe $\text{Gr}(f)$ de f est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, de dimension n . En effet, considérons $\varphi : U \times \mathbb{R}^p \rightarrow U \times \mathbb{R}^p$ donné par $\varphi(x, y) = (x, y - f(x))$, alors φ est un difféomorphisme, d'inverse explicite donné par $\varphi^{-1}(x, y) = (x, y + f(x))$; en outre $\varphi(\text{Gr}(f)) = U \times \{0\}$, donc φ est une carte de sous-variété pour $\text{Gr}(f)$.

Propriétés. 1° Une sous-variété admet une structure de variété.

2° L'injection $i : S \hookrightarrow M$ est C^∞ .

3° L'application tangente $T_a i : T_a S \rightarrow T_a M$ est injective et identifie $T_a S$ à un sous-espace vectoriel de $T_a M$.

4° Si $f : M \rightarrow N$ est de classe C^k , alors $f|_S : S \rightarrow N$ est de classe C^k , et $T_a(f|_S) = (T_a f)|_{T_a S}$.

5° Si $f : N \rightarrow S$, alors f est C^k si et seulement si $i \circ f$ est C^k .

Démonstration. 1° Appelons $\varphi_a : U_a \rightarrow U'_a$ la carte de sous-variété en a . Les transitions $\varphi_b \circ \varphi_a^{-1}$ ont alors la forme (I.10). Ainsi, les $(\varphi_a)|_{S \cap U_a}$ sont un atlas sur S , dont les transitions sont les $\Phi_{ba}|_{\mathbb{R}^d \cap \varphi_a(U_{ab})}$. Par la proposition 1.3, la topologie induite par l'atlas coïncide avec celle induite par l'inclusion $S \subset M$.

2-3° Utilisons en a les cartes locales φ_a sur M et $\varphi_a|_S$ sur S . Alors l'expression locale de i est $I = \varphi_a \circ i \circ (\varphi_a|_S)^{-1}$, c'est-à-dire

$$I(x_1, \dots, x_d) = (x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0).$$

Dans les mêmes cartes, l'expression locale de $T_a i$ est donc $d_{\varphi(a)} I = I$ puisque I est linéaire. La propriété en découle.

4-5° Laissés au lecteur. □

Finalement, on a démontré :

Théorème 4.5. *Soit $f : M^n \rightarrow N^p$ une submersion, alors pour tout $c \in N$, la pré-image $f^{-1}(c)$ est une sous-variété de M , de dimension $n - p$, et d'espace tangent en $a \in f^{-1}(c)$ donné par $T_a(f^{-1}(c)) = \ker T_a f$.*

Démonstration. Il reste l'affirmation sur l'espace tangent à vérifier. L'expression locale de f , donnée en (I.8), est linéaire, donc l'expression locale de $T_a f$ est la même application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{n-p+1}, \dots, x_n)$, dont le noyau est $\mathbb{R}^{n-p} \times \{0\}$ qui est exactement l'espace tangent $T_a M$ vu dans la carte φ_a . \square

Exemple 4.6. Soit $f(x_0, \dots, x_n) = x_0^2 + \dots + x_n^2 = \langle x, x \rangle$. Alors $d_x f(\dot{x}) = 2\langle x, \dot{x} \rangle$ donc $d_x f$ est surjective sauf en $x = 0$. Pour appliquer le théorème, on restreint le domaine en considérant la submersion $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$. Il en résulte que $S^n = f^{-1}(1)$ est une sous-variété de \mathbb{R}^{n+1} , d'espace tangent $T_x S^n = \ker d_x f = x^\perp$. On obtient ainsi une autre construction de la structure de variété de la sphère.

4.c Théorème de Sard

Définition 4.7. *Soit $f : M \rightarrow N$ de classe C^1 . On dit que*

- $a \in M$ est un **point critique** de f si $T_a f$ n'est pas surjective ;
- $c \in N$ est une **valeur critique** de f si c est l'image d'un point critique, une **valeur régulière** de f si c n'est pas une valeur critique.

L'ensemble des points critiques de f est un fermé, donc $\tilde{M} = M \setminus \{\text{points critiques}\}$ est un ouvert de M , donc une variété sur laquelle f est une submersion. Appliquant le théorème 4.5 à $f|_{\tilde{M}}$, on obtient la généralisation de l'exemple 4.6 :

Théorème 4.8. *Si $c \in N$ n'est pas critique, et $f^{-1}(c) \neq \emptyset$, alors $f^{-1}(c)$ est une sous-variété de M .*

Le théorème précédent s'applique à beaucoup de points de N , comme le montre le théorème suivant, qui sera démontré dans la section 8 :

Théorème 4.9 (Sard). *Soit $f : M^n \rightarrow N^p$ de classe C^∞ . Alors l'ensemble des valeurs critiques de f est de mesure p -dimensionnelle nulle, c'est-à-dire que pour toute carte (φ, U) sur N , l'image par φ des valeurs critiques de f dans U est de mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^p nulle.*

Remarques. 1° On peut affaiblir l'hypothèse de régularité de f : il suffit que f soit de classe C^k avec $k \geq 1$ si $n \leq p$ et $k \geq n - p + 1$ si $n \geq p$.

2° La notion d'ensemble de mesure nulle dans \mathbb{R}^p est invariante par difféomorphisme, donc par changement de cartes ; il en résulte que la condition d'être un sous-ensemble de mesure p -dimensionnelle nulle sur N se teste de manière équivalente sur n'importe quel sous-atlas.

3° Pour $n < p$, tous les points de f sont nécessairement des points critiques, donc l'ensemble des valeurs critiques est l'image $f(M)$. Le théorème assure que $f(M)$ est de mesure p -dimensionnelle nulle, et en particulier f n'est pas surjective (pas de phénomène de « courbe de Peano », possible pour les applications continues).

Exemples. 1° Soit $f(x, y) = xy$. Alors $f^{-1}(c)$ est une sous-variété dès que $c \neq 0$. Le même énoncé reste correct sur les complexes, en considérant $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$.

2° La fonction hauteur d'un tore.

3° Si $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ est un polynôme homogène de degré d , alors on peut définir $Z(f) = \{[x], f(x) = 0\} \subset \mathbb{R}P^n$. Dans le cas où $f(x_0, x_1, x_2) = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3$, montrer que $Z(f)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}P^2$.

4° Le groupe $GL(n, \mathbb{R})$ est un ouvert de l'espace vectoriel $M(n, \mathbb{R})$ de toutes les matrices carrées de rang n . La fonction $\det : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une submersion. En effet :

- $d_{\text{Id}} \det = \text{Tr}$ est surjective ;
- $\det(g) = \det(g_0) \det(g_0^{-1}g)$ donc $d_{g_0} \det(\dot{g}) = \det(g_0) \text{Tr}(g_0^{-1}\dot{g})$ qui est encore surjectif.

Une autre manière d'écrire la même chose consiste à introduire la translation à gauche $L_{g_0}g = g_0g$ et à interpréter $\det(g_0g) = \det(g_0) \det(g)$ comme la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 GL(n, \mathbb{R}) & \xrightarrow{L_{g_0}} & GL(n, \mathbb{R}) \\
 \downarrow \det & & \downarrow \det \\
 \mathbb{R} & \xrightarrow{\times \det g_0} & \mathbb{R}
 \end{array}
 \quad \text{d'où la différentielle}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 M(n, \mathbb{R}) & \xrightarrow{T_{\text{Id}}L_{g_0}} & M(n, \mathbb{R}) \\
 \downarrow \text{Tr} & & \downarrow d_{g_0} \det \\
 \mathbb{R} & \xrightarrow{\times \det g_0} & \mathbb{R}
 \end{array}$$

Il en résulte que $SL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$ est une sous-variété de $GL(n, \mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$, avec

$$T_{\text{Id}}SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}), \text{Tr } A = 0\}.$$

5° *Exercice.* Le groupe $O(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}), A^t A = \text{Id}\}$ est une sous-variété de $GL(n, \mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$, et

$$T_{\text{Id}}O(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}), A + A^t = 0\}.$$

6° *Exercice.* Le groupe $GL(n, \mathbb{C})$, étant un ouvert de l'espace vectoriel $M(n, \mathbb{C})$, est une variété de dimension (réelle) $2n^2$. Montrer que les sous-groupes

$$\begin{aligned}
 SL(n, \mathbb{C}) &= \{g \in GL(n, \mathbb{C}), \det g = 1\}, \\
 U(n) &= \{g \in GL(n, \mathbb{C}), g^* g = \text{Id}\}, \\
 O(n, \mathbb{C}) &= \{g \in GL(n, \mathbb{C}), {}^t g g = \text{Id}\},
 \end{aligned}$$

$SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$ et $SO(n, \mathbb{C}) = O(n, \mathbb{C}) \cap SL(n, \mathbb{C})$ sous des sous-variétés de $GL(n, \mathbb{C})$, de dimensions respectives $2(n^2 - 1)$, n^2 , $n(n - 1)$, $n^2 - 1$ et $n(n - 1)$.

5 Immersions, plongements

5.a Forme normale des immersions

Définition 5.1. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^1 . On dit que f est une **immersion** si sa différentielle $d_a f$ est injective en tout point $a \in U$.

Exemple. Si $p \geq n$, l'application linéaire

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) \tag{I.11}$$

est une immersion. Le théorème suivant montre que toute immersion se met localement sous la forme (I.11).

Théorème 5.2 (Forme normale des immersions). *Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une immersion de classe C^k , alors pour tout $a \in U$ il existe des ouverts $U_a \ni a$ et $V_{f(a)} \ni f(a)$ et un difféomorphisme $\psi : V_{f(a)} \rightarrow W \subset \mathbb{R}^p$ de classe C^k , tels que $f(U_a) \subset V_{f(a)}$ et pour tout $x \in U_a$,*

$$\psi \circ f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0).$$

Une démonstration courte basée sur le théorème d'inversion locale est possible, mais nous nous contenterons de voir ce théorème comme particulier du théorème du rang constant ci-dessous.

Exemples. 1° $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(t) = e^{it}$.

2° L'application $\circlearrowleft \rightarrow \infty$.

3° $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ définie par $f(t) = (at, bt)$.

5.b Théorème du rang constant

Les théorèmes sur les formes normales des immersions et des submersions s'unifient dans le résultat suivant :

Théorème 5.3. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ de classe C^k de **rang constant**, c'est-à-dire que le rang de $d_a f$ est constant dans U . Alors f est localement conjuguée à une application linéaire : il existe des difféomorphismes $\varphi_a : U_a \ni a \rightarrow U'_a$ et $\psi_a : V_{f(a)} \ni f(a) \rightarrow V'_{f(a)}$ tels que $f(U_a) \subset V_{f(a)}$ et*

$$\psi_a \circ f \circ \varphi_a^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0). \quad (\text{I.12})$$

Démonstration. On décompose $\mathbb{R}^p = \text{im}(d_a f) \oplus S$, et on écrit $f = (f_1, f_2)$ et $d_a f = (d_a f_1, 0)$. Donc f_1 est une submersion en a ; par le théorème des submersions, et restreignant U , et quitte à composer à la source par un difféomorphisme de classe C^k , on peut supposer que

$$f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r).$$

Décomposant également $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \oplus \mathbb{R}^{n-r}$, et notant (x, y) un point de \mathbb{R}^n dans cette somme, on obtient

$$f(x, y) = (x, f_2(x, y)), \quad \text{donc} \quad df = \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 \end{pmatrix}.$$

L'hypothèse que df soit de rang constant égal à r implique $\partial_y f_2 = 0$. Restreignons U en un produit $U_1 \times U_2$ d'ouverts convexes (des boules par exemple), alors il faut que $f_2(x, y) = g(x)$, donc dans U on a $f(x, y) = (x, g(x))$. Pour $\psi(x, y) = (x, y - g(x))$, on obtient donc $\psi \circ f(x, y) = (x, 0)$. \square

En basant la démonstration sur le théorème du rang constant, le théorème 4.5 se généralise immédiatement en :

Théorème 5.4. *Soit $f : M \rightarrow N$ de rang constant, alors pour tout $c \in N$ la pré-image $f^{-1}(c)$ est une sous-variété de M , d'espace tangent en a égal à $\ker T_a f$.*

5.c Plongements

Si $f : M \rightarrow N$ est une application C^∞ entre variétés, on a vu des conditions pour que l'image réciproque d'un point soit une sous-variété de M . On va maintenant donner des conditions pour que $f(M)$ soit une sous-variété de N . Il ne suffit pas que f soit une immersion ou soit de rang constant, comme le montre les exemples suivants :

1° L'application $\circlearrowleft \rightarrow \infty$ déjà vue, l'image n'est pas une sous-variété de \mathbb{R}^2 au point de recoupement.

2° Autre exemple déjà vu, l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ définie par $f(t) = (at, bt)$: si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$, l'image est dense dans \mathbb{T}^2 et ne saurait donc être une sous-variété du tore.

3° L'application $] - 1, 1[\rightarrow \mathbb{R}^2$ représentée par . L'origine n'est pas un point de sous-variété.

Aucun de ces exemples ne satisfait les hypothèses de :

Théorème 5.5. *Si $f : M \rightarrow N$ est de rang constant et f est une application ouverte de M sur $f(M)$, alors $f(M)$ est une sous-variété de N , d'espace tangent $T_{f(a)}f(M) = \text{im}(T_a f)$.*

Il faut faire attention que dans l'hypothèse, $f(M)$ est munie de la topologie induite par N , ses ouverts sont donc les intersections de $f(M)$ avec les ouverts de N . (Vérifier que les trois contre-exemples ci-dessus ne satisfont pas l'hypothèse).

En pratique, on utilise le plus souvent le théorème sous des hypothèses plus fortes :

Proposition 5.6. *Les hypothèses du théorème précédent sont satisfaites sous l'une des deux hypothèses équivalentes suivantes :*

- 1° $f : M \rightarrow N$ est une immersion et $f : M \rightarrow f(M)$ est un homéomorphisme ;
- 2° $f : M \rightarrow N$ est une immersion injective et $f : M \rightarrow f(M)$ est propre.

Définition 5.7. *Un **plongement** de M dans N est une application $f : M \rightarrow N$ satisfaisant l'une des deux hypothèses équivalentes de la proposition 5.6.*

Attention, la seconde hypothèse de la proposition n'implique pas que $f : M \rightarrow N$ soit propre : un contre-exemple est fourni par l'injection de l'intervalle $] - 1, 1[$ dans \mathbb{R}^2 par $x \mapsto (x, 0)$. Ainsi un plongement n'est-il pas nécessairement propre.

Démonstration de la proposition. Il est clair que la première hypothèse implique la seconde. Dans l'autre direction, si $f : M \rightarrow f(M)$ est propre, alors elle est fermée, et donc ouverte puisque c'est une bijection. \square

Démonstration du théorème. Soit $a \in M$ et $b = f(a) \in N$, par le théorème du rang constant il existe $\varphi_a : U_a \rightarrow U'_a$ et $\psi_a : V_a \rightarrow V'_a$, tels que $f(U_a) \subset V_a$ et

$$\psi_a \circ f \circ \varphi_a(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

Comme f est ouverte, il existe un voisinage ouvert W de b dans N , tel que $f(U_a) = W \cap f(M)$; quitte à remplacer V_a par $W \cap V_a$, on peut supposer que

$$f(U_a) = V_a \cap f(M).$$

Alors $\psi_a : V_a \rightarrow V'_a$ envoie $V_a \cap f(M)$ sur $(\mathbb{R}^r \times \{0\}) \cap V'_a$, donc est une carte de sous-variété pour $f(M)$ en b . \square

5.d Groupes de Lie

Définition 5.8. Un **groupe de Lie** est un groupe G muni d'une structure de variété, telle que les opérations algébriques de produit et de passage à l'inverse soient C^∞ , c'est-à-dire les applications $G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto gh$ et $G \rightarrow G, g \mapsto g^{-1}$ sont C^∞ .

Un groupe de Lie G **agit à gauche** sur une variété M si on a une action à gauche de G sur M , telle que l'application $G \times M \rightarrow M, (g, x) \mapsto g \cdot x$ soit C^∞ .

Notons que si G agit à gauche sur M , alors pour tout $g \in G$, l'application $x \mapsto g \cdot x$ est un difféomorphisme de M , d'inverse donné par l'action de g^{-1} .

Proposition 5.9. Soit G un groupe de Lie agissant sur une variété M , et $x \in M$. Alors :

1° le groupe d'isotropie $G_x = \{g \in G, g \cdot x = x\}$ est une sous-variété fermée de G (**sous-groupe de Lie**);

2° si l'application $G \rightarrow M, g \mapsto g \cdot x$ est propre, alors l'orbite $G \cdot x$ est une sous-variété fermée de M .

Démonstration. 1° Il suffit de vérifier que l'application $f : G \rightarrow M$ donnée par $f(g) = g \cdot x$ est de rang constant. Or, en différentiant l'égalité $(g_0g) \cdot x = g_0 \cdot (g \cdot x)$, c'est-à-dire $f(g_0g) = g_0 \cdot f(g)$, par rapport à g en e , on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} T_e G & \xrightarrow{T_e f} & T_x M \\ \downarrow (L_{g_0})_* & & \downarrow (g_0)_* \\ T_{g_0} G & \xrightarrow{T_{g_0} f} & T_{g_0 \cdot x} M \end{array}$$

où $(g_0)_*$ est l'application tangente au difféomorphisme donné par l'action de g_0 sur M . Le diagramme implique que le rang de $T_{g_0} f$ est égal au rang de $T_e f$, donc le rang de f est constant.

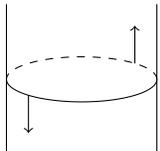
2° L'image de f est fermée puisque f est propre. Pour montrer que c'est une sous-variété, par le théorème 5.5, il suffit de montrer que f est une application ouverte sur son image. Soit $U \subset G$ ouvert, alors $f^{-1}f(U) = \cup_{g \in G_x} (U \cdot g)$ est encore un ouvert de G . Puisque f est propre, elle est fermée, donc $f(G) \setminus f^{-1}f(U) = f(G) \setminus f(U)$ est fermé dans M et donc dans $f(G)$, donc $f(U)$ est ouvert dans $f(G)$. \square

Remarque 5.10. En particulier, sous la seconde hypothèse, si $G_x = \{e\}$ alors f est une immersion injective propre, donc un plongement propre.

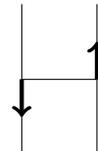
6 Quotients

On a déjà vu des exemples de quotients : ainsi l'espace projectif réel $\mathbb{R}P^n$ peut se voir comme le quotient $(\mathbb{R}^{n+1})^* / \mathbb{R}^*$ ou S^{n+1} / \mathbb{Z}_2 .

La **bande de Möbius** peut être vue comme le quotient $(S^1 \times \mathbb{R}) / \mathbb{Z}_2$, où l'action de \mathbb{Z}_2 sur le cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$ identifie deux droites opposées en renversant la direction :



qui se visualise mieux en considérant un demi-cylindre (un ruban) dont on identifie les bords en inversant la direction :



6.a Aspects topologiques

Définition 6.1. Soit M une variété, munie de l'action à gauche d'un groupe de Lie G . On dit qu'on a une **action propre** si l'application graphe

$$\Phi : G \times M \rightarrow M \times M, \text{ définie par } \Phi(g, x) = (x, g \cdot x), \quad (\text{I.13})$$

est propre.

On pourrait définir cette notion avec G et M seulement topologiques.

En particulier, si l'action est propre, alors l'image de Φ est fermée, donc le quotient M/G est séparé par la proposition 1.9.

Proposition 6.2 (Critère de propreté). *L'action est propre si et seulement si pour tout compact $K \subset M$, l'ensemble $\{g \in G, K \cap g(K)\}$ est compact.*

Démonstration. Si l'action est propre et K est compact, alors $\{g \in G, K \cap g(K) \neq \emptyset\} = \text{pr}_1 \Phi^{-1}(K \times K)$ est compact. Réciproquement, si le critère de propreté est satisfait et $L \subset M \times M$ est compact, alors il existe $K \subset M$ compact tel que $L \subset K \times K$, et

$$\Phi^{-1}(K \times K) = \{(g, x), x \in K, g \cdot x \in K\} \subset K \times \{g \in G, K \cap g(K) \neq \emptyset\}$$

qui est compact, donc $\Phi^{-1}(L) \subset \Phi^{-1}(K \times K)$ est compact ; donc l'action est propre. \square

Remarques. 1° Si G est compact, alors une action de G est toujours propre.

2° Si G est discret (par exemple \mathbb{Z}^n) alors le critère de propreté est équivalent au fait que $\{g \in G, K \cap g(K) \neq \emptyset\}$ soit fini pour tout compact $K \subset M$.

6.b Aspects différentiels

Même pour une action propre, le quotient n'est généralement pas une variété, comme le montre l'exemple de $S^2/SO(2)$, où $SO(2)$ agit par rotations autour de l'axe vertical dans \mathbb{R}^3 : le quotient est le segment vertical $[-1, 1]$, dont les extrémités ne sont pas des points de variété. Ils coïncident aussi avec les points de S^2 auxquels le groupe d'isotropie de l'action est non triviale.

Cet exemple nous amène à ajouter l'hypothèse d'**action libre**, c'est-à-dire d'action pour laquelle, pour tout $x \in M$, le groupe d'isotropie $G_x = \{g \in G, g \cdot x = x\}$ est trivial. D'après la proposition 5.9, pour une action propre et libre, les orbites $G \cdot x$ sont des sous-variétés de M difféomorphes à G .

Théorème 6.3. *Soit M une variété munie d'une action propre et libre d'un groupe de Lie G . Alors M/G admet une unique structure de variété pour laquelle la projection $p : M \rightarrow M/G$ est une submersion. En outre, cette structure admet la propriété universelle suivante :*

si $f : M \rightarrow N$ est une application C^∞ invariante par G ($f(g \cdot x) = f(x)$ pour tous g et x), alors f se factorise de manière unique comme $f = F \circ p$, où $F : M/G \rightarrow N$ est une application C^∞ .

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ p \downarrow & \nearrow F & \\ M/G & & \end{array}$$

Quand G est discret, on dit aussi **action proprement discontinue**.

Lemme 6.4. *Toute submersion $p : M \rightarrow Q$ admet des sections locales, c'est-à-dire que pour tout $x_0 \in M$ il existe un voisinage U de $p(x_0)$ dans Q et une application $s : U \rightarrow M$ de classe C^∞ telle que $s(p(x_0)) = x_0$ et $p \circ s = \text{Id}_U$.*

Démonstration. Par le théorème 4.2, il y a des cartes φ en x et ψ en $p(x)$ dans lesquelles p est de la forme $\psi \circ p \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_p)$. Il suffit de prendre s définie par $\varphi \circ s \circ \psi^{-1}(x_1, \dots, x_p) = (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$. \square

Démonstration de la propriété universelle dans le théorème

Supposons qu'on dispose de la submersion $p : M \rightarrow M/G$, et que soit donnée une application G -invariante $f : M \rightarrow N$. Il existe clairement une unique application $F : M/G \rightarrow N$ telle que $f = F \circ p$, et la question est de montrer que F est C^∞ . Par le lemme, p admet des sections locales $s : M/G \rightarrow M$ de classe C^∞ définies localement telles que $p \circ s = \text{Id}$; alors, toujours localement, on a nécessairement $F = f \circ s$ qui est donc C^∞ .

Démonstration du théorème dans le cas où G est discret

Les hypothèses impliquent que l'application graphe Φ définie en (I.13) est une immersion injective propre, donc un plongement. Puisque G est discret, $\{e\} \times M$ est un ouvert de $G \times M$, donc $\Phi(\{e\} \times M)$ est un ouvert de $\Phi(G \times M)$, donc pour tout $x \in M$ il existe un ouvert $U \subset M$ contenant x tel que

$$(U \times U) \cap \Phi(G \times M) \subset \Phi(\{e\} \times M).$$

Affirmation. La projection $p|_U$ est injective.

En effet, si $y, z \in U$ satisfont $z = g \cdot y$ pour un $g \in G$, alors $(y, z) \in \Phi(G \times M)$ donc en réalité $(y, z) \in \Phi(\{e\} \times M)$, donc $y = z$ et $g = e$. \square

Quitte à restreindre U , on peut supposer que U est l'ouvert d'une carte φ , et on définit la carte $\varphi \circ (p|_U)^{-1}$ sur $p(U)$.

Il reste à vérifier qu'on a ainsi défini un atlas sur M/G , et donc à vérifier que les transitions sont C^∞ . Soient donc deux ouverts de cartes U_1 et U_2 tels que $p|_{U_i}$ soit injective, soient φ_i les cartes correspondantes, alors la transition entre les deux cartes $\varphi_i \circ (p|_{U_i})^{-1}$ est

$$\varphi_2 \circ (p|_{U_2})^{-1} \circ p|_{U_1} \circ \varphi_1^{-1}.$$

Mais $(p|_{U_2})^{-1} \circ p|_{U_1}$ est localement l'action d'un élément de G , donc est C^∞ .

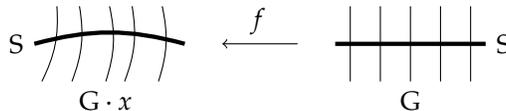
Démonstration du théorème dans le cas général

On commence par une étude locale de l'action du groupe. Soit $x \in M$ et S une tranche à l'action de G en x , à savoir une sous-variété locale $S \subset M$ contenant x , et telle que $T_x(G \cdot x) \oplus T_x S = T_x M$.

Lemme 6.5. *L'application $f : G \times S \rightarrow M$ définie par $f(g, s) = g \cdot s$ est un difféomorphisme local au point (e, x) .*

Démonstration. On a $T_{(e,x)}f(\dot{g}, \dot{s}) = \dot{g} \cdot x + \dot{s}$, où $\dot{g} \mapsto \dot{g} \cdot x$ est l'application tangente à l'origine à l'application $g \mapsto g \cdot x$. Par définition même de S , l'application tangente $T_{(e,x)}f$ est un isomorphisme, donc le lemme résulte du théorème d'inversion locale. \square

Le lemme est illustré par le dessin :



Il signifie que, localement près de $p(x)$, si on prend en compte uniquement l'action d'un voisinage de e dans G , le quotient M/G s'identifie à la tranche S en x . Passer de cette description locale à un atlas sur M/G est une question topologique que nous allons traiter de manière légèrement différente du cas discret, en utilisant le critère de propreté.

Par le lemme, nous avons des ouverts $e \in U_G \subset G$, $x \in U \subset M$, et nous pouvons restreindre la tranche S de sorte qu'on ait un difféomorphisme

$$f : U_G \times S \rightarrow U. \quad (\text{I.14})$$

Lemme 6.6. *Il existe des ouverts $e \in V_G \subset U_G$ et $x \in V_S \subset S$, tels qu'en fixant $V = f(V_G \times V_S)$, on ait : si $s \in V_S$, $y \in V$ et $g \in G$ satisfont $y = gs$, alors $g \in U_G$.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons l'absence de tels voisinages ouverts de e et x . Prenant une suite de voisinages de plus en plus petits de e et x , on déduit l'existence de suites $s_i \in S$, $y_i \in U$ et $g_i \in G$ telles que $s_i, y_i \rightarrow x$, $y_i = g_i s_i$ et $g_i \notin U_G$. Par le critère de propreté, quitte à extraire une sous-suite, nous avons une limite $g = \lim g_i$; vu la limite de s_i et y_i , il faut que $gx = x$ ce qui impose $g = e$ puisque l'action est libre. Mais cela est impossible car $g_i \notin U_G$. \square

Quitte à restreindre S à V_S , nous pouvons supposer que $V_S = S$. Le lemme signifie donc que l'orbite $G \cdot s$ d'un point $s \in S$ coupe S seulement au point s , donc

$$p : S \rightarrow M/G$$

est un homéomorphisme local. Une carte locale φ_S sur S fournit alors une carte $\varphi_S \circ (p|_S)^{-1}$ sur M/G .

Vérifions à présent qu'il s'agit d'un atlas. Si nous avons deux points $x, y \in M$ avec des tranches S_x et S_y en x et y , et si $A \in p(S_x) \cap p(S_y)$, alors il existe $a \in S_x$ et $b \in S_y$ tels que $p(a) = p(b) = A$, donc $b = g \cdot a$ pour un $g \in G$. Localement nous avons des projections $\pi_x : U_x \rightarrow S_x$ et $\pi_y : U_y \rightarrow S_y$ de voisinages de x et y sur les tranches venant de (I.14). Identifiant les cartes de M/G en x et y à S_x et S_y , le changement de carte près de A n'est autre que $z \in S_x \mapsto \pi_y(g \cdot z) \in S_y$ qui est C^∞ .

Remarque 6.7. Le quotient est donc localement difféomorphe aux tranches S à l'action du groupe. En particulier,

$$\dim(M/G) = \dim M - \dim G.$$

On voit aussi que la projection $p : M \rightarrow M/G$ donne une surjection $T_x p : T_x M \rightarrow T_{p(x)}(M/G)$ qui se factorise en un isomorphisme

$$T_x p : T_x M / T_x(G \cdot x) \xrightarrow{\sim} T_{p(x)}(M/G). \quad (\text{I.15})$$

6.c Exemples

1° Le tore $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ est le quotient discret de l'action par translations du groupe \mathbb{Z}^n sur \mathbb{R}^n .

2° Le **demi-plan de Poincaré**, $H = \{z \in \mathbb{C}, \text{Im } z > 0\}$, admet l'action du groupe $SL(2, \mathbb{R})$ par les homographies $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, où $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$. On peut regarder l'action d'un sous-groupe $\Gamma \subset SL(2, \mathbb{Z})$.

Exercice. Montrer que l'action de $SL(2, \mathbb{Z})$ sur H est propre. Montrer que, si pour tout élément de Γ on a $(a+d)^2 \geq 4$, alors l'action de Γ sur H est libre. Par exemple cette condition est réalisée si

$$\Gamma = \ker(SL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow SL(2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})). \quad (\text{I.16})$$

Sous ces hypothèses, le quotient H/Γ est donc une variété de dimension 2. Elle peut être compacte ou non compacte (c'est le cas pour le sous-groupe Γ de (I.16)). Toutes les surfaces compactes de genre (nombre de trous) $g \geq 2$ peuvent être obtenues comme un tel quotient.

3° La **grassmannienne** $G_{p,n}$ est l'espace des sous-espaces vectoriels de dimension p de \mathbb{R}^n , on peut la définir comme $G_{p,n} = \text{Hom}_{\text{inj}}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)/\text{GL}(p, \mathbb{R})$, où l'action de $g \in \text{GL}(p, \mathbb{R})$ sur $u \in \text{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ est par $g \cdot u = u \circ g^{-1}$.

Posons $M = \text{Hom}_{\text{inj}}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$. L'action de $\text{GL}(p, \mathbb{R})$ sur M est libre, montrons qu'elle est également propre en appliquant le critère de propreté. Soit $K \subset M$ compact, il s'agit de montrer que $\{g \in K, K \cap g \cdot K \neq \emptyset\}$ est compact. Soient $u, v \in K$ avec $u = v \circ g^{-1}$, alors on a la même égalité pour toutes les matrices $p \times p$ extraites :

$$\mu_i(u) = \mu_i(v) \circ g^{-1}, \quad i = 1, \dots, N = \binom{n}{p}.$$

Pour contrôler g , il suffit de contrôler l'un des $\mu_i(u)^{-1}$. Or, sur K , on a $\sum_1^N |\det \mu_i(u)| \geq \eta > 0$, donc

$$K = \cup_1^N K_i, \quad K_i = \{u \in K, |\det \mu_i(u)| \geq \frac{\eta}{N}\}.$$

Sur K_i est borné $\mu_i(u)^{-1}$ et donc $g = \mu_i(u)^{-1} \mu_i(v)$. Donc on obtient une borne sur g . Le même raisonnement donne aussi une borne sur g^{-1} , donc $\{g \in K, K \cap g \cdot K \neq \emptyset\}$ est compact. Il en résulte que $G_{p,n}$ est une sous-variété de dimension $np - p^2 = p(n-p)$.

En outre, $G_{p,n}$ est compacte. Cela résulte de la description alternative de $G_{p,n}$ comme

$$G_{p,n} = \text{Isom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)/\text{O}(p),$$

car $\text{Isom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ est compact ; construire $G_{p,n}$ de ce point de vue est plus simple car la propreté de l'action est une conséquence de la compacité de $\text{O}(p)$.

4° Quotients de groupes. Si $H \subset G$ est un sous-groupe de Lie fermé d'un groupe de Lie G , alors l'action de H sur G par translation a pour application graphe $\Phi : H \times G \rightarrow G \times G$, donnée par $\Phi(h, g) = (g, gh^{-1})$. C'est clairement une application propre, et on déduit :

Proposition 6.8. *Si $H \subset G$ est un sous-groupe de Lie fermé d'un groupe de Lie G , alors G/H est une variété.* \square

On peut alors compléter la proposition 5.9 en :

Proposition 6.9. *Soit M une variété munie de l'action propre d'un groupe de Lie G et $x \in M$. Alors :*

- 1° le groupe d'isotropie G_x est un sous-groupe de Lie fermé de G ;
- 2° l'orbite $G \cdot x$ est une sous-variété fermée de M , difféomorphe à G/G_x .

Démonstration. Tout a été montré dans la proposition 5.9, sauf le difféomorphisme avec G/G_x . Or, par la propriété universelle du quotient, on a une factorisation

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & G \cdot x \\ p \downarrow & \nearrow F & \\ G/G_x & & \end{array}$$

Or $G \cdot x$ est une sous-variété d'espace tangent en x égal à $\text{im } T_x f = \text{im } T_{p(e)} F$; par ailleurs, G_x est un sous-groupe de Lie de G d'espace tangent égal à $\ker T_x f$, donc $\ker T_{p(e)} F = 0$. Il en résulte que $T_{p(e)} F$ est un isomorphisme, et la même chose reste vraie en tout point de G/G_x par invariance sous l'action de G . Donc F est un difféomorphisme local; comme c'est une bijection, c'est un difféomorphisme. \square

Exemples. 1° L'action de $\text{SO}(3)$ dans \mathbb{R}^3 donne un isomorphisme $S^2 \simeq \text{SO}(3)/\text{SO}(2)$. Plus généralement, $S^n = \text{SO}(n+1)/\text{SO}(n)$.

