

# LE MODÈLE D'ISING DÉSORDONNÉ

## Introduction au domaine de recherche

Benjamin Havret

## Introduction : les systèmes désordonnés

**Le contexte physique.** En physique statistique, les systèmes désordonnés constituent une classe de systèmes ayant deux échelles d'évolution : l'une rapide, l'autre lente (ou moins rapide). L'évolution des moments magnétiques d'atomes au sein d'un alliage en est un exemple : ces derniers se meuvent lentement au sein de l'alliage, tandis que l'arrangement de leur moment magnétique est un phénomène rapide. Sur une échelle de temps courte la position des atomes évolue suffisamment lentement pour être supposée fixe, et l'équilibre magnétique s'effectue ; la distribution de cette aimantation dépendant de la position des atomes à cet instant. Bien entendu, ces systèmes étant modélisés sous l'œil stochastique de la physique statistique, le phénomène rapide et le phénomène lent sont aléatoires. Par conséquent il y a deux niveaux d'aléatoire, un pour chaque échelle de temps. En particulier, les grandeurs usuellement examinées en physique statistique (l'énergie libre par exemple) deviennent dans ce cadre des quantités aléatoires. Pour chacun de ces systèmes, le physicien statisticien cherche bien souvent à étudier les transitions de phases, à savoir les changements brusques du comportement qualitatif d'un système lorsque varie l'un de ses paramètres (la température typiquement). Par exemple, pour des températures faibles, l'alliage précédemment évoqué présentera une aimantation spontanée (aléatoire) tandis que lorsque la température est élevée, il n'est pas aimanté. Un argument de monotonie justifie l'existence d'une transition de phase entre ces deux régimes. Nous présenterons dans ces pages un cadre formel dans lequel la recherche d'une transition de phase se ramènera à celle des irrégularités d'une certaine quantité dépendant des paramètres du système.

**Quelques exemples mathématiques.** En mathématiques l'archétype du système désordonné est la marche aléatoire en milieu aléatoire. Il s'agit d'une marche aléatoire, sur le réseau  $\mathbb{Z}^d$  typiquement, dont la loi des sauts dépend du site où la marche se trouve : cette loi a préalablement été tirée aléatoirement pour chaque site. Dans cet exemple, les deux niveaux d'aléa sont d'une part l'aléa fixant les probabilités de saut pour chacun des sites, et, ces lois étant fixées (on parle de désordre gelé), l'aléa de la marche sur ce réseau désormais inhomogène. Une transition de phase de ce modèle est le passage d'un comportement récurrent à un comportement transient de la marche lorsque varie la loi des probabilités de transitions. Les polymères en milieu aléatoire constituent un autre exemple de système désordonné, beaucoup étudié. Plus généralement, la plupart des modèles que propose la physique statistique admettent un pendant désordonné. Ceux-ci en fournissent un raffinement en ce qu'ils incluent des imperfections éventuelles (problème non homogène, particules qui ne sont pas sur un réseau régulier, *etc.*), et leur aléa.

Le modèle auquel nous allons nous intéresser dans ces pages est celui d'Ising, qui modélise le magnétisme dans un métal. La littérature mathématique abonde de résultats concernant sa version déterministe (en dimension 2 tout particulièrement) : elle fera l'objet de la première section. La résolution de sa version désordonnée conduira à considérer des limites de produits de matrices aléatoires. Ceux-ci seront abordés dans la section suivante : la quantité d'intérêt étant le taux de croissance de leur norme. On se penchera tout particulièrement sur la question de la régularité de ce taux de croissance comme fonction de la loi des matrices considérées. La recherche de ses irrégularités constitue un axe central de la physique statistique puisqu'elles sont l'expression formelle de la présence d'une transition de phase. L'examen de ces irrégularités constituera la problématique centrale de la dernière section où seront présentées plusieurs versions du modèle d'Ising désordonné.

# 1 Le modèle d'Ising

## 1.1 Description du modèle

Commençons par une expérience. Une barre de fer aimantée est chauffée. On constate que lorsqu'elle atteint la température de  $770^\circ\text{C}$ , cette barre de fer perd son aimantation. Le phénomène a été mis en évidence par Pierre Curie en 1895, la température de la transition de phase porte son nom. Dans les années 1920, un modèle est proposé par W. Lenz et étudié par son élève E. Ising pour expliquer le phénomène. Ce modèle, que l'on étudie dans les pages qui suivent, est connu sous le nom d'Ising.

Plaçons-nous sur un graphe fini non orienté  $G = (V, E)$ . Chaque sommet (ou site) du graphe est habité par un spin, dont l'orientation est traduite par un signe, autrement dit un élément de  $\{-1, +1\}$ . Concrètement, une configuration de spins est un élément  $\underline{\sigma} = (\sigma_i)_{i \in V}$  de  $\{-1, +1\}^V$ . Les spins interagissent avec leurs plus proches voisins avec l'énergie

$$-J\sigma_i\sigma_j, \tag{1.1}$$

où  $J$  est un coefficient positif appelé constante de couplage. On peut ajouter à cela une interaction avec un champ extérieur  $h$ , matérialisé pour chaque spin par le terme d'énergie

$$-h\sigma_i, \tag{1.2}$$

L'énergie totale d'une configuration  $\underline{\sigma} \in \{-1, +1\}^V$  est ainsi

$$H(\underline{\sigma}) = - \sum_{i \in V} h\sigma_i - \sum_{i \sim j} J\sigma_i\sigma_j. \tag{1.3}$$

Le symbole « $\sim$ » traduit que l'on somme uniquement sur les paires de sites voisins du graphe. La physique statistique, telle que formalisée par W. Gibbs, prévoit qu'une configuration  $\underline{\sigma} \in \{-1, +1\}^V$  se produit avec une probabilité donnée par la mesure de Gibbs

$$P_{\beta, G}(\underline{\sigma}) := \frac{1}{Z_{\beta, G}} \exp(-\beta H(\underline{\sigma})), \tag{1.4}$$