2° L'action de $\text{SU}(n+1)$ dans \mathbb{C}^{n+1} induit une action homogène sur $\mathbb{C}P^n$, dont le groupe d'isotropie en un point est $\text{U}(n)$. Donc $\mathbb{C}P^n \simeq \text{SU}(n+1)/\text{U}(n)$.

3° Regardons l'action de $\text{O}(n)$ par conjugaison dans $\text{End}(\mathbb{R}^n)$. Soit π_0 une projection orthogonale sur un sous-espace $\mathbb{R}^p \subset \mathbb{R}^n$. Alors l'orbite de π_0 sous $\text{O}(n)$ est l'espace de toutes les projections orthogonales sur un sous-espace de dimension p de \mathbb{R}^n , donc s'identifie à $G_{p,n}$. D'un autre côté le groupe d'isotropie de π_0 est $\text{O}(p) \times \text{O}(n-p)$. Il en résulte que $G_{p,n} \simeq \text{O}(n)/\text{O}(p) \times \text{O}(n-p)$. En particulier, cela donne encore une autre manière de construire la structure de variété de $G_{p,n}$.

7 Partitions de l'unité

Un **recouvrement** d'un espace M est une famille (U_α) de parties de M telle que $M = \cup U_\alpha$.

Définition 7.1. Soit M un espace topologique et (U_α) un recouvrement de M , alors un **recouvrement plus fin**, ou **raffinement du recouvrement** (U_α) , est un recouvrement (V_β) de M tel que chaque V_β soit inclus dans un U_α .

Une famille (U_α) est **localement finie** si tout $x \in M$ admet un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini de U_α .

Proposition 7.2. Soit M une variété topologique, alors tout recouvrement par des ouverts admet un recouvrement plus fin localement fini. En outre, étant donnée une base de la topologie, le recouvrement plus fin peut être constitué d'éléments de la base.

Un espace satisfaisant la conclusion de la proposition est appelé **paracompact**. La proposition peut donc s'énoncer : toute variété topologique est paracompacte.

Pour démontrer la proposition, nous avons besoin de :

Lemme 7.3. Soit M une variété topologique, alors il existe une suite de compacts $K_n \subset M$ tels que $M = \cup K_n$ et $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$.

Démonstration. Comme M est dénombrable à l'infini, $M = \cup_0^\infty K_n$ pour des compacts K_n .

On va modifier K_n de sorte qu'en outre $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n-1}$: recouvrons K_{n-1} par un nombre fini de boules relativement compactes B_i et posons $K'_n = K_n \cup (\cup_i B_i)$. On obtient ainsi par récurrence une suite (K'_n) qui convient. \square

Démonstration de la proposition 7.2. Soit \mathcal{B} la base de la topologie choisie et (K_n) une suite exhaustive de compacts donnée par le lemme. Soit $V_j = K_j \setminus \overset{\circ}{K}_{j-1}$ et $W_j = \overset{\circ}{K}_{j+1} \setminus K_{j-2}$, donc V_j est compact, W_j est ouvert et $V_j \subset W_j$ (faire un dessin). Soit

$$\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B}, B \subset U_\alpha \text{ pour un } \alpha\},$$

qui est encore une base de la topologie de M . Il s'agit donc de montrer qu'il existe un recouvrement de M par des éléments de \mathcal{B}' . Recouvrons le compact V_j par un nombre fini d'éléments $B_{\alpha_j,1}, \dots, B_{\alpha_j,k_j}$ de \mathcal{B}' inclus dans l'ouvert W_j . Ainsi la famille des $(B_{\alpha_j,i})_{j \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k_j}$

recouvre-t-elle M . En outre, $W_j \cap W_{j'} = \emptyset$ dès que $|j - j'| > 2$, donc $B_{\alpha_j, i} \cap B_{\alpha_{j'}, i'} = \emptyset$ dès que $|j - j'| > 2$, donc la famille est localement finie. \square

Définition 7.4. Soit M une variété, (U_α) un recouvrement ouvert, une **partition de l'unité subordonnée au recouvrement** (U_α) est une famille de fonctions $\chi_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ telles que :

- 1° $0 \leq \chi_\alpha \leq 1$;
- 2° $\text{Supp } \chi_\alpha \subset U_\alpha$;
- 3° $(\text{Supp } \chi_\alpha)$ est localement finie ;
- 4° $\sum_\alpha \chi_\alpha = 1$.

La troisième condition permet de donner un sens à la somme $\sum_\alpha \chi_\alpha$.

Théorème 7.5. Soit (U_α) un recouvrement ouvert d'une variété M , alors il existe sur M une partition de l'unité subordonnée au recouvrement (U_α) .

Démonstration. Nous considérons les cartes $\varphi_\beta : V_\beta \rightarrow \mathbb{B}^n$ à valeurs dans la boule de \mathbb{R}^n et telles que V_β soit inclus dans l'un des U_α . Alors les $W_\beta = \varphi_\beta^{-1}(\mathbb{B}_{1/2}^n)$ sont une base de la topologie de M , donc, par la proposition, il existe un recouvrement plus fin que les (U_α) , constitué d'éléments de (W_β) , et localement fini. Notons le (W_{β_i}) .

Choisissons une fonction f de classe C^∞ sur \mathbb{B}^n telle que

- 1° $f(x) > 0$ pour $x \in \mathbb{B}_{1/2}^n$;
- 2° $f(x) = 0$ pour $|x| \geq \frac{1}{2}$.

Cela nous donne une fonction $f_\beta = f \circ \varphi_\beta$ sur V_β à support compact dans V_β , donc une fonction C^∞ sur M en l'étendant par 0 en dehors de V_β ; en outre, $f_\beta|_{W_\beta} > 0$ et $f_\beta|_{M \setminus W_\beta} = 0$.

Considérons à présent la fonction

$$F = \sum_i f_{\beta_i}.$$

Comme le recouvrement (W_{β_i}) est localement fini, la somme a un sens et est C^∞ ; comme c'est un recouvrement, $F > 0$ partout. Par conséquent,

$$\sum_i \frac{f_{\beta_i}}{F} = 1.$$

Il ne reste plus qu'à ré-indexer la somme pour trouver la partition de l'unité : pour chaque i , choisissons $\alpha(i)$ tel que $V_{\beta_i} \subset U_{\alpha(i)}$. Alors la famille

$$\chi_\alpha = \sum_{i, \alpha(i)=\alpha} \frac{f_{\beta_i}}{F}$$

satisfait les conclusions du théorème. \square

Théorème 7.6 (Forme faible du théorème de Whitney). *Toute variété compacte admet un plongement dans un \mathbb{R}^N pour N assez grand.*

Le théorème s'étend aux variétés non compactes et on peut alors trouver un plongement propre dans un \mathbb{R}^N , voir LEE, Chapitre 6.

Démonstration. Soit un atlas fini $(\varphi_i, U_i)_{i=1, \dots, d}$ de M^n . Soit (χ_i) une partition de l'unité subordonnée aux (U_i) . Alors on définit une application $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{d+nd}$ par

$$f(x) = (\chi_1(x), \dots, \chi_d(x), \chi_1(x)\varphi_1(x), \dots, \chi_d(x)\varphi_d(x)).$$

L'application $\chi_i f_i$ a un sens sur M entier en prolongeant par 0 en dehors de U_i : le résultat est C^∞ puisque $\text{Supp}(\chi_i f_i) \subset U_i$. Ainsi f est bien définie, et est évidemment injective. Pour montrer que c'est un plongement, il suffit de montrer que c'est une immersion. Or

$$T_x f(X) = ((d_x \chi_i(X)), (d_x \chi_i(X)\varphi_i(x) + \chi_i(x)T_x \varphi_i(X))).$$

Si $T_x f(X) = 0$ alors $d_x \chi_i(X) = 0$ et $\chi_i(x)T_x \varphi_i(X) = 0$ pour tout i . Or il existe un i_0 tel que $\chi_{i_0}(x) > 0$, donc $T_x \varphi_{i_0}(X) = 0$ qui implique $X = 0$. Donc $\ker T_x f = 0$ et f est une immersion. \square

8 Théorème de Sard et applications

On rappelle l'énoncé du théorème de Sard :

Théorème 8.1. *Soit $f : M^n \rightarrow N^p$ de classe C^k avec $k \geq \max(n-p+1, 1)$. Alors l'ensemble des valeurs critiques de f est de mesure p -dimensionnelle nulle.*

Nous ne ferons la démonstration que dans le cas le plus simple, $n \leq p$ et $k = 1$. Pour le cas $n > p$ et $k = \infty$, on pourra consulter la preuve dans MILNOR, Chapitre 3, qui est reprise dans LEE, Chapitre 6 ; le cas de régularité finie est montré dans l'article d'origine de Sard⁵. La borne sur k est optimale, il existe des contre-exemples si elle n'est pas satisfaite.

8.a Démonstration du théorème de Sard pour $n \leq p$

Comme une union dénombrable d'ensemble de mesure nulle est de mesure nulle, il suffit de montrer le théorème pour la restriction de f à un ouvert de carte, autrement dit on peut supposer que $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. À nouveau on peut se restreindre à un cube $C = [0, 1]^n$. Puisque f est C^1 , sa différentielle df est uniformément continue dans C , avec un module de continuité $\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tel que $\rho(0) = 0$ et ρ est continu en 0. Alors, pour tous $x, y \in C$, on obtient

$$|f(x) - f(y) - d_y f(x - y)| \leq |x - y|\rho(|x - y|). \quad (\text{I.17})$$

Subdivisons C en k^n cubes C_i de côté $\frac{1}{k}$. Si nous avons un point critique $x_i \in C_i$, notons $f_i(x) = f(x_i) - d_{x_i} f(x - x_i)$ sa linéarisation en x_i , alors de (I.17) on déduit pour tout $x \in C_i$

$$|f(x) - f_i(x)| \leq |x - x_i|\rho(|x - x_i|) \leq \varepsilon_k = \frac{\sqrt{n}}{k} \rho\left(\frac{\sqrt{n}}{k}\right).$$

Ainsi, $f(C_i)$ est inclus dans le ε_k -voisinage de $f_i(C_i)$. Puisque x_i est un point critique de f , le rang de $d_{x_i} f$ est au plus $p - 1$, donc l'image de l'application affine f_i est incluse dans un sous-espace affine de rang au plus $n - 1$.

Notons $m = \max_C |df|$. Donc $f_i(C_i)$ est inclus dans un hypercube de dimension $p - 1$ et de côté $\frac{m}{k}$. Et donc un ε_k -voisinage de $f_i(C_i)$ est inclus dans le produit d'un hypercube de dimension $p - 1$ et de côté $\frac{m}{k} + 2\varepsilon_k$ et d'un intervalle de longueur $2\varepsilon_k$, donc est de volume au plus

$$2\varepsilon_k \left(\frac{m}{k} + 2\varepsilon_k\right)^{p-1} \leq 2(m + 2\sqrt{n})^{p-1} \frac{\rho\left(\frac{\sqrt{n}}{k}\right)}{k^p}$$

5. SARD A. 1942, *The measure of the critical values of differentiable maps*, Bull. Am. Math. Soc. 48, 883-890.

si on a pris k suffisamment grand de sorte que $\rho(\frac{\sqrt{n}}{k}) \leq 1$.

Notons E l'ensemble des points critiques de f . Rappelons que l'estimation précédente est valable au cas où $E \cap C_i \neq \emptyset$. Sommant sur tous les cubes intersectant E (au pire, tous intersectent E donc il y en a au plus k^n), il en résulte

$$\mu(f(E)) \leq 2(m + 2\sqrt{n})^{p-1} k^{n-p} \rho(\frac{\sqrt{n}}{k}).$$

Pour $n \leq p$, le second membre tend vers 0 quand $k \rightarrow \infty$. Donc $\mu(f(E)) = 0$. \square

8.b Le théorème de Whitney

Théorème 8.2. *Toute variété compacte de dimension n admet un plongement dans \mathbb{R}^{2n+1} .*

Remarques. 1° Le théorème de Whitney « difficile » donne un plongement dans \mathbb{R}^{2n} . La démonstration ci-dessous ne donne qu'une immersion dans \mathbb{R}^{2n} .

2° Le théorème s'étend aux variétés non compactes, et on obtient un plongement propre, voir LEE, Chapitre 6.

Démonstration. Par le théorème 7.6, il existe un plongement $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ pour un N assez grand, donc nous pouvons considérer M comme sous-variété de \mathbb{R}^N . Soit $D \subset \mathbb{R}^N$ une droite et p_D la projection orthogonale sur D^\perp , on cherche D de sorte que

$$p_D \circ i : M \rightarrow D^\perp = \mathbb{R}^{N-1}$$

demeure un plongement. Deux conditions à vérifier :

Première condition. Il faut que $p_D \circ i$ soit injective, c'est-à-dire que si $x \neq y \in M$ alors $x - y \notin D$; notant $\Delta = \{(x, x), x \in M\}$ la diagonale de M , et $f : M \times M \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{R}P^{N-1}$ définie par

$$f(x, y) = \text{droite}(xy) = [x - y],$$

cette condition se récrit comme

$$D \notin f(M \times M \setminus \Delta). \quad (\text{I.18})$$

Si $2n < N - 1$, alors le théorème de Sard assure que $E_1 = f(M \times M \setminus \Delta)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}P^{N-1}$, donc un tel D existe.

Seconde condition. Il faut que $p_D \circ i$ soit une immersion, c'est-à-dire $T_x p_D = p_D|_{T_x M}$ soit injective pour tout $x \in M$, soit encore $D \not\subset T_x M$ pour tout $x \in M$. Définissons

$$TM = \{(x, X) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, x \in M, X \in T_x M\}, \quad (\text{I.19})$$

et $g : TM \rightarrow \mathbb{R}^N$ par $g(x, X) = X$, alors, choisissant un générateur v de D , il faut que

$$v \notin g(TM). \quad (\text{I.20})$$

Or on a le résultat suivant :

Lemme 8.3 (Fibré tangent à une sous-variété de \mathbb{R}^N). *TM est une sous-variété de \mathbb{R}^{2N} de dimension $2n$.*

Le lemme permet d'appliquer le théorème de Sard : si $2n < N$ alors l'image E_2 de g est de mesure nulle dans \mathbb{R}^N , donc on peut trouver un tel v .

Notons $\pi : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^{N-1}$. Alors $\pi^{-1}(E_1)$ est encore de mesure nulle (montrer que l'image réciproque d'un ensemble de mesure nulle par une submersion est de mesure

nulle), donc $\pi^{-1}(E_1) \cup E_2$ est de mesure nulle, donc, sous la condition de dimension $2n < N - 1$ on peut trouver D satisfaisant simultanément les deux conditions (I.18) et (I.20), et $p_D \circ i : M \rightarrow \mathbb{R}^{N-1}$ est un plongement. En itérant ce processus, on peut aller jusqu'à un plongement dans \mathbb{R}^{2n+1} .

En outre, la condition pour obtenir une immersion est plus faible, puisqu'il suffit que $2n < N$, donc on peut trouver une immersion dans \mathbb{R}^{2n} . \square

Démonstration du lemme 8.3. Soit $p(x, X) = x$ la projection $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Soit $x \in M$, et $\varphi : U \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^n$ une carte de sous-variété de M en x , donc $\varphi(M \cap U) = \mathbb{R}^n \cap U'$. On va fabriquer une carte de sous-variété pour TM sur l'ouvert $p^{-1}(U)$: définissons

$$\begin{aligned} \Phi : U \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow U' \times \mathbb{R}^n, \\ (x, X) &\longmapsto (\varphi(x), d_x \varphi(X)). \end{aligned}$$

C'est un difféomorphisme qui envoie $p^{-1}(U)$ sur $(\mathbb{R}^n \cap U') \times \mathbb{R}^n$, et donc une carte de sous-variété de dimension $2n$ pour $TM \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. \square

Chapitre II

Champs de vecteurs

9 Fibré tangent, champs de vecteurs

9.a Le vocabulaire des fibrés

On a vu section 8 la définition du fibré tangent $TM \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ à une sous-variété $M \subset \mathbb{R}^N$. On dispose de la projection sur le premier facteur, $p : TM \rightarrow M$, de sorte que pour tout $x \in M$, la fibre $p^{-1}(x)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^N . C'est un cas particulier de fibré vectoriel, dont nous donnons à présent les définitions générales.

Définition 9.1. Soit B une variété. Une **fibration** au-dessus de B est une submersion surjective $p : M \rightarrow B$.

Un **B -difféomorphisme** entre deux fibrations $p : M \rightarrow B$ et $q : M' \rightarrow B$ est un difféomorphisme $f : M \rightarrow M'$ tel que $q \circ f = p$, c'est-à-dire le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & & B \end{array}$$

La **restriction de la fibration** $p : M \rightarrow B$ au-dessus de l'ouvert $U \subset B$ est $p|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \rightarrow U$; elle est notée souvent $M|_U$.

On dit que $p : M \rightarrow B$ est une **fibration localement triviale** si tout $x \in B$ admet un voisinage U tel qu'il existe un U -difféomorphisme $M|_U \simeq U \times F$.

Si $p : M \rightarrow B$ est une fibration, alors une **fibre de la fibration** est la sous-variété $p^{-1}(b)$ pour un $b \in B$, elle est parfois notée M_b .

Définition 9.2. Un **fibré vectoriel réel** est une fibration $p : E \rightarrow B$ dont chaque fibre a une structure d'espace vectoriel réel, et tout $b \in B$ admet un voisinage U tel qu'on ait un U -difféomorphisme $\varphi : E|_U \simeq U \times \mathbb{R}^k$ de sorte que la restriction de φ à chaque fibre soit un isomorphisme d'espace vectoriel. Un tel U -difféomorphisme est appelé une **trivialisat** locale du fibré E .

Un **morphisme de fibré vectoriel** entre les fibrés E et E' au-dessus de B est une application $f : E \rightarrow E'$ de classe C^∞ , tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{f} & E' \\
 & \searrow p & \swarrow p' \\
 & & B
 \end{array}$$

et la restriction de f à chaque fibre, $f|_{E_b} : E_b \rightarrow E'_b$, soit linéaire. En outre, si f est bijective et f^{-1} est un morphisme de fibrés, alors on dit que f est un **isomorphisme de fibrés vectoriels**.

Cette définition s'étend immédiatement à la définition d'un **fibré vectoriel complexe** en demandant que les fibres aient une structure d'espace vectoriel complexe, et que les trivialisations locales et les morphismes soient \mathbb{C} -linéaires sur chaque fibre.

Lemme 9.3. *Un morphisme de fibrés vectoriels $f : E \rightarrow E'$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels si et seulement si f est un isomorphisme linéaire sur chaque fibre.*

Démonstration. Soit U un ouvert sur lequel nous avons des trivialisations locales τ et τ' de E et E' :

$$\begin{array}{ccc}
 E|_U & \xrightarrow{f} & E'|_U \\
 \downarrow \tau & & \downarrow \tau' \\
 U \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{F} & U \times \mathbb{R}^k
 \end{array}$$

Si f est un morphisme de fibrés vectoriels, alors $F = \tau' \circ f \circ \tau^{-1}$ est nécessairement de la forme

$$F(x, v) = (x, g(x)v), \quad \text{pour } g : U \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k) \text{ de classe } C^\infty.$$

Si f est inversible sur chaque fibre, alors g est à valeurs dans $GL(k, \mathbb{R})$ donc F a un inverse C^∞ donné par

$$F^{-1}(x, v) = (x, g(x)^{-1}v).$$

Donc $f^{-1} = \tau^{-1} \circ F^{-1} \circ \tau'$ est de classe C^∞ et f est un isomorphisme de fibrés vectoriels. \square

Exemple 9.4. Soit $H = \{(x, t) \in \mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}, t \in x\}$, et $p : H \rightarrow \mathbb{R}P^n$ défini par $p(x, t) = x$. Alors (H, p) est un fibré vectoriel réel sur $\mathbb{R}P^n$, appelé **fibré tautologique**. Une trivialisations locale au-dessus de l'ouvert $U_i = \{[x_0 : \dots : x_n], x_i \neq 0\}$ est donnée par

$$\begin{array}{ccc}
 H|_{U_i} & \xrightarrow{f_i} & U_i \times \mathbb{R} \\
 (x, (y_0, \dots, y_n)) & \mapsto & (x, y_i)
 \end{array}$$

À ce stade, nous n'avons pas précisé la structure de variété sur H , pour laquelle f_i est un difféomorphisme. Par exemple on peut modifier légèrement f_i pour démontrer que H est une sous-variété de $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}^{n+1}$: pour simplifier prenons $i = 0$, alors le difféomorphisme

$$\begin{array}{ccc}
 U_0 \times \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \\
 ([1 : x_1 : \dots : x_n], (y_0, \dots, y_n)) & \mapsto & ((x_1, \dots, x_n), (y_0, y_1 - y_0x_1, \dots, y_n - y_0x_n))
 \end{array}$$

envoie $H|_{U_0}$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$, donc est une carte de sous-variété pour H .

Une autre méthode pour donner la structure de variété de H serait de considérer les trivialisations locales f_i (composées sur le premier facteur avec des cartes $U_i \simeq \mathbb{R}^n$) comme des cartes sur H : l'ensemble des (f_i) donne donc un atlas (bien sûr il faut vérifier que les transitions sont C^∞). C'est le plus naturel du point de vue de la théorie des fibrés vectoriels, dont on pourra lire le commencement dans LEE, Chapitre 10.

9.b Fibré tangent

Soit M une variété. On va définir le **fibré tangent** à M , qui est un fibré vectoriel $p : TM \rightarrow M$ donc les fibres sont les espaces tangents : $p^{-1}(x) = T_x M$. Dans le cas où M est une sous-variété de \mathbb{R}^N , ce fibré a été construit dans le lemme 8.3. Dans le cas où M est une variété abstraite, on peut procéder de la manière suivante :

- comme ensemble, on a $TM = \coprod_{x \in M} T_x M$, donc les éléments de TM sont des couples (x, X) avec $X \in T_x M$; on dispose d'une projection $p : TM \rightarrow M$ donnée par $p(x, X) = x$;
- soit une carte $\varphi_i : U_i \subset M \rightarrow U'_i \subset \mathbb{R}^n$ de M , alors l'application $T\varphi_i$ définie sur $TU_i = (TM)|_{U_i}$ comme la composition

$$\begin{array}{ccc} TU_i & \xrightarrow{F_i} & U_i \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\varphi_i \times \text{Id}} & U'_i \times \mathbb{R}^n \\ (x, X) & \mapsto & (x, T_x \varphi_i(X)) & \mapsto & (\varphi_i(x), T_x \varphi_i(X)) \end{array}$$

fournit une carte de TM ; les transitions sont données par

$$T\varphi_j \circ (T\varphi_i)^{-1}(x, X) = (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x), T_{\varphi_i^{-1}(x)} \varphi_j \circ T_x \varphi_i^{-1}(X)) \quad (\text{II.1})$$

qui est un difféomorphisme $\varphi_i(U_{ij}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi_j(U_{ij}) \times \mathbb{R}^n$; en outre le graphe est fermé (parce que celui de $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ l'est) donc on obtient ainsi une structure de variété sur TM ;

- les applications F_i donnent des trivialisations locales de fibré vectoriel, et donc fournissent en outre une structure de fibré vectoriel sur $p : TM \rightarrow M$.

Remarques. 1° Si M est une variété de classe C^k , alors les transitions $\varphi_j \varphi_i^{-1}$ sont C^k , et les transitions $(T\varphi_j) \circ (T\varphi_i)^{-1}$ données par (II.1) sont seulement C^{k-1} , donc TM est une variété de classe C^{k-1} .

2° Une autre construction du fibré tangent consiste à prendre un plongement $M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ et à utiliser la construction du fibré tangent à une sous-variété de \mathbb{R}^N (lemme 8.3).

9.c Champs de vecteurs

Définition 9.5. Une **section** d'une fibration $p : E \rightarrow B$ est une application $s : B \rightarrow E$ de classe C^∞ telle que $p \circ s = \text{Id}_B$, autrement dit, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ & \downarrow p & \\ s \nearrow & & \searrow \\ & B & \end{array}$$

Puisqu'une fibration est une submersion, le lemme 6.4 montre que toute fibration admet des sections locales.

Définition 9.6. Un **champ de vecteurs** sur M est une section du fibré tangent TM .

Exemples. Dessiner et identifier les champs de vecteurs suivants :

- $X(x, y) = \frac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$;
- $X(x, y) = (-y, x)$ sur \mathbb{R}^2 ;
- $X(x, y, z) = (y, -x, 0)$ sur $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Proposition 9.7. Soit $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel, alors l'espace $\Gamma(M, E)$ des sections de E sur M est un $C^\infty(M)$ -module, c'est-à-dire :

- si $s, t \in \Gamma(M, E)$, alors $s + t \in \Gamma(M, E)$;
- si $f \in C^\infty(M)$ et $s \in \Gamma(M, E)$ alors $fs \in \Gamma(M, E)$.

Démonstration. Il s'agit de montrer que $s + t$ et fs sont bien de classe C^∞ si s, t et f le sont. Il suffit de le voir dans une trivialisatoin locale sur un ouvert U :

$$\begin{array}{ccc}
 E|_U & \xrightarrow{\varphi} & U \times \mathbb{R}^k \\
 \searrow & & \swarrow \\
 & U &
 \end{array}$$

$\varphi \circ s(x) = (x, s'(x))$ pour $s' : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ de classe C^∞ ,
 $\varphi \circ t(x) = (x, t'(x))$ pour $t' : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ de classe C^∞ ,
 donc
 $\varphi \circ (s + t)(x) = (x, s'(x) + t'(x))$ est C^∞ , et
 $\varphi \circ (fs)(x) = (x, f(x)s(x))$ est C^∞ .

□

Exemple 9.8. Le **fibré cotangent** d'une variété M , noté T^*M , est un fibré vectoriel sur M dont la fibre T_x^*M en un point $x \in M$ est l'espace des formes linéaires sur T_xM , donc $T_x^*M = (T_xM)^*$. En effet, comme pour la construction du fibré tangent, il suffit de donner une trivialisatoin au-dessus d'un ouvert de carte (φ, U) sur M , qu'on peut écrire ¹

$$\begin{aligned}
 T^*M|_U &\xrightarrow{\Phi} U \times (\mathbb{R}^n)^* \\
 (x, \alpha) &\mapsto (x, {}^t(T_x\varphi)^{-1}(\alpha))
 \end{aligned}$$

Si $f \in C^\infty(M)$, alors sa différentielle est en chaque point une forme linéaire $d_x f \in T_x^*M$, donc df est une section du fibré T^*M . Vérifions qu'elle est bien C^∞ : dans la trivialisatoin ci-dessus, $\Phi(df) = (x, \alpha(x))$ avec

$$\alpha(x) = {}^t(T_x\varphi)^{-1}(d_x f) = d_x f \circ T_{\varphi(x)}\varphi^{-1} = d_{\varphi(x)}(f \circ \varphi^{-1});$$

mais $f \circ \varphi^{-1}$ est l'expression locale de f dans la carte φ , donc une fonction de classe C^∞ sur $U' = \varphi(U)$, donc α est de classe C^∞ .

Exercice. Vérifier que si $\alpha \in \Gamma(M, T^*M)$ et $X \in \Gamma(M, TM)$ alors $\alpha(X) \in C^\infty(M)$.

9.d Exercices (fibré normal et voisinage tubulaire)

Exercice 9.d.1. Soit M sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension p .

1° Montrer que l'ensemble $\{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n, v \in (T_xM)^\perp\}$ est une sous-variété de $M \times \mathbb{R}^n$, puis un fibré vectoriel sur M de dimension $n - p$. On l'appelle le **fibré normal** de M , noté $N(M)$.

2° Montrer que le fibré normal de $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est trivial.

3° Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ une submersion et $M = f^{-1}(\{0\})$. Montrer que $N(M)$ est trivial.

Exercice 9.d.2. Soit M une sous-variété compacte C^∞ de dimension d de \mathbb{R}^n . On note $N(M)$ le fibré normal de M .

1° On définit une application $f : N(M) \rightarrow \mathbb{R}^n$ par $f(x, v) = x + v$ où $x \in M, v \in T_xM$. Montrer que f est une application C^∞ .

On veut montrer :

1. On rappelle qu'une application linéaire $u : E \rightarrow F$ induit ${}^t u : F^* \rightarrow E^*$ par ${}^t u(\alpha) = \alpha \circ \Phi$.

Théorème 9.9 (Théorème du voisinage tubulaire). *Si ε est assez petit, alors la restriction de f à $N_\varepsilon(M) := \{(x, v) \in N(M), \|v\| < \varepsilon\}$ définit un difféomorphisme de $N_\varepsilon(M)$ sur un voisinage de M , appelé ε -voisinage tubulaire de M dans \mathbb{R}^n .*

2° Montrer que si ε est choisi assez petit, $T_{(x,v)}f$ est inversible pour $(x, v) \in N_\varepsilon(M)$.

3° Montrer que si (x_n) et (y_n) sont deux suites de points de M ayant même limite z , et v une valeur d'adhérence de $\frac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|}$, alors $v \in T_z M$.

4° Montrer qu'il n'existe pas de suites $(x_n, v_n), (y_n, w_n)$ de $N(M)$ telles que $f(x_n, v_n) = f(y_n, w_n)$ et telles que (v_n) et (w_n) tendent vers 0. On distinguera les cas où, après extraction d'une sous-suite, $\lim x_n = \lim y_n$ et $\lim x_n \neq \lim y_n$. Conclure.

5° L'image $f(N_\varepsilon(M))$ est appelée un voisinage tubulaire de M . Montrer que si $y = f(x, v) \in f(N_\varepsilon(M))$, alors $d(y, M) = \|v\|$.

Remarque 9.10. En particulier, l'application $r : x \mapsto \text{pr}_M f^{-1}(x)$ est une rétraction de $N_\varepsilon(M)$ sur M , c'est-à-dire une application $r : N_\varepsilon(M) \rightarrow M$ satisfaisant $r|_M = \text{Id}_M$.

Ce théorème s'étend au cas où M est non compacte, mais on ne peut plus prendre une distance ε uniforme à M , voir LEE, théorème 6.24.

10 Champs de vecteurs et dérivations

10.a Dérivations

Soit M une variété et $X \in \Gamma(TM)$ un champ de vecteurs. Si $f \in C^\infty(M)$ on note $X \cdot f$ la fonction définie par $X \cdot f(x) = d_x f(X)$, et $\mathcal{L}_X : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ l'opérateur défini par

$$\mathcal{L}_X f = X \cdot f.$$

Exemple 10.1. Soit M un ouvert de \mathbb{R}^n , donc $TM = M \times \mathbb{R}^n$ et un champ de vecteurs est une application $M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Soit $X_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, où le coefficient 1 est en i -ème position. Alors $X_i \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ et c'est pourquoi on adopte pour le champ de vecteurs X_i la notation

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ ou parfois simplement } \partial_i.$$

Un champ de vecteurs général s'écrit $X = (X_1(x), \dots, X_n(x)) = \sum X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$, de sorte que

$$X \cdot f = \sum X_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Une **dérivation** d'une \mathbb{R} -algèbre commutative A est une application \mathbb{R} -linéaire $D : A \rightarrow A$ telle que $D(ab) = (Da)b + a(Db)$ pour tous $a, b \in A$. On notera $\text{Der}(A)$ l'espace de toutes les dérivations de A .

Propriétés. 1° \mathcal{L}_X est une dérivation de l'algèbre $C^\infty(M)$;

2° Fonctorialité : si $\varphi : M \rightarrow N$ est un difféomorphisme, alors on peut transporter champs de vecteurs et dérivations de M vers N : on a des isomorphismes

- $\varphi_* : \Gamma(M, TM) \rightarrow \Gamma(N, TN)$ défini par $\varphi_* X(y) = T_{\varphi^{-1}(y)} \varphi(X(\varphi^{-1}(y)))$;
- $\varphi_* : \text{Der}(C^\infty(M)) \rightarrow \text{Der}(C^\infty(N))$ défini par $\varphi_* D(f) = D(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$;

alors l'application $X \rightarrow \mathcal{L}_X$ est fonctorielle au sens où le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(M, TM) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \text{Der}(M) \\ \downarrow \varphi_* & & \downarrow \varphi_* \\ \Gamma(N, TN) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \text{Der}(N) \end{array}$$

La démonstration de ces propriétés est laissée en exercice.

Formules. Supposons que $\varphi : M \rightarrow N$ soit un difféomorphisme. Prenons des coordonnées locales (x_i) et (y_j) sur M et N respectivement, et notons le difféomorphisme $y = \varphi(x) = (\varphi_j(x))$ dans ces coordonnées. Alors

$$\varphi_* \frac{\partial}{\partial x_i}(y) = d_{\varphi^{-1}(y)} \varphi \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\varphi^{-1}(y)) = \sum_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\varphi^{-1}(y)) \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Plus généralement, si $X = \sum X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$, alors $\varphi_* X(y) = \sum (X \cdot \varphi_j)(\varphi^{-1}(y)) \frac{\partial}{\partial y_j}$. Le lecteur pourra appliquer ces formules au calcul en coordonnées cartésiennes (x, y) des champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial r}$ et $\frac{\partial}{\partial \theta}$ des coordonnées polaires (r, θ) .