$\beta$  étant un paramètre positif (jouant physiquement le rôle de l'inverse de la température) et  $Z_\beta$  désignant la constante de renormalisation, appelée fonction de partition du modèle :

$$Z_{\beta,G} = \sum_{\sigma \in \{-1,+1\}^V} \exp(-\beta H(\sigma)). \quad (1.5)$$

L'énergie libre par spin est la quantité

$$f_G(\beta) = -\frac{1}{\beta|V|} \log Z_{\beta,G}. \quad (1.6)$$

Examinons les définitions précédentes. La mesure de Gibbs donne pour configurations les plus probables celles d'énergie totale faible, c'est-à-dire celles où les spins ont tendance à s'aligner entre voisins (terme d'interaction) et à s'aligner avec le champ. Ce biais est d'autant plus marqué que le coefficient  $\beta$  est grand, c'est-à-dire que la température est faible. Au contraire, si  $\beta$  est nul, les orientations de chacun des spins sont indépendantes et suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre  $1/2$ .

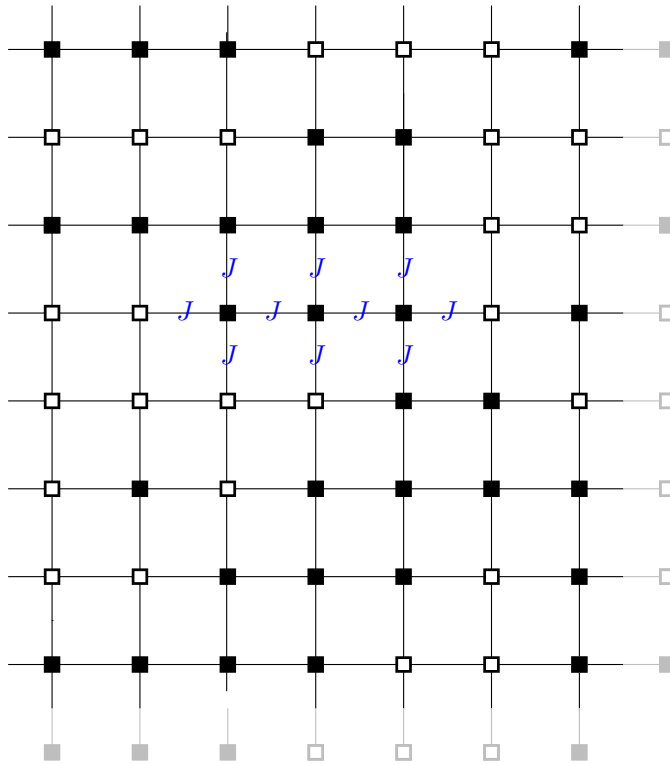


FIGURE 1 – Une réalisation du modèle d'Ising sur le graphe  $G = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ . En noir sont représentés les spins positifs et en blanc les spins négatifs. Les conditions au bord *périodiques* (i.e. le fait que  $G$  est «torique») sont matérialisées en gris.

Si les objets qui précèdent ont été définis sur un graphe quelconque  $G$ , c'est sur  $\mathbb{Z}^d$  qu'on aimerait les envisager. Comme le graphe  $\mathbb{Z}^d$  n'est pas fini, les objets jusque là considérés sont mal définis : la somme définissant l'énergie totale diverge. Un des enjeux de la physique statistique est de produire une mesure sur  $\{-1, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$  dont les

marginales seraient données par la formule (1.4) : c'est-à-dire mesure de Gibbs sur  $\mathbb{Z}^d$ . On voit pour cela le graphe  $\mathbb{Z}^d$  comme limite des tores discrets  $G_N = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^d$ . On appelle énergie libre sur  $\mathbb{Z}^d$  la limite :

$$f(\beta) = -\frac{1}{\beta} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^d} \log Z_{\beta, G_N}. \quad (1.7)$$

La question des transitions de phases se traduit dans ce vocabulaire par celle des ruptures d'analyticité de l'énergie libre. Bien entendu, vues les définitions, une transition de phase ne peut pas avoir lieu sur un graphe fini. C'est dans le passage à la limite (1.7) qu'une perte de régularité peut se produire.

## 1.2 Le cas déterministe 1D

Le modèle d'Ising à une dimension peut être entièrement résolu. On utilise à cet effet la méthode dite des matrices de transfert. Fixons un entier  $N \geq 1$ . On souhaite calculer la fonction de partition sur le tore discret :

$$Z_{\beta, N} = \sum_{\underline{\sigma} \in \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}} \exp \left[ \beta \sum_{i=1}^N h \sigma_i + \beta \sum_{i=1}^N J \sigma_i \sigma_{i+1} \right]. \quad (1.8)$$

Introduisons la fonction définie sur  $\{-1, +1\}^2$  par

$$\ell_{\beta}(\sigma, \tau) = \exp(\beta(h\sigma + J\sigma\tau)), \quad (1.9)$$

et la matrice de transfert

$$L_{\beta} = \begin{pmatrix} e^{\beta(h+J)} & e^{\beta(h-J)} \\ e^{\beta(-h-J)} & e^{\beta(-h+J)} \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

La fonction de partition se réécrit

$$Z_{\beta, N} = \sum_{\sigma_1 \in \{-1, 1\}} \dots \sum_{\sigma_{N+1} \in \{-1, 1\}} \mathbf{1}_{\sigma_{N+1} = \sigma_1} \prod_{i=1}^N \ell_{\beta}(\sigma_i, \sigma_{i+1}). \quad (1.11)$$

C'est-à-dire

$$Z_{\beta, N} = \text{Tr}(L_{\beta}^N). \quad (1.12)$$

En calculant le rayon spectral de la matrice  $L_{\beta}$ , on parvient au résultat suivant.

**Théorème 1.1.** *Pour le modèle d'Ising à une dimension, l'énergie libre par spin admet l'expression*

$$f(\beta, h, J) = -\frac{1}{\beta} \log \left[ e^{\beta J} \cosh(\beta h) + \sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2(\beta h) + e^{-2\beta J}} \right]. \quad (1.13)$$

*En particulier, il n'y a pas de transition de phase en dimension 1.*

*Remarque 1.2.* Au cours de sa thèse, E. Ising était parvenu à cette résolution. Il avait ensuite conjecturé qu'en dimension plus grande, il n'y avait pas de transition de phase non plus. C'est en 1930 que R. Peierls prouve l'existence d'une transition de phase en dimension 2 et plus, réfutant ainsi la conjecture de E. Ising.

### 1.3 Le cas déterministe 2D

Quatorze ans après la parution de l'argument de R. Peierls, justifiant l'existence d'une transition de phase pour le modèle d'Ising bidimensionnel, L. Onsager fournit l'expression exacte de l'énergie libre.

**Théorème 1.3** (Onsager, 1944, [Ons44]). *L'énergie libre du modèle d'Ising bidimensionnel en champ nul est*

$$f(\beta, J) = \frac{-\log 2}{\beta} - \frac{1}{8\beta\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log [\cosh^2 2\beta J - \sinh 2\beta J (\cos \phi_1 + \cos \phi_2)] d\phi_1 d\phi_2. \quad (1.14)$$

Il admet une transition de phase en  $\beta_c = \frac{1}{2} \log \sqrt{1 + \sqrt{2}}$  : au voisinage de cette température critique

$$f''(\beta, J) \approx \log |\beta - \beta_c|. \quad (1.15)$$

*Remarque 1.4.* La méthode utilisée par L. Onsager, si elle utilise fortement les invariances du modèle, peut se passer de l'isotropie. Autrement dit, on peut choisir des coefficients de couplage verticaux et horizontaux distincts. Si on les note  $J_1$  et  $J_2$ , l'expression de l'énergie libre est transformée en

$$f(\beta, J_1, J_2) = \frac{-\log 2}{\beta} - \frac{1}{8\beta\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi_1 d\phi_2 \log [\cosh 2\beta J_1 \cosh 2\beta J_2 - \sinh 2\beta J_1 \cos \phi_1 - \sinh 2\beta J_2 \cos \phi_2]. \quad (1.16)$$

La température critique pour ce modèle anisotrope est donnée par la relation

$$\sinh 2\beta_c J_1 \sinh 2\beta_c J_2 = 1. \quad (1.17)$$

## 2 Un outil central : le produit de matrices aléatoires

Les résolutions des modèles d'Ising unidimensionnel et bidimensionnel font apparaître des produits de matrices faisant intervenir les paramètres du système (coefficients de couplage, champ magnétique, température). Celles de leurs analogues désordonnés verront poindre les mêmes produits, mais dont les coefficients seront aléatoires. Il convient, avant d'aborder cette résolution de comprendre comment se comportent ces produits aléatoires. L'étude des produits de matrices aléatoires, initiée par R. Bellman en 1954 ([Bel54]), et considérablement démêlée par H. Furstenberg entre 1960 et 1985, se fixe pour objectif de déterminer le taux de croissance, aléatoire *a priori*, de la norme de ce produit.

### 2.1 L'exposant caractéristique

Fixons une suite  $(Y_n)_{n \geq 0}$  de matrices aléatoires de format  $d \times d$  indépendantes et de même loi  $\mu$ . On s'intéresse au taux de croissance de la norme du produit

$$P_n = Y_n \dots Y_1. \quad (2.1)$$

Utilisant la sous-multiplicativité d'une norme sur  $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ , une application du lemme sous-additif de Fekete justifie la définition suivante.

**Définition 2.1** (Exposant caractéristique). L'exposant caractéristique (ou plus grand exposant de Lyapunov) de la loi  $\mu$  est l'élément de  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  donné par la limite

$$\gamma(\mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E [\log \|Y_n \dots Y_1\|] = \inf_{n \geq 1} \frac{1}{n} E [\log \|Y_n \dots Y_1\|], \quad (2.2)$$

définie dès que  $\int \log^+ \|A\| d\mu(A) < \infty$ .

En fait un analogue aléatoire du lemme sous-additif, dû à Kingmann, assure la convergence presque sûre suivante.

**Théorème 2.2** (Furstenberg – Kesten, 1960, [FK60]). *Sous l'hypothèse  $\int \log^+ \|A\| d\mu(A) < \infty$ ,*

$$\frac{1}{n} \log \|Y_n \dots Y_1\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \gamma(\mu) \quad p.s. \quad (2.3)$$

Ce théorème peut être comme un pendant non commutatif de la loi des grands nombres. Un point, essentiel pour la suite, les distingue pourtant : ici il n'y a pas d'expression explicite simple de la limite, c'est-à-dire de l'exposant caractéristique, en dehors de quelques cas dégénérés (matrices diagonales, matrices déterministes, *etc.*). Or en l'absence de toute formule autre que la limite (2.3), il devient peu aisé d'analyser sa régularité, ce qui constitue notre problématique principale. Fort heureusement, une formule intégrale, certes pas très explicite, peut être démontrée.