Théorème 10.2. *L'application $X \mapsto \mathcal{L}_X$ est un isomorphisme de \mathbb{R} -espaces vectoriels*

$$\Gamma(M, TM) \rightarrow \text{Der}(C^\infty(M)).$$

Si $D_1, D_2 \in \text{Der}(A)$ alors on définit le **crochet** de D_1 et D_2 comme

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1.$$

Propriétés. 1° $[D_1, D_2]$ est encore une dérivation de A ;

2° $[D_1, D_2] = -[D_2, D_1]$;

3° $[[D_1, D_2], D_3] + [[D_2, D_3], D_1] + [[D_3, D_1], D_2] = 0$ (identité de Jacobi).

Ces propriétés fournissent une structure d'**algèbre de Lie** sur $\text{Der}(A)$. Via l'isomorphisme fourni par le théorème, on obtient aussi une structure d'algèbre de Lie sur $\Gamma(TM)$:

Corollaire 10.3. *On peut définir le **crochet** $[X, Y]$ de deux champs de vecteurs X et Y par $\mathcal{L}_{[X, Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$, c'est-à-dire, pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$,*

$$[X, Y] \cdot f = X \cdot (Y \cdot f) - Y \cdot (X \cdot f).$$

Exemple 10.4. Revenons à l'exemple d'un ouvert de \mathbb{R}^n . On écrit $X = \sum X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $Y = \sum Y_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$. Alors

$$X \cdot (Y \cdot f) = \sum_j X_j \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_i Y_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{i,j} X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + X_j Y_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i};$$

faisant la différence avec $Y \cdot (X \cdot f)$, les termes en dérivées secondes s'annulent à cause de la symétrie des dérivées secondes, et il reste

$$X \cdot (Y \cdot f) - Y \cdot (X \cdot f) = \sum_i \left(\sum_j X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

donc

$$[X, Y] = \sum_i \left(\sum_j X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (\text{II.2})$$

10.b Démonstration du théorème 10.2

On procède en trois étapes.

Étape 1 : Cas d'un ouvert convexe de \mathbb{R}^n . Supposons que M soit un ouvert convexe de \mathbb{R}^n et $D \in \text{Der}(C^\infty(M))$, on cherche un champ de vecteurs

$$X = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\text{II.3})$$

tel que $D = \mathcal{L}_X$. Nécessairement $X_i = Dx_i$. Donc définissons X par (II.3) avec la valeur $X_i = Dx_i$, et notons $D' = \mathcal{L}_X$. Alors D et D' sont deux dérivations de $C^\infty(M)$ qui coïncident sur les fonctions coordonnées x_i , et bien sûr sur les constantes (nécessairement $D1 = 0$).

Lemme 10.5. Soit $a \in M$, alors il existe $g_i \in C^\infty(M)$ telles que

$$f(x) = f(a) + \sum_1^n (x_i - a_i)g_i(x).$$

Soit $a \in M$, appliquons $D - D'$ à la formule pour f fournie par le lemme :

$$(D - D')f = \sum_1^n (D - D')(x_i - a_i)g_i + (x_i - a_i)(D - D')(g_i).$$

Puisque D et D' coïncident sur les fonctions affines, le premier terme est nul, et, évaluant au point a , nous déduisons $[(D - D')f](a) = 0$. Comme a était arbitraire $(D - D')f = 0$ pour toute fonction f de classe C^∞ , et donc $D = D'$. Le théorème est démontré pour M . \square

Démonstration du lemme 10.5. On a la formule, puisque M est convexe,

$$f(x) - f(a) = \int_0^1 d_{a+t(x-a)}f(x-a)dt = \sum (x_i - a_i)g_i(x),$$

$$\text{où } g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(x-a))dt. \quad \square$$

Étape 2 : Localisation. Avant de passer à la démonstration générale du théorème, observons qu'un champ de vecteurs $X \in \Gamma(M, TM)$ peut se restreindre sur un ouvert U en un champ de vecteurs $X|_U \in \Gamma(U, TM)$. Mais l'opération de restriction est moins évidente pour les dérivations ; pour la définir, nous commençons par montrer qu'une dérivation est locale au sens suivant :

Lemme 10.6. Soit U un ouvert de M et $D \in \text{Der}(C^\infty(M))$, si $f \in C^\infty(M)$ satisfait $f|_U = 0$, alors $(Df)|_U = 0$.

Démonstration. Soit $a \in U$ et χ une fonction cut-off près de a , c'est-à-dire $\chi = 1$ au voisinage de a et $\text{Supp } \chi \subset U$. Si $f|_U = 0$, alors $\chi f = 0$ donc

$$0 = D(\chi f) = (D\chi)f + \chi Df,$$

ce qui nous donne $(\chi Df)|_U = 0$ et en particulier $Df(a) = 0$. Comme a était arbitraire dans U , le lemme est démontré. \square

Comme conséquence du lemme, nous pouvons définir une dérivation D_U de l'algèbre $C^\infty(U)$ par restriction de D , caractérisée par

$$D_U(f|_U) = (Df)|_U \quad \text{pour toute } f \in C^\infty(M).$$

En effet, soit $f \in C^\infty(U)$ et $a \in U$, on définit $(D_U f)(a) = D(\chi f)(a)$, où χ est une fonction cut-off comme celle utilisée dans la démonstration du lemme. C'est bien défini car, par le lemme, $(Df)(a)$ ne dépend que de la valeur de f dans un voisinage de a , donc $D(\chi f)(a)$ ne dépend pas de la fonction cut-off choisie.

Étape 3 : Cas général. Grâce à la localisation on se ramène au cas des ouverts convexes de \mathbb{R}^n . On recouvre M par des ouverts U_i de cartes $\varphi_i : U_i \rightarrow U'_i$ où U'_i est un ouvert convexe de \mathbb{R}^n (par exemple une boule).

Injectivité. Si $D = \mathcal{L}_X = 0$, alors $D_{U_i} = \mathcal{L}_{X|_{U_i}} = 0$ donc, par le cas d'un ouvert convexe de \mathbb{R}^n , on a $X|_{U_i} = 0$. Donc $X = 0$.

Surjectivité. Donnons-nous D et cherchons X tel que $D = \mathcal{L}_X$. Appliquant le cas d'un ouvert convexe de \mathbb{R}^n , on déduit qu'il existe $X_i \in \Gamma(U_i, TM)$ tel que $D_{U_i} = \mathcal{L}_{X_i}$. Sur chaque intersection U_{ij} on a $D_{U_{ij}} = (\mathcal{L}_{X_i})_{U_{ij}} = (\mathcal{L}_{X_j})_{U_{ij}}$, donc par l'énoncé d'unicité, $X_i|_{U_{ij}} = X_j|_{U_{ij}}$. Donc les champs de vecteurs X_i se recollent en un champ de vecteurs X sur M . Finalement $(D - \mathcal{L}_X)|_{U_i} = 0$ pour chaque i donc $D = \mathcal{L}_X$. \square

10.c Conséquences

Corollaire 10.7. Soit $\varphi : M \rightarrow N$ un difféomorphisme, alors pour tous champs de vecteurs X et Y sur M on a $[\varphi_* X, \varphi_* Y] = \varphi_* [X, Y]$.

Démonstration. Compte tenu de la functorialité de l'isomorphisme fourni par le théorème 10.2, il suffit de le démontrer pour des dérivations, à savoir de montrer $[\varphi_* D_1, \varphi_* D_2] = \varphi_* [D_1, D_2]$ pour toutes dérivations D_1, D_2 sur M . Soit $g \in C^\infty(N)$, alors $(\varphi_* D_2)g = D_2(g \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$ et donc

$$(\varphi_* D_1)(\varphi_* D_2)g = D_1 D_2 (g \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}.$$

Finalement, $[\varphi_* D_1, \varphi_* D_2]g = [D_1, D_2](g \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = \varphi_* [D_1, D_2]g$. \square

On déduit :

Corollaire 10.8. Si un groupe de Lie G agit sur la variété M , alors G agit sur $\Gamma(TM)$ (on note l'action $X \mapsto g_* X$), et

$$\Gamma(M, TM)^G = \{X \in \Gamma(M, TM), g_* X = X \text{ pour tout } g \in G\}$$

est une sous-algèbre de Lie de $\Gamma(M, TM)$. \square

Exercice. Montrer que pour toute fonction f et tous champs de vecteurs X et Y sur M , on a la formule

$$[fX, Y] = f[X, Y] - (Y \cdot f)X. \quad (\text{II.4})$$

Calculer en coordonnées locales en utilisant la formule (II.2), et donner une seconde démonstration en utilisant le théorème 10.2.

10.d Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Considérons maintenant un groupe de Lie G . On fait agir G sur lui-même par translation à gauche : l'action est donc donnée par

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \text{Diff}(G) \\ g &\longmapsto L_g : g' \mapsto gg' \end{aligned}$$

Un élément $g \in G$ agit donc sur le champ de vecteurs $X \in \Gamma(\text{TG})$ par

$$(g_*X)(g') = T_{g^{-1}g'}L_g(X(g^{-1}g')).$$

Par le corollaire 10.8, l'espace $\Gamma(G, \text{TG})^G$ des champs de vecteurs invariants à gauche est une sous-algèbre de Lie de $\Gamma(G, \text{TG})$. Or :

Proposition 10.9. *L'évaluation à l'élément neutre donne un isomorphisme :*

$$\begin{aligned} \Gamma(G, \text{TG})^G &\xrightarrow{\sim} T_eG \\ X &\longmapsto X(e). \end{aligned}$$

Par conséquent, T_eG a une structure naturelle d'algèbre de Lie ; avec cette structure T_eG est appelé l'**algèbre de Lie du groupe de Lie** G .

Démonstration. Si $X \in \Gamma(\text{TG})^G$, alors $X = g_*X$ pour tout $g \in G$; évaluant cette égalité au point g , nous obtenons

$$X(g) = T_eL_g(X(e)). \quad (\text{II.5})$$

Il en résulte que l'application évaluation $X \mapsto X(e)$ est injective sur $\Gamma(G, \text{TG})^G$. Pour montrer qu'elle est surjective, partons de $X_0 \in T_eG$ et définissons $X \in \Gamma(G, \text{TG})$ par la formule (II.5), alors, puisque $L_{gg'} = L_g \circ L_{g'}$,

$$X(gg') = T_eL_{gg'}(X_0) = T_{g'}L_g \circ T_eL_{g'}(X_0) = T_{g'}L_g(X(g'))$$

ce qui signifie que $g_*X = X$. Donc $X \in \Gamma(G, \text{TG})^G$. \square

Exemple 10.10. Prenons $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$, donc $T_eG = \text{M}(n, \mathbb{R})$. À un élément $a \in T_eG$ est associé le champ de vecteurs invariant à gauche $A(g) = T_eL_g(a) = ga$. Calculons maintenant le crochet des champs de vecteurs A et B invariants à gauche, associés aux matrices a et b : soit $f \in C^\infty(G)$, alors

$$A \cdot B \cdot f(g) = A \cdot \{d_g f(gb)\} = d_g^2 f(ga, gb) + d_g f(gab),$$

donc

$$[A, B] \cdot f(g) = d_g f(gab - gba) = d_g f(g[a, b])$$

donc $[A, B]$ est le champ de vecteurs invariant à gauche associé à la matrice $[a, b]$. Ainsi le crochet de Lie sur T_eG coïncide-t-il avec le crochet standard des matrices de $\text{M}(n, \mathbb{R})$.

Proposition 10.11. *Soit $N \subset M$ une sous-variété et $X, Y \in \Gamma(\text{TM})$ tels que $X|_N$ et $Y|_N$ soient tangents à N , alors $[X, Y]|_N = [X|_N, Y|_N]$.*

Démonstration. Exercice. \square

Corollaire 10.12. *Soit $G \subset \text{GL}(n, \mathbb{R})$ un sous-groupe de Lie, alors le crochet de Lie sur l'algèbre de Lie $T_eG \subset \text{M}(n, \mathbb{R})$ est le crochet ordinaire $[a, b] = ab - ba$ des matrices.*

Par exemple, pour $G = \text{SO}(n, \mathbb{R})$, on sait que T_eG est l'espace des matrices antisymétriques, effectivement stable par crochet.

11 Flots

11.a Existence locale et unicité

Soit M une variété et X un champ de vecteurs sur M . Étant donnée une application $c : I \rightarrow M$ de classe C^1 , où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, on note la dérivée $\dot{c}(t) = T_t c(\frac{\partial}{\partial t})$. On s'intéresse aux solutions de l'équation différentielle

$$\dot{c}(t) = X(c(t)). \quad (\text{II.6})$$

Une telle solution est appelée **trajectoire du champ de vecteurs X** , ou encore **courbe intégrale du champ de vecteurs X** .

Une propriété importante de l'équation (II.6) est d'être autonome, c'est-à-dire indépendante du temps : ainsi, si $c(t)$ est une solution, alors pour tout t_0 fixé, $c(t - t_0)$ est encore une solution.

Exemple 11.1. Si M est un ouvert de \mathbb{R}^n , alors $X = \sum_1^n X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$. On peut écrire c par ses coordonnées $c = (c_1, \dots, c_n)$, et l'équation (II.6) devient le système autonome

$$\dot{c}_i(t) = X_i(c(t)). \quad (\text{II.7})$$

La démonstration des propriétés suivantes est laissée en exercice :

Propriétés. 1° Soit $c(t)$ une trajectoire du champ de vecteurs X et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors $c(\lambda t)$ est une trajectoire du champ de vecteurs λX .

2° Soit $\varphi : M \rightarrow N$ un difféomorphisme, X un champ de vecteurs sur M , et $c(t)$ une courbe intégrale de X , alors $\varphi(c(t))$ est une courbe intégrale de $\varphi_* X$.

L'existence et l'unicité des solutions des trajectoires d'un champ de vecteurs sont fournies par :

Théorème 11.2. *Supposons X de classe C^k pour $k \geq 1$. Alors :*

1° (Unicité) *Deux solutions de (II.6) sur un intervalle I coïncidant en un point de I coïncident sur I .*

2° (Existence) *Pour tout $x_0 \in M$, il existe un ouvert $U \ni x_0$, $\delta > 0$ et $c :]-\delta, \delta[\times U \rightarrow M$ tels que*

- pour tout $x \in U$, on a $c(0, x) = x$;
- l'application $t \mapsto c(t, x)$ est solution de (II.6) pour tout $x \in U$;
- si X est de classe C^k alors c est de classe C^k (et même C^{k+1} par rapport à t).

Noter que l'énoncé contient notamment

- l'existence sur un intervalle de temps uniforme dans un voisinage de x_0 ;
- la régularité de la solution par rapport aux paramètres.

Démonstration. C'est un résultat local, il suffit de le montrer dans un ouvert de carte ; sur un tel ouvert, on se retrouve réduit au système (II.7), pour lequel le résultat a été vu dans le cours de calcul différentiel. \square

Exercice. En déduire que si X est un champ de vecteurs sur M et N est une sous-variété de M telle que $X|_N$ est tangent à N , alors les trajectoires de X issues d'un point de N restent dans N .

11.b Solution maximale

On commence par montrer qu'étant donné $x_0 \in M$, l'équation (II.6) avec solution initiale $c(0) = x_0$ admet une solution définie sur un intervalle maximal unique I . On regarde toutes les solutions c_α de (II.6) définies sur un intervalle I_α avec $c_\alpha(0) = x_0$, et on pose $I = \cup I_\alpha$. Alors, par unicité $c_\alpha|_{I_\alpha \cap I_\beta} = c_\beta|_{I_\alpha \cap I_\beta}$ donc, en définissant $c : I \rightarrow M$ par $c(t) = c_\alpha(t)$ dès que $t \in I_\alpha$, on obtient une solution de (II.6) telle que $c(0) = x_0$, et définie sur I qui par sa définition est le plus grand intervalle possible.

Lemme 11.3. *Si $a = \sup I < \infty$ alors quand $t \rightarrow a$ la trajectoire $c(t)$ sort de tout compact de M .*

Démonstration. Supposons au contraire que $c(t)$ reste dans un compact, alors il existe $t_i \rightarrow a$ et $y = \lim c(t_i)$. Par le théorème 11.2 il existe un ouvert $U \ni y$, $\delta > 0$ et $u :] - \delta, \delta[\times U \rightarrow M$ une famille de solutions de (II.6) avec condition initiale $u(0, x) = x$. Fixons un i assez grand de sorte que $t_i > a - \delta$ et $c(t_i) \in U$, donc, par unicité des solutions,

$$c(t) = u(t - t_i, c(t_i)) \text{ pour } t_i - \delta < t < a.$$

Mais le second membre existe en réalité pour $t_i - \delta < t < t_i + \delta$ et $t_i + \delta > a$, donc on peut prolonger la solution au-delà de $t = a$ et la solution n'était pas maximale. \square

Par symétrie on a le même résultat sur la borne inférieure de l'intervalle maximal. Une autre formulation du lemme consiste alors à dire que l'application

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow \mathbb{R} \times M \\ t &\longmapsto (t, c(t)) \end{aligned}$$

est propre.

Corollaire 11.4. *Les solutions maximales sont définies sur \mathbb{R} dans les deux cas suivants :*

- 1° M est compacte ;
- 2° X est à support compact.

Lemme 11.5. *Pour tout $x \in M$ notons I_x l'intervalle maximal d'existence d'une solution $t \mapsto c(t, x)$ de (II.6) avec condition initiale $c(0, t) = x$. Alors le domaine de définition de c ,*

$$\Omega = \{(t, x), x \in M, t \in I_x\},$$

est ouvert, et $c : \Omega \rightarrow M$ est C^∞ .

Démonstration. La démonstration est basée sur le fait simple suivant, qui résulte immédiatement de l'unicité des solutions. Supposons qu'on ait une trajectoire c_1 de X sur un intervalle $[0, t_1]$ et c_2 sur un intervalle $[0, t_2]$, telles que $c_1(t_1) = c_2(0)$ (on peut prendre aussi $t_1 < 0$ ou $t_2 < 0$, auquel cas il faut inverser l'ordre des bornes des intervalles). Soit $c(t)$ la solution maximale avec condition initiale $c(0) = c_1(0)$, définie sur l'intervalle I . Alors $I \supset [0, t_1 + t_2]$ et nécessairement :

$$c(t) = \begin{cases} c_1(t) & \text{si } 0 \leq t \leq t_1, \\ c_2(t - t_1) & \text{si } t_1 \leq t \leq t_2. \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

Si $t_1, t_2 > 0$ cela signifie qu'on obtient une trajectoire c en parcourant c_2 après c_1 , ce qui a un sens dès que $c_2(0) = c_1(t_1)$.

Soit $(t_0, x_0) \in \Omega$. Pour simplifier les notations on va prendre $t_0 = 1$. Alors pour chaque $t \in [0, 1]$, le théorème 11.2 fournit un ouvert $U_t \ni c(t, x_0)$ et $\delta_t > 0$ tels que qu'on puisse résoudre (II.6) à partir de tout point de U_t au moins jusqu'au temps δ_t (c'est-à-dire $] - \delta_t, \delta_t[\times U_t \subset \Omega$). Nous pouvons couvrir $c([0, 1])$ par un nombre fini de ces ouverts, $U_i = U_{t_i}$, pour $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$. En fait, quitte à augmenter le nombre de points, on peut s'arranger pour que $t_i = \frac{i}{k}$ et que $\delta_{t_i} > \frac{1}{k}$, ce qui simplifiera les notations dans la suite.

Nous avons donc une application $\varphi : \bigcup_0^k U_i \rightarrow M$, de classe C^∞ , définie par $\varphi(x) = c(\frac{1}{k}, x)$; en outre $\varphi^k(x_0) = c(1, x_0)$. Notons

$$V = (\varphi^k)^{-1}U_k.$$

Évidemment, φ^k est définie sur l'ouvert V , et $\varphi^k(x) = c(1, x)$. Par conséquent, pour $|\tau| < \delta_k$ et $x \in V$, on a $c(1 + \tau, x) = c(\tau, \varphi^k(x))$, ce qui prouve que $]1 - \tau, 1 + \tau[\times V \subset \Omega$ et que c est de classe C^∞ . \square

Définition 11.6. 1° On dit que X est un **champ de vecteurs complet** sur M si toutes les solutions maximales sont définies sur \mathbb{R} .

2° Si X est complet, on appelle **flot du champ de vecteurs** X l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times M &\longrightarrow M \\ (t, x) &\longmapsto c(t, x) =: \varphi_t(x). \end{aligned}$$

Propriétés. On a $\varphi_0 = \text{Id}$, $\varphi_{t_2} \circ \varphi_{t_1} = \varphi_{t_1+t_2}$ et donc $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$. Autrement dit, l'application $\mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M)$ donnée par $t \mapsto \varphi_t$ est un morphisme de groupes, donc donne une action de \mathbb{R} sur M (groupe à un paramètre de difféomorphismes).

Démonstration. L'égalité $\varphi_{t_2} \circ \varphi_{t_1} = \varphi_{t_1+t_2}$ est une conséquence de (II.8). Le reste en découle. \square

11.c Exercices

Le but de l'exercice suivant est de montrer qu'il existe des difféomorphismes, aussi proches que l'on veut de l'identité, qui ne sont pas obtenus comme flots de champs de vecteurs.

Exercice 11.c.1. Soit M une variété et g un difféomorphisme de M . On dit qu'un point x est périodique s'il existe $n > 0$ tel que $g^n(x) = x$, et on appelle période de x le plus petit n vérifiant cette propriété. On appelle orbite périodique de x l'ensemble $\{x, g(x), \dots, g^{n-1}(x)\}$.

1° Montrer que les orbites de période impaire pour g sont des orbites de période impaire pour $g \circ g$.

2° Montrer qu'une orbite de période paire $2m$ pour g se décompose en deux orbites de période m pour $g \circ g$. En déduire que $g \circ g$ a un nombre pair d'orbites de période paire.

3° Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $F(x) = x + \pi/n + \varepsilon \sin^2(nx)$ et $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ l'application quotient. Montrer que f est un difféomorphisme arbitrairement proche de l'identité pour la topologie C^1 si on choisit n assez grand et ε assez petit.

4° Montrer que 0 est un point $2n$ -périodique de f et que si $0 < x < \pi/n$, alors on a

$$x < F(x) - \frac{\pi}{n} < F^2(x) - \frac{2\pi}{n} < \dots < F^k(x) - \frac{k\pi}{n} < \dots < \frac{\pi}{n}.$$

5° Montrer que f ne s'écrit pas sous la forme $f = \varphi_1^X$, où X est un champ de vecteurs et φ_t^X son flot.

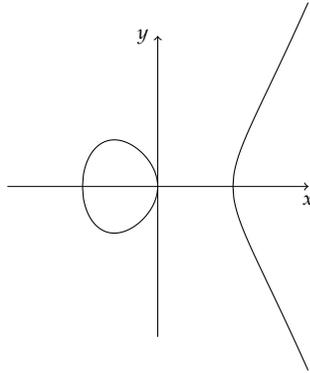
12 Classification des variétés de dimension 1

12.a Une cubique

Soit dans \mathbb{R}^2 la courbe C d'équation

$$x^3 - x - y^2 = 0.$$

Nous commençons par vérifier que C est une courbe lisse, c'est-à-dire une sous-variété de \mathbb{R}^2 . Soit $f(x, y) = x^3 - x - y^2$, alors $df = (3x^2 - 1, -2y)$ ne s'annule que pour $(x, y) = (\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ qui n'est pas sur C , donc $C = f^{-1}(0)$ est une courbe lisse par le théorème des submersions, et l'espace tangent à $(x, y) \in C$ est $T_{(x,y)}C = \ker d_{(x,y)}f$.



Par conséquent, le champ de vecteurs

$$X = \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \left(2y \frac{\partial}{\partial x} + (3x^2 - 1) \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

est tangent à C le long de C , donc définit un champ de vecteurs sur C , dont on remarquera qu'il ne s'annule jamais. Le lecteur pourra vérifier que X est complet (c'est la raison de la présence du facteur $1 + x^2 + y^2$ au dénominateur). Soit (φ_t) le flot de X et $x \in C$. Alors

$$\frac{d}{dt} \varphi_t(x) = X(\varphi_t(x)) \neq 0,$$

ce qui implique que $t \mapsto \varphi_t(x)$ est un difféomorphisme local. Par conséquent les orbites du flot sont ouvertes ; par passage au complémentaire elles sont aussi fermées, donc sont des composantes connexes.

Soit $x \in C$ et $\text{Stab}(x) \subset \mathbb{R}$ le sous-groupe des t tels que $\varphi_t(x) = x$. Deux cas (qui correspondent aux deux types de composante connexe qu'on voit sur le schéma) :

- ou bien $\text{Stab}(x) = 0$, alors $t \mapsto \varphi_t(x)$ est un plongement

$$\mathbb{R} \rightarrow C_x,$$

où C_x est la composante connexe de x ; d'où un difféomorphisme $C_x \simeq \mathbb{R}$;

- ou bien $\text{Stab}(x) = \omega\mathbb{Z}$ donc $t \mapsto \varphi_t(x)$ est ω -périodique et se factorise en une application injective

$$\mathbb{R}/\omega\mathbb{Z} \rightarrow C_x$$

qui est à nouveau un plongement ; d'où un difféomorphisme $C_x \simeq \mathbb{R}/\omega\mathbb{Z} = S^1$.

12.b La classification

L'exemple précédent illustre le

Théorème 12.1. *Toute variété connexe de dimension 1 est difféomorphe à \mathbb{R} ou S^1 .*

Comme dans l'exemple traité ci-avant, on voit que si M^1 admet un champ de vecteurs complet partout non nul, alors la conclusion du théorème se déduit du flot du champ de vecteurs. Il ne reste donc qu'à construire un tel champ de vecteurs. En fait il suffit de construire un champ de vecteurs partout non nul, à cause du

Lemme 12.2. *Soit X un champ de vecteurs sur une variété M , alors il existe une fonction $f > 0$ de classe C^∞ telle que fX soit complet.*

Démonstration. Soit $g > 0$ une fonction propre, par exemple $\sum (j+1)\chi_j$, où (χ_j) est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $M = \bigcup K_j$ et (K_j) est une suite exhaustive de compacts comme dans le lemme 7.3. Soit $f = \exp(-(X \cdot g)^2)$ et $Y = fX$. Le long d'une trajectoire $c(t)$ de Y , on a

$$\frac{d}{dt}g(c(t)) = d_{c(t)}g(f(c(t))X(c(t))) = e^{-(X \cdot g)^2} X \cdot g \Big|_{c(t)}$$

donc $|\frac{d}{dt}g(c(t))| \leq \sup_{\mathbb{R}} |x|e^{-x^2} \leq c$, donc g ne peut pas exploser en temps fini, et donc $c(t)$ ne peut pas sortir des compacts en temps fini. Donc Y est complet. \square

Pour achever la démonstration du théorème 12.1, il reste à construire un champ de vecteurs partout non nul. Cette construction plus subtile requiert un nouvel outil.

12.c Notion de métrique riemannienne

Définition 12.3. *Une **métrique riemannienne** sur une variété M est une application $q : TM \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^∞ , telle que pour tout $x \in M$, la restriction $q|_{T_x M}$ soit une forme quadratique définie positive sur $T_x M$.*

Dans une trivialisatoin locale $TM|_U \simeq U \times \mathbb{R}^n$, la donnée d'une métrique riemannienne est donc la donnée d'une forme quadratique $q(x)$ sur \mathbb{R}^n pour $x \in U$, de sorte que la matrice de q soit une fonction C^∞ de x .

Lemme 12.4. *Toute variété admet une métrique riemannienne.*

Démonstration. Dans une trivialisatoin locale $TM|_{U_\alpha} \simeq U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ on a la métrique riemannienne $g_\alpha(x, X) = |X|^2$. Recouvrant M par de tels ouverts U_α , et choisissant une partition de l'unité (χ_α) subordonnée aux (U_α) , on construit la métrique riemannienne $g = \sum \chi_\alpha g_\alpha$. \square

Proposition 12.5. *Soit (M^n, g) une variété munie d'une métrique riemannienne. Alors $SM = \{(x, X), X \in T_x M, g(X) = 1\}$ est une sous-variété de codimension 1 de TM , et la projection $p : SM \rightarrow M$ est une fibration propre.*

Démonstration. Dans une trivialisatoin locale $TM|_U \simeq U \times \mathbb{R}^n$ écrivons

$$g(x, X) = \langle q(x)X, X \rangle,$$

où $q(x)$ est une matrice symétrique définie positive, dépendant de manière C^∞ de x . Par conséquent

$$d_{(x,X)}g(\dot{x}, \dot{X}) = \langle d_x q(\dot{x})X, X \rangle + 2\langle q(x)X, \dot{X} \rangle.$$

Le second terme garantit que pour $X \neq 0$ la différentielle $d_{(x,X)}g$ est non nulle, donc surjective ; par le théorème des submersions, $g^{-1}(1) = SM$ est une sous-variété de codimension 1 de TM . En outre, $T_{(x,X)}SM = \ker d_{(x,X)}g$ et on voit immédiatement que $T_{(x,X)}p(\dot{x}, \dot{X}) = \dot{X}$ est une surjection $T_{(x,X)}SM \rightarrow T_xM$, donc $p : SM \rightarrow M$ est une submersion ; étant surjective, c'est donc une fibration.

Pour la propriété, prenons un compact $K \subset M$. Soit une suite $(x_i, X_i) \in p^{-1}(K)$, alors $x_i \in K$ donc on peut extraire une limite $x_i \rightarrow x_\infty$. On peut alors voir la suite (x_i, X_i) dans une trivialisatoin locale $TM|_U \simeq U \times \mathbb{R}^n$ au-dessus d'un ouvert $U \ni x_\infty$ comme ci-dessus. Se restreignant à une boule fermée $B \subset U$, alors $SM|_B = \{(x, X), x \in B, \langle q(x)X, X \rangle = 1\}$ est compact (fermé et borné dans \mathbb{R}^{2n}), donc on peut extraire une limite $(x_i, X_i) \rightarrow (x_\infty, X_\infty)$. \square

12.d Fin de la démonstration du théorème 12.1

On applique la proposition 12.5 pour la variété M de dimension 1, donc SM est aussi de dimension 1. Au-dessus de $x \in M$ la fibre S_xM contient exactement 2 points, à savoir les 2 vecteurs $X \in T_xM$ avec $g(X) = 1$. La variété SM satisfait les propriétés suivantes :

- 1° $p : SM \rightarrow M$ est un difféomorphisme local : en effet c'est une submersion entre variétés de dimension 1 ;
- 2° SM dispose d'un champ de vecteurs partout non nul $\zeta(x, X) = (T_{x,X}p)^{-1}(X)$ (**champ de vecteurs tautologique**) ;
- 3° SM a une involution $\iota(x, X) = (x, -X)$ telle que $\iota_*\zeta = -\zeta$ et sans point fixe.

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\zeta} & \\ \iota \updownarrow & \zeta \quad X & SM \\ & \xleftarrow{-X} & \\ & \xrightarrow{X} & M \\ & x & \end{array}$$

Puisque SM possède un champ de vecteurs partout non nul, ses composantes connexes sont difféomorphes à \mathbb{R} ou S^1 . Examinons le nombre de composantes connexes de SM : l'image d'une composante connexe par p est ouverte (car p est un difféomorphisme local) et fermée (car p est propre), donc est M tout entier. Comme la fibre de p a deux points, SM a donc au maximum deux composantes connexes.

La possibilité d'une seule composante connexe est éliminée par le lemme suivant, dont la démonstration est laissée en exercice.

Lemme 12.6. *Un difféomorphisme de \mathbb{R} ou S^1 renversant l'orientation admet un point fixe.*

Si SM a une seule composante connexe, alors SM est \mathbb{R} ou S^1 , mais l'involution ι renverse l'orientation ($\iota_*\zeta = -\zeta$) et n'a pas de point fixe, ce qui contredit le lemme.

Finalement SM a deux composantes connexes C_1 et C_2 ; alors

$$p|_{C_1} : C_1 \rightarrow M$$

est surjective, et donc injective sinon $p|_{C_2}$ ne peut pas être aussi surjective ; donc $p|_{C_1}$ est un difféomorphisme. Comme C_1 est difféomorphe à \mathbb{R} ou S^1 , le théorème est démontré. \square

Remarque 12.7. Le raisonnement via SM peut être évité mais présente un exemple du revêtement d'orientation, voir section 19.a. La démonstration dans MILNOR procède en montrant l'existence d'une application maximale d'un intervalle $c : I \rightarrow M$, paramétrée par l'abscisse curviligne (c'est-à-dire $g(\dot{c}(t)) = 1$).

13 Exponentielle dans les groupes de Lie

Soit G un groupe de Lie et $\mathfrak{g} = T_e G$ son algèbre de Lie. Pour tout $A \in \mathfrak{g}$, on dispose donc du champ de vecteurs X_A invariant à gauche tel que $X_A(e) = A$, donné par

$$X_A(g) = (L_g)_* A.$$

Lemme 13.1. *Tout champ de vecteurs invariant à gauche est complet.*

Démonstration. Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathfrak{g}$ le domaine de définition du flot. Observons que si $c(t)$ est solution du flot et $g \in G$, alors

$$\frac{d}{dt} g c(t) = \frac{d}{dt} L_g(c(t)) = T_{c(t)} L_g(\dot{c}(t)) = T_{c(t)} L_g(X_A(c(t))) = X_A(g c(t))$$

par invariance de X_A ; donc $g c(t)$ est aussi solution du flot, donc l'intervalle maximum d'existence ne dépend pas du point de départ : donc $\Omega =] - T_-, T_+[\times G$.

Soit $0 < \delta < T_+$, alors $c(t)$ peut être prolongé au-delà du temps T_+ par $c(\delta)c(0)^{-1}c(t-\delta)$, donc il faut que $T_+ = \infty$. De même $T_- = -\infty$. \square

Définition 13.2. Soit G un groupe de Lie, $A \in \mathfrak{g}$, $c_A(t, g)$ le flot associé au champ X_A . On définit l'**exponentielle du groupe** G comme l'application $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ définie par

$$\exp(A) = c_A(1, e).$$

Exemple 13.3. Soit $G = GL(n, \mathbb{R})$. Alors $X_A(g) = gA$ donc l'équation du flot de X_A est $\dot{g} = gA$, dont la solution est $g(t) = e^{tA}$ (exponentielle des matrices). Ainsi exponentielles au sens du groupe de Lie $GL(n, \mathbb{R})$ et au sens des matrices coïncident.

Propriétés. 1° On a $\exp((s+t)A) = \exp(sA)\exp(tA)$, $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$ et $\exp(0) = e$.

2° L'application $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ a pour application linéaire tangente en 0 l'identité de \mathfrak{g} . En particulier, il existe des ouverts $U \ni 0$ et $U' \ni e$ tels que $\exp|_U : U \rightarrow U'$ soit un difféomorphisme.

3° Fonctorialité : si $f : G \rightarrow G'$ est un morphisme de groupes de Lie, alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{T_e f} & \mathfrak{g}' \\ \downarrow \exp & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{f} & G' \end{array}$$

Démonstration. 1° Commençons par montrer que $\exp(sA) = c_A(s, e)$. En effet,

$$\frac{d}{dt} c_A(ts, e) = s X_A(c_A(ts, e)) = X_{sA}(c_A(ts, e))$$

donc $c_A(ts, e) = c_{sA}(t, e)$.

Puisque l'action à gauche d'un élément du groupe préserve les trajectoires du flot, on déduit

$$c_A(t, g) = g \exp(tA). \quad (\text{II.9})$$

En particulier, $\exp((s+t)A) = c_A(s+t, e) = c_A(s, e) \exp(tA) = \exp(sA) \exp(tA)$.

2° Puisque $\exp(tA)$ est une trajectoire de X_A , on a $\frac{d}{dt} \exp(tA) = X_A(\exp(tA))$, donc

$$T_0 \exp(A) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tA) = A.$$

3° Puisque f est un morphisme de groupes, $f(gg') = f(g)f(g')$ donc $T_g f \circ T_e L_g = T_e L_{f(g)} \circ T_e f$ (ce qu'on pourrait écrire en notation simplifiée comme la commutation $f_* g_* = f(g)_* f_*$). En particulier, $T_g f(X_A(g)) = X_{T_e f(A)}(f(g))$. On calcule alors

$$\frac{d}{dt} f(c(t)) = T_{c(t)} f(X_A(c(t))) = X_{T_e f(A)}(f(c(t)))$$

donc $f(c(t))$ est une trajectoire du champ de vecteurs invariant à gauche associé à $T_e f(A)$. En particulier $f(\exp(A)) = f(c(1)) = \exp(T_e f(A))$. \square

Exemples. 1° Considérons l'inclusion $G = O(n, \mathbb{R}) \hookrightarrow G' = GL(n, \mathbb{R})$. Nous savons que $\mathfrak{g} = \{A \in M(n, \mathbb{R}), {}^t A = -A\}$. Le diagramme commutatif ci-dessus dit que $\exp^G = \exp^{GL(n, \mathbb{R})}|_{\mathfrak{g}}$ et est donc encore l'exponentielle des matrices. En particulier, on retrouve que l'exponentielle d'une matrice antisymétrique est orthogonale.

2° Considérons $\det : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*$, on sait que $d_e \det = \text{Tr} : M(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, donc la commutation ci-dessus dit que $\det \exp A = e^{\text{Tr} A}$ pour toute matrice A .

14 Fibrations

Théorème 14.1 (Ehresmann). *Une fibration propre est localement triviale. Autrement dit, si $f : M \rightarrow B$ est une fibration (submersion surjective) propre, alors pour tout $b \in B$ il existe un ouvert $U \ni b$ et un U -difféomorphisme $\varphi : f^{-1}(U) \rightarrow U \times F$.*

Le théorème dit en particulier que le type de difféomorphisme de la fibre $f^{-1}(x)$ est localement constant.

Exemples. 1° Si f est un difféomorphisme local propre et surjectif, alors la fibre F est finie : f est un **revêtement fini**. Il n'y a pas de raison que f soit globalement triviale (c'est-à-dire qu'il existe un B -difféomorphisme $M \simeq B \times F$), comme le montre l'exemple de $f : S^1 \rightarrow S^1$ donné par $f(z) = z^n$.

2° Si $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ propre (par exemple si M est compacte), soit $c < c'$ tels que f n'a pas de valeur critique dans $[c, c']$, alors une conséquence du théorème est que $f^{-1}(c)$ et $f^{-1}(c')$ sont difféomorphes.

Démonstration du théorème. Le théorème est un énoncé local sur la base B , donc on peut supposer que $B = \mathbb{B}^m$, la boule unité de \mathbb{R}^m , que l'on dote des coordonnées (y_1, \dots, y_m) . Posons $F = f^{-1}(0)$. Soit une métrique riemannienne sur M , on définit les champs de vecteurs X_i ($i = 1, \dots, m$) sur M tels qu'en tout point $x \in M$ on ait :

- 1° $X_i \perp \ker(T_x f)$;
- 2° $T_x f(X_i) = \frac{\partial}{\partial y_i}$.

On démontrera plus bas que les champs X_i ainsi définis sont bien de classe C^∞ . Soit $\varphi_{i,t}$ le flot de X_i . Alors

$$\frac{d}{dt}f(\varphi_{i,t}(x)) = T_x f(X_i) = \frac{\partial}{\partial y_i},$$

d'où résulte, en notant (e_1, \dots, e_m) la base standard de \mathbb{R}^m ,

$$f(\varphi_{i,t}(x)) = f(x) + te_i. \quad (\text{II.10})$$

Cela nous donne le temps d'existence des solutions : $\varphi_{i,t}(x)$ cesse d'exister s'il sort de tout compact, mais comme f est propre, cela veut dire que $f(\varphi_{i,t}(x))$ sort de tout compact ; vu la formule (II.10), la solution $\varphi_{i,t}(x)$ existe précisément sur l'intervalle des temps t tels que $f(x) + te_i \in \mathbb{B}^m$.

Considérons à présent l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{B}^m \times F &\longrightarrow M \\ ((y_1, \dots, y_m), x) &\longmapsto \varphi_{m,y_m} \varphi_{m-1,y_{m-1}} \cdots \varphi_{1,y_1}(x). \end{aligned}$$

Le temps d'existence des flots déterminés plus haut implique que Φ est bien définie sur $\mathbb{B}^m \times F$. En outre, on a :

- 1° $f \circ \Phi(y, x) = y$, autrement dit Φ est un B-morphisme ;
- 2° Φ est un difféomorphisme car son inverse est donné par

$$\Phi^{-1}(x) = (f(x), \varphi_{1,-f_1(x)} \varphi_{2,-f_2(x)} \cdots \varphi_{m,-f_m(x)}(x)),$$

$$\text{où } f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)).$$

Le théorème en découle. □

Nous complétons la démonstration du théorème par le fait que les champs de vecteurs X_i sont bien de classe C^∞ . Nous commençons par :

Définition 14.2. Soit $E \rightarrow B$ un fibré vectoriel. Un **sous-fibré vectoriel** de E est un fibré vectoriel $F \rightarrow B$ muni d'un morphisme de fibré injectif $i : F \hookrightarrow E$.

Un tel morphisme i est nécessairement un plongement propre, donc $i(F)$ est une sous-variété de E , dont l'intersection avec chaque fibre est un sous-espace vectoriel. On identifie le plus souvent F à la sous-variété $i(F)$.

Lemme 14.3. Si $u : E \rightarrow F$ est un morphisme surjectif de fibrés vectoriels, alors $\ker u$ est un sous-fibré vectoriel de E .

Démonstration. Notons $p : E \rightarrow B$ la projection du fibré. On laisse au lecteur le soin de vérifier que u est une submersion, $\ker u$ est une sous-variété de E , et que $p|_{\ker u} : \ker u \rightarrow B$ est une submersion. Pour chaque $x \in B$, la dimension de $(\ker u)_x$ est $\text{rg } E - \text{rg } F$ et est donc indépendante de x . Pour montrer que $\ker u$ est un sous-fibré de E , il reste à montrer que c'est un fibré, c'est-à-dire qu'il existe des trivialisations locales. Fixons $x_0 \in B$ et une base (e_1, \dots, e_k) de $(\ker f)_{x_0}$. Comme la submersion p admet des sections locales (lemme 6.4), il existe des sections locales $e_i : U \ni x_0 \rightarrow \ker u$ telles que $(e_i(x_0))$ soit la base donnée (e_i) de $(\ker u)_{x_0}$. Quitte à restreindre U à un plus petit ouvert, les sections $(e_i(x))$ sont une base de $(\ker u)_x$ pour tout $x \in U$, et fournissent donc une trivialisations locale de $\ker u$ sur U . □

Lemme 14.4. Sous les hypothèses du théorème 14.1, l'orthogonal $\ker(Tf)^\perp$ est un sous-fibré vectoriel de TM .

Démonstration. En effet, $F = \ker Tf$ est un sous-fibré vectoriel de TM (on peut le démontrer en appliquant le théorème des submersions 4.2 ; ou alors le lemme 14.3 à Tf , vu comme morphisme surjectif de fibrés vectoriels $TM \rightarrow M \times \mathbb{R}^m$, voir (II.11) ci-dessous). Considérons le morphisme de fibrés vectoriels $u : E \rightarrow F^*$ défini par

$$u(e) = \langle e, \cdot \rangle.$$

Alors $\ker(Tf)^\perp = \ker u$ est un sous-fibré de TM par le lemme précédent. \square

Enfin, revenons à la démonstration que les champs de vecteurs X_i définis dans la démonstration du théorème 14.1 sont bien de classe C^∞ . Par le lemme précédent, $E = \ker(Tf)^\perp$ est un sous-fibré vectoriel de TM . Voyant f comme application $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$, nous pouvons considérer Tf comme un morphisme de fibrés vectoriels,

$$Tf|_E : E \rightarrow M \times \mathbb{R}^m, \quad (\text{II.11})$$

défini par $Tf(x, X) = (x, T_x f(X))$. Comme c'est un isomorphisme sur chaque fibre, c'est un isomorphisme de fibrés vectoriels, et les

$$X_i = (Tf|_E)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right)$$

sont de classe C^∞ .

15 Flot et crochet, dérivée de Lie

Le **tiré en arrière** de la fonction $f \in C^\infty(M)$ par un difféomorphisme φ de M est la fonction

$$\varphi^* f = f \circ \varphi.$$

Le **tiré en arrière** d'un champ de vecteurs $Y \in \Gamma(TM)$ par φ est le champ de vecteurs $\varphi^* Y$ défini par

$$\varphi^* Y(x) = (T_x \varphi)^{-1} Y(\varphi(x)).$$

En réalité, l'opération « tiré en arrière » s'étend à tous les objets géométriques sur M : la valeur au point x du tiré en arrière $\varphi^* \alpha$ est obtenue en ramenant par $T_x \varphi$ la valeur de α au point $\varphi(x)$. On verra plus loin l'exemple des formes différentielles.

On définit aussi le **poussé en avant** $\varphi_* \alpha = (\varphi^{-1})^* * \alpha$. C'est l'opération inverse du tiré en arrière.

Soit $X \in \Gamma(TM)$ et φ_t le flot associé. Soit α un objet géométrique telle qu'une fonction, un champ de vecteurs, etc. Alors la **dérivée de Lie suivant X** de α est définie par

$$\mathcal{L}_X \alpha = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* \alpha.$$

Pour une fonction $f \in C^\infty(M)$, on a $\varphi_t^* f = f \circ \varphi_t$, donc

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* f(x) = T_x f \left(\left. \frac{d\varphi_t}{dt} \right|_{t=0} \right) = T_x f(X(x)) = (X \cdot f)(x),$$

donc $\mathcal{L}_X f$ coïncide bien avec la dérivée définie section 10.

Nous écrivons maintenant la dérivée de Lie des champs de vecteurs :

Théorème 15.1. Soit X et Y deux champs de vecteurs sur M , alors

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y].$$

Démonstration. On va vérifier que les dérivations induites par les champs de vecteurs $\mathcal{L}_X Y$ et $[X, Y]$ coïncident, ce qui implique le théorème. On va avoir besoin des formules suivantes : si on a une famille de fonctions (f_t) , dépendant de manière C^∞ du paramètre t , alors on a les formules

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* f_t = X \cdot f_0 + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f_t, \quad (\text{II.12})$$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (Y \cdot f_t) = Y \cdot \left. \frac{df_t}{dt} \right|_{t=0}. \quad (\text{II.13})$$

Pour le montrer proprement, on pose $F(t, x) = f_t(x)$, alors la première formule vient du calcul

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f_t(\varphi_t(x)) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(t, \varphi_t(x)) = \frac{\partial F}{\partial t}(0, x) + \frac{\partial F}{\partial x}(0, x)(X(x)) \\ &= \left. \frac{df_t(x)}{dt} \right|_{t=0} + (X \cdot f_0)(x) \end{aligned}$$

et la seconde de

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (Y \cdot f_t) = \frac{\partial}{\partial t} \cdot Y \cdot F = Y \cdot \frac{\partial}{\partial t} \cdot F$$

car $[\frac{\partial}{\partial t}, Y] = 0$ sur $\mathbb{R} \times M$.

Passons maintenant à la démonstration du théorème. Soit $f \in C^\infty(M)$ alors

$$(\varphi_t^* Y) \cdot f = \varphi_t^* (Y \cdot ((\varphi_t)_* f)), \quad (\text{II.14})$$

où $(\varphi_t)_* f = f \circ \varphi_t^{-1}$ est le poussé en avant de f défini plus haut. La démonstration de (II.14), conséquence de $\varphi^*(Y \cdot g) = (\varphi^* Y) \cdot (\varphi^* g)$, est laissée au lecteur. En dérivant (II.14) à l'aide des formules (II.12) et (II.13),

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_t^* Y) \cdot f = X \cdot (Y \cdot f) + Y \cdot (-X \cdot f) = [X, Y] \cdot f.$$

Le théorème est démontré. \square

Corollaire 15.2. Soient X et Y deux champs de vecteurs complets sur M . Sont équivalents :

- 1° $[X, Y] = 0$,
- 2° les flots (φ_t) et (ψ_s) de X et Y commutent.

Démonstration. Supposons que $[X, Y] = 0$. Alors

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t'} \varphi_t^* Y = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \varphi_{t+t'}^* Y = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \varphi_{t'}^* \varphi_t^* Y = \varphi_{t'}^* \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \varphi_t^* Y = 0,$$

donc $\varphi_t^* Y = Y$ pour tout réel t . Or le flot associé à $\varphi_t^* Y$ est le tiré en arrière par φ_t de celui de Y , à savoir $s \mapsto \varphi_t^{-1} \psi_s \varphi_t$; par unicité du flot, il faut que $\varphi_t^{-1} \psi_s \varphi_t = \psi_s$, donc φ_t et ψ_s commutent.

Réciproquement, si φ_t et ψ_s commutent pour tous s et t , alors $\varphi_t^{-1} \psi_s \varphi_t = \psi_s$, donc, par dérivation par rapport à s , on obtient $\varphi_t^* Y = Y$ pour tout t ; dérivant par rapport à t , on obtient finalement $[X, Y] = 0$. \square

Corollaire 15.3. *Soit G un groupe de Lie connexe, alors G est abélien si et seulement si le crochet de Lie de \mathfrak{g} est nul.*

Démonstration. Si $A, B \in \mathfrak{g}$, alors les flots des champs de vecteurs invariants à gauche X_A et X_B associés à A et B sont $\varphi_t(g) = ge^{tA}$ et $\psi_s(g) = ge^{sB}$. Si $[A, B] = 0$, alors $[X_A, X_B] = 0$ donc les flots φ_t et ψ_s commutent, donc $e^{tA}e^{sB} = e^{sB}e^{tA}$ pour tous $t, s \in \mathbb{R}$. En particulier,

$$e^Ae^B = e^Be^A.$$

Puisque $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ est un difféomorphisme dans un voisinage de l'origine de \mathfrak{g} , il existe un ouvert $U \ni e$ tel que pour tous $x, y \in U$ on ait $xy = yx$.

Soit $x \in U$, alors $\{y \in G, xy = yx\}$ est un sous-groupe fermé de G , et ouvert puisqu'il contient U ; donc il est égal à G donc $U \subset Z(G)$, le centre de G . Ainsi $Z(G)$ est un sous-groupe ouvert de G ; comme il est fermé par définition, $Z(G) = G$, donc G est abélien.

Réciproquement, si G est abélien, alors $e^{tA}e^{sB} = e^{sB}e^{tA}$ pour tous $t, s \in \mathbb{R}$, donc les flots de X_A et X_B commutent, donc $[A, B] = 0$. \square

Exercice. Soient X, Y deux champs de vecteurs sur \mathbb{R}^n , et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $f(s, t) = \psi_s^{-1}\varphi_t^{-1}\psi_s\varphi_t(0)$. Montrer que

$$f(s, t) = st[X, Y](0) + o(s^2 + t^2).$$

Autrement dit, le commutateur de deux flots est a priori d'ordre 2, et le terme d'ordre 2 en un point est exactement le crochet des deux champs de vecteurs en ce point.

16 La représentation adjointe d'un groupe de Lie

Soit G un groupe de Lie. Pour tout $g \in G$, on considère le difféomorphisme $C(g)$ de G donné par la conjugaison :

$$C(g)(x) = gxg^{-1}.$$

On a $C(g)C(g') = C(gg')$ donc on obtient ainsi une action C^∞ de G sur G . On définit

$$\text{Ad}(g) := T_e C(g) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}.$$

Différentiant $C(g)C(g') = C(gg')$, on obtient $\text{Ad}(g)\text{Ad}(g') = \text{Ad}(gg')$, donc

$$\text{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$$

est un morphisme de groupes, toujours C^∞ : ainsi Ad est-elle une représentation de G dans \mathfrak{g} , appelée **représentation adjointe de G** .

La différentielle de Ad en e est notée $\text{ad} = T_e \text{Ad}$. Donc on a

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}).$$

Théorème 16.1. *On a, pour tous $A, B \in \mathfrak{g}$, l'identité*

$$\text{ad}(A)(B) = [A, B].$$

Pour un groupe linéaire, la formule est facile à trouver : en effet, $C(g)(x) = gxg^{-1}$ est linéaire en x , donc égale à sa différentielle en l'identité, donc $\text{Ad}(g)(B) = gBg^{-1}$; différentiant maintenant par rapport à g en l'identité, on trouve $\text{ad}(A)(B) = AB - BA = [A, B]$.

Démonstration. Si $A \in \mathfrak{g}$, notons X_A le champ de vecteurs invariant à gauche sur G tel que $X_A(e) = A$. Le flot engendré par X_A est donc $\varphi_t(g) = ge^{tA}$.

Étant donnés $A, B \in \mathfrak{g}$, notons φ_t et ψ_s les flots de X_A et X_B . Alors le flot de $\varphi_t^* X_B$ est $\Psi_s = \varphi_t^{-1} \psi_s \varphi_t$, donc

$$\Psi_s(g) = ge^{tA} e^{sB} e^{-tA} = gC(e^{tA})(e^{sB}).$$

Différentiant par rapport à s en $s = 0$, nous obtenons

$$\varphi_t^* X_B(g) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \Psi_s(g) = T_e L_g(\text{Ad}(e^{tA})(B)).$$

Autrement dit, $\varphi_t^* X_B$ est le champ de vecteurs invariant à gauche associé à $\text{Ad}(e^{tA})(B)$:

$$\varphi_t^* X_B = X_{\text{Ad}(e^{tA})(B)}.$$

Dérivant les deux membres par rapport à t en $t = 0$, nous trouvons

$$[X_A, X_B] = X_{\text{ad}(A)(B)};$$

puisque $[X_A, X_B] = X_{[A, B]}$, le théorème s'en déduit. \square

De la functorialité de l'exponentielle des groupes de Lie résulte immédiatement :

Corollaire 16.2. Pour $A, B \in \mathfrak{g}$ on a $\text{Ad}(e^A)B = e^{\text{ad}A}B$. \square

Autrement dit, dans un groupe de matrices :

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2}[A, [A, B]] + \frac{1}{6}[A, [A, [A, B]]] + \dots$$

Exercice. Notons $R_{g_0}(g) = gg_0$ l'action à droite de G sur lui-même. Soit $A \in \mathfrak{g}$. Montrer que

$$R_{g_0}^* X_A = X_{\text{Ad}(g_0)A}. \quad (\text{II.15})$$

(Calculer le flot de $R_{g_0}^* X_A$).

Chapitre III

Formes différentielles

17 Le fibré des formes différentielles

17.a Rappels sur l'algèbre extérieure

Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on note $\text{Alt}^p(E, F)$ l'espace des applications p -linéaires alternées $E \times \dots \times E \rightarrow F$.

La p -ième puissance extérieure de E est la donnée d'un espace vectoriel $\Lambda^p E$ et d'une application p -linéaire alternée

$$\begin{aligned} E \times \dots \times E &\longrightarrow \Lambda^p E \\ (x_1, \dots, x_p) &\longmapsto x_1 \wedge \dots \wedge x_p \end{aligned}$$

solution du problème universel suivant : toute application p -linéaire alternée $f \in \text{Alt}^p(E, F)$ se factorise de manière unique comme

$$\begin{array}{ccc} E \times \dots \times E & \xrightarrow{f} & F \\ \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ \Lambda^p E & & \end{array}$$

L'application linéaire $\tilde{f} : \Lambda^p E \rightarrow F$ est donc uniquement déterminée par la condition que $\tilde{f}(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) = f(x_1, \dots, x_p)$ pour tous $x_1, \dots, x_p \in E$. En particulier,

$$\text{Alt}^p(E, F) \simeq \text{Hom}(\Lambda^p E, F). \quad (\text{III.1})$$

Propriétés. 1° $\Lambda^0 E = \mathbb{k}$ (convention), $\Lambda^1 E = E$.

2° *Fonctorialité.* Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire, alors il existe une et une seule application linéaire $\Lambda^p f : \Lambda^p E \rightarrow \Lambda^p F$ telle que pour tous $x_1, \dots, x_p \in E$ on ait

$$\Lambda^p f(x_1 \wedge \dots \wedge x_p) = f(x_1) \wedge \dots \wedge f(x_p).$$

En outre, on a $\Lambda^p(f \circ g) = \Lambda^p f \circ \Lambda^p g$.

3° Si $n = \dim E < \infty$ et $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E , alors une base de $\Lambda^p E$ est fournie par la famille $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p})_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n}$; en particulier $\dim \Lambda^p E = \binom{n}{p}$.

4° $\Lambda^n E = \mathbb{k}$; si $f \in \text{End } E$, alors $\Lambda^n f \in \text{End}(\Lambda^n E)$ est l'homothétie de rapport $\det f$.

5° Si E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n , alors l'élément $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \in \Lambda^n E$ est indépendant de la base orthonormale directe (e_i) choisie, donc on a une identification canonique $\Lambda^n E \simeq \mathbb{R}$.

6° Si $\dim E < \infty$, il existe une unique application bilinéaire non dégénérée $\langle \cdot, \cdot \rangle : \Lambda^p E \times \Lambda^p E^* \rightarrow \mathbb{K}$ telle que pour tous $x_i \in E$ et $y_j \in E^*$ on ait

$$\langle x_1 \wedge \cdots \wedge x_p, y_1 \wedge \cdots \wedge y_p \rangle = \det(\langle x_i, y_j \rangle).$$

En particulier, $\Lambda^p E^* \simeq \text{Alt}^p(E, \mathbb{K})$.

7° Il existe une et une seule application bilinéaire $\Lambda^p E \times \Lambda^q E \rightarrow \Lambda^{p+q} E$, notée $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$, telle que pour tous $x_i \in E$,

$$(x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) \wedge (x_{p+1} \wedge \cdots \wedge x_{p+q}) = x_1 \wedge \cdots \wedge x_{p+q}.$$

Cette application satisfait $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$.

On obtient ainsi une structure d'algèbre graduée anticommutative sur

$$\Lambda E = \bigoplus_p \Lambda^p E.$$

Cette algèbre est appelée l'**algèbre extérieure** de E .

Si $f : E \rightarrow F$ est un morphisme, alors $\Lambda f = \bigoplus \Lambda^p f : \Lambda E \rightarrow \Lambda F$ est un morphisme d'algèbre.

Exercice. Le produit $\Lambda^p E^* \times \Lambda^q E^* \rightarrow \Lambda^{p+q} E^*$ induit un produit

$$\text{Alt}^p(E, \mathbb{K}) \times \text{Alt}^q(E, \mathbb{K}) \rightarrow \text{Alt}^{p+q}(E, \mathbb{K})$$

explicité par la formule, pour tous vecteurs $X_i \in E$,

$$(\alpha \wedge \beta)_{X_1, \dots, X_{p+q}} = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{p+q}} \varepsilon(\sigma) \alpha_{X_{\sigma(0)}, \dots, X_{\sigma(p)}} \beta_{X_{\sigma(p+1)}, \dots, X_{\sigma(p+q)}}. \quad (\text{III.2})$$

17.b Fibrés associés à un fibré vectoriel

Soit $E \rightarrow M$ et $F \rightarrow M$ des fibrés vectoriels sur la variété M . On va montrer qu'il existe des fibrés vectoriels E^* , $\Lambda^p E$, $\Lambda^p E^*$, $\text{Alt}^p(E, \mathbb{R})$, $E \times F$, $E \otimes F$ tels que

- 1° la fibre de ces fibrés en un point $x \in M$ est E_x^* , $\Lambda^p E_x$, $\Lambda^p E_x^*$, $\text{Alt}^p(E_x, \mathbb{R})$, $E_x \times F_x$, $E_x \otimes F_x$;
- 2° toutes les opérations algébriques sont C^∞ : par exemple si α et β sont des sections C^∞ de $\Lambda^p E$ et $\Lambda^q E$, alors le produit $\alpha \wedge \beta$, défini en prenant en chaque point $x \in M$ le produit extérieur $(\alpha \wedge \beta)(x) = \alpha(x) \wedge \beta(x) \in \Lambda^{p+q} E_x$, est une section C^∞ de $\Lambda^{p+q} E$.

Les fibrés énumérés ici ne sont que des exemples, tous les fibrés construits par une opération algébrique satisfont la même propriété. La théorie des fibrés principaux que vous verrez plus tard donne le cadre abstrait pour traiter ces constructions de manière unifiée. La construction est analogue à celle du fibré cotangent (exemple 9.8). Pour éviter la théorie générale des fibrés, nous traitons l'exemple des puissances extérieures. Une trivialisations locale

$$E|_{U_i} \xrightarrow{F_i} U_i \times \mathbb{R}^k$$

conduit à une trivialisations locale de

$$\Lambda^p E|_{U_i} \xrightarrow{\Lambda^p F_i} U_i \times \Lambda^p \mathbb{R}^k.$$

Sur l'ouvert U_{ij} on a $F_i \circ F_j^{-1}(x, u) = (x, g_{ij}(x)u)$, où $g_{ij} : U_{ij} \rightarrow \text{GL}(k, \mathbb{R})$ est C^∞ . Alors nous obtenons une transition entre les trivialisations $\Lambda^p F_i$ et $\Lambda^p F_j$ donnée par

$$\begin{aligned} \Lambda^p F_i \circ (\Lambda^p F_j)^{-1} : U_{ij} \times \Lambda^p \mathbb{R}^k &\longrightarrow U_{ij} \times \Lambda^p \mathbb{R}^k \\ (x, u) &\longmapsto (x, (\Lambda^p g_{ij}(x))u) \end{aligned}$$

Or l'application $\text{End}(\mathbb{R}^k) \rightarrow \text{End}(\Lambda^p \mathbb{R}^k)$ donnée par $g \mapsto \Lambda^p g$ est C^∞ car elle est à coefficients polynomiaux ; donc les $x \mapsto \Lambda^p g_{ij}(x)$ sont C^∞ . Ainsi les transitions $\Lambda^p F_i \circ (\Lambda^p F_j)^{-1}$ sont-elles C^∞ , ce qui suffit à assurer une structure de fibré vectoriel sur $\Lambda^p E$, dont les trivialisations locales sont les $\Lambda^p F_i$. (Voir la construction du fibré tangent section 9.b).

En particulier, si une base locale de E est donnée par les sections (e_1, \dots, e_k) , alors une base locale de $\Lambda^p E$ est donnée par les sections $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p})_{i_1 < \dots < i_p}$ et donc une section locale C^∞ de E s'exprime comme

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \alpha_{i_1 \dots i_p}(x) e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p},$$

où les $\alpha_{i_1 \dots i_p}$ sont maintenant des fonctions C^∞ . En particulier, si $\alpha \in \Gamma(M, \Lambda^p E)$ et $\beta \in \Gamma(M, \Lambda^q E)$ alors $\alpha \wedge \beta \in \Gamma(M, \Lambda^{p+q} E)$.

Lemme 17.1. *Soit $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel. Alors on a des isomorphismes de fibrés vectoriels*

$$\Lambda^p E^* \simeq (\Lambda^p E)^* \simeq \text{Alt}^p(E, \mathbb{R}).$$

L'espace $\Gamma(M, \text{Alt}^p(E, \mathbb{R}))$ des sections de $\text{Alt}^p(E, \mathbb{R})$ est isomorphe à l'espace des applications $E \times \dots \times E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ et p -linéaires alternées sur chaque fibre $E_x \times \dots \times E_x$.

Démonstration. Tout vient de la 6ème propriété dans la section 17.a, à savoir l'isomorphisme $\Lambda^p(\mathbb{R}^k)^* \simeq (\Lambda^p \mathbb{R}^k)^* \simeq \text{Alt}^p(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$. Comme cet isomorphisme est canonique, il passe aux fibrés. Les détails de la démonstration sont laissés en exercice. \square

Étant donnée une section $\alpha \in \Gamma(M, \Lambda^p E^*)$ et p sections $X_1, \dots, X_p \in \Gamma(M, E)$, on peut donc évaluer en chaque point de M la forme α sur le p -uplet (X_1, \dots, X_p) pour obtenir $\alpha(X_1, \dots, X_p)$ qui est une fonction C^∞ . Par multilinéarité, si $f \in C^\infty(M)$, alors

$$\alpha(X_1, \dots, fX_i, \dots, X_p) = f\alpha(X_1, \dots, X_p), \quad (\text{III.3})$$

autrement dit, l'application $(X_1, \dots, X_p) \mapsto \alpha(X_1, \dots, X_p)$ est $C^\infty(M)$ -multilinéaire alternée sur $\Gamma(M, E)$. Réciproquement :

Lemme 17.2. *Soit $E \rightarrow M$ un fibré vectoriel et $A : \Gamma(M, E) \times \dots \times \Gamma(M, E) \rightarrow C^\infty(M)$ une application $C^\infty(M)$ -multilinéaire alternée, alors A est en fait une section de $\Lambda^p E^*$: il existe $\alpha \in \Gamma(M, \Lambda^p E^*)$ telle que pour tous $X_1, \dots, X_p \in \Gamma(M, E)$ on ait*

$$A(X_1, \dots, X_p) = \alpha(X_1, \dots, X_p).$$

Démonstration. La démonstration reprend les techniques vues lors de la démonstration du théorème 10.2, et on ne donne ici que le plan de la démonstration :

- 1° on montre que, grâce à la $C^\infty(M)$ -multilinéarité, A est un opérateur local, c'est-à-dire se restreint en un opérateur A_U sur tout ouvert U ;
- 2° il est alors licite de se placer dans un système de coordonnées ; en utilisant le lemme 10.5, on montre que $A(X_1, \dots, X_p)(x)$ ne dépend que des valeurs $X_i(x)$ au point x ;
- 3° on peut donc définir α au point x par $\alpha(x)(X_1, \dots, X_p) = A(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_p)(x)$, où $\tilde{X}_i \in \Gamma(U, E)$ est une extension dans un voisinage $U \ni x$ de $X_i \in E_x$.

\square

17.c Formes différentielles

Définition 17.3. Une *forme différentielle* de degré p sur la variété M est une section C^∞ du fibré $\Lambda^p T^*M$. On note l'espace des p -formes différentielles sur M

$$\Omega^p M = \Gamma(M, \Lambda^p T^*M).$$

Par le lemme 17.1, on peut voir aussi une p -forme différentielle α comme une application $TM \times \dots \times TM \rightarrow \mathbb{R}$ qui est p -linéaire alternée sur chaque fibre. En particulier, on peut évaluer α sur p champs de vecteurs $X_1, \dots, X_p \in \Gamma(M, TM)$: alors α_{X_1, \dots, X_p} est une fonction C^∞ sur M .

L'espace de toutes les formes différentielles,

$$\Omega M = \bigoplus_p \Omega^p M,$$

est une $C^\infty(M)$ -algèbre graduée. En particulier $\Omega^0 M = C^\infty(M)$ et $\Omega^1 M = \Gamma(M, T^*M)$. On rappelle (exemple 9.8) que si $f \in C^\infty(M)$ alors sa différentielle $df \in \Omega^1 M$.

Passons à l'expression locale d'une forme différentielle. Soit $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une carte locale de M , alors les coordonnées (x_i) de \mathbb{R}^n peuvent être vues via φ comme des fonctions sur U , donc leurs différentielles $dx_i \in \Omega^1 U$. En outre, les (dx_i) sont en chaque point $x \in U$ une base de T_x^*M , donc toute forme différentielle de degré p sur U s'écrit

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \alpha_{i_1 \dots i_p}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p},$$

où les $\alpha_{i_1 \dots i_p}$ sont des fonctions C^∞ sur U .