## 2.2 Expression intégrale

Lors d'une étude approfondie des produits de matrices aléatoires en 1963 ([Fur63]), H. Furstenberg obtenait incidemment une expression intégrale de l'exposant caractéristique (moyennant quelque hypothèse «d'irréductibilité forte»). Elle repose sur l'écriture en somme télescopique suivante. On suppose pour les lignes qui suivent que  $\mu$  ne charge que les matrices inversibles. Pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  de norme 1,

$$\frac{1}{N} \log \|Y_N \dots Y_1 x\| = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \log \frac{\|Y_n Y_{n-1} \dots Y_1 x\|}{\|Y_{n-1} \dots Y_1 x\|}, \quad (2.4)$$

qui se reformule comme moyenne de Birkhoff de la chaîne de Markov  $\zeta_n = (Y_n, Y_n \dots Y_1 x)$  :

$$\frac{1}{N} \log \|Y_N \dots Y_1 x\| = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N h(\zeta_n). \quad (2.5)$$

On a noté  $h$  la fonction définie par

$$h(A, u) = \log \frac{\|u\|}{\|A^{-1}u\|}. \quad (2.6)$$

Lorsque la chaîne de Markov  $(\zeta_n)$  admet une unique mesure invariante, la limite de la moyenne de Birkhoff n'est rien d'autre (moyennant quelque hypothèse d'intégrabilité) que la moyenne de  $h$  contre ladite mesure invariante. C'est le cas que traitait H. Furstenberg en 1963 : un critère d'unicité de la mesure invariante était

énoncé. Toutefois, même si cette unicité est mise en défaut, un encadrement asymptotique précis de cette moyenne en termes des mesures invariantes peut être démontré. Celui-ci fournit bientôt l'expression exacte de l'exposant caractéristique en fonction de l'intégrale de  $h$  contre toutes les mesures invariantes. Cette analyse a été menée en 1983 parallèlement par H. Furstenberg et Y. Kifer ([FK83]) d'une part et par H. Hennion ([Hen84]) d'autre part.

Commençons par constater que  $h$  ne dépend en fait que de la classe de  $u$  dans l'espace projectif  $\mathbb{P}^{d-1}(\mathbb{R})$ . Conséquemment, on peut ne s'intéresser qu'à l'action des matrices sur cet espace projectif : si  $M \in GL_d(\mathbb{R})$  et  $u \in \mathbb{R}^d$ , on note  $\bar{u}$  la classe de  $u$  dans  $\mathbb{P}^{d-1}(\mathbb{R})$  et  $M \cdot \bar{u}$  la classe de  $Mu$ . On choisit ainsi d'étudier plutôt la chaîne de Markov  $\xi_n = (Y_n, Y_n \dots Y_1 \cdot \bar{x})$ . Avant d'énoncer le théorème, explicitons la notion de mesure invariante.

**Définition 2.3.** Si  $\mu$  est une probabilité sur  $GL_d(\mathbb{R})$  et  $\nu$  une mesure de probabilité sur  $\mathbb{P}^{d-1}(\mathbb{R})$ , on dit que  $\nu$  est  $\mu$ -invariante si, notant  $Y$  une matrice aléatoire de loi  $\mu$  et  $\bar{U}_0$  une variable de loi  $\nu$ , la loi de  $Y \cdot \bar{U}_0$  est encore  $\nu$ . C'est-à-dire que pour toute fonction  $\psi$  continue bornée sur  $\mathbb{P}^{d-1}(\mathbb{R})$ ,

$$\iint \psi(A \cdot \bar{x}) d\mu(A) d\nu(\bar{x}) = \int \psi(\bar{x}) d\nu(\bar{x}). \quad (2.7)$$

Un théorème dû à Y.V. Prokhorov garantit que l'espace des probabilités sur  $\mathbb{P}^{d-1}(\mathbb{R})$  est un espace séquentiellement compact, au sens de la convergence étroite, dont le sous-ensemble constitué des mesure  $\mu$ -invariantes est une partie fermée non vide.

*Remarque 2.4.* Le théorème de Prokhorov énonce un critère de compacité faible dans l'espace des mesures de probabilités sur un ensemble séparable. Si cet ensemble est compact, ce qui est le cas de  $\mathbb{P}^{d-1}(\mathbb{R})$ , ce critère est automatiquement vérifié pour l'ensemble tout entier des mesures de probabilité sur ce compact. Le théorème de Prokhorov apparaît dans ce contexte comme la particularisation du théorème de Banach–Alaoglu.

**Théorème 2.5** (Furstenberg–Kifer, 1983 ; Hennion, 1983). *Supposons que  $\mu$  ne charge que les matrices inversibles, et que de plus, notant  $Y$  une matrice aléatoire de loi  $\mu$ , les variables  $\log^+ \|Y\|$  et  $\log^+ \|Y^{-1}\|$  sont intégrables. L'exposant caractéristique s'écrit dans ce cas*

$$\gamma(\mu) = \sup \left\{ \iint \log \frac{\|Au\|}{\|u\|} d\nu(\bar{u}) d\mu(A) : \nu \text{ probabilité } \mu\text{-invariante sur } \mathbb{P}^{d-1}(\mathbb{R}) \right\}. \quad (2.8)$$

*De surcroît il existe une mesure invariante satisfaisant l'égalité.*

H. Furstenberg et Y. Kifer dégagent une classe naturelle de mesures  $\mu$  pour lesquelles, quoiqu'il n'y ait pas unicité de la mesure invariante, les intégrales de l'équation (2.8) prennent toutes la même valeur  $\gamma(\mu)$ .

**Définition 2.6.** Sera dite irréductible toute mesure de probabilité sur  $GL_d(\mathbb{R})$  dont le support ne laisse stable aucun sous-espace non trivial de  $\mathbb{R}^d$ . Autrement dit  $\mu$  est irréductible lorsqu'aucun sous-espace  $V$  distinct de  $\{0\}$  ou  $\mathbb{R}^d$  ne peut satisfaire pour  $\mu$ -presque toute matrice  $A$ ,  $AV \subset V$ .