17.d Image réciproque

Soit $f : M \rightarrow N$ de classe C^∞ et $\alpha \in \Omega^p N$. On définit l'**image réciproque de la forme différentielle** α par f , notée $f^* \alpha$, comme la p -forme différentielle sur M définie par

$$(f^* \alpha)(x) = \Lambda^p({}^t T_x f)(\alpha(f(x))).$$

Par exemple, on obtient :

- $p = 0$: il s'agit des fonctions, si $u \in C^\infty(N)$, alors $f^* u = u \circ f$;
- $p = 1$: si $\alpha \in \Omega^1 N$ alors $(f^* \alpha)(x) = \alpha(f(x)) \circ T_x f$; en particulier, si $\alpha = du$, alors $f^* du(x) = d_{f(x)} u \circ T_x f = d_x(u \circ f)$, autrement dit, pour $u \in C^\infty(N)$,

$$f^* du = d(u \circ f) = d(f^* u). \quad (\text{III.4})$$

Démonstration que $f^ \alpha$ est bien de classe C^∞ .* C'est une question locale, on prend des cartes $\varphi : U \ni x \rightarrow U' \rightarrow V'$ et $\psi : V \ni f(x) \rightarrow V'$ telles que $f(U) \subset V$. Notons $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U' \rightarrow V'$ l'expression locale de f . Nous allons faire une démonstration « abstraite », mais une autre approche, plus simple, consiste à écrire l'image réciproque dans un système de coordonnées, voir ci-dessous.

La trivialisatation locale du fibré $\Lambda^p T^*M|_{U'} \simeq U' \times \Lambda^p(\mathbb{R}^m)^*$ est par

$$\Lambda^p({}^t(T\psi)^{-1}) : (x, \alpha) \longmapsto (x, \Lambda^p({}^t(T_x \psi)^{-1})\alpha).$$

Dire que α est C^∞ signifie donc que $\sigma(x) = \Lambda^p({}^t(T_x \psi)^{-1})\alpha(x)$ est une application C^∞ de U' vers $\Lambda^p(\mathbb{R}^m)^*$. De même, nous devons montrer que $\tau(x) = \Lambda^p({}^t(T_x \varphi)^{-1})f^* \alpha(x)$ est une application C^∞ de U vers $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)^*$.

De $f \circ \varphi^{-1} = \psi^{-1} \circ F$ on déduit ${}^t(T_x \varphi)^{-1} \circ {}^t T_x f = {}^t d_{\varphi(x)} F \circ {}^t(T_{f(x)} \psi)^{-1}$, et donc, passant à la puissance extérieure p -ième,

$$\tau(x) = {}^t(\wedge^p d_{\varphi(x)} F) \sigma(f(x));$$

puisque F , l'expression locale de f , est C^∞ , on obtient bien que τ est C^∞ . \square

La démonstration des propriétés suivantes est laissée au lecteur :

Propriétés. 1° On a $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta$, c'est-à-dire $f^* : \Omega N \rightarrow \Omega M$ est un morphisme d'algèbres graduées.

2° Si $f : M \rightarrow N$ et $g : N \rightarrow P$, alors $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Expression locale

Soit $f : M \rightarrow N$ et (x_i) des coordonnées locales sur un ouvert $V \subset N$. Si $\alpha \in \Omega^p N$, alors

$$\alpha|_V = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \alpha_{i_1 \dots i_p}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

pour des fonctions $\alpha_{i_1 \dots i_p}$ de classe C^∞ .

Notons $f = (f_1, \dots, f_m)$ les coordonnées de f , autrement dit $f_i = x_i \circ f$ sur $f^{-1}(V)$. Alors, parce que f^* est un morphisme d'algèbres, et en appliquant (III.4),

$$\begin{aligned} f^*\alpha|_{f^{-1}(V)} &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} f^*\alpha_{i_1 \dots i_p} f^* dx_{i_1} \wedge \dots \wedge f^* dx_{i_p} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} (\alpha_{i_1 \dots i_p} \circ f) df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_p}. \end{aligned}$$

Cette formule donne un moyen pratique de calculer $f^*\alpha$ dans un système de coordonnées.

Exemple 17.4. Soit $i : S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ et $\alpha = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$. Prenant des coordonnées angulaires (φ, θ) sur S^2 , de sorte que $i(\varphi, \theta) = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi)$, on calcule grâce à la formule ci-avant

$$i^*\alpha = \sin \varphi d\varphi \wedge d\theta.$$

Comme on le verra, $i^*\alpha$ est la forme d'aire de S^2 , et l'intégrale

$$\int_{[0, \pi] \times [0, 2\pi]} \sin \varphi d\varphi d\theta = 4\pi$$

donne l'aire de S^2 .

18 Différentielle extérieure

18.a Dérivation de degré r

On rappelle qu'une **algèbre graduée** est une algèbre $A = \bigoplus A_p$ satisfaisant $A_p A_q \subset A_{p+q}$. Si $a \in A$ est dans l'un des A_p , on dit qu'il est de degré p et on note $|a| = p$. Enfin, A est appelée une **algèbre graduée anticommutative** si on a toujours $ab = (-1)^{|a||b|}ba$.

Définition 18.1. Une **dérivation de degré r** de l'algèbre graduée anticommutative A est une application \mathbb{R} -linéaire $D : A \rightarrow A$ satisfaisant les propriétés

$$D(A_p) \subset A_{p+r} \tag{III.5}$$

$$D(ab) = (Da)b + (-1)^{|a|r} aDb. \tag{III.6}$$

Exemple 18.2. Soit E un espace vectoriel et $X \in E$. On définit $i(X) : \Lambda^{p+1}E^* \rightarrow \Lambda^pE^*$ par

$$(i(X)\alpha)_{X_1, \dots, X_p} = \alpha_{X, X_1, \dots, X_p}.$$

De manière équivalente, on peut définir $i(X)$ par, pour $\alpha_i \in E^*$,

$$i(X)\alpha_0 \wedge \dots \wedge \alpha_p = \sum_{i=0}^p (-1)^i \langle X, \alpha_i \rangle \alpha_0 \wedge \dots \wedge \widehat{\alpha_i} \wedge \dots \wedge \alpha_p.$$

Exercice. Montrer que $i(X)$ est une dérivation de degré -1 de l'algèbre extérieure ΛE^* .

Exemple 18.3. Si D_1 et D_2 sont des dérivations de degré r_1 et r_2 de l'algèbre graduée anticommutative A , alors

$$[D_1, D_2] = D_1 D_2 - (-1)^{r_1 r_2} D_2 D_1 \quad (\text{III.7})$$

est une dérivation de degré $r_1 + r_2$ de A .

18.b Différentielle extérieure

Théorème 18.4. Soit M une variété. Il existe une et une seule dérivation de degré 1 de ΩM , notée d , telle que

- 1° pour toute $f \in C^\infty(M)$ alors df est la différentielle standard de la fonction f ;
- 2° $d^2 = 0$.

Cette dérivation est appelée la **différentielle extérieure** de M .

Exemple 18.5. Prenons M un ouvert de \mathbb{R}^n . Une p -forme différentielle s'écrit

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \alpha_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

Par la seconde propriété, on a $d(dx_i) = 0$; comme d est une dérivation, on déduit $d(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) = 0$ par récurrence sur p ; finalement, appliquant une dernière fois la propriété des dérivations, on a nécessairement :

$$d\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_p} d\alpha_{i_1 \dots i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}. \quad (\text{III.8})$$

Cela montre l'unicité de d . Pour l'existence, il suffit de montrer que la formule (III.8) définit bien une dérivation d de degré 1 de ΩM satisfaisant $d^2 = 0$.

Commençons par montrer que d est une dérivation. Il suffit de montrer (III.6) pour des formes différentielles du type

$$\alpha = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}, \quad \beta = g dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q}.$$

Alors

$$d(\alpha \wedge \beta) = d(fg) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q}.$$

Écrivant $d(fg) = f dg + g df$ et réorganisant les termes :

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge g dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} \\ &\quad + (-1)^p f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dg \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q} \\ &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta \end{aligned}$$

qui montre bien (III.6).

Montrons enfin que $d^2 = 0$. Commençons par le cas d'une fonction f :

$$d(df) = d\left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx_i \wedge dx_j = 0.$$

En général, il suffit à nouveau de le démontrer sur une forme de type $\alpha = f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$, donc

$$d^2\alpha = d(df \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}) = 0$$

car c'est une dérivation et $d(df) = 0$ sur les fonctions. La construction de la différentielle extérieure sur un ouvert de \mathbb{R}^n est donc achevée.

Démonstration du théorème 18.4. Nous ne donnons pas beaucoup de détail car la structure de la démonstration est similaire à celle du théorème 10.2.

Commençons par l'unicité. Supposons qu'on ait une telle dérivation d . Comme dans la démonstration du théorème 10.2, on montre que d est nécessairement un opérateur local, et donc induit une dérivation d_U de ΩU pour tout ouvert U , telle que $(d\alpha)|_U = d_U(\alpha|_U)$ pour toute forme α . Mais pour U un ouvert de coordonnées, on a vu qu'une telle dérivation est nécessairement donnée par la formule (III.8). Cela prouve l'unicité de d .

Pour l'existence, recouvrons M par des ouverts de cartes U_α . Ainsi la formule (III.8) définit une dérivation d_{U_α} de ΩU_α . Par l'énoncé d'unicité appliqué sur $U_{\alpha\beta}$ on déduit que $(d_{U_\alpha} \omega|_{U_\alpha})|_{U_{\alpha\beta}} = (d_{U_\beta} \omega|_{U_\beta})|_{U_{\alpha\beta}}$ pour toute forme $\omega \in \Omega M$. Autrement dit les formes $d_{U_\alpha}(\omega|_{U_\alpha})$ se recollent sur M pour définir $d\omega$. \square

Exemple 18.6 (Équations de Maxwell). La différentielle extérieure permet d'écrire les équations de Maxwell de manière intrinsèque. On se place dans \mathbb{R}^4 avec coordonnées (x, y, z, t) , où la dernière coordonnée est le temps et les trois autres les coordonnées d'espace. Alors on réunit le champ électrique et le champ magnétique dans le champ électro-magnétique

$$F = (E_x dx + E_y dy + E_z dz) \wedge dt + B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy.$$

Alors

$$\begin{aligned} dF &= (\partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z) dx \wedge dy \wedge dz + (\partial_x E_y - \partial_y E_x + \partial_t B_z) dx \wedge dy \wedge dt \\ &\quad + (\partial_y E_z - \partial_z E_y + \partial_t B_x) dy \wedge dz \wedge dt + (\partial_z E_x - \partial_x E_z + \partial_t B_y) dz \wedge dx \wedge dt, \end{aligned}$$

de sorte que les équations de Maxwell sont équivalentes au couple d'équations

$$dF = 0, \quad d * F = 0,$$

où $*$ est un opérateur linéaire sur les 2-formes satisfaisant $*^2 = -1$ et défini par $*(dx \wedge dy) = dz \wedge dt$ et les deux autres équations obtenues par permutation circulaire sur (x, y, z) . (L'opérateur $*$ est l'opérateur de Hodge pour la métrique lorentzienne de signature $(3, 1)$ sur \mathbb{R}^4).

Exemple 18.7 (Rotationnel et divergence). L'énoncé $d^2 = 0$ contient des identités différentielles bien connues concernant rotationnel et divergence. Sur \mathbb{R}^3 , notons d_i la différentielle extérieure sur les formes de degré i , donc on a

$$\Omega^0 \mathbb{R}^3 \xrightarrow{d_0} \Omega^1 \mathbb{R}^3 \xrightarrow{d_1} \Omega^2 \mathbb{R}^3 \xrightarrow{d_2} \Omega^3 \mathbb{R}^3. \quad (\text{III.9})$$

Si \mathbb{R}^3 est muni d'un produit scalaire euclidien tel que (x, y, z) soient des coordonnées dans un repère orthonormé, alors

- $\mathbb{R}^3 \simeq (\mathbb{R}^3)^*$ grâce au produit scalaire ;
- $\mathbb{R}^3 \simeq \Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$ par l'application $X \mapsto i(X)v$, où $v = dx \wedge dy \wedge dz$ est l'élément canonique de $\Lambda^3(\mathbb{R}^3)^*$ induit par le produit scalaire de $(\mathbb{R}^3)^*$.

Concrètement, ces deux isomorphismes s'explicitent par

$$\begin{aligned} X_x \partial_x + X_y \partial_y + X_z \partial_z &\mapsto X_x dx + X_y dy + X_z dz, \\ X_x \partial_x + X_y \partial_y + X_z \partial_z &\mapsto X_x dy \wedge dz + X_y dz \wedge dx + X_z dx \wedge dy. \end{aligned}$$

L'élément v permet aussi d'identifier $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ avec $\Omega^3 \mathbb{R}^3$ par $f \mapsto fv$.

Si on identifie $\Omega^1 \mathbb{R}^3$ et $\Omega^2 \mathbb{R}^3$ à l'espace $\Gamma(\mathbb{R}^3, T\mathbb{R}^3)$ des champs de vecteurs sur \mathbb{R}^3 grâce aux deux isomorphismes ci-dessus, alors, par une vérification élémentaire, dans (III.9) on a les identifications

$$d_0 = \text{grad}, \quad d_1 = \text{rot}, \quad d_2 = \text{div}.$$

L'identité $d^2 = 0$, à savoir $d_1 d_0 = 0$ et $d_2 d_1 = 0$, se traduit par les deux identités classiques :

$$\text{rot}(\text{grad} f) = 0, \quad \text{div}(\text{rot} X) = 0.$$

Proposition 18.8 (Fonctorialité). *Soit $f : M \rightarrow N$ une application C^∞ entre variétés, alors le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^p N & \xrightarrow{f^*} & \Omega^p M \\ \downarrow d & & \downarrow d \\ \Omega^{p+1} N & \xrightarrow{f^*} & \Omega^{p+1} M \end{array}$$

Autrement dit, pour toute forme $\alpha \in \Omega^p N$, on a $f^*(d\alpha) = d(f^*\alpha)$.

En particulier, pour une fonction u sur N , on a $f^* du = d(f^*u)$, formule déjà vue en (III.4).

Démonstration. C'est un énoncé local, il suffit de le vérifier dans des coordonnées. Soit V un ouvert de carte sur N et $U = f^{-1}(V)$. Écrivons

$$\alpha|_V = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \alpha_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p},$$

alors, écrivant dans la carte V l'application f par ses coordonnées $f = (f_1, f_2, \dots)$,

$$(f^*\alpha)|_U = \sum_{i_1 < \dots < i_p} f^* \alpha_{i_1 \dots i_p} f^* dx_{i_1} \wedge \dots \wedge f^* dx_{i_p} = \sum_{i_1 < \dots < i_p} f^* \alpha_{i_1 \dots i_p} df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_p}$$

d'où on tire

$$\begin{aligned} d(f^*\alpha)|_U &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} d(f^* \alpha_{i_1 \dots i_p}) \wedge df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_p} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} f^*(d\alpha_{i_1 \dots i_p}) \wedge df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_p} \\ &= f^* \sum_{i_1 < \dots < i_p} d\alpha_{i_1 \dots i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\ &= (f^*d\alpha)|_U. \end{aligned}$$

□

18.c Formule de Maurer-Cartan

Rappelons que par le lemme 17.2, une p -forme différentielle α s'identifie à une p -forme $C^\infty(M)$ -linéaire alternée sur l'espace $\Gamma(M, TM)$ des champs de vecteurs sur M , autrement dit, on peut voir α à travers ses valeurs $\alpha_{X_1, \dots, X_p} \in C^\infty(M)$ sur p champs de vecteurs X_1, \dots, X_p . L'interprétation de la différentielle extérieure de ce point de vue est donnée par :

Proposition 18.9 (Formule de Maurer-Cartan). *Si $\alpha \in \Omega^p M$, alors pour tous champs de vecteurs X_0, \dots, X_p sur M , on a*

$$(d\alpha)_{X_0, \dots, X_p} = \sum_0^p (-1)^i X_i \cdot \alpha_{X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_p} + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha_{[X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_p}.$$

Le cas $p = 1$ de la formule est le plus souvent utilisé : si $\alpha \in \Omega^1 M$ et $X, Y \in \Gamma(M, TM)$, alors

$$d\alpha_{X, Y} = X \cdot \alpha_Y - Y \cdot \alpha_X - \alpha_{[X, Y]}. \quad (\text{III.10})$$

Démonstration. Pour $p = 0$, la formule est la définition de la différentielle d'une fonction. Montrons le cas $p = 1$: toute 1-forme est somme de termes de type $f dg$, où f et g sont des fonctions, donc il suffit de le faire pour $\alpha = f dg$. Donc $d\alpha = df \wedge dg$ et on calcule les deux membres de (III.10) :

$$\begin{aligned} (df \wedge dg)_{X, Y} &= (X \cdot f)(Y \cdot g) - (Y \cdot f)(X \cdot g), \\ X \cdot (fY \cdot g) - Y \cdot (fX \cdot g) - f[X, Y] \cdot g &= (X \cdot f)(Y \cdot g) - (Y \cdot f)(X \cdot g) \\ &\quad + f(X \cdot Y \cdot g - Y \cdot X \cdot g - [X, Y] \cdot g), \end{aligned}$$

qui sont bien égaux puisque par définition du crochet $[X, Y] \cdot g = X \cdot Y \cdot g - Y \cdot X \cdot g$.

Dans le cas général, notons $D\alpha$ le membre de droite de la formule de Maurer-Cartan. Il est facile de vérifier que $D\alpha$ est bien alternée en (X_0, \dots, X_p) . Vérifions que $D\alpha$ est $C^\infty(M)$ -multilinéaire : puisqu'elle est alternée, il suffit de le vérifier par rapport à X_0 , donc multiplions X_0 par $f \in C^\infty(M)$; comme $[fX_0, X_j] = f[X_0, X_j] - (X_j \cdot f)X_0$, on obtient immédiatement $(D\alpha)_{fX_0, X_1, \dots, X_p} = f(D\alpha)_{X_0, X_1, \dots, X_p}$. On a donc, par le lemme 17.2, que le membre de droite $D\alpha$ définit bien une forme différentielle de degré $p + 1$. Il suffit alors de vérifier la coïncidence avec $d\alpha$ dans des coordonnées locales (x_i) . Écrivons $\alpha = \sum \alpha_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$. Évaluons $D\alpha$ sur les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x_{j_0}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_p}}$ pour $j_0 < \dots < j_p$, alors, puisque leurs crochets sont nuls, $D\alpha$ se réduit à

$$(D\alpha)_{\frac{\partial}{\partial x_{j_0}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{j_p}}} = \sum_0^p (-1)^i \frac{\partial \alpha_{j_0 \dots \widehat{j}_i \dots j_p}}{\partial x_{j_i}},$$

qui coïncide avec la valeur de $d\alpha$ sur les mêmes champs de vecteurs. \square

18.d Formule de Cartan

Soit un champ de vecteurs X sur M et φ_t le flot associé. Conformément à la définition générale vue dans la section 15, on définit la dérivée de Lie d'une forme différentielle α suivant le vecteur X en posant

$$\mathcal{L}_X \alpha = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* \alpha.$$

Puisque $\varphi_i^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi_i^*\alpha \wedge \varphi_i^*\beta$, on obtient en dérivant

$$\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_X\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_X\beta),$$

autrement dit, $\mathcal{L}_X : \Omega M \rightarrow \Omega M$ est une dérivation de degré 0.

Théorème 18.10 (Formule de Cartan). *Sur ΩM on a l'identité $\mathcal{L}_X = i(X) \circ d + d \circ i(X)$.*

Rappelons que $i(X)$ et d sont des dérivations de degré respectifs -1 et 1 , donc $i(X) \circ d + d \circ i(X)$ est bien une dérivation de degré 0 comme il se doit.

La démonstration utilisera le théorème suivant, dont la démonstration, similaire à la construction de la différentielle extérieure, est laissée au lecteur.

Théorème 18.11. *Soit $D : \Omega^0 M \rightarrow \Omega^d M$ telle que $D(fg) = (Df)g + f(Dg)$ pour toutes fonctions $f, g \in C^\infty(M)$. Alors il existe une et une seule dérivation ∇ de degré d de ΩM telle que*

$$\nabla|_{\Omega^0 M} = D, \quad (\text{III.11})$$

$$\nabla d - (-1)^r d\nabla = 0. \quad (\text{III.12})$$

Par exemple, si on prend pour D la différentielle des fonctions, alors ∇ est la différentielle extérieure d , la seconde identité disant juste $d^2 = 0$.

Démonstration du théorème 18.10. Sur les fonctions on a

$$(i(X) \circ d + d \circ i(X))f = i(X)df = X \cdot f = \mathcal{L}_X f,$$

donc on a bien coïncidence de \mathcal{L}_X et $i(X) \circ d + d \circ i(X)$. Comme toutes deux sont des dérivations de degré 0, l'égalité en tout degré résulte du théorème 18.11, pourvu que la seconde condition en soit satisfaite. Or, d'une part

$$(i(X) \circ d + d \circ i(X)) \circ d = d \circ i(X) \circ d = d \circ (i(X) \circ d + d \circ i(X)),$$

d'autre part, l'identité $\varphi_i^* d\alpha = d\varphi_i^* \alpha$ mène en dérivant à $\mathcal{L}_X d\alpha = d\mathcal{L}_X \alpha$, donc les deux dérivations satisfont bien (III.12). \square

19 Intégration sur les variétés

19.a Orientation d'une variété

Commençons par l'orientation d'un espace vectoriel. Rappelons que $\Lambda^n \mathbb{R}^n = \mathbb{R}$. Une orientation de \mathbb{R}^n est un choix de demi-droite positive $\mathbb{R}_+^* \subset \Lambda^n \mathbb{R}^n$; la notion d'élément positif ou négatif de $\Lambda^n \mathbb{R}^n$ prend alors un sens. Une base (e_i) de \mathbb{R}^n est directe si $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n > 0$; si $e_i = u(f_i)$ avec $u \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$, alors $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = \det(u)f_1 \wedge \cdots \wedge f_n$ donc les autres bases directes se déduisent de (e_i) par un élément de $\text{GL}_+(n, \mathbb{R}) = \{u \in \text{GL}(n, \mathbb{R}), \det u > 0\}$.

Définition 19.1. *On dit que M^n est une **variété orientable** si M admet un atlas \mathcal{A} tel que si $\varphi_i, \varphi_j \in \mathcal{A}$, alors $\text{jac}(\varphi_j \varphi_i^{-1}) > 0$.*

*Une **orientation de la variété** M est le choix d'un tel atlas, maximal pour cette propriété.*

Remarque 19.2. Notons $\iota(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, x_2, \dots, x_n)$, donc ι renverse l'orientation de \mathbb{R}^n . Si $\mathcal{A} = (\varphi_i)$ est un atlas orienté sur M , alors $\mathcal{B} = (\iota \circ \varphi_i)$ est un autre atlas sur M dont les jacobiens des transitions sont à nouveau positifs. Ainsi \mathcal{B} définit une orientation, dite opposée à l'orientation donnée par \mathcal{A} , car les jacobiens des transitions entre cartes de \mathcal{A} et cartes de \mathcal{B} sont tous négatifs.

Remarque 19.3 (Exercice). Si M est connexe, alors M a au plus deux orientations.

Supposons M orientée, et soit \mathcal{A} l'atlas d'orientation. Si $\varphi \in \mathcal{A}$, alors $T_x\varphi : T_xM \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme, donc l'orientation canonique de \mathbb{R}^n induit une orientation de T_xM . Si on a une autre carte $\psi \in \mathcal{A}$, alors $T_x\varphi = d_{\psi(x)}(\varphi \circ \psi^{-1}) \circ T_x\psi$; comme $\text{jac}(\varphi \circ \psi^{-1}) = \det T_{\psi(x)}(\varphi \circ \psi^{-1}) > 0$, on voit que $T_x\varphi$ et $T_x\psi$ induisent la même orientation sur T_xM , donc l'orientation obtenue sur T_xM ne dépend que de l'orientation de M . Le fibré tangent se trouve ainsi muni d'une orientation (au sens des fibrés vectoriels).

Définition 19.4. Une *forme volume* sur une variété M^n est une n -forme différentielle partout non nulle.

Remarquons qu'une forme volume Ω détermine en chaque point $x \in M$ un élément non nul $\Omega_x \in \Lambda^n T_x^*M$ et donc une orientation de T_xM (définie par le fait qu'une base (e_i) est directe si $\Omega_{e_1, \dots, e_n} > 0$). On en déduit que M admet une orientation en prenant pour atlas orienté les cartes φ telles qu'en chaque point $T_x\varphi : T_xM \rightarrow \mathbb{R}^n$ préserve l'orientation. On a donc démontré la première partie de la

Proposition 19.5. 1° Une forme volume sur M détermine une orientation de M .

2° La variété M est orientable si et seulement si elle admet une forme volume.

Démonstration. Il ne reste à démontrer que : si M est orientable, alors elle admet une forme volume. Ce sera une conséquence du lemme 19.7 ci-dessous, construisant une forme volume associée à une orientation et à une métrique riemannienne. \square

Remarque 19.6. On dit qu'un difféomorphisme $f : M \rightarrow N$ préserve (resp. renverse) l'orientation si $T_x f : T_xM \rightarrow T_{f(x)}N$ préserve (resp. renverse) l'orientation pour tout $x \in M$. En termes de formes volumes Ω_M et Ω_N compatibles avec les orientations, écrivons

$$f^*\Omega_N = h\Omega_M$$

pour une fonction h sur M . Alors f préserve (resp. renverse) l'orientation si et seulement si $h > 0$ (resp. $h < 0$).

Supposons la variété M équipée d'une métrique riemannienne g . La donnée d'une orientation de M transforme ainsi chaque espace tangent T_xM en un espace vectoriel euclidien orienté, donc on dispose d'un élément canonique $e_1 \wedge \dots \wedge e_n \in \Lambda^n T_xM$, où (e_i) est une base orthonormale directe de T_xM . Passant à la base duale (e_i^*) , on dispose également d'un élément canonique de $\Lambda^n T_x^*M$ donné par

$$\Omega_x = e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*.$$

Lemme 19.7. L'élément Ω_x dépend de manière C^∞ de x , on obtient donc une n -forme différentielle canonique $\Omega \in \Omega^n M$ appelée *forme volume* de (M, g) .

La forme volume Ω est donc caractérisée par le fait que pour tout $x \in M$ et toute base orthonormale directe (e_i) de T_xM on a $\Omega_{e_1, \dots, e_n} = 1$.

Démonstration. Il suffit de voir que le fibré TM admet localement une base (e_i) orthonormale directe en chaque point et C^∞ . Considérons le fibré en sphères $SM = \{(x, X), g(X) = 1\}$. Par la proposition 12.5, la projection $p : SM \rightarrow M$ est une fibration, et admet donc des sections locales : on choisit alors pour e_1 une telle section locale. Par le lemme 14.4, l'orthogonal e_1^\perp est un sous-fibré de TM , on peut donc recommencer le processus pour trouver une section $e_2 \in e_1^\perp$ et de norme 1. On construit ainsi de proche en proche une base orthonormale locale (e_1, \dots, e_n) de TM , avec chaque e_i de classe C^∞ . En se restreignant éventuellement à un ouvert connexe, on voit que l'une des deux bases $(\pm e_1, e_2, \dots, e_n)$ est directe. La base locale (e_i) est ainsi construite. \square

Remarque 19.8. Plus concrètement, si la métrique riemannienne est donnée dans des coordonnées locales (x_i) par la matrice symétrique $g(x)$, alors on vérifie que

$$\Omega = \sqrt{\det g} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

ce qui donne une autre manière de voir que Ω est de classe C^∞ . L'existence d'une base orthonormale directe locale de TM se voit en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la base $(\frac{\partial}{\partial x_i})$.

Proposition 19.9. *Soit M une variété connexe. Alors*

- M est orientable si et seulement si $\Lambda^n T^*M \setminus M$ a deux composantes connexes ;
- une orientation de M est un choix de l'une des deux composantes connexes.

Fixons une métrique riemannienne sur M . On dispose donc aussi d'une métrique sur le fibré $\Lambda^n T^*M$, pour laquelle on peut considérer, comme dans la section 12, le fibré en sphères $S\Lambda^n T^*M$, qui comporte 2 points au-dessus de chaque point de x . Il est clair que l'inclusion $S\Lambda^n T^*M \subset \Lambda^n T^*M \setminus M$ induit une bijection de l'espace des composantes connexes (chaque fibre \mathbb{R}^* se rétractant sur ± 1), donc les hypothèses peuvent se retranscrire sur les composantes connexes de $S\Lambda^n T^*M$.

Démonstration. On fixe une métrique riemannienne sur M . Si M est orientable, alors la forme volume Ω détermine les deux composantes connexes $\{(x, \lambda\Omega_x), \pm\lambda > 0\}$. Réciproquement, si $\Lambda^n T^*M \setminus M$, et donc $S\Lambda^n T^*M$, a deux composantes connexes, alors choisissons-en une, qu'on appellera S_+ ; la projection $p : S_+ \rightarrow M$ est nécessairement un difféomorphisme (voir section 12.d), donc on peut définir une section $\Omega_x = p^{-1}(x)$ de S_+ : on a $\Omega \in \Omega^n M$ et Ω ne s'annule en aucun point, donc est une forme volume. Donc M est orientable, et le choix de la composante connexe S_+ détermine une orientation (celle associée à Ω). \square

Exemples. 1° La sphère S^n est orientable. En effet, S^n dispose d'un atlas avec deux cartes, les projections stéréographiques p_N et p_S , de sorte que la transition $p_S p_N^{-1}$ soit l'inversion $x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$. Or le jacobien de l'inversion est négatif, donc elle renverse l'orientation. On obtient donc un atlas orienté en prenant plutôt $\{p_N, \iota \circ p_S\}$.

Autre manière de procéder : considérons la forme volume $v = dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_n$ de \mathbb{R}^{n+1} , et le champ de vecteurs radial $X = r \frac{\partial}{\partial r} = \sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Notant l'inclusion $j : S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, on vérifiera qu'on définit une forme volume sur S^n en posant

$$\Omega = j^*(i(X)v). \quad (\text{III.13})$$

2° Toute sous-variété compacte de dimension n de \mathbb{R}^{n+1} est orientable. C'est une généralisation du cas de la sphère, qui s'appuie sur le théorème de topologie suivant, dû à Alexander¹ : si $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est une sous-variété compacte connexe, alors $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M$ a deux composantes connexes, l'intérieur de M qui est la composante connexe bornée, et l'extérieur de M . Alors on peut orienter M de la manière suivante : prenons en chaque point $x \in M$ le vecteur normal sortant $\vec{n} \in \mathbb{R}^{n+1}$, c'est-à-dire satisfaisant

$$1^\circ \|\vec{n}\| = 1 \text{ et } \vec{n} \perp T_x M;$$

$$2^\circ \vec{n} \text{ est sortant, c'est-à-dire que pour } t > 0 \text{ petit, } x + t\vec{n} \text{ est à l'extérieur de } M.$$

1. La démonstration de ce théorème est accessible après la section 20 sur la cohomologie de De Rham. On peut consulter BREDON, § 19, où la démonstration est faite à l'aide de l'homologie, mais pourrait être aussi bien rédigée à l'aide de la cohomologie.

Alors, de manière similaire à (III.13), en chaque point $x \in M$ on définit un élément de $\Lambda^n T_x^* M$ par

$$\Omega_x = i(\vec{n})v. \quad (\text{III.14})$$

Alors Ω est une forme volume sur M .

3° L'espace projectif réel $\mathbb{R}P^n$ est orientable si et seulement si n est impair. En effet, notons la projection $p : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ et $\sigma(x) = -x$ l'antipodie de S^n . Observons que si Ω est la forme volume de S^n définie par (III.13), alors

$$\sigma^* \Omega = (-1)^{n+1} \Omega, \quad (\text{III.15})$$

autrement dit, σ préserve l'orientation de S^n pour n impair et la renverse pour n pair.

Passons maintenant à la démonstration. Si $\mathbb{R}P^n$ est orientable, alors il admet une forme volume ω ; comme p est un difféomorphisme local, $\psi = p^* \omega$ est une forme volume sur S^n ; comme $p \circ \sigma = p$ on a $\sigma^* \psi = \psi$ ce qui implique que σ préserve l'orientation, donc n est impair. Réciproquement, si n est impair, alors $\sigma^* \Omega = \Omega$, ce qui implique l'existence de $\omega \in \Omega^n \mathbb{R}P^n$ tel que $\Omega = p^* \omega$; alors ω est une forme volume sur $\mathbb{R}P^n$.

La combinaison avec l'exemple précédent montre qu'il n'existe pas de plongement de $\mathbb{R}P^2$ dans \mathbb{R}^3 .

19.b Variété à bord

Commençons par étudier un exemple — la boule fermée $B^n \subset \mathbb{R}^n$, dont le bord topologique est $\partial B^n = S^{n-1}$. L'intérieur de B^n est une variété, mais les points du bord ne sont pas des points de variété. Néanmoins on peut construire des cartes particulières en ces points : écrivons $x = (x_1, y)$ avec $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, alors l'application $\varphi : U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$\varphi(x_1, y) = (x_1^2 + |y|^2 - 1, y)$$

est un difféomorphisme sur l'ouvert $V = \{x_1 > |y|^2 - 1\}$, tel que

$$\varphi(U \cap B^n) = V \cap \{x_1 \leq 0\}.$$

En considérant les composées $\varphi \circ \rho$ pour $\rho \in \text{SO}(n, \mathbb{R})$, on obtient de telles cartes sur B^n dans le voisinage d'un point quelconque de S^{n-1} .

Définition 19.10. Une structure de **variété à bord** sur M est la donnée d'un atlas de cartes à valeurs dans un ouvert de \mathbb{R}^n ou de $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}$, et dont les transitions soient des difféomorphismes², tel que M soit séparée et dénombrable à l'infini.

Pour plus de détails sur la théorie des variétés à bord, le lecteur pourra se référer au livre de LEE. On ne donnera ici que brièvement les faits essentiels nécessaires.

Observons que si on a deux cartes (φ_i, U_i) de type $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}$, alors la transition $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_{12}) \rightarrow \varphi_2(U_{12})$ envoie nécessairement $\varphi_1(U_{12}) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1})$ sur $\varphi_2(U_{12}) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1})$. Notant

$$\partial M = \bigcup_{\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}} \varphi_i^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}),$$

on déduit que les $\varphi_i|_{U_i \cap \partial M} : U_i \cap \partial M \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ forment un atlas sur ∂M ; ainsi le bord ∂M hérite d'une structure de variété de dimension $n - 1$.

2. On dit qu'une application $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}$, est C^∞ si f s'étend en une application C^∞ d'un ouvert de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^p ; il est équivalent de demander que toutes les dérivées partielles de f soient continues y compris jusqu'au bord $U \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1})$.

Proposition 19.11. Soit M une variété et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Si c est une valeur régulière de f , alors $f^{-1}(]-\infty, c])$ est une variété à bord, dont le bord est $f^{-1}(c)$.

On retrouve l'exemple de la boule ci-avant en prenant $f(x) = |x|^2$ sur \mathbb{R}^n , de sorte que $B^n = f^{-1}(]-\infty, 1])$.

Démonstration. Comme $f^{-1}(]-\infty, c])$ est ouvert dans M , c'est une variété. Il reste à voir qu'en un point $x \in f^{-1}(c)$ il existe une carte de variété à bord pour $f^{-1}(]-\infty, c])$. Or c'est précisément ce que fournit le théorème des submersions 4.2. \square

Exemples. 1° Si M est une variété (sans bord), alors $N = M \times [0, 1]$ est une variété à bord, avec $\partial N = (\{0\} \times M) \cup (\{1\} \times M)$.

2° Si M et N sont des variétés à bord, alors $M \times N$ n'est pas une variété à bord. Par exemple, $[0, 1] \times [0, 1]$ n'est pas une variété à bord, car $(0, 0)$ n'est pas un point de variété à bord.

Fibré tangent au bord

Soit $x \in \partial M$, on peut définir $T_x M$ en décidant que $T_x \varphi_i : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme ; cela a un sens car $d_{\varphi_i(x)}(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})$ est bien défini comme élément de $GL(n, \mathbb{R})$. De manière équivalente, on peut définir $T_x M$ comme l'espace des opérateurs $D : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ tels que $D(fg) = f(x)Dg + g(x)Df$.

On dispose aussi de l'espace $T_x \partial M$, de dimension $n - 1$. Celui-ci est naturellement un sous-espace de $T_x M$, comme cela se voit à travers une carte :

$$\begin{array}{ccc} T_x \partial M & \hookrightarrow & T_x M \\ \downarrow T_x \varphi_i & & \downarrow T_x \varphi_i \\ \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} & \hookrightarrow & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Si on prend une autre carte φ_j , alors $T_x \varphi_j = d_{\varphi_i(x)}(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}) \circ T_x \varphi_i$; puisque $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ et $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}) \subset \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}$, la différentielle de la transition a nécessairement la forme

$$d_{\varphi_i(x)}(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ * & A \end{pmatrix}, \quad (\text{III.16})$$

où $\lambda > 0$ et

$$A = d_{\varphi_i(x)}(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})|_{\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}} \in GL(n-1, \mathbb{R}).$$

En particulier, l'inclusion de $T_x \partial M$ dans $T_x M$ définie plus haut est indépendante de la carte φ_i choisie.

Orientaion du bord

Supposons à présent que M soit orientée (la notion d'orientation s'étend sans problème aux variétés à bord). Alors ∂M admet une orientation canonique, qu'on peut voir des deux manières équivalentes suivantes :

- si (φ_i) est un atlas orienté pour M , alors par la formule (III.16) le fait que les transitions $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ aient jacobien positif implique la même chose pour les transitions $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}|_{\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}}$ de l'atlas de ∂M ; donc ∂M est orienté ;

- si $x \in \partial M$ et $\vec{n} \in T_x M$ est un vecteur tangent sortant de M , c'est-à-dire que par une carte on a $T_x \varphi_i(\vec{n}) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^{n-1}$ (c'est indépendant de la carte par la formule (III.16)), alors une base (e_2, \dots, e_n) de $T_x \partial M$ est directe si la base $(\vec{n}, e_2, \dots, e_n)$ de $T_x M$ est directe.

On retrouve comme cas particulier les domaines à bord de \mathbb{R}^n traités dans la section 19.a.

19.c Intégration

Soit M^n une variété orientée (avec ou sans bord) et $\omega \in \Omega_c^n M$ (n -formes à support compact), on va définir $\int_M \omega$:

- 1° Si $\text{Supp}(\omega) \subset U$ un ouvert de carte avec coordonnées $x = (x_i)$ donnant l'orientation, alors on écrit $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ et on pose

$$\int \omega = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx_1 \dots dx_n.$$

- 2° Supposons $\text{Supp}(\omega) \subset U \cap V$ deux ouverts de coordonnées $x = (x_i)$ et $y = (y_i)$, alors écrivons $x = \varphi(y)$ pour un difféomorphisme φ entre ouverts de \mathbb{R}^n , et

$$\omega = f \circ \varphi \text{jac}(d\varphi) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n;$$

comme les systèmes de coordonnées sont orientés, $\text{jac}(d\varphi) > 0$ donc la formule de changement de variables dans les intégrales donne

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx_1 \dots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} f \circ \varphi \text{jac}(d\varphi) dy_1 \dots dy_n.$$

Autrement dit, le calcul de $\int \omega$ dans les coordonnées x ou y donne le même résultat.

- 3° Soit (U_i) un recouvrement de M par des cartes locales, et (χ_i) une partition de l'unité subordonnée, alors on définit

$$\int_M \omega = \sum_i \int \chi_i \omega.$$

Un autre recouvrement (V_j) avec partition de l'unité (η_j) mène à

$$\int \eta_j \omega = \int \left(\sum_i \chi_i \right) \eta_j \omega = \sum_i \int \chi_i \eta_j \omega,$$

et donc

$$\sum_j \int \eta_j \omega = \sum_{ij} \int \chi_i \eta_j \omega = \sum_i \int \chi_i \omega.$$

Ainsi le résultat ne dépend-il pas du recouvrement choisi ; donc $\int \omega$ est bien définie.

Notons que si l'on choisit l'orientation opposée de M , alors l'intégrale $\int_M \omega$ est transformée en son opposée.

Proposition 19.12. Soit $f : M \rightarrow N$ un difféomorphisme préservant l'orientation, alors pour toute forme $\omega \in \Omega_c^n N$ on a $\int_M f^* \omega = \int_N \omega$.

Remarque 19.13. Il en résulte que si f est un difféomorphisme renversant l'orientation, alors $\int_M f^* \omega = - \int_N \omega$. Cela se déduit de la proposition en remarquant que si on munit N de l'orientation opposée, alors f préserve l'orientation et l'intégrale sur N devient $- \int_N \omega$.

Démonstration. Il suffit de le démontrer quand le support de ω est inclus dans un ouvert de carte $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Alors $\varphi \circ f$ est aussi une carte sur un ouvert contenant le support de $f^* \omega$. Les expressions de ω dans la carte φ et de $f^* \omega$ dans la carte $\varphi \circ f$ sont identiques, les intégrales sont donc égales. \square

Exemple 19.14. Soit $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ donné par $c(t) = (x(t), y(t))$ et $\alpha = f(x, y)dx + g(x, y)dy$ une 1-forme sur \mathbb{R}^2 . Alors l'intégrale le long du chemin c de α est par définition

$$\int_c \alpha := \int_{[0,1]} c^* \alpha = \int_0^1 (x'(t)f(x(t), y(t)) + y'(t)g(x(t), y(t)))dt.$$

19.d Formule de Stokes

Théorème 19.15. Soit M^n une variété à bord orientée; on note $i : \partial M \hookrightarrow M$. Soit $\omega \in \Omega_c^{n-1}M$, alors

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^* \omega.$$

En particulier, si M est sans bord, alors $\int_M d\omega = 0$.

Démonstration. Par une partition de l'unité, on peut supposer que le support de ω est inclus dans un ouvert de carte. Vu l'invariance de l'intégrale par difféomorphisme, on est ainsi ramené au cas où $M = \mathbb{R}^n$ ou bien $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Dans le cas où $M = \mathbb{R}^n$, écrivons $\omega = \sum_1^n \omega_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \cdots \wedge dx_n$, donc

$$d\omega = \sum_i (-1)^{i+1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Puisque ω est à support compact, $\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} dx_i = 0$; donc $\int_{\mathbb{R}^n} d\omega = 0$.

Dans le cas où $M = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}$, le même raisonnement s'applique pour les $i \geq 2$, mais pour $i = 1$ on a $\int_{\mathbb{R}_- \times \{(x_2, \dots, x_n)\}} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} dx_1 = \omega_1(0, x_2, \dots, x_n)$ et donc

$$\int_{\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}} d\omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_1(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \cdots dx_n. \quad (\text{III.17})$$

Mais (x_2, \dots, x_n) donne des coordonnées sur $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$, compatibles avec l'orientation du bord induite par celle de $M = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1}$, et

$$i^* \omega = \omega_1(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Le membre de droite de (III.17) coïncide donc avec $\int_{\partial(\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{n-1})} i^* \omega$. \square

Exemples. 1° Si $n = 1$, la formule se lit $\int_{[0,1]} df = f(1) - f(0)$.

2° Si $n = 2$, prenons un domaine à bord $S \subset \mathbb{R}^2$, dont le bord est un contour $\Gamma = \partial S$. Soit une 1-forme $\alpha = f dx + g dy$, alors la formule de Stokes s'écrit

$$\int_S \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} f dx + g dy$$

qui est la formule de Green-Riemann.

3° Si $n = 3$, posons $S = \partial V$ où V est un domaine à bord de \mathbb{R}^3 , et écrivons la 2-forme $\alpha = f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy$, la formule de Stokes s'écrit

$$\int_V \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dx dy dz = \int_S \alpha.$$

Soit le champ de vecteurs $X = f \frac{\partial}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial y} + h \frac{\partial}{\partial z}$, alors $\alpha = i(X) dx \wedge dy \wedge dz$ et la formule devient la formule d'Ostrogradski exprimant le flux de X à travers S en termes de sa divergence à l'intérieur :

$$\int_V \operatorname{div}(X) dx dy dz = \int_S X \cdot d\vec{S}.$$

Remarque 19.16. La formule de Stokes est valable avec une régularité moins forte du bord. Par exemple, en dimension 2, elle est vraie pour des domaines du plan avec des points anguleux au bord, comme un triangle ou un carré. La démonstration consiste à nouveau à localiser la formule à l'aide d'une partition de l'unité et à vérifier qu'elle demeure vraie près des points moins réguliers.

19.e Applications

Théorème 19.17. *Soit M une variété compacte orientée à bord non vide. Alors il n'existe pas de rétraction C^∞ de M sur ∂M , c'est-à-dire d'application $r : M \rightarrow \partial M$ de classe C^∞ et telle que $r|_{\partial M} = \text{Id}_{\partial M}$.*

Le théorème s'étend aux rétractions continues, en approximant une rétraction continue par une rétraction C^∞ (on pourra élaborer sur la démonstration de la proposition 20.6 et la remarque qui la suit).

Démonstration. Supposons qu'une telle rétraction existe. Soit $\omega \in \Omega^{n-1}(\partial M)$, telle que $\int_{\partial M} \omega > 0$; il suffit pour cela de prendre dans un système de coordonnées orienté $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$, avec $f \geq 0$ non nulle et à support compact. Alors

$$\int_M d(r^* \omega) = \int_{\partial M} i^* r^* \omega = \int_{\partial M} \omega$$

puisque $r \circ i = \text{Id}_{\partial M}$. Mais $d(r^* \omega) = r^* d\omega = 0$ puisque $d\omega$ est une n -forme sur ∂M , de dimension $n - 1$. On aboutit à une contradiction. \square

Corollaire 19.18 (Théorème de point fixe de Brouwer). *Soit $f : B^n \rightarrow B^n$ une application C^∞ , alors f admet un point fixe.*

À nouveau, le théorème est en réalité valable pour une application continue, puisque sa preuve s'appuie sur le théorème 19.17 lui-même vraie pour des applications continues.

Démonstration. Supposons que f n'admette pas de point fixe. Soit $x \in B^n$. Puisque $y = f(x) \neq x$, on peut considérer la droite (xy) qui coupe ∂B en deux points z et t . Écrivons les points de manière ordonnée sur la droite, (z, x, y, t) , et posons $r(x) = z$. Par exemple en écrivant une formule explicite pour r , on vérifiera que r est bien de classe C^∞ si f l'est. Alors r est une rétraction de B^n sur $\partial B^n = S^{n-1}$, ce qui contredit le théorème 19.17. \square

19.f Exercices

Exercice 19.f.1. Soit $\text{vol} = dx \wedge dy \wedge dz$ la forme volume de \mathbb{R}^3 à coefficients constants. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface compacte; l'intérieur de S est un domaine $N \subset \mathbb{R}^3$ dont le bord est $\partial N = S$. Pour $p \in S$ on note $\nu(p)$ la normale sortante en p à S . Soit la 2-forme d'aire $\sigma \in \Omega^2(S)$ définie par $\sigma(X, Y) = \text{vol}(\nu(p), X, Y)$ si $X, Y \in T_p S$. L'aire de S est $\int_S \sigma$.

1° Soit $\alpha = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$. Calculer $d\alpha$.

2° Montrer que si (V_1, V_2) est une base orthonormée directe de $T_p S$, alors

$$\alpha(V_1, V_2) \leq \|p\| \sigma(V_1, V_2).$$

3° En déduire que si N est contenu dans la boule de centre 0 et de rayon R , alors

$$\text{volume}(N) \leq \frac{R}{3} \text{aire}(\partial N).$$

20 Cohomologie de De Rham

20.a Définitions

Soit M une variété. On dit qu'une forme différentielle $\omega \in \Omega^p M$ est

- une **forme fermée** si $d\omega = 0$;
- une **forme exacte** s'il existe $\alpha \in \Omega^{p-1} M$ telle que $\omega = d\alpha$.

Comme $d^2 = 0$, une forme exacte est fermée, donc on définit le p -ième groupe de **cohomologie de De Rham** par

$$H^p M = \frac{\{p\text{-formes fermées}\}}{\{p\text{-formes exactes}\}}.$$

On définit aussi leur somme,

$$HM = \bigoplus_p H^p M.$$

Si $\omega \in \Omega^p M$ est une forme fermée, alors on note généralement $[\omega]$ la projection de ω sur $H^p M$, appelée **classe de cohomologie** de ω .

Par exemple, pour $p = 0$, une forme fermée est une fonction f telle que $df = 0$, c'est-à-dire une fonction localement constante ; et il n'y a pas de forme exacte. Donc

$$H^0 M = \mathbb{R}^{\#\{\text{composantes connexes de } M\}}. \quad (\text{III.18})$$

Si M^n est compacte et orientée, alors la forme linéaire $\omega \mapsto \int_M \omega$ sur $\Omega^n M$ s'annule sur $\text{im } d$ par le théorème de Stokes, donc définit par passage au quotient une forme linéaire

$$\int_M : H^n M \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\text{III.19})$$

non triviale puisque l'intégrale d'une forme volume est non nulle. En particulier $H^n M \neq 0$.

On définit le p -ième **nombre de Betti** $b_p(M)$ comme l'entier, fini ou infini,

$$b_p = \dim H^p M.$$

La **caractéristique d'Euler-Poincaré** de M est

$$\chi(M) = \sum_0^n (-1)^p b_p(M).$$

Propriétés. 1° Le produit extérieur des formes induit une structure d'algèbre graduée sur l'espace HM .

2° Si $f : M \rightarrow N$ est C^∞ , alors l'application tiré en arrière $f^* : \Omega N \rightarrow \Omega M$ sur les formes différentielles induit une application en cohomologie,

$$[f^*] : HN \rightarrow HM,$$

qui est un morphisme d'algèbres graduées.

3° Si $M = \cup M_i$ où les M_i sont les composantes connexes de M , alors $HM = \bigoplus HM_i$.

Démonstration. Si α et β sont fermées, alors

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha||\beta|} \alpha \wedge d\beta = 0$$

donc $\alpha \wedge \beta$ est fermée. Vérifions que la classe $[\alpha \wedge \beta]$ ne dépend que de $[\alpha]$: si on modifie α en $\alpha + d\omega$, alors $d\omega \wedge \beta = d(\omega \wedge \beta)$ donc $[d\omega \wedge \beta] = 0$ et $[(\alpha + d\omega) \wedge \beta] = [\alpha \wedge \beta]$.

Par symétrie entre α et β la classe $[\alpha \wedge \beta]$ ne dépend aussi que de la classe de β , donc $[\alpha \wedge \beta]$ ne dépend que de $[\alpha]$ et $[\beta]$ et on peut donc définir $[\alpha] \wedge [\beta] = [\alpha \wedge \beta]$. Les propriétés de l'algèbre ΩM descendent alors à HM .

De la même manière, $f^*d\omega = d(f^*\omega)$ donc la composition

$$\Omega_{\text{fermées}}^p N \xrightarrow{f^*} \Omega_{\text{fermées}}^p M \longrightarrow H^p M$$

passé au quotient en une application $[f^*] : H^p N \rightarrow H^p M$.

La troisième assertion est laissée au lecteur. \square

20.b Invariance par homotopie

Théorème 20.1. Soient M et N deux variétés et $f : [0, 1] \times M \rightarrow N$ une application C^∞ . On note $f_t(x) = f(t, x)$. Alors

$$[f_0^*] = [f_1^*] : H^p N \longrightarrow H^p M.$$

Définition 20.2. 1° Sous les hypothèses du théorème, on dit que f_0 et f_1 sont des **applications C^∞ -homotopes**.

2° On dit que $f : M \rightarrow N$ est une **équivalence d'homotopie** s'il existe $g : N \rightarrow M$ telle que $f \circ g$ est homotope à Id_N et $g \circ f$ est homotope à Id_M .

3° On dit que M est **contractile** si l'inclusion d'un point, $\cdot \hookrightarrow M$ est une équivalence d'homotopie.

Corollaire 20.3. 1° Si $f : M \rightarrow N$ est une équivalence d'homotopie, alors $[f^*]$ est un isomorphisme.

2° Si M est contractile, alors $H^0 M = \mathbb{R}$ et $H^p M = 0$ pour $p > 0$.

Exemple 20.4. Un ouvert étoilé $U \subset \mathbb{R}^n$ est contractile, donc sa cohomologie est nulle en degré non nul. En effet, notons $i : \{0\} \hookrightarrow U$, on peut considérer $f(t, x) = tx$, donc $f : [0, 1] \times U \rightarrow U$ avec $f_0 = 0$ et $f_1 = \text{Id}_U$, donc f est une homotopie entre $i \circ f_0$ et Id_U .

La démonstration du théorème repose sur la **formule d'homotopie** suivante : on construit un opérateur

$$K : \Omega^p([0, 1] \times M) \rightarrow \Omega^{p-1} M$$

tel que pour toute forme $\alpha \in \Omega^p([0, 1] \times M)$ on ait

$$i_1^* \alpha - i_0^* \alpha = dK\alpha + Kd\alpha, \quad (\text{III.20})$$

où $i_t : M \rightarrow [0, 1] \times M$ est défini par $i_t(x) = (t, x)$.

Démonstration du théorème 20.1. Partons de la formule d'homotopie (III.20). Alors $f_t = f \circ i_t$ donc, si α est une p -forme fermée sur N , on a

$$\begin{aligned} f_1^* \alpha - f_0^* \alpha &= i_1^* f^* \alpha - i_0^* f^* \alpha \\ &= dKf^* \alpha + Kdf^* \alpha \\ &= dKf^* \alpha \end{aligned}$$

puisque $df^* \alpha = f^* d\alpha = 0$. Il en résulte $[f_1^* \alpha] = [f_0^* \alpha]$. \square

Démonstration de la formule d'homotopie (III.20). Le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial t}$ sur $[0, 1] \times M$ a pour flot $\varphi_s(t, x) = (t + s, x)$ donc $\varphi_s \circ i_t = i_{t+s}$ et ainsi $i_{t+s}^* \alpha = i_t^* \varphi_s^* \alpha$, donc

$$\frac{d}{dt} \Big|_t i_t^* \alpha = \frac{d}{ds} \Big|_0 i_{t+s}^* \alpha = \frac{d}{ds} \Big|_0 i_t^* \varphi_s^* \alpha = i_t^* \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} \alpha = i_t^* (di(\frac{\partial}{\partial t})\alpha + i(\frac{\partial}{\partial t})d\alpha),$$

où la dernière égalité provient de la formule de Cartan. Il suffit donc de poser

$$K\alpha = \int_0^1 i_t^* i(\frac{\partial}{\partial t})\alpha dt.$$

□

Remarque 20.5. La formule d'homotopie peut aussi se voir de manière plus concrète. La p -forme α sur $[0, 1] \times M$ se décompose de manière unique en

$$\alpha = dt \wedge \beta_t + \gamma_t, \quad \beta_t \in \Omega^{p-1}M, \gamma_t \in \Omega^p M.$$

On obtient cette décomposition en écrivant dans un système de coordonnées $(x_i)_{i=1, \dots, n}$ pour M auquel on rajoute $x_0 = t$ la forme

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_p}(t, x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \\ &= dt \wedge \left(\sum_{1 \leq i_2 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{0, i_2, \dots, i_p}(t, x) dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \right) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_p}(t, x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}. \end{aligned}$$

Alors, notant d_M la différentielle extérieure de M (et non celle du produit $[0, 1] \times M$),

$$d\alpha = dt \wedge \left(\frac{\partial \gamma_t}{\partial t} - d_M \beta_t \right) + d_M \gamma_t,$$

donc $i(\frac{\partial}{\partial t})\alpha = \beta_t$ et $i(\frac{\partial}{\partial t})d\alpha = \frac{\partial \gamma_t}{\partial t} - d_M \beta_t$. Posant alors $K\alpha = \int_0^1 \beta_t dt$, on obtient

$$\begin{aligned} i_1^* \alpha - i_0^* \alpha &= \gamma_1 - \gamma_0 = \int_0^1 \frac{\partial \gamma_t}{\partial t} dt \\ &= \int_0^1 i_t^* (i(\frac{\partial}{\partial t})d\alpha + di(\frac{\partial}{\partial t})\alpha) dt \\ &= Kd\alpha + dK\alpha. \end{aligned}$$

20.c Approximation continue

Proposition 20.6. *Soit $f : M \rightarrow N \subset \mathbb{R}^K$ une application entre la variété M et la sous-variété compacte N de \mathbb{R}^K . Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, pour toute application $g : M \rightarrow N$ de classe C^∞ satisfaisant $d(f(x), g(x)) < \varepsilon$ pour tout $x \in M$, l'application induite en cohomologie,*

$$[g^*] : HN \rightarrow HM$$

est indépendante de g , donc ne dépend que de f . Elle est notée $[f^]$.*

En outre, si $f_0, f_1 : M \rightarrow N$ sont C^0 -homotopes, alors $[f_1^] = [f_0^*]$.*

La proposition implique en particulier que la cohomologie HM est un invariant d'homéomorphisme plutôt que de difféomorphisme.

Remarque 20.7. Une telle application g existe toujours, il suffit d'approximer $f : M \rightarrow \mathbb{R}^K$ par une application $F : M \rightarrow \mathbb{R}^K$ de classe C^∞ et de prendre $g = r \circ F$, où r est la rétraction d'un η -voisinage N_η de N dans \mathbb{R}^K sur N (remarque 9.10).

Démonstration. Pour le premier énoncé, prenons deux telles applications, g_0 et g_1 , à valeurs dans le ε -voisinage N_ε de N pour $\varepsilon < \frac{\eta}{2}$, alors $g_t = tg_0 + (1-t)g_1$ reste à valeurs dans N_η pour $t \in [0, 1]$, donc $r \circ g_t$ est une homotopie de classe C^∞ entre g_0 et g_1 .

Pour le second énoncé, on approxime l'homotopie continue $f : [0, 1] \times M \rightarrow N$ par une homotopie $F : [0, 1] \times M \rightarrow N$ de classe C^∞ , telle que $d(f, F) < \varepsilon$; en particulier, pour $i = 0$ ou 1 on a $d(f_i, F_i) < \varepsilon$ et donc $[f_0^*] = [F_0^*] = [F_1^*] = [f_1^*]$. \square

Remarque 20.8. La proposition demeure vraie si N est non compacte (comme le théorème de plongement de Whitney 7.6), voir les détails dans LEE, Chapitre 6.

20.d Suite exacte de Mayer-Vietoris

Soit M une variété et $M = U_1 \cup U_2$ un recouvrement par deux ouverts. Soit (χ_1, χ_2) une partition de l'unité subordonnée, alors on considère la suite d'applications

$$0 \rightarrow \Omega M \xrightarrow{f} \Omega U_1 \oplus \Omega U_2 \xrightarrow{g} \Omega U_{12} \rightarrow 0, \quad (\text{III.21})$$

où f et g sont définis par

$$f(\alpha) = (\alpha|_{U_1}, \alpha|_{U_2}), \quad g(\alpha, \beta) = \alpha|_{U_{12}} - \beta|_{U_{12}}.$$

Lemme 20.9. *La suite (III.21) est une suite exacte.*

Démonstration. Tout est évident, sauf peut-être la surjectivité de g . Si $\alpha \in \Omega U_{12}$ alors l'extension par zéro de $\chi_1 \alpha$ définit une forme sur U_2 , celle de $\chi_2 \alpha$ une forme sur U_1 . Donc $\alpha = g(\chi_2 \alpha, -\chi_1 \alpha)$. \square

Théorème 20.10. *Il existe une suite exacte longue*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0 M &\xrightarrow{[f]} H^0 U_1 \oplus H^0 U_2 \xrightarrow{[g]} H^0 U_{12} \xrightarrow{\delta} H^1 M \rightarrow \dots \\ &\rightarrow H^p M \xrightarrow{[f]} H^p U_1 \oplus H^p U_2 \xrightarrow{[g]} H^p U_{12} \xrightarrow{\delta} H^{p+1} M \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Cette suite permet souvent le calcul effectif de la cohomologie de M en fonction de celle de U_1 et U_2 .

Exemple 20.11. On a $S^n = U_1 \cup U_2$ avec $U_1 = S^n \setminus \{N\}$ et $U_2 = S^n \setminus \{S\}$. La sphère S^{n-1} est un **retract par déformation** de U_{12} , c'est-à-dire que l'injection $S^{n-1} \hookrightarrow U_{12}$ est une équivalence d'homotopie : en effet, on dispose d'une rétraction $r : U_{12} \rightarrow S^{n-1}$, donnée par $r(x_0, \dots, x_n) = \frac{(x_1, \dots, x_n)}{\|(x_1, \dots, x_n)\|}$, homotope à l'identité par l'homotopie

$$h(t, x_0, \dots, x_n) = \frac{(tx_0, x_1, \dots, x_n)}{\|(tx_0, x_1, \dots, x_n)\|}.$$

Il en résulte que $HU_{12} = HS^{n-1}$, ce qui va permettre le calcul de HS^n par récurrence sur la dimension.

Les ouverts U_1 et U_2 , diffeomorphes à \mathbb{R}^n , ont une cohomologie nulle sauf en degré 0. De la suite exacte de Mayer-Vietoris on déduit $H^p(U_{12}) \simeq H^{p+1}(S^n)$ pour $p \geq 1$, c'est-à-dire

$$H^p S^{n-1} \simeq H^{p+1} S^n. \quad (\text{III.22})$$

Pour $p = 0$ la suite exacte devient

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow H^0(S^{n-1}) \longrightarrow H^1(S^n) \longrightarrow 0.$$

On a $S^0 = \{\pm 1\}$ donc $H^0(S^0) = \mathbb{R}^2$ et donc pour $n = 1$ il faut que $H^1(S^1) = \mathbb{R}$; pour $n > 1$ en revanche, $H^0(S^{n-1}) = \mathbb{R}$ donc $H^1(S^n) = 0$. Combinant avec (III.22), on obtient finalement la cohomologie de la sphère :

$$H^j(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R}, & j = 0 \text{ ou } n; \\ 0, & 0 < j < n. \end{cases} \quad (\text{III.23})$$

En particulier la caractéristique d'Euler de la sphère est

$$\chi(S^n) = 1 + (-1)^n. \quad (\text{III.24})$$

Par (III.19), on a un isomorphisme $\int : H^n(S^n) \rightarrow \mathbb{R}$; en particulier, la classe d'une forme volume sur S^n fournit un générateur de $H^n(S^n)$.

Le théorème est conséquence d'un lemme algébrique général, le lemme 20.12, qu'on applique à la suite exacte (III.21). Nous exposons maintenant cette théorie dans un cadre algébrique plus général. On considère des complexes de groupes abéliens,

$$\dots \longrightarrow K^{p-1} \xrightarrow{d_{p-1}} K^p \xrightarrow{d_p} K^{p+1} \longrightarrow \dots$$

Être un complexe signifie que $d_p \circ d_{p-1} = 0$, donc on peut définir sa cohomologie,

$$H^p K = \ker d_p / \text{im } d_{p-1}.$$

Un morphisme de complexes de groupes abéliens est un morphisme $f = (f_p : K^p \rightarrow L^p)$ qui commute à la différentielle : $d_p \circ f_p = f_{p+1} \circ d_p$, ce qui se représente par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & K^p & \xrightarrow{d_p} & K^{p+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f_p & & \downarrow f_{p+1} & & \\ \dots & \longrightarrow & L^p & \xrightarrow{d_p} & L^{p+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Comme dans le cas de la cohomologie de De Rham, cette commutation implique l'existence d'une application induite, sur la cohomologie,

$$H^p K \xrightarrow{[f_p]} H^p L.$$

On dit qu'une suite de complexes $0 \rightarrow K \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$ est une suite exacte si pour tout p on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow K^p \longrightarrow L^p \longrightarrow M^p \longrightarrow 0.$$

Lemme 20.12. *Si on a une suite exacte $0 \rightarrow K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$ de complexes de groupes abéliens, alors il y a une suite exacte longue*

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0 K \xrightarrow{[f_0]} H^0 L \xrightarrow{[g_0]} H^0 M \xrightarrow{\delta} H^1 K \longrightarrow \dots \\ \longrightarrow H^p K \xrightarrow{[f_p]} H^p L \xrightarrow{[g_p]} H^p M \xrightarrow{\delta} H^{p+1} K \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Démonstration. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & K'^{p+1} & \xrightarrow{f_{p+1}} & K^{p+1} & \xrightarrow{g_{p+1}} & K''^{p+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow d_p & & \uparrow d_p & & \uparrow d_p & & \\
 & & x' & & d_p x & & & & \\
 0 & \longrightarrow & K'^p & \xrightarrow{f_p} & K^p & \xrightarrow{g_p} & K''^p & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow d_{p-1} & & \uparrow d_{p-1} & & \uparrow d_{p-1} & & \\
 & & y' & & x & & x'' & & \\
 0 & \longrightarrow & K'^{p-1} & \xrightarrow{f_{p-1}} & K^{p-1} & \xrightarrow{g_{p-1}} & K''^{p-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & y & & y'' & &
 \end{array}$$

Nous faisons seulement la construction de l'opérateur $\delta : H^p K'' \rightarrow H^{p+1} K'$, laissant toutes les autres vérifications au lecteur. Partons donc de $x'' \in K''^p$, tel que $d_p x'' = 0$. Par exactitude en degré p , il existe $x \in K^p$ tel que $g_p x = x''$. Par commutativité du diagramme, $g_{p+1} d_p x = d_p g_p x = d_p x'' = 0$. Par exactitude en degré $p+1$, il existe $x' \in K'^{p+1}$ tel que $f_{p+1} x' = d_p x$. Par commutativité $f_{p+2} d_{p+1} x' = d_{p+1} f_{p+1} x' = d_{p+1} d_p x = 0$, donc $d_{p+1} x' = 0$ par injectivité de f_{p+2} (exactitude en degré $p+2$). Donc x' définit une classe de cohomologie et on veut poser

$$\delta[x''] = [x'].$$

Il faut d'abord vérifier que $[x']$ ne dépend pas du choix de $x \in K^p$ tel que $g_p x = x''$. Par exactitude en degré p , les autres choix s'écrivent $x + f_p y'$ pour $y' \in K'^p$; alors x' est modifié en $x' + d_p y'$ (par commutativité du diagramme), donc $[x']$ est inchangée.

Il reste enfin à vérifier que c'est indépendant du représentant x'' de $[x'']$. Il suffit de vérifier que si $x'' = d_{p-1} y''$ alors $[x'] = 0$. Par exactitude en degré $p-1$, il existe $y \in K^{p-1}$ tel que $g_{p-1} y = y''$; alors on peut prendre $x = d_{p-1} y$ par commutativité, donc $d_p x = d_p d_{p-1} y = 0$ et $x' = 0$. \square

Le lecteur pourra utilement, dans la suite de Mayer-Vietoris, expliciter à partir de cette démonstration la construction en termes de formes différentielles de $\delta : H^p U_{12} \rightarrow H^{p+1} M$.

20.e Finitude des nombres de Betti

Une première conséquence de la suite exacte de Mayer-Vietoris va être de montrer que les nombres de Betti d'une variété compacte sont finis.