Cette classe de mesure autorise en outre des convergences directionnelles :

**Proposition 2.7.** *Fixons une mesure irréductible  $\mu$ , et une suite i.i.d.  $(Y_n)$  de loi  $\mu$ . Pour toute mesure  $\mu$ -invariante  $\nu$ , on a*

$$\gamma(\mu) = \iint \log \frac{\|Au\|}{\|u\|} d\nu(\bar{u}) d\mu(A). \quad (2.9)$$

Par ailleurs pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  non nul, la convergence suivante a lieu presque sûrement

$$\frac{1}{N} \log \|Y_N \dots Y_1 x\| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \gamma(\mu). \quad (2.10)$$

*Remarque 2.8.* La résolution de modèle d'Ising déterministe faisait apparaître la trace d'un produit de matrices, et non sa norme. Ce sera aussi le cas lors de l'étude de sa version désordonnée. Heureusement on peut montrer que pour une certaine classe de lois sur  $GL_d(\mathbb{R})$ , on a pour tous éléments  $x$  et  $y$  non nuls de  $\mathbb{R}^d$ , la convergence presque sûre

$$\frac{1}{N} \log |\langle Y_N \dots Y_1 x, y \rangle| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \gamma(\mu), \quad (2.11)$$

et celle de la trace

$$\frac{1}{N} \log |\mathrm{Tr}(Y_N \dots Y_1)| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \gamma(\mu). \quad (2.12)$$

Une généralisation de l'irréductibilité appelée irréductibilité forte, interdisant au support de la loi considérée de laisser stable une union finie d'espaces vectoriels, est une des conditions assurant ces convergences (voir [BL85] pour plus de détails). On ne développera pas ici ces conditions et pour simplifier on qualifiera de *comme il faut* une loi sur  $GL_d(\mathbb{R})$  réalisant ces deux dernières convergences.

### 2.3 La question de la régularité

L'irréductibilité fournit un bon cadre pour aborder la question la régularité de l'exposant caractéristique. Il s'agit d'examiner l'application

$$\mu \mapsto \gamma(\mu). \quad (2.13)$$

Nous nous limiterons dans un premier temps à l'examen de sa continuité, avec une approche séquentielle. Fixons une suite  $(\mu_k)$  de probabilité sur  $GL_d(\mathbb{R})$  convergeant étroitement vers une mesure  $\mu$ , dont le support est aussi supposé inclus dans  $GL_d(\mathbb{R})$ . Une hypothèse d'intégrabilité uniforme sera constamment faite :

$$\sup_{k \geq 0} \left[ \int \log^+ \|A\| \mathbf{1}_{\log^+ \|A\| > T} d\mu_k(A) \right] \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0. \quad (2.14)$$

Moyennant cette condition technique, quelles hypothèses sur  $\mu$  suffisent à assurer la convergence de  $\gamma(\mu_k)$  vers  $\gamma(\mu)$  ?

**Théorème 2.9.** *Si  $\mu$  est une mesure irréductible et  $(\mu_k)$  est une suite de mesures sur  $GL_d(\mathbb{R})$  convergeant étroitement vers  $\mu$  et satisfaisant la condition d'intégrabilité (2.14), alors la convergence des exposants caractéristiques a lieu :*

$$\gamma(\mu_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \gamma(\mu). \quad (2.15)$$



ESQUISSE DE PREUVE. Un schéma simple permet une approche systématique de ce genre de questions. Il repose sur l'utilisation du théorème 2.5 dans toute sa richesse en s'appuyant sur le fait, déjà mentionné, que l'espace des probabilités sur  $\mathbb{P}^{d-1}(\mathbb{R})$  est séquentiellement compact.

Ce dernier fait étant connu, on fixe une suite de mesures  $\mu_k$ -invariantes notées  $\nu_k$  et dont on note  $\nu$  un point d'accumulation : on vérifie que c'est une mesure  $\mu$ -invariante. La condition d'uniforme intégrabilité assure la convergence suivante, le long d'une extraction,

$$\iint \log \frac{\|Au\|}{\|u\|} d\nu_k(\bar{u}) d\mu_k(A) \longrightarrow \iint \log \frac{\|Au\|}{\|u\|} d\nu(\bar{u}) d\mu(A). \quad (2.16)$$

Observons déjà que le sort de semi-continuité supérieure est réglé par ce constat : on choisit les mesures  $\nu_k$  satisfaisant l'égalité

$$\gamma(\mu_k) = \iint \log \frac{\|Au\|}{\|u\|} d\nu_k(\bar{u}) d\mu_k(A), \quad (2.17)$$

et le théorème 2.5 assure que la limite dans (2.16) est inférieure à l'exposant caractéristique  $\gamma(\mu)$ . Pour ce qui concerne la semi-continuité inférieure, il ne reste plus qu'à trouver des hypothèses permettant l'existence d'un point d'accumulation  $\nu$  réalisant le supremum du théorème 2.5. Dans le cas qui nous intéresse, puisque  $\mu$  est irréductible, la proposition 2.7 nous informe que n'importe quelle mesure  $\nu$  fait l'affaire.  $\square$

Bien plus que la continuité, c'est l'analyticité de l'exposant caractéristique à laquelle nous nous intéressons. À la connaissance du présent auteur, un seul résultat s'attaquant à ce problème existe.

**Théorème 2.10** (Ruelle, 1979, [Rue79]). *Si l'on se donne une famille  $(U_p)_{p \geq 1}$  de matrices aléatoires (sur un espace probabilisé quelconque)  $d \times d$ , bornées, telles que  $\sup \|U_p\|_{L^\infty}^{1/p} < \infty$ , ainsi qu'une matrice déterministe  $M_0$  ayant une unique valeur propre de module maximal et telle que celle-ci soit réelle et simple, alors, notant  $\mu_\sigma$  la loi de la matrice*

$$M_\sigma = M_0 + \sum_{p \geq 1} \sigma^p U_p, \quad (2.18)$$

*l'application  $\sigma \mapsto \gamma(\mu_\sigma)$  est analytique réelle au voisinage de 0.*

Le théorème de D. Ruelle suggère que la matrice identité est l'archétype de matrices pour lesquelles l'exposant caractéristique n'est pas analytique. Ce fait est corroboré par les deux exemples suivants

*Exemple 2.11.* L'exposant de la matrice déterministe  $\begin{pmatrix} e^h & 0 \\ 0 & e^{-h} \end{pmatrix}$  est  $|h|$ .