Définition 20.13. On dit que M est une **variété de type fini** s'il existe un recouvrement fini (U_i) de M tel que $U_{i_1 \dots i_p} = U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_p}$ soit contractile pour tous $p \geq 1$ et (i_1, \dots, i_p) .

Lemme 20.14 (Weil). Toute variété compacte est de type fini.

Démonstration. Cette démonstration nécessite des outils (hors programme de ce cours) issus de la géométrie riemannienne. Soit M compacte, qu'on munit d'une métrique riemannienne g . Il y a une notion de distance sur M induite par g , et de géodésique joignant deux points (ce sont les « droites » de la géométrie, c'est-à-dire les chemins les plus courts joignant deux points). Un théorème de base de géométrie riemannienne affirme que tout point x admet un voisinage convexe U , c'est-à-dire tel que deux points quelconques de U sont reliés par une unique géodésique, et cette géodésique reste dans U . Si M est compacte, on peut donc couvrir M par un nombre fini d'ouverts convexes (U_i) . Toutes les intersections $U_{i_1 \dots i_p}$ restent convexes. Comme un ouvert convexe est contractile, le lemme est démontré. \square

Proposition 20.15. *Pour toute variété de type fini (et donc en particulier pour toute variété compacte), les nombres de Betti sont finis.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le nombre d'ouverts du recouvrement par des ouverts contractiles. Notons $M_k = U_1 \cup \dots \cup U_k$. Ainsi $M_{k+1} = M_k \cup U_{k+1}$. La suite exacte de Mayer-Vietoris donne la suite exacte

$$H^{p-1}(M_k \cap U_{k+1}) \longrightarrow H^p(M_{k+1}) \longrightarrow H^p(M_k) \oplus H^p(U_{k+1}). \quad (\text{III.25})$$

Or $M_k \cap U_{k+1} = \cup_1^k U_i \cap U_{k+1}$ est de type fini avec un recouvrement à k ouverts, donc sa cohomologie est de dimension finie par l'hypothèse de récurrence ; le membre de droite de (III.25) est aussi de dimension finie par l'hypothèse de récurrence, donc $H^p(M_{k+1})$ est de dimension finie pour tout p . \square

20.f Action d'un groupe compact connexe

Soit G un groupe de Lie. Pour $g \in G$ on note $L_g(g') = gg'$ la translation à gauche par g . Le groupe G agit sur l'espace ΩG des formes différentielles sur G par $\omega \mapsto L_g^* \omega$, qu'on notera plus simplement $g^* \omega$. Rappelons l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = T_e G$.

Lemme 20.16. *On a un isomorphisme $(\Omega G)^G \simeq \Lambda \mathfrak{g}^*$ donné par l'évaluation en l'élément neutre : $\omega \mapsto \omega(e)$.*

Démonstration. Si $\omega \in \Omega^p G$ est invariante sous l'action de G , alors $L_g^* \omega = \omega$, ce qui se traduit par

$$\omega(e) = \Lambda^p (T_e L_g)^t \omega(g) \quad (\text{III.26})$$

qui détermine $\omega(g)$ pour tout g ; d'où l'injectivité. On laisse vérifier que la même formule (III.26) détermine à partir de $\omega(e)$ une p -forme invariante à gauche. \square

On peut appliquer le lemme en particulier en degré $n = \dim G$. En appliquant à un élément non nul de $\Lambda^n \mathfrak{g}^*$, on obtient une forme invariante $\omega \in (\Omega^n G)^G$. La forme ω est partout non nulle donc est une forme volume sur G ; en particulier elle détermine une orientation. Le choix de ω , unique à constante près, fournit une mesure μ sur G déterminée pour $f \in C_c^0(G)$ par

$$\mu(f) = \int_G f \omega. \quad (\text{III.27})$$

En particulier, on a

$$\mu(f) = \int_G g^*(f \omega) = \int_G (g^* f) \omega = \mu(g^* f) \quad (\text{III.28})$$

donc la mesure μ est invariante à gauche ; elle est appelée la **mesure de Haar** du groupe G . Si G est compact, sa masse est finie et, quitte à multiplier par une constante, on peut assurer que la mesure de Haar μ est une mesure de probabilité.

Considérons aussi l'action à droite du groupe G sur lui-même par $R_g(h) = hg$. De $R_g \circ L_h = L_h \circ R_g$ pour tous $g, h \in G$ on déduit que, si ω est une forme volume invariante à gauche sur G , alors $L_h^* R_g^* \omega = R_g^* \omega$ pour tout h , c'est-à-dire que $R_g^* \omega$ est encore invariante à gauche, donc il existe un nombre $\Delta(g) \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$R_g^* \omega = \Delta(g) \omega. \quad (\text{III.29})$$

L'application $\Delta : G \rightarrow \mathbb{R}^*$ est un morphisme de groupes. Le groupe G est appelé **groupe unimodulaire** si $\Delta \equiv 1$, ce qui est équivalent à dire qu'il existe une forme volume invariante à la fois à gauche et à droite.

Lemme 20.17. *Un groupe compact connexe est unimodulaire.*

Démonstration. En effet, $\Delta : G \rightarrow \mathbb{R}^*$ est un morphisme de groupes donc son image est un sous-groupe compact connexe de \mathbb{R}^* , donc $\{1\}$. \square

Soit maintenant une variété M munie d'une action du groupe de Lie G . On peut considérer l'espace $(\Omega M)^G$ des formes différentielles G -invariantes sur M . Puisque $dg^*\omega = g^*d\omega$, l'action de G commute à la différentielle extérieure et

$$(\Omega M)^G \subset \Omega M \quad (\text{III.30})$$

est un sous-complexe, donc on dispose d'une application entre les espaces de cohomologie associés.

Théorème 20.18. *Si G est un groupe compact connexe agissant sur la variété M , alors l'application induite par l'inclusion (III.30),*

$$H((\Omega M)^G) \rightarrow HM,$$

est un isomorphisme.

Autrement dit, on peut calculer la cohomologie de De Rham en se limitant aux formes invariantes sur M . Le théorème implique aussi que toute classe de cohomologie de M est invariante sous l'action de G : il faut que $g^*[\omega] = [\omega]$ pour tout $g \in G$ et $[\omega] \in HM$.

Contre-exemple 20.19. Le théorème n'est pas vrai si G n'est pas connexe. Par exemple, prenons $G = \{\pm 1\}$ agissant sur la sphère S^n . Par (III.15) la forme volume standard de S^n est invariante si et seulement si n est impair, donc le générateur de $H^n(S^n)$ n'est pas invariant si n est pair.

Exemple 20.20. Le groupe $SO(n+1)$ agit sur $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, donc $HS^n = H((\Omega S^n)^{SO(n+1)})$. Mais :

$$(\Omega^p S^n)^{SO(n+1)} = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } p = 0, n, \\ 0 & \text{si } 0 < p < n. \end{cases} \quad (\text{III.31})$$

Donc $H((\Omega S^n)^{SO(n+1)})$ est égal à \mathbb{R} en degré 0 et n , et à 0 dans les autres degrés. On retrouve ainsi la cohomologie de la sphère.

Démontrons à présent (III.31). Le lecteur améliorera le lemme 20.16 en :

Lemme 20.21. *Soit M une variété munie d'une action transitive du groupe de Lie G , soit $p_0 \in M$ et $G_0 \subset G$ le stabilisateur de p_0 . Si $g \in G_0$ agit par le difféomorphisme φ_g , alors $T_{p_0}\varphi_g \in \text{End}(T_{p_0}M)$ et on obtient une action de G_0 sur $T_{p_0}M$. Alors l'évaluation en p_0 donne un isomorphisme*

$$(\Omega M)^G \xrightarrow{\sim} (\Lambda T_{p_0}^* M)^{G_0}.$$

\square

Appliquons le lemme à notre exemple. Prenons comme point particulier $p_0 = N$, le pôle nord. Alors $G_0 = SO(n)$. Donc $(\Omega^p S^n)^{SO(n+1)} \simeq (\Lambda^p(\mathbb{R}^n)^*)^{SO(n)}$. Tout d'abord, l'action de $SO(n)$ sur $\Lambda^0(\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}$ et $\Lambda^n(\mathbb{R}^n)^* \simeq \mathbb{R}$ est triviale, donc on obtient la première ligne de (III.31). Prenons maintenant $0 < p < n$ et $\alpha \in \Lambda^p(\mathbb{R}^n)^*$, donc $\alpha = \sum \alpha_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$. Montrons que si α est invariante sous l'action de $SO(n)$ alors $\alpha = 0$. Montrons par exemple l'annulation du coefficient $\alpha_{1 \dots p}$: choisissons l'élément $u \in SO(n)$ défini par $u(e_1) = -e_1$, $u(e_n) = -e_n$ et $u(e_i) = e_i$ pour $0 < i < n$; l'action de u se diagonalise dans la base $(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p})$, et l'action sur $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p$ est par -1 , donc si α est invariante il faut que $\alpha_{1 \dots p} = 0$.

Passons maintenant à la démonstration du théorème 20.18. Nous commençons par définir une procédure de moyennisation :

Lemme 20.22. *Il existe une projection*

$$m : \Omega M \longrightarrow (\Omega M)^G, \quad m^2 = m, \quad (\text{III.32})$$

qui est également un morphisme de complexes.

Démonstration. Soit μ la mesure de Haar (de masse totale 1) sur G , invariante à gauche et à droite par le lemme 20.17. Si $\omega \in \Omega^p M$, on définit $m(\omega) \in \Omega^p M$ par la moyenne, pour tout $x \in M$,

$$m(\omega)(x) = \int_G (g^* \omega)(x) d\mu(g).$$

Soit $g_0 \in G$ alors

$$\begin{aligned} g_0^* m(\omega)(x) &= \int_G g_0^* g^* \omega(x) d\mu(g) = \int_G (gg_0)^* \omega(x) d\mu(g) = \int_G h^* \omega(x) d\mu(h) \\ &= m(\omega)(x) \end{aligned}$$

par le changement de variable $h = gg_0$ et parce que μ est invariante à droite. Donc $m(\omega)$ est G -invariante et m est bien à valeurs dans $(\Omega M)^G$. Puisque μ est une mesure de probabilités, on a $m(\omega) = \omega$ si $\omega \in (\Omega M)^G$ donc m est une projection. Finalement, en différentiant sous le signe intégrale,

$$dm(\omega) = \int_G d(g^* \omega) d\mu(g) = \int_G g^* (d\omega) d\mu(g) = m(d\omega)$$

donc m est un morphisme de complexes. \square

Démonstration du théorème 20.18. Le théorème résultera immédiatement de la construction d'un opérateur d'homotopie $H : \Omega^p M \rightarrow \Omega^{p-1} M$, satisfaisant pour tout $\omega \in \Omega^p M$

$$m(\omega) - \omega = dH\omega + Hd\omega.$$

Si (g_t) est un chemin dans G , on dispose de l'application $F : [0, 1] \times M \rightarrow M$ définie par $F(t, x) = g_t x$, et comme en (III.20) d'un opérateur d'homotopie $K : \Omega^p([0, 1] \times M) \rightarrow \Omega^{p-1} M$,

$$K\alpha = \int_0^1 i_t^* i \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \alpha dt,$$

tel que

$$g_1^* \omega - g_0^* \omega = dKF^* \omega + KdF^* \omega. \quad (\text{III.33})$$

En prenant $g_0 = e$ on voudrait intégrer cette formule sur g_1 pour obtenir H , mais le problème est qu'a priori il n'y a pas de choix de F même continu par rapport à g_1 . Pour y remédier on raisonne suivant les trois étapes suivantes :

- 1° On a un difféomorphisme $\exp : U \subset \mathfrak{g} \rightarrow V \subset G$ où U est une boule dans \mathfrak{g} ; on a donc un moyen canonique de relier $g = e^u \in V$ à e par $g_t = e^{tu}$ et on pose alors $H_g = KF^*$ pour $F(t, x) = e^{tu} x$.³

3. Avec plus de connaissances en géométrie riemannienne, la première étape suffit à conclure. On peut en effet montrer qu'il existe un ouvert étoilé borné $U \subset \mathfrak{g}$ tel que \exp soit un difféomorphisme de U sur un ouvert $V \subset G$ tel que $G \setminus V$ soit de mesure nulle. Il suffit alors d'intégrer H_g sur l'ouvert V .

2° Près d'un élément $g_0 \in G$, on écrit $g = g_0 h$ avec $h \in V$, alors, partant d'un H_{g_0} construit à partir d'un chemin de e à g_0 ,

$$\begin{aligned} g^* \omega - \omega &= h^* g_0^* \omega - \omega = (h^* g_0^* \omega - g_0^* \omega) + (g_0^* \omega - \omega) \\ &= (dH_h + H_h d) g_0^* \omega + (H_{g_0} d + dH_{g_0}) \omega \\ &= d(H_h g_0^* \omega + H_{g_0} \omega) + (H_h g_0^* + H_{g_0}) d\omega \end{aligned}$$

donc on peut poser $H_{g_0 h} = H_h g_0^* + H_{g_0}$.

3° Finalement, on recouvre G par un nombre fini de boules B_j sur lesquelles on dispose d'un choix d'opérateur d'homotopie $H_{j,g}$ qui soit C^∞ par rapport à $g \in B_j$; soit (χ_j) une partition de l'unité subordonnée, on obtient l'opérateur d'homotopie voulu par

$$H\omega = \int_G \sum \chi_j(g) H_{j,g}(\omega) d\mu(g).$$

□

Remarque 20.23. Si le groupe G est seulement connexe (pas nécessairement compact), la formule (III.33) montre que si $g \in G$ alors $g^*[\omega] = [\omega]$ pour toute forme fermée ω . Autrement dit, l'action de G sur la cohomologie HM est triviale : toutes les classes de cohomologie sont invariantes par l'action de G . Mais cela n'implique pas que toutes les classes de cohomologie se représentent par une forme G -invariante, voir exercice 20.h.3.

20.g Cohomologie des groupes et algèbres de Lie

Nous commençons par l'exemple du tore \mathbb{T}^n , qui agit sur lui-même par translation. Le théorème 20.18 s'applique, donc la cohomologie de \mathbb{T}^n se calcule sur le complexe des formes invariantes. Or, une p -forme

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \alpha_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

est invariante par translation si et seulement si les coefficients $\alpha_{i_1 \dots i_p}$ sont constants. Donc

$$(\Omega \mathbb{T}^n)^{\mathbb{T}^n} = \Lambda(\mathbb{R}^n)^*.$$

Comme la différentielle extérieure sur des formes à coefficients constants est nulle, le même espace donne la cohomologie : ainsi

$$H^p(\mathbb{T}^n) = \Lambda^p(\mathbb{R}^n)^*. \quad (\text{III.34})$$

Ici \mathbb{R}^n est l'algèbre de Lie de \mathbb{T}^n . Sur un groupe de Lie général, on se ramène aussi à un calcul dans \mathfrak{g} , mais la différentielle des formes invariantes n'est pas nulle en général :

Lemme 20.24. *Soit G un groupe de Lie, alors l'identification des formes invariantes à gauche avec $\Lambda \mathfrak{g}^*$ (lemme 20.16) identifie la différentielle extérieure avec l'opérateur $d : \Lambda^p \mathfrak{g}^* \rightarrow \Lambda^{p+1} \mathfrak{g}^*$ défini pour $X_i \in \mathfrak{g}$ par*

$$d\omega(X_0, \dots, X_p) = \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_n). \quad (\text{III.35})$$

Démonstration. La formule se déduit immédiatement de la formule de Maurer-Cartan (proposition 18.c) et de l'identification de \mathfrak{g} avec l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à gauche sur G . □

Si \mathfrak{g} est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie, la propriété $d^2 = 0$ sur le groupe implique $d^2 = 0$ pour la différentielle définie par (III.35). On peut aussi vérifier directement cette propriété à partir de la définition abstraite d'algèbre de Lie, ce qui permet la :

Définition 20.25. La *cohomologie d'une algèbre de Lie* \mathfrak{g} est la cohomologie du complexe $(\Lambda\mathfrak{g}^*, d)$ où d est la différentielle (III.35).

Par exemple,

$$H^1(\mathfrak{g}) = \{\alpha \in \Lambda^1\mathfrak{g}^*, \alpha([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0\} = (\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])^*.$$

Le théorème 20.18 a la conséquence immédiate :

Proposition 20.26. Si G est un groupe compact connexe, alors $HG = H\mathfrak{g}$.

On peut aller plus loin en considérant aussi l'action à droite de G sur lui-même. Puisque les actions à gauche et à droite commutent, on a en réalité une action de $G \times G$ sur G , donc le théorème 20.18 dit que si G est compact connexe, alors HG est égale à la cohomologie du complexe des formes invariantes sous $G \times G$, c'est-à-dire invariantes à droite et à gauche. On peut identifier ce complexe,

$$(\Lambda\mathfrak{g}^*)^G \subset \Lambda\mathfrak{g}^*$$

à l'intérieur du complexe des formes invariantes à gauche :

Proposition 20.27. 1° Une forme invariante à gauche, représentée par $\omega \in \Lambda^p\mathfrak{g}^*$, est dans $(\Lambda^p\mathfrak{g}^*)^G$, c'est-à-dire invariante à droite, si et seulement si pour tout $Y \in \mathfrak{g}$ on a $Y \cdot \omega = 0$, où

$$(Y \cdot \omega)(X_1, \dots, X_p) = \sum_1^p \omega(X_1, \dots, [Y, X_i], \dots, X_p).$$

2° La différentielle d'une forme invariante à gauche et à droite est nulle. En particulier, si G est compact connexe alors $HG \simeq (\Lambda\mathfrak{g}^*)^G$.

Démonstration. 1° Soient \tilde{X}_i le champ de vecteurs invariant à gauche prenant la valeur X_i en e , et $\tilde{\omega}$ la p -forme différentielle invariante à gauche provenant de ω . Alors l'action à droite de $g \in G$ sur $\tilde{\omega}$ est donnée par

$$R_g^* \tilde{\omega}(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_p) = \tilde{\omega}((R_g)_* \tilde{X}_1, \dots, (R_g)_* \tilde{X}_p).$$

Or par (II.15) le champ de vecteurs invariant à gauche $(R_g)_* \tilde{X}_i$ provient de $\text{Ad}(g^{-1})X_i \in \mathfrak{g}$. Ainsi,

$$R_g^* \tilde{\omega}(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_p) = \omega(\text{Ad}(g^{-1})X_1, \dots, \text{Ad}(g^{-1})X_p).$$

Si $R_g^* \tilde{\omega} = \tilde{\omega}$ pour tout $g \in G$ alors en différentiant en l'élément neutre par rapport à un vecteur $Y \in \mathfrak{g}$ et en utilisant $T_e \text{Ad}(Y) = \text{ad}(Y) = [Y, \cdot]$, on trouve $Y \cdot \omega = 0$. La réciproque est laissée au lecteur.

2° À partir de (III.35) on vérifie

$$2d\omega(X_0, \dots, X_p) = -(X_0 \cdot \omega)(X_1, \dots, X_p) + (X_1 \cdot \omega)(X_0, X_2, \dots, X_p) - \dots$$

Donc, si ω est invariante à droite, alors $d\omega = 0$. □

Pour aller plus loin sur ce sujet, voir BREDON, Chapitre V, § 12.

20.h Exercices

Exercice 20.h.1. 1° Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n . Montrer que $H^\bullet(\mathbb{R} \times U)$ et $H^\bullet(U)$ sont isomorphes.

Soit A un fermé de \mathbb{R}^n . Montrer que $\mathbb{R}^{n+1} \setminus (A \times \mathbb{R}_+)$ se rétracte par déformation sur $\mathbb{R}^n \times \{-1\}$.

2° Soit A une partie fermée de \mathbb{R}^n , incluse strictement dans \mathbb{R}^n . On la plonge dans \mathbb{R}^{n+1} par $x \mapsto (x, 0)$. Montrer que

$$H^p(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \simeq \begin{cases} H^{p-1}(\mathbb{R}^n \setminus A), & p \geq 2, \\ H^0(\mathbb{R}^n \setminus A)/\mathbb{R}, & p = 1, \\ \mathbb{R}, & p = 0. \end{cases}$$

3° Soit la sphère $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}^n$ pour $1 \leq d \leq n$. Calculer $H^\bullet(\mathbb{R}^n \setminus S^{d-1})$.

Exercice 20.h.2 (Théorème de Borsuk-Ulam complexe). Soit S^{2n-1} la sphère unité de \mathbb{C}^n , munie de l'action de S^1 par $e^{i\theta} \cdot (z_1, \dots, z_n) = (e^{i\theta}z_1, \dots, e^{i\theta}z_n)$, où $z_j = x_j + iy_j \in \mathbb{C}$.

1° Montrer que le champ de vecteurs X sur S^{2n-1} défini par $X(z_1, \dots, z_n) = (iz_1, \dots, iz_n)$ engendre l'action de S^1 , c'est-à-dire que son flot est $\phi_t(z_1, \dots, z_n) = e^{it} \cdot (z_1, \dots, z_n)$.

On rappelle que le quotient S^{2n-1}/S^1 est l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^{n-1}$ des droites complexes de \mathbb{C}^n . On note p la projection $p : S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$. Expliquer pourquoi $T_{p(z)}\mathbb{C}P^{n-1} = T_z S^{2n-1} / \mathbb{R}X(z)$ pour tout $z \in S^{2n-1}$. Dédurre les identifications

$$\begin{aligned} T_{p(z)}^*\mathbb{C}P^{n-1} &= \{\alpha \in T_z^*S^{2n-1}, \alpha(X) = 0\}, \\ \Lambda^k T_{p(z)}^*\mathbb{C}P^{n-1} &= \{\alpha \in \Lambda^k T_z^*S^{2n-1}, i(X)\alpha = 0\}. \end{aligned}$$

2° Soit $\alpha \in \Omega^k(S^{2n-1})$. Montrer que si $\mathcal{L}_X\alpha = 0$ alors pour tout t on a $\phi_t^*\alpha = \alpha$. Montrer que si $i(X)\alpha = 0$ et $\mathcal{L}_X\alpha = 0$, alors il existe une forme $\beta \in \Omega^k(\mathbb{C}P^{n-1})$ telle que $\alpha = p^*\beta$. On dit que α descend sur $\mathbb{C}P^{n-1}$.

3° Soit α une 1-forme sur S^{2n-1} telle que $i(X)\alpha = 1$ et $\mathcal{L}_X\alpha = 0$. Montrer qu'il existe $\omega \in \Omega^2(\mathbb{C}P^{n-1})$ telle que $d\alpha = p^*\omega$. Montrer que $d\omega = 0$ et que sa classe de cohomologie $[\omega] \in H^2(\mathbb{C}P^{n-1})$ ne dépend pas du choix de α .

4° On donne les nombres de Betti $b_{2i+1}(\mathbb{C}P^{n-1}) = 0$ et $b_{2i}(\mathbb{C}P^{n-1}) = 1$. Montrer que les hypothèses de la question 3 sont satisfaites par la forme $\alpha_n = \sum_1^n x_j dy_j - y_j dx_j$ sur S^{2n-1} . La forme $d\alpha_n$ descend donc en une 2-forme fermée ω_n sur $\mathbb{C}P^{n-1}$. Montrer que ω_n^{n-1} est une forme volume sur $\mathbb{C}P^{n-1}$. En déduire que $[\omega_n]$ est un générateur de $H^2(\mathbb{C}P^{n-1}) = \mathbb{R}$, et $[\omega_n]^{n-1}$ un générateur de $H^{2n-2}(\mathbb{C}P^{n-1}) = \mathbb{R}$.

5° Soit $f : S^{2n-1} \rightarrow S^{2k-1}$ telle que $f(e^{i\theta} \cdot z) = e^{i\theta} \cdot f(z)$ pour tout θ et tout $z \in S^{2n-1}$. Montrer que f passe au quotient et induit une application $F : \mathbb{C}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{k-1}$. Montrer que $F^*([\omega_k]) = [\omega_n]$ et $F^*([\omega_k])^{n-1} \neq 0$. En utilisant $[\omega_k]^k = 0$, montrer que nécessairement $k \geq n$.

Exercice 20.h.3 (Cohomologie invariante et formes invariantes). On considère le groupe $G = \text{SL}(2, \mathbb{R})$ et son algèbre de Lie \mathfrak{g} .

1° Montrer que toute classe de cohomologie $z \in H^p(G)$ est invariante par translation à gauche : $L_g^*z = z$ pour tout $g \in G$.

2° Montrer que l'application $G \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ définie par $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est une équivalence d'homotopie. En déduire la cohomologie de G .

3° Donner une base (A, B, C) de \mathfrak{g} et exprimer dans cette base les crochets $[A, B]$, $[B, C]$ et $[C, A]$.

4° Décrire le complexe de de Rham des formes différentielles sur G invariantes à gauche. En déduire qu'il n'est pas possible de représenter une classe de cohomologie non nulle $z \in H^1(G)$ par une forme différentielle fermée invariante à gauche.

Exercice 20.h.4 (Sphères groupes de Lie). Soit G compact connexe.

1° Montrer que \mathfrak{g} admet un produit scalaire Ad-invariant, c'est-à-dire satisfaisant

$$\langle \text{Ad}(g)X, \text{Ad}(g)Y \rangle = \langle X, Y \rangle$$

pour tous $g \in G$ et $X, Y \in \mathfrak{g}$. (Moyenner un produit scalaire quelconque par l'action de G). Montrer qu'un tel produit scalaire satisfait $\langle [X, A], Y \rangle = \langle X, [A, Y] \rangle$ pour tous $A, X, Y \in \mathfrak{g}$.

2° Montrer que $\omega(X, Y, Z) = \langle X, [Y, Z] \rangle$ définit une 3-forme invariante à gauche et à droite. En déduire une condition sous laquelle $H^3(G) \neq 0$. Montrer que cette condition est satisfaite en particulier si $H^1(G) = 0$.

3° Déduire que les seules sphères portant une structure de groupe de Lie sont S^0, S^1 et S^3 .

21 Degré

21.a Cohomologie à support compact

Soit M^n une variété. On peut considérer le complexe $(\Omega_c M, d)$ des formes différentielles à support compact sur M , muni de la différentielle extérieure. Sa cohomologie est notée $H_c M$. Si M est compacte, on a bien sûr $H M = H_c M$.

Si M est orientée, alors on dispose d'une application $\int_M : \Omega_c^n M \rightarrow \mathbb{R}$ qui passe au quotient $H_c^n M \rightarrow \mathbb{R}$ en vertu de la formule de Stokes.

Théorème 21.1. *Si M^n est une variété connexe orientée, alors l'application $\omega \mapsto \int_M \omega$ établit un isomorphisme $H_c^n M \simeq \mathbb{R}$.*

Démonstration. Observons que le résultat du théorème est déjà connu dans le cas de la variété compacte S^n , puisque $H^n S^n = \mathbb{R}$ et l'intégrale est une forme linéaire non nulle, voir (III.19).

Étape 1 : cas de \mathbb{R}^n . À nouveau, l'intégrale est une forme linéaire non nulle sur $H_c^n \mathbb{R}^n$, donc il s'agit de montrer que $\int : H_c^n \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est injective. Soit donc $\alpha \in \Omega_c^n \mathbb{R}^n$ telle que $\int_{\mathbb{R}^n} \alpha = 0$. Puisque $H^n \mathbb{R}^n = 0$, il existe une $(n-1)$ -forme β telle que $\alpha = d\beta$. Comme β n'a pas de raison d'être à support compact, on cherche une $(n-2)$ -forme γ telle que $\beta + d\gamma$ soit à support compact : alors $\alpha = d(\beta + d\gamma)$ ce qui prouvera bien que $[\alpha] = 0$ dans $H_c^n \mathbb{R}^n$. Si $\text{Supp } \alpha \subset B_\rho$, alors $d\beta = 0$ pour $r > \rho$ donc β est fermée dans l'anneau $C_\rho = \mathbb{R}^n \setminus B_\rho$, et définit donc une classe $[\beta] \in H^{n-1}(C_\rho)$. Comme C_ρ se rétracte par déformation sur la sphère de rayon 2ρ , l'application $H^{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow H^{n-1}(C_\rho)$ induite par l'inclusion $i : S_{2\rho} \hookrightarrow C_\rho$ est un isomorphisme ; finalement, on dispose d'un isomorphisme $H^{n-1}(C_\rho) \simeq \mathbb{R}$ donné par

$$\omega \mapsto \int_{S_{2\rho}} i^* \omega.$$

Appliquons cette remarque à β : on a, par la formule de Stokes

$$\int_{S_{2\rho}} i^* \beta = \int_{B_{2\rho}} d\beta = \int_{\mathbb{R}^n} \alpha = 0,$$

donc $[\beta] = 0$ dans $H^{n-1}(C_\rho)$. Ainsi il existe $\omega \in \Omega^{n-2}(C_\rho)$ telle que $\beta = d\omega$. Soit $\chi = \chi(r)$ une fonction de coupure telle que $\chi(r) = 0$ pour $r \leq \frac{3}{2}\rho$ et $\chi(r) = 1$ pour $r \geq 2\rho$. Il suffit de prendre $\gamma = -\chi\omega$, qui est à support compact dans C_ρ donc s'étend par zéro sur \mathbb{R}^n ; pour $r > 2\rho$, on a $\gamma = -\omega$ et donc $\beta + d\gamma = 0$.

Étape 2 : si le théorème est vrai pour deux ouverts U_1 et U_2 tels que $U_{12} \neq \emptyset$ alors il est vrai pour $U_1 \cup U_2$. Ici on utilise une suite exacte de Mayer-Vietoris pour la cohomologie à support compact, attention, elle n'est pas dans le même sens que pour la cohomologie ordinaire ! en effet, on a une suite exacte de complexes (comparer à (III.21)) donnée par

$$0 \longrightarrow \Omega_c(U_{12}) \xrightarrow{f} \Omega_c U_1 \oplus \Omega_c U_2 \xrightarrow{g} \Omega_c(U_1 \cup U_2) \longrightarrow 0,$$

où $f(\alpha) = (\alpha, \alpha)$ et $g(\alpha, \beta) = \alpha - \beta$. Alors la suite exacte longue associée par le lemme 20.12 prend en degré n la forme

$$H_c^n U_{12} \xrightarrow{[f]} H_c^n U_1 \oplus H_c^n U_2 \xrightarrow{[g]} H_c^n(U_1 \cup U_2) \longrightarrow 0.$$

Or $\text{rg}[f] \geq 1$, car si $\omega \in \Omega^c U_{12}$ avec $\int \omega > 0$, alors il en est de même pour l'extension par zéro de ω à U_1 ou U_2 . Par hypothèse de récurrence, $H_c^n U_1 \oplus H_c^n U_2 = \mathbb{R}^2$, donc $\dim H_c^n(U_1 \cup U_2) \leq 1$. Mais comme $H_c^n(U_1 \cup U_2) \neq 0$, il faut que $\dim H_c^n(U_1 \cup U_2) = 1$.

Étape 3 : cas général. Soit $a \in M$ fixé. Si $x \in M$, il existe un ouvert $U_x \subset M$ contenant a et x , connexe, et satisfaisant la conclusion du théorème : il suffit en effet de prendre un nombre fini d'ouverts diffeomorphes à \mathbb{R}^n recouvrant un chemin de a à x et d'appliquer l'étape 2. Prenons à présent $\omega \in \Omega_c^n M$ telle que $\int_M \omega = 0$, alors $\text{Supp } \omega \subset \cup_{x \in \text{Supp } \omega} \Omega_x$, donc on peut extraire un recouvrement fini : $\text{Supp } \omega \subset \cup_1^k \Omega_{x_i}$. Comme tous les Ω_{x_i} s'intersectent puisqu'ils contiennent a , par l'étape 2, $\cup_1^k \Omega_{x_i}$ satisfait la conclusion du théorème, donc $\omega = d\alpha$ pour α à support compact. \square

Remarque 21.2. Si M^n est non orientable, alors on peut montrer que $H_c^n M = 0$. Brièvement, la technique est similaire à celle utilisée dans la section 12. Prenant une métrique riemannienne sur M , la projection $p : N = S\Lambda^n T^*M \rightarrow M$ est un revêtement à deux feuilletés (donc a une involution ι) mais N a une orientation canonique provenant d'une forme volume tautologique Ω , qui est renversée par ι . Si $\alpha \in \Omega_c^n M$, alors $\alpha' = p^*\alpha \in \Omega_c^n N$ et $\iota^*\alpha' = \alpha'$. Comme ι renverse l'orientation, $\int_N \iota^*\alpha' = -\int_N \alpha'$, donc $\int_N \alpha' = 0$. Par conséquent $\alpha' = d\beta'$ avec $\beta' \in \Omega_c^{n-1} N$. Quitte à remplacer β' par $\frac{\beta' + \iota^*\beta'}{2}$, on peut supposer que $\iota^*\beta' = \beta'$, ce qui implique que β' descend sur M en une forme $\beta \in \Omega_c^{n-1} M$ qui doit vérifier $d\beta = \alpha$.

21.b Degré

La définition suivante est rendue possible par le théorème 21.1.

Définition 21.3. Soient M et N deux variétés compactes, connexes, orientées, de dimension n . Soit $f : M \rightarrow N$ continue. On définit le **degré** de f , noté $\text{deg } f$, par

$$\begin{array}{ccc} H^n N & \xrightarrow{[f^*]} & H^n M \\ \downarrow \int_N & & \downarrow \int_M \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{deg } f} & \mathbb{R} \end{array}$$

Autrement dit, si f est C^∞ , le degré de f est défini par la relation, valable pour toute forme $\omega \in \Omega^n \mathbb{N}$,

$$\int_M f^* \omega = \text{deg} f \int_N \omega.$$

Puisque $[f^*]$ est un invariant d'homotopie, le degré est un invariant d'homotopie de f .