*Exemple 2.12.* Donnons-nous une matrice aléatoire  $2 \times 2$  notée  $X$ , dont les coefficients sont indépendants et de loi gaussienne standard, ainsi qu'un réel  $\sigma$ . Dans l'article [DZ88], B. Derrida et N. Zanon prouvent que l'exposant caractéristique pour la loi  $\mu_\sigma$  de la matrice  $I_2 + \sigma M$  est

$$\gamma(\mu_\sigma) = \frac{1}{2} \int_{1/(2\sigma^2)}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad (2.19)$$

qui définit une fonction de  $\sigma$  non analytique en 0.

Ces théorèmes de régularité, s'ils sont mathématiquement intéressants, ne s'appliqueront pas dans les cas qui nous intéressent puisque les lois des matrices qui apparaîtront dans le modèle d'Ising désordonné ne satisferont pas à leurs hypothèses. Toutefois ils illustrent l'importance de la formule intégrale de l'exposant caractéristique dans la recherche d'irrégularités. En outre ils permettent d'identifier facilement le point où la rupture d'analyticité a lieu, c'est-à-dire la température critique. Pour être plus précis il faut retenir de ce paragraphe l'heuristique suivante, qui a toutefois un support théorique encore peu fourni : au voisinage des lois irréductibles, l'exposant caractéristique est régulier. Au contraire pour des perturbations de matrices diagonales

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

une rupture d'analyticité a lieu lorsque  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ont la même intensité, typiquement si  $E[\lambda_1] = E[\lambda_2]$  ou si  $E[\log \lambda_1] = E[\log \lambda_2]$ .

### 3 Modèle(s) d'Ising désordonné(s)

Revenons sur la motivation du modèle d'Ising. Il s'agissait de modéliser des atomes de fer arrangés en un solide aimanté. L'introduction d'un désordre va notamment permettre d'étudier le cas où les atomes ne sont pas parfaitement placés sur un réseau carré. En utilisant des coefficients de couplage aléatoire, on modélise par exemple des distances fluctuantes entre les particules. C'est précisément ce raffinement qui sera considéré dans les deux versions bidimensionnelles proposées. Mais tout d'abord, revenons sur le modèle unidimensionnel.

#### 3.1 Le modèle d'Ising désordonné unidimensionnel

Introduisons une version générale du modèle d'Ising désordonné unidimensionnel : on suppose que les coefficients de couplage  $J_{i,j}$ , qui maintenant diffèrent pour chaque arête, sont indépendants et de même loi pour chaque arête et qu'il en va de même pour le champ extérieur  $h_i$  pour chaque site  $i$ . Pour reprendre les termes de l'introduction, l'échelle de temps longue est celle qui voit évoluer les coefficients de couplage et le champ magnétique extérieur, tandis que l'échelle de temps courte est celle qui s'intéresse aux spins des particules. La méthode des matrices de transfert peut encore être utilisée dans ce cas : on obtient l'expression suivante de la fonction de partition.

$$Z_{N,\beta}(\omega) = \text{Tr}(L_1(\beta, \omega) \dots L_N(\beta, \omega)), \quad (3.1)$$

où  $L_i$  est la matrice de transfert (aléatoire) au site  $i$  :

$$L_i(\beta) = \begin{pmatrix} e^{\beta(h_i + J_{i,i+1})} & e^{\beta(h_i - J_{i,i+1})} \\ e^{\beta(-h_i - J_{i,i+1})} & e^{\beta(-h_i + J_{i,i+1})} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Ces matrices sont indépendantes et de même loi. On a ainsi

$$f(\beta, \omega) = -\frac{1}{\beta} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \text{Tr}(L_1(\beta, \omega) \dots L_N(\beta, \omega)). \quad (3.3)$$

Pour peu que la loi  $\mathcal{L}_\beta$  des matrices  $L_i(\beta)$  soit comme il faut (voir remarque 2.8) — ce qui est le cas par exemple lorsque la loi du champ magnétique, ou celle des coefficients de couplage a un support infini —, l'énergie libre par spin est déterministe :

$$f(\beta, \omega) = -\frac{1}{\beta} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} E[\log \|L_1(\beta) \dots L_N(\beta)\|]. \quad (3.4)$$

Elle ne dépend que de la loi  $\mathcal{L}_\beta$  : écrivons-la avec les notations de la partie 2

$$f(\beta) = -\frac{1}{\beta} \gamma(\mathcal{L}_\beta). \quad (3.5)$$

Quoique le modèle soit unidimensionnel, son comportement est peu connu. Plusieurs physiciens se sont penchés sur diverses asymptotiques de l'énergie libre. Citons par exemple l'article [DH83] de B. Derrida et H. Hilhorst, dans lequel les auteurs s'intéressent au comportement de l'énergie libre dans le cas de coefficients de couplage déterministes «très grands». Commençons par écrire l'énergie libre sous une autre forme : si l'on factorise  $e^{\beta(h_i + J_{i,i+1})}$  dans la matrice  $L_i(\beta)$ , on obtient

$$f(\beta) = -\frac{1}{\beta} (E[h + J] + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} E[\log \|M_1(\beta) \dots M_N(\beta)\|]), \quad (3.6)$$

où

$$M_i(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & e^{-2\beta J_{i,i+1}} \\ e^{-2\beta J_{i,i+1}} e^{-2\beta h_i} & e^{-2\beta h_i} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

La proposition de B. Derrida et H. Hilhorst s'écrit sous la forme suivante.

**Conjecture 3.1** (Derrida – Hilhorst, 1983). *Si l'on dispose d'une famille de variables aléatoires i.i.d.  $(Z_i)$  à valeurs dans une partie compacte de  $]0, +\infty[$  et satisfaisant  $E[Z_1] > 1$ , et  $E[\log Z_1] < 0$ , alors, notant pour tout  $\epsilon > 0$*

$$\gamma_\epsilon = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \left\| \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon Z_N & Z_N \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon Z_1 & Z_1 \end{pmatrix} \right\|, \quad (3.8)$$

on a l'équivalent en 0

$$\gamma_\epsilon \sim C \epsilon^{2\alpha}, \quad (3.9)$$

$C$  désignant une constante positive, et  $\alpha$  l'unique élément de  $]0, 1[$  tel que  $E[Z^\alpha] = 1$ .

*Remarques 3.2.* – Lorsque  $\epsilon$  tend vers 0, la matrice  $M_i$  tend à être diagonale, de termes diagonaux 1 et  $Z_i$ . La conjecture se concentre sur le cas où ces deux termes sont de même intensité, dans un sens intermédiaire à ceux proposés à l'issue de la partie 2.

– Le cas, encore plus critique, où  $E[h] = 0$  donne lui un comportement asymptotique du type  $1/|\log \epsilon|$ .

Dans les termes du modèle d'Ising, la conjecture s'exprime ainsi :

**Conjecture 3.3** («Corollaire»). *On suppose que les coefficients de couplages sont déterministes, et tous identiques. Si la loi de  $h$  a un support compact et vérifie  $E[h] >$*

0 et  $E[e^{-2h}] > 1$ , alors, notant  $\alpha$  l'unique élément de  $]0, 1[$  tel que  $E[e^{-2\alpha h}] = 1$ , on a l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que, lorsque  $J$  tend vers l'infini,

$$\gamma(\mathcal{L}_1) - (J + E[h]) \sim Ce^{-4\alpha J} \quad (3.10)$$

Si  $E[h] = 0$ , cette fois

$$\gamma(\mathcal{L}_1) - (J + E[h]) \sim \frac{C}{J} \quad (3.11)$$

*Remarque 3.4.* Physiquement, on préférera une description plus réaliste dans laquelle le coefficient de couplage est fixe, mais le champ extérieur tend vers 0.

## 3.2 Modèle de McCoy et Wu

Si le modèle d'Ising désordonné unidimensionnel se traite précisément de la même manière que son analogue déterministe, ce n'est pas forcément le cas pour le modèle d'Ising bidimensionnel. La résolution de L. Onsager exploite à fond la symétrie du réseau. Les physiciens B. M. McCoy et T. T. Wu développent cependant en 1968, dans l'article [MW68], une version désordonnée du modèle qui conserve un maximum de symétries afin de rester dans le cadre d'application de la méthode de L. Onsager. Ils proposent le modèle d'Ising à champ nul suivant. Les coefficients de couplage verticaux sont déterministes et prennent tous la même valeur  $J_V$ . Les coefficients de couplage horizontaux sont aléatoires indépendants et de même loi selon chaque ligne, mais sont répétés sur toute la colonne correspondante (figure 2). Soyons plus explicites. Donnons-nous un réel positif  $J_V$ , et une suite  $(K_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  de variable aléatoire positives, *i.i.d.* dont nous noterons  $\mathcal{J}$  la loi. On pose :

$$\text{pour tout } (i, j) \in \mathbb{Z}^2, \quad \begin{cases} J_{(i,j),(i,j+1)}(\omega) = J_V \\ J_{(i,j),(i+1,j)}(\omega) = K_i(\omega) \end{cases} \quad (3.12)$$

	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	
$J_V$	$J_V$	$J_V$	$J_V$	$J_V$	$J_V$
	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	
$J_V$	$J_V$	$J_V$	$J_V$	$J_V$	$J_V$
	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	
$J_V$	$J_V$	$J_V$	$J_V$	$J_V$	$J_V$
	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	
$J_V$	$J_V$	$J_V$	$J_V$	$J_V$	$J_V$
	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	

FIGURE 2 – Les coefficients de couplage du modèle de McCoy et Wu.

Cette définition assure l'invariance de chacune des réalisations par translation verticale, et leur invariance en loi par translation horizontale. Un calcul similaire à celui

développé par L. Onsager fournit l'expression explicite de l'énergie libre par spin. Introduisons à cet effet les matrices

$$P_n(\omega, \theta, \beta) = \begin{pmatrix} a(\theta)^2 + b(\theta)^2 & a(\theta)z_n(\omega)^2 \\ a(\theta) & z_n(\omega)^2 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

On aura préalablement défini

$$u_1 = \tanh(\beta J_V), \quad z_n(\omega) = \tanh(\beta K_n(\omega)), \quad (3.14)$$

et

$$a(\theta) = \frac{-2u_1 \sin \theta}{|1 + u_1 e^{i\theta}|^2}, \quad b(\theta) = \frac{(1 - u_1^2)}{|1 + u_1 e^{i\theta}|^2}, \quad (3.15)$$

$\theta$  étant un paramètre variant sur  $[-\pi, \pi]$ . B. M. McCoy et T. T. Wu montrent que l'énergie libre par spin s'écrit avec ces notations

$$f(\omega, \beta) = -\frac{1}{\beta} \left\{ \Phi(\beta) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathbf{T}} P_N(\omega, \theta, \beta) \dots P_1(\omega, \theta, \beta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right\}, \quad (3.16)$$

$\Phi$  désignant la fonction analytique

$$\Phi(\beta) = \log(2 \cosh(\beta J_V)) + E[\log(2 \cosh(\beta K_1))] + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \log |1 + u_1 e^{i\theta}|^2. \quad (3.17)$$

Baptisons  $\mathcal{P}_\beta(\theta)$  la loi des matrices  $P_n(\omega, \theta, \beta)$ . La théorie des produits de matrices aléatoires garantit que moyennant quelque hypothèse portant sur la loi  $\mathcal{J}$ , on a l'égalité

$$\gamma(\mathcal{P}_\beta(\theta)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathbf{T}} P_N(\omega, \theta, \beta) \dots P_1(\omega, \theta, \beta) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (3.18)$$

pour tout  $\theta \in ]-\pi, \pi[ - \{0\}$ . Chercher une transition de phase du modèle de McCoy–Wu, c'est étudier l'analyticité de l'application

$$\beta \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} \gamma(\mathcal{P}_\beta(\theta)) d\theta. \quad (3.19)$$

Dans l'article de 1968, B. M. McCoy et T. T. Wu parviennent à identifier la transition de phase de leur modèle.