La théorie du degré s'étend aux applications *propres* entre variétés non compactes, en utilisant la cohomologie à support compact. En effet, le tiré en arrière d'une forme à support compact par une application propre est encore à support compact, donc on obtient une application $f^* : \Omega_c \mathbb{N} \rightarrow \Omega_c \mathbb{M}$ qui induit en cohomologie $[f^*] : H_c \mathbb{N} \rightarrow H_c \mathbb{M}$, ce qui permet de définir le degré grâce au théorème 21.1. Mais nous n'utiliserons que le cas compact.

Exemples. 1° Soit $f : M \rightarrow M$ un difféomorphisme. Par la proposition 19.12, on a

$$\text{deg} f = \pm 1 \quad (\text{III.36})$$

suivant que f préserve ou renverse l'orientation.

2° Soit $f : S^1 \rightarrow S^1$ définie par $f(z) = z^k$. Alors

$$\int_0^{2\pi} f^*(g(\theta)d\theta) = \int_0^{2\pi} g(k\theta)d(k\theta) = k \int_0^{2\pi} g(\theta)d\theta$$

donc $\text{deg} f = k$.

3° Plus généralement, si $f : S^1 \rightarrow S^1$, alors par un lemme de relèvement bien connu, il existe $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lisse telle que $f(e^{it}) = e^{iF(t)}$. Alors, pour tout t ,

$$\text{deg} f = \frac{F(t + 2\pi) - F(t)}{2\pi}, \quad (\text{III.37})$$

qui est un entier, égal au « nombre de tours » que fait $f(z)$ quand z fait un tour. En effet, prenons $\omega = d\theta = xdy - ydx$, notons $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ l'application $p(t) = e^{it}$, de sorte que $f \circ p = p \circ F$, alors

$$\int_{S^1} f^* \omega = \int_0^{2\pi} p^* f^* \omega = \int_0^{2\pi} F^* p^* \omega = \int_0^{2\pi} F^* dt = \int_0^{2\pi} dF = F(2\pi) - F(0).$$

Puisque $\int_{S^1} \omega = 2\pi$, la formule en résulte.

Soit à nouveau $f : M^n \rightarrow N^n$. Soit $y \in N$ un point qui n'est pas une valeur critique de f . Si $f(x) = y$, alors $T_x f : T_x M \rightarrow T_x N$ est un isomorphisme, dont on peut définir le signe

$$\text{signe}(T_x f) = \pm 1$$

suivant que $T_x f$ préserve ou renverse l'orientation.

Le fait que la formule (III.37) fournisse un entier n'est pas un hasard, comme le montre le :

Théorème 21.4. *Pour toute valeur régulière $y \in N$, on a*

$$\text{deg} f = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{signe}(T_x f).$$

Démonstration. Posons $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$. Puisque f est un difféomorphisme local près de chaque x_i , on peut trouver un ouvert connexe $V \ni y$ et des ouverts connexes $U_i \ni x_i$ tels que $f|_{U_i} : U_i \rightarrow V$ soit un difféomorphisme. Soit $\omega \in \Omega_c^n V$, alors, appliquant (III.36) aux difféomorphismes $f|_{U_i}$,

$$\int_M f^* \omega = \sum_1^k \int_{U_i} (f|_{U_i})^* \omega = \sum_1^k \text{signe}(T_{x_i} f) \int_V \omega.$$

Pour conclure, il suffit d'appliquer cette formule à une forme ω telle que $\int_V \omega \neq 0$. \square

Un exemple d'utilisation du théorème consiste à observer que si f est non surjective, alors $\deg f = 0$ puisqu'une valeur non atteinte est régulière, ce qui est appliqué sous la forme :

$$\deg f \neq 0 \implies f \text{ surjective.}$$

Des formes de ce principe sont utilisées en dimension infinie pour montrer l'existence de solutions à des problèmes d'équations aux dérivées partielles (par exemple, surfaces minimales).

Exemple 21.5. On peut utiliser cette interprétation du degré pour montrer le théorème de d'Alembert : tout polynôme complexe non constant a des racines. Soit $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un tel polynôme. On peut appliquer la théorie du degré, ou bien à P lui-même car il est propre, ou bien à son extension $\tilde{P} : S^2 \rightarrow S^2$ obtenue en identifiant $\mathbb{C} \simeq S^2 \setminus \{N\}$ et en posant $\tilde{P}(N) = N$. Le lecteur vérifiera que la différentielle de P préserve toujours l'orientation, donc le théorème 21.4 implique que $\deg P > 0$; donc P est surjectif.

Un autre exemple d'application est :

Théorème 21.6 (Théorème de la sphère chevelue). *Si n est pair, alors tout champ de vecteurs sur S^n admet un zéro.*

Démonstration. Nous pouvons voir un champ de vecteurs sur S^n comme une application $X : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ telle que $X(x) \perp x$. Si X ne s'annule pas, quitte à le normaliser, on peut supposer $\|X\| \equiv 1$. On définit alors des applications $f_t : S^n \rightarrow S^n$ par

$$f_t(x) = \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)X(x).$$

On a $f_0 = \text{Id}$ et $f_1 = -\text{Id}$, donc Id et $-\text{Id}$ sont homotopes, et en particulier ont même degré; or $\deg(-\text{Id}) = (-1)^{n+1}$ par (III.15), donc il faut que n soit impair. \square

21.1c Indice d'un zéro isolé d'un champ de vecteurs

Soit $x \in M$ un zéro isolé d'un champ de vecteurs X sur M . Dans des coordonnées locales près de x , on peut voir X comme une application $X : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, s'annulant uniquement à l'origine. On peut donc considérer

$$Y : B^n \setminus \{0\} \longrightarrow S^{n-1}, \quad Y = \frac{X}{\|X\|}. \quad (\text{III.38})$$

Théorème 21.7. *Pour $0 < r < 1$, le degré de $Y|_{S_r^{n-1}} : S_r^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ ne dépend pas des choix faits et est appelé l'indice du champ de vecteurs X en x . Il est noté $\text{Ind}(X, x)$.*

Démonstration. L'indépendance par rapport au choix de r provient du fait que les applications $Y|_{S_r^{n-1}}$ sont homotopes, donc ont même degré. Il faut donc vérifier l'indépendance par rapport au choix des coordonnées en x .

En réalité nous allons montrer un énoncé plus général. Nous faisons un choix de coordonnées sur un ouvert $U \ni x$ difféomorphe à une boule, et un choix de trivialisations du fibré tangent, $\text{TM}|_U \simeq U \times \mathbb{R}^n$; les deux choix sont indépendants sauf qu'on demande que l'orientation de U provenant des coordonnées coïncide avec celle de $\text{TM}|_U$ fournie par la trivialisations. Écrivant X dans cette trivialisations, la formule (III.38) continue à faire sens et nous montrons qu'elle ne dépend ni du choix de coordonnées ni du choix de trivialisations.

Examinons le choix de coordonnées. Utiliser un autre choix de coordonnées revient à remplacer $X : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ par $X \circ \varphi$, où $\varphi : B_r^n \rightarrow V \subset B^n$ est un difféomorphisme (et

donc $Y = \frac{X}{\|X\|}$ par $Y \circ \varphi$; comme nous gardons la même trivialisatation de TM , il faut que φ préserve l'orientation. On pose

$$\varphi_t(x) = \begin{cases} d_0\varphi(x) & t = 0, \\ \frac{1}{t}\varphi(tx) & 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

Bien sûr la famille $(\varphi_t)_{t \in [0,1]}$ est C^∞ , y compris par rapport à t . Il existe un $r' \leq r$ pour lequel $\varphi_t(B_{r'}^n) \subset B^n$ pour tout $t \in [0,1]$, donc pour $\rho < r'$, la famille $(Y \circ \varphi_t|_{S_\rho^{n-1}})$ est une homotopie de $Y \circ \varphi_0 = Y \circ d_0\varphi$ à $Y \circ \varphi_1 = Y \circ \varphi$; donc le degré de $Y \circ \varphi$ est égal à celui de $Y \circ d_0\varphi$. Or $d_0\varphi \in GL_+(n, \mathbb{R})$ qui est connexe, donc $Y \circ d_0\varphi$ est homotope à Y et le degré est donc le même que celui calculé pour Y .

Examinons maintenant l'influence d'un changement de trivialisatation du fibré tangent. Cela revient à modifier X en $g(x)X$, où $g : B_r^n \rightarrow GL_+(n, \mathbb{R})$. En utilisant $g_t(x) = g(tx)$, on obtient une homotopie avec $g(0)X$; à nouveau, puisque $GL_+(n, \mathbb{R})$ est connexe, $g(0)X$ est homotope à X : le degré est donc le même.

Finalement, si on renverse simultanément l'orientation du système de coordonnées et de la trivialisatation du fibré, on change l'orientation à la fois à la source et au but de Y , donc le degré demeure inchangé. \square

Théorème 21.8 (Théorème de Poincaré-Hopf). *Si M est une variété compacte et X est un champ de vecteurs à zéros isolés, alors la caractéristique d'Euler de M satisfait*

$$\chi(M) = \sum_{X(x)=0} \text{Ind}(X, x).$$

Ce théorème est important car il relie deux quantités de natures a priori différentes, topologique à gauche, géométrique à droite. Nous ne le démontrerons que dans le cas des surfaces, au chapitre IV.

Par exemple, $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$ donc le théorème de Poincaré-Hopf implique immédiatement le théorème de la sphère chevelue.

Chapitre IV

Surfaces

22 Théorie élémentaire des surfaces

22.a Première forme fondamentale

Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface orientée. On définit la **première forme fondamentale** de S , notée I , comme la restriction à chaque espace tangent $T_p S \subset \mathbb{R}^3$ du produit scalaire de \mathbb{R}^3 :

$$I_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in T_p S.$$

Si la surface est donnée par le graphe d'une fonction, $S = \{z = f(x, y)\}$, alors (x, y) constitue un système de coordonnées sur S dans lequel on peut calculer I : la surface S est paramétrée par $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$, donc, en notant $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$, une base de $T_p S \subset \mathbb{R}^3$ est donnée par les vecteurs

$$d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = (1, 0, f_x), \quad d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = (0, 1, f_y).$$

Prenant le produit scalaire, on obtient la formule

$$I = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.1})$$

que l'on note généralement plutôt

$$I = (1 + f_x^2)dx^2 + 2f_x f_y dx \cdot dy + (1 + f_y^2)dy^2. \quad (\text{IV.2})$$

Cette notation s'explique en pensant un produit scalaire sur $T_p S$ comme un élément de la puissance symétrique $\text{Sym}^2 T_p^* S$; ici $dx \cdot dy$ est le symétrisé du produit $dx dy$, à savoir $dx \cdot dy = \frac{dx dy + dy dx}{2}$.

22.b Application de Gauss et seconde forme fondamentale

Puisque S est orientée, on peut définir la **normale sortante** à S , donnée en un point $p \in S$ comme le vecteur unitaire $v_p \perp T_p S$ tel que (v_p, X, Y) soit une base directe si (X, Y) est une base directe de $T_p S$. L'application

$$v : S \rightarrow S^2$$

est appelée l'**application de Gauss** de S . Elle vérifie donc en particulier

$$T_x S = T_{v(p)} S^2 = v(p)^\perp.$$

On considère la différentielle

$$d_p v : T_p S \longrightarrow T_{v(p)} S^2 = T_p S,$$

et on définit la **seconde forme fondamentale** de S par

$$\Pi_p(X, Y) = -\langle d_p v(X), Y \rangle, \quad X, Y \in T_p S. \quad (\text{IV.3})$$

Proposition 22.1. *La différentielle $d_p v$ est un endomorphisme symétrique de $T_p S$; en particulier la seconde forme fondamentale Π_p est une forme quadratique sur $T_p S$.*

Démonstration. Soient X et Y deux champs de vecteurs sur S , alors

$$0 = X \cdot \langle v, Y \rangle = \langle dv(X), Y \rangle + \langle v, dY(X) \rangle,$$

d'où résulte la formule

$$\Pi(X, Y) = \langle v, dY(X) \rangle. \quad (\text{IV.4})$$

On déduit

$$\Pi(X, Y) - \Pi(Y, X) = \langle v, dY(X) - dX(Y) \rangle = \langle v, [X, Y] \rangle = 0$$

car $[X, Y]$ est tangent à S si X et Y le sont. □

Reprenons la surface S d'équation $z = f(x, y)$ et calculons la seconde forme fondamentale au point p . Quitte à changer les coordonnées par une isométrie directe de \mathbb{R}^3 , on peut supposer $p = 0$, $T_p S = \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}v_p$. Alors nécessairement $d_0 f = 0$ donc

$$f = \frac{1}{2}(ex^2 + 2fxy + gy^2) + O(|(x, y)|^3).$$

Donc

$$v = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} = -(ex + fy, fx + gy, 1) + O(|(x, y)|^2).$$

Ainsi

$$\Pi_p = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.5})$$

Cela donne en particulier une seconde démonstration de la symétrie de Π .

Quitte à choisir d'autres coordonnées orthonormales (x, y) sur \mathbb{R}^2 , on peut supposer que la seconde forme fondamentale au point p est diagonale :

$$\Pi_p = \begin{pmatrix} k_1 & \\ & k_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.6})$$

Les valeurs propres de Π_p , à savoir k_1 et k_2 , sont les **courbures principales** de S en p ; la **courbure moyenne** et la **courbure de Gauss** (ou simplement courbure) de S en p sont les deux quantités

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad K = k_1 k_2. \quad (\text{IV.7})$$

L'équation $H = 0$ définit les **surfaces minimales**; par exemple, les bulles de savon sont des surfaces minimales.

Signification géométrique

On se place au point p . Rappelons que la seconde forme fondamentale donne les termes de second ordre de f en p , donc

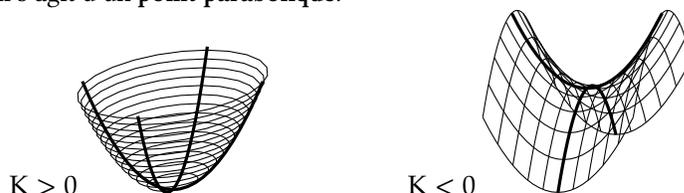
$$f \sim \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2).$$

On discute suivant le signe de la courbure en p :

$K > 0$ alors $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$ (ou tous les deux négatifs) : il s'agit d'un **point elliptique**, la surface S est d'un seul côté de son plan tangent ;

$K < 0$ alors $k_1 > 0$ et $k_2 < 0$ (ou le contraire) : il s'agit d'un **point hyperbolique**, la surface S traverse son plan tangent ;

$K = 0$ il s'agit d'un **point parabolique**.



Sur les figures on a représenté des lignes donnant les directions des courbures principales.

Exemple 22.2. Pour un espace affine $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$, on peut prendre comme équation $z = 0$, donc $\text{II} = 0$ et $K = 0$. Pour un cylindre $\mathbb{R} \times S^1 \subset \mathbb{R}^3$, donné par l'équation $z^2 + x^2 = 1$, on a près de $(0, 0, 1)$ le développement $z = \sqrt{1 - x^2} \sim 1 - \frac{1}{2}x^2$ donc en ce point $\text{II} = -dx^2$ et $K = 0$. Comme le cylindre est homogène sous l'action des translations suivant \mathbb{R} ou rotations suivant S^1 , on obtient $K = 0$ partout.

Exemple 22.3. Pour la sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, on a $\text{II} = -\text{Id}$ et $K = 1$. En effet, près du point $(0, 0, 1)$ on a $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \sim 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, d'où le résultat en ce point ; on obtient les autres points en faisant agir le groupe $\text{SO}(3)$.

Remarque 22.4. Soit $u \in T_pS$ avec $|u| = 1$, considérons le plan $P = \mathbb{R}u + \mathbb{R}v_p$. Alors on peut montrer que

$$\text{II}(u, u) = k(S \cap P)(p),$$

où $k(C)$ désigne la courbure d'une courbe C dans un plan euclidien P . Les courbures principales en p apparaissent donc comme les maximum et minimum des courbures des intersections de S avec les plans orthogonaux à S en p .

22.c Le théorème Egregium de Gauss

Théorème 22.5. *La courbure de Gauss K dépend uniquement de la première forme fondamentale I sur S , c'est-à-dire de la métrique riemannienne sur S .*

Autrement dit, K ne dépend pas du plongement de S dans \mathbb{R}^3 (qui permet de définir la seconde forme fondamentale) : un autre plongement induisant la même métrique sur S donnerait la même courbure. On dit que K est un invariant intrinsèque de S , par opposition aux invariants extrinsèques qui dépendent du plongement dans \mathbb{R}^3 (par exemple, la courbure moyenne H).

Le théorème sera la conséquence d'une réinterprétation de la courbure de Gauss. Nous considérons une surface orientée S munie d'une métrique riemannienne g . Chaque espace tangent T_pS est alors muni d'un endomorphisme J = rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. Le fibré unitaire tangent de S est

$$\mathcal{U} = \text{STS} = \{(p, X), p \in S, X \in T_pS, |X| = 1\}.$$

Soit $\pi : \mathcal{U} \rightarrow S$ la projection. Nous définissons deux 1-formes sur \mathcal{U} par les formules, pour $\xi \in T_{(p,X)}\mathcal{U}$,

$$\begin{aligned}\alpha_{(p,X)}(\xi) &= \langle X, \pi_*\xi \rangle, \\ \beta_{(p,X)}(\xi) &= \langle JX, \pi_*\xi \rangle.\end{aligned}$$

Lemme 22.6. *Il existe une unique 1-forme η sur \mathcal{U} telle que*

$$\begin{aligned}d\alpha &= \eta \wedge \beta, \\ d\beta &= -\eta \wedge \alpha.\end{aligned}\tag{IV.8}$$

En outre, dans une trivialisaton locale du fibré $\mathcal{U}|_U \simeq U \times S^1$, avec coordonnée angulaire θ sur le cercle S^1 , on a

$$\eta = d\theta + \pi^*\omega,\tag{IV.9}$$

où ω est une 1-forme sur U .

La 1-forme locale ω sur S , qui dépend de la trivialisaton choisie de \mathcal{U} , est appelée la **forme de connexion** de g .

Démonstration. Soit (X_1, X_2) une base orthonormée directe locale de TS, donnant la trivialisaton choisie de TS; soit (X^1, X^2) la base duale. Alors on voit immédiatement que

$$\begin{aligned}\alpha &= \cos(\theta)\pi^*X^1 + \sin(\theta)\pi^*X^2, \\ \beta &= -\sin(\theta)\pi^*X^1 + \cos(\theta)\pi^*X^2.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}d\alpha &= d\theta \wedge \beta + \cos(\theta)\pi^*dX^1 + \sin(\theta)\pi^*dX^2, \\ d\beta &= -d\theta \wedge \alpha - \sin(\theta)\pi^*dX^1 + \cos(\theta)\pi^*dX^2.\end{aligned}\tag{IV.10}$$

Définissons une 1-forme locale $\omega = aX^1 + bX^2$ sur S par

$$\begin{aligned}dX^1 &= \omega \wedge X^2, \\ dX^2 &= -\omega \wedge X^1,\end{aligned}\tag{IV.11}$$

donc $a = dX^1(X_1, X_2)$ et $b = dX^2(X_1, X_2)$. Alors l'équation (IV.10) se réécrit sous la forme du système (IV.8) avec nécessairement $\eta = d\theta + \pi^*\omega$. \square

Remarque 22.7. La formule de Maurer-Cartan (proposition 18.9) donne

$$a = dX^1(X_1, X_2) = -X^1([X_1, X_2]), \quad b = dX^2(X_1, X_2) = -X^2([X_1, X_2]),$$

donc $[X_1, X_2] = -aX_1 - bX_2$ et ω est l'opposée du dual de $[X_1, X_2]$ pour la métrique g .

Observons que la formule (IV.9) implique

$$d\eta = \pi^*d\omega.\tag{IV.12}$$

Comme η est canonique, on déduit que $d\omega \in \Omega^2S$ ne dépend pas du choix de la trivialisaton du fibré tangent : c'est un invariant intrinsèque de (S, g) .

Le théorème 22.5 est alors une conséquence directe de la

Proposition 22.8. *Si la métrique g de S provient d'un plongement $S \subset \mathbb{R}^3$, notons sa forme volume $\text{vol} \in \Omega^2S$, alors la forme de connexion ω définie par le lemme 22.6 satisfait*

$$d\omega = -K \text{vol},\tag{IV.13}$$

où K est la courbure de Gauss de S .

Puisque $d\omega$ est un invariant intrinsèque de (S, g) , l'équation (IV.13) permet de définir la courbure de Gauss de (S, g) sans que S soit plongée isométriquement dans \mathbb{R}^3 . Par exemple, le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ avec la métrique riemannienne plate obtenue par quotient a une courbure de Gauss $K \equiv 0$.

Démonstration. Prenons à nouveau une base orthonormale locale (X_i) de TS. Puisque $S \subset \mathbb{R}^3$, nous pouvons voir les X_i comme des applications $X_i : S \rightarrow \mathbb{R}^3$. Notons la seconde forme fondamentale $\Pi = e(X^1)^2 + 2fX^1 \cdot X^2 + g(dX^2)^2$, alors on a les formules :

$$\begin{aligned} dX_1 &= \omega X_2 + A^1 v, \\ dX_2 &= -\omega X_1 + A^2 v, \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

avec $A^1(\cdot) = \Pi(X_1, \cdot) = eX^1 + fX^2$ et $A^2(\cdot) = \Pi(X_2, \cdot) = fX^1 + gX^2$.

Démontrons (IV.14). Les coefficients sur v sont une conséquence de la formule (IV.4). Pour les coefficients sur X_1 et X_2 , différencions $\langle X_1, X_2 \rangle = 0$ pour déduire $\langle dX_1, X_2 \rangle = -\langle X_1, dX_2 \rangle$; de même $\langle dX_i, X_i \rangle = 0$. Par ailleurs, $[X_1, X_2] = dX_2(X_1) - dX_1(X_2)$ et en particulier

$$\begin{aligned} \langle [X_1, X_2], X_1 \rangle &= \langle dX_2(X_1), X_1 \rangle = -\langle dX_1(X_1), X_2 \rangle, \\ \langle [X_1, X_2], X_2 \rangle &= -\langle dX_1(X_2), X_2 \rangle = \langle dX_2(X_2), X_1 \rangle. \end{aligned}$$

La relation entre ω et $[X_1, X_2]$ (remarque 22.7) implique alors (IV.14).

Démontrons maintenant la proposition. Par la définition (IV.3) on a

$$dv = -A^1 X_1 - A^2 X_2,$$

donc on calcule, à partir de (IV.14),

$$\begin{aligned} 0 &= d(dX_1) = d\omega X_2 - \omega \wedge dX_2 + dA^1 v - A^1 \wedge dv \\ &= (d\omega + A^1 \wedge A^2)X_2 + (dA^1 - \omega \wedge A^2)v. \end{aligned} \quad (\text{IV.15})$$

En particulier, $d\omega = -A^1 \wedge A^2 = -(eg - f^2)X^1 \wedge X^2 = -K \text{ vol}$. \square

Remarque 22.9. Le calcul (IV.15), avec le calcul similaire pour $d(dX_2)$, donne les identités

$$dA^1 = \omega \wedge A^2, \quad dA^2 = -\omega \wedge A^1,$$

connues sous le nom d'équation de Gauss-Codazzi.

22.d Exercices

Exercice 22.d.1 (Surfaces minimales). Soit une surface riemannienne orientée connexe S . On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur chaque espace tangent, $|\cdot|$ la norme, et vol_S la forme volume de S .

1. On note J la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans chaque espace tangent ou cotangent : donc, si (X_1, X_2) est une base orthonormale directe locale de TS, et (X^1, X^2) la base duale, alors $JX_1 = X_2$, $JX_2 = -X_1$, et de même $JX^1 = X^2$ et $JX^2 = -X^1$. Soit α une 1-forme sur S , montrer que $\alpha \wedge J\alpha = |\alpha|^2 \text{vol}_S$.

2. Soit f une fonction C^∞ sur S , on définit une 2-forme $\Delta f \in \Omega^2(S)$ par $\Delta f = d(J(df))$. On suppose S compacte : montrer que $\int_S f \Delta f = -\int_S |df|^2 \text{vol}_S$; en déduire que $\Delta f = 0$ si et seulement si f est constante.

3. On suppose S isométriquement plongée dans \mathbb{R}^3 . Soit $v \in \mathbb{R}^3$ et $f_v : S \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_v(x) = \langle v, x \rangle$. Calculer Δf_v (on pourra décomposer df_v sur la base (X^1, X^2) de 1-formes, puis appliquer les formules (IV.11) et (IV.14)). En déduire que S est minimale (c'est-à-dire la courbure moyenne est nulle) si et seulement si $\Delta f_v = 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}^3$.

4. Déduire qu'il n'existe pas de surface minimale compacte dans \mathbb{R}^3 .

23 Théorème de Gauss-Bonnet

Théorème 23.1. Soit (S, g) une surface compacte orientée, munie d'une métrique riemannienne, de forme volume vol et de courbure de Gauss K , alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_S K \text{vol} = \chi(S).$$

Ce théorème est important en ce qu'il relie la géométrie de la surface (membre de gauche de l'égalité) à sa topologie (membre de droite). Par exemple, si on se pose la question de trouver sur S une métrique à courbure constante $K \equiv k$, alors il faut que $k \text{Vol}(S) = 2\pi\chi(S) = 2\pi(2 - 2g)$, ce qui impose $k > 0$ pour $g = 0$, $k = 0$ pour $g = 1$ et $k < 0$ pour $g = 2$. Effectivement, la métrique standard de la sphère S^2 est à courbure constante, et celle du tore \mathbb{T}^2 à courbure nulle; les surfaces à genre $g \geq 2$ ont effectivement des métriques à courbure constante strictement négative, elles sont « hyperboliques », mais S^2 et \mathbb{T}^2 ne peuvent pas l'être.

En fait, le théorème 23.1 sera une conséquence du

Théorème 23.2. Sous les mêmes hypothèses, soit X un champ de vecteurs sur S à singularités isolées. Alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_S K \text{vol} = \sum_{X(p)=0} \text{Ind}(X, p). \quad (\text{IV.16})$$

Le lien avec le théorème de Gauss-Bonnet est fourni par le théorème de Poincaré-Hopf 21.8, mais nous allons voir comment le déduire directement; cela fournit en particulier une démonstration en dimension 2 du théorème de Poincaré-Hopf.

Démonstration du théorème 23.1. On applique le théorème 23.2. Le membre de gauche de l'égalité ne dépend pas du champ de vecteurs, le membre de droite ne dépend pas de la métrique. Au final, on déduit que la quantité (IV.16) ne dépend ni de la métrique ni du champ de vecteurs : elle ne dépend que du type de difféomorphisme de S .

Il suffit alors de calculer (IV.16) sur un exemple. On plonge S de manière standard dans \mathbb{R}^3 en prenant $X = \text{grad}(z|_S)$. La fonction $z|_S$ a $2g + 2$ points critiques situés sur l'axe des z , dont un minimum, un maximum, et $2g$ points col. Près d'un point critique $p = (0, 0, z_c)$, on a un développement $z - z_c \sim ax^2 + by^2$, donc $X(x, y) \sim (ax, by)$ donc $\text{Ind}(X, p) = \text{signe}(ab)$. En un maximum ou un minimum on obtient $+1$, en un point col -1 . Donc $\sum_{X(p)=0} \text{Ind}(X, p) = 2 - 2g$. \square

Remarque 23.3. Dans cette démonstration, on a subrepticement utilisé le fait non trivial que toutes les surfaces de genre g sont difféomorphes, voir HIRSCH.

Démonstration du théorème 23.2. Nous considérons le fibré unitaire tangent \mathcal{U} de (S, g) . Notons $Y = \frac{X}{|X|}$, on peut considérer Y comme une section de \mathcal{U} :

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{U} \\ & \nearrow Y & \downarrow \pi \\ S \setminus X^{-1}(0) & \hookrightarrow & S \end{array}$$

Soit $U_\delta = \cup_{X(p)=0} B(p, \delta)$, où chaque boule $B(p, \delta)$ est choisie dans un système de coordonnées arbitraire, et les différentes boules sont disjointes. Rappelons que par le lemme 22.6, le fibré unitaire tangent \mathcal{U} est muni d'une 1-forme canonique η telle que

$$d\eta = -\pi^*(K \text{ vol}).$$

Puisque $\pi \circ Y = \text{Id}$, on a

$$\begin{aligned} \int_{S \setminus U_\delta} K \text{ vol} &= \int_{S \setminus U_\delta} Y^* p^* K \text{ vol} \\ &= \int_{S \setminus U_\delta} Y^*(-d\eta) \\ &= - \int_{S \setminus U_\delta} dY^*\eta \\ &= \int_{\partial U_\delta} Y^*\eta. \end{aligned}$$

Dans chaque boule $B(p, \delta)$ nous prenons une trivialisation orthonormale de TS, dans laquelle nous avons une forme de connexion ω avec $\eta = d\theta + \pi^*\omega$, donc

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(p, \delta)} Y^*\eta &= \int_{\partial B(p, \delta)} Y^*d\theta + \int_{\partial B(p, \delta)} Y^*\omega \\ &= 2\pi \text{Ind}(X, p) + \int_{\partial B(p, \delta)} Y^*\omega. \end{aligned}$$

Pour l'égalité avec l'indice, on a utilisé que l'indice peut se calculer à l'aide d'une trivialisation quelconque du fibré tangent, ne provenant pas nécessairement du système de coordonnées, voir la démonstration du théorème 21.7. Puisque ω est une 1-forme C^∞ autour de p , on a $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial B(p, \delta)} Y^*\omega = 0$. Finalement, la limite quand $\delta \rightarrow 0$ de l'intégrale nous donne

$$\int_S K \text{ vol} = 2\pi \sum_{X(p)=0} \text{Ind}(X, p).$$

□

Index

- action libre, 25
- action propre, 25
- action proprement discontinue, 25
- action à gauche d'un groupe de Lie sur une variété, 24
- algèbre de Lie, 40
- algèbre de Lie du groupe de Lie G , 43
- algèbre extérieure, 58
- algèbre graduée, 61
- algèbre graduée anticommutative, 61
- application de classe C^k , 14
- application de Gauss, 92
- application tangente à f , 16
- applications homotopes, 75
- atlas de classe C^k , 9

- bande de Möbius, 24

- caractéristique d'Euler-Poincaré, 74
- carte, 9
- champ de vecteurs, 37
- champ de vecteurs complet, 46
- champ de vecteurs tautologique, 49
- changement de carte, 9
- classe de cohomologie, 74
- cohomologie d'une algèbre de Lie, 84
- cohomologie de De Rham, 74
- contractile, 75
- coordonnées homogènes, 12
- courbe intégrale du champ de vecteurs X , 44
- courbes tangentes, 15
- courbure de Gauss, 92
- courbure moyenne, 92
- courbures principales, 92
- crochet, 40

- degré, 87
- demi-plan de Poincaré, 27
- difféomorphisme de classe C^k , 14
- B-difféomorphisme, 35
- différentielle extérieure, 62
- dimension, 12

- dérivation, 39
- dérivation de degré r , 61
- dérivée de Lie suivant X , 53

- équation de Gauss-Codazzi, 95
- équivalence d'homotopie, 75
- espace projectif complexe, 13
- espace projectif réel, 12
- espace tangent en a à M , 15
- exponentielle du groupe G , 50
- expression locale de f , 14

- fibration, 35
- fibration localement triviale, 35
- fibre de la fibration, 35
- fibré cotangent, 38
- fibré normal, 38
- fibré tangent, 37
- fibré tautologique, 36
- fibré vectoriel complexe, 36
- fibré vectoriel réel, 35
- flot du champ de vecteurs X , 46
- fonction de classe C^k , 13
- forme de connexion, 94
- forme différentielle, 60
- forme exacte, 74
- forme fermée, 74
- forme volume, 67
- formule d'homotopie, 75

- genre, 28
- grassmannienne, 28
- groupe de Lie, 24
- groupe unimodulaire, 80
- groupe à un paramètre, 46

- image réciproque de la forme différentielle, 60
- immersion, 21
- indice du champ de vecteurs X , 89
- intégrale le long du chemin, 72
- isomorphisme de fibrés vectoriels, 36

- localement finie, 29

- mesure de Haar, 80
- morphisme de fibré vectoriel, 35
- métrique riemannienne, 48

- nombre de Betti, 74
- normale sortante, 91

- orientation de la variété M , 66

- paracompact, 29
- partition de l'unité subordonnée au recouvrement (U_α) , 30
- plongement, 23
- point critique, 20
- point elliptique, 93
- point hyperbolique, 93
- point parabolique, 93
- poussé en avant, 53
- première forme fondamentale, 91
- puissance extérieure, 57

- raffinement du recouvrement (U_α) , 29
- rang constant, 22
- recouvrement, 29
- recouvrement plus fin, 29
- représentation adjointe de G , 55
- restriction de la fibration, 35
- retract par déformation, 77
- revêtement fini, 51
- rétraction, 73

- seconde forme fondamentale, 92
- section, 37
- sous-fibré vectoriel, 52
- sous-groupe de Lie, 24
- sous-variété, 19
- submersion, 18
- surfaces minimales, 92

- tiré en arrière, 53
- tore, 13
- trajectoire du champ de vecteurs X , 44
- tranche à l'action de G , 26
- transition, 9
- trivialisation locale du fibré, 35

- valeur critique, 20
- valeur régulière, 20
- variété de classe C^k , 12
- variété de type fini, 79
- variété différentielle, 12
- variété orientable, 66
- variété topologique, 12
- variété à bord, 69
- voisinage tubulaire, 39