**Conjecture 3.5** (McCoy – Wu, 1968). *Pour le modèle décrit plus haut, pour peu que la loi  $\mathcal{J}$  ne soit pas déterministe, il y a une transition de phase  $C^\infty$  à l'unique température  $\beta_c$  satisfaisant la relation*

$$2\beta_c J_V + E[\log \tanh(\beta_c K_1)] = 0. \quad (3.20)$$

*C'est-à-dire que l'énergie libre est une fonction  $C^\infty$  de  $\beta$  mais présente une rupture d'analyticité en  $\beta_c$ .*

*Remarques 3.6.* La conjecture amène plusieurs observations

- Lorsque la loi  $\mathcal{J}$  est déterministe, on retrouve la température critique du modèle déterministe non-isotrope, démontrée par L. Onsager. En revanche le comportement critique est radicalement différent : ici aucune dérivée de l'énergie libre ne présente de discontinuité.
- Si l'on se fie à l'heuristique menée à la fin de la section 2, le comportement critique est censé se produire pour une matrice diagonale, c'est-à-dire pour  $\theta = 0$ , et lorsque les deux coefficients diagonaux ont la même intensité, autrement dit lorsque  $\log b(0) = E[\log \tanh \beta K_1]$  : c'est précisément la relation que vérifie la température critique.
- L'auteur de ces lignes n'a connaissance d'aucun résultat mathématique qui aurait été énoncé à propos de ce modèle. En particulier les hypothèses sous lesquelles la conjecture serait vérifiée sont floues.

### 3.3 Conjecture de Dotsenko

L'idée la plus naturelle pour définir un modèle d'Ising désordonné bidimensionnel est de choisir des coefficients de couplage indépendants et identiquement distribués. Cette fois, l'absence totale de symétrie (pour une réalisation donnée de l'environnement) empêche l'utilisation de la méthode de L. Onsager. Le physicien V. Dotsenko parvient toutefois à identifier la nature de la transition de phase.

**Conjecture 3.7** (Dotsenko, 1982, [DD82]). *Le modèle d'Ising bidimensionnel à coefficients de couplage i.i.d. présente une transition de phase du type suivant : au voisinage de la température critique,*

$$f''(\beta) \approx \log \frac{1}{\log |\beta - \beta_c|} \quad (3.21)$$

*Remarque 3.8.* La comparaison des résultats de L. Onsager, M.B. McCoy–T.T. Wu, et V. Dotsenko a de quoi surprendre. La transition de phase pour le modèle déterministe est du type  $\log |\beta - \beta_c|$ . L'introduction d'un désordre partiel (modèle de McCoy–Wu) régularise l'énergie libre, qui présente alors une transition de phase  $C^\infty$ . Tandis qu'un désordre «total», alors qu'on pourrait s'attendre à ce qu'il engendre une énergie libre d'autant plus régulière, ramène au contraire une transition de phase fortement marquée, du type  $\log |\log |\beta - \beta_c||$  en l'occurrence.

## Références

- [Bel54] Richard Bellman. Limit theorems for non-commutative operations. *Duke Mathematical Journal*, 21 :491–500, 1954.
- [BL85] Philippe Bougerol and Jean Lacroix. *Products of random matrices with application to Schrödinger operators*. Boston MA ; Basel ; Stuttgart : Birkhäuser, 1985.
- [DD82] Vladimir Dotsenko and Viktor Dotsenko. Two-point correlation function of the 2D Ising model with impurity lattice bonds. *Journal of Physics C : Solid State Physics*, 15 :55–563, 1982.

- [DH83] Bernard Derrida and Henk Hilhorst. Singular behaviour of certain infinite products of random  $2 \times 2$  matrices. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 16 :2641–2654, 1983.
- [DZ88] Bernard Derrida and N. Zanon. Weak disorder expansion of Liapunov exponents in a degenerate case. *Journal Of Statistical Physics*, 50 :509–528, 1988.
- [FK60] Hillel Furstenberg and Harry Kesten. Products of random matrices. *The Annals of Mathematical Statistics*, 31 :457–469, 1960.
- [FK83] Hillel Furstenberg and Yuri Kifer. Random matrix products and measures on projective spaces. *Israel Journal of Mathematics*, 46 :12–32, 1983.
- [Fur63] Hillel Furstenberg. Non-commuting random products. *Transactions of American Mathematical society*, 081 :377–428, 1963.
- [Hen84] Hubert Hennion. Loi des grands nombres et perturbations pour des produits réductibles de matrices aléatoires indépendantes. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 67 :265–278, 1984.
- [MW68] Barry M. McCoy and Tai Tsun Wu. Theory of a two-dimensional Ising model with random impurities. *Physical Review*, 176 :631–643, 1968.
- [Ons44] Lars Onsager. Two-dimensional model with an order-disorder transition. *Physical Review*, 65 :117–149, 1944.
- [Rue79] David Ruelle. Analyticity properties of the characteristic exponents of random matrix products. *Advances in Mathematics*, 32 :68–80, 1979.