# Géométrie en caractéristique 1 et Hyperanneaux

## Sommaire



## 1 Géométrie sur $\mathbb{F}_1$ ?

Avant de rentrer dans le vif du sujet, et afin de présenter un peu la philosophie dans laquelle tous ceci se place, faisons une rapide présentation, la plus élémentaire possible, de ce qu'on appelle géométrie sur $\mathbb{F}_1$, et pourquoi est-ce-qu'on l'étudie.

En 1940 André Weil construit une sorte d'analogue de la fonction $\zeta$ de Riemann associée aux courbes algébriques sur un corps fini, et démontre "l'hypothèse de Riemann" pour ces fonctions (dans le cas des courbes projectives). Ces résultats seront ensuite approfondis et généralisés à des variétés projectives quelconques, fournissant de plus une interprétation des zéros de ces fonctions $\zeta$ comme des valeur propres d'un certain endomorphisme induit par le morphisme de Frobenius de la courbe et agissant sur les espaces de cohomologie de la courbe.

Ce qu'on aimerait pouvoir faire maintenant, c'est de transposer cette technique pour prouver l'hypothèse de Riemann elle même. Bien entendu ce n'est pas si simple : les fonctions $\zeta$ étudiées par Weil sont des objets combinatoires beaucoup plus simples que la fonction $\zeta$ de Riemann, il s'agit de simple fractions rationelles en $q^s$. L'idée de considérer une "courbe sur un corps de caractérisque 1" est alors apparue. Ainsi l'objectif est maintenant d'une part de définir ce qu'est une courbe sur le corps à un élément, puis de leur associer une fonction $\zeta$, ensuite de trouver une courbe projective sur ce corps dont la fonction $\zeta$ serait la fonction de Riemann (on note généralement $\overline{\mathrm{Spec}\mathbb{Z}}$ une telle courbe éventuelle), et enfin d'essayer d'appliquer les arguments utilisés en caractéristique $p$ dans ce contexte.

On va donner un exemple de ce que pourrait être ce fameux cadre de la géométrie sur $\mathbb{F}_1$. Cette construction est développée plus en détail dans [CC06] . Dans la suite, on va désigner par le terme monoïde uniquement les monoïdes commutatifs possédant un élément neutre 1, et un élément absorbant 0. On peut alors généraliser un grand nombre de notions de l'algèbre commutative aux monoïdes en se contentant d'ignorer purement et simplement la structure additive des anneaux. Par exemple, si $\mathcal{M}$ est un monoïde alors par exemple :

- Un $\mathcal{M}$-module va être un ensemble, avec un point 0 marqué et une action de $\mathcal{M}$, 1 agissant par l'identité et 0 envoyant tout les éléments sur le point 0.
- Un idéal de $\mathcal{M}$ va être un sous $\mathcal{M}$-Module de $\mathcal{M}$.
- Un idéal premier un idéal dont le complémentaire est stable par multiplication, et $\mathrm{Spec}\mathcal{M}$ l'ensemble des idéaux premiers.
- Si $m \in \mathcal{M}$ on peut définir $D(m) = \{\rho \in \mathrm{Spec}\mathcal{M} | m \notin \rho\}$ et les $D(m)$ forment une base d'ouvert d'une topologie sur $\mathrm{Spec}\mathcal{M}$.

- On peut définir un produit tensoriel de monoïdes, $\mathcal{M}[X]$ et $\mathcal{M}[m^{-1}]$
- On peut mettre sur Spec$\mathcal{M}$ un faisceau structural de la même façon que pour les anneaux.

Et on va aussi définir un morphisme d'un monoïde $\mathcal{M}$ dans un anneau $A$ comme étant un morphisme de monoïdes de $\mathcal{M}$ dans $A$ vu comme monoïde, et convenir qu'il n'existe aucun morphisme de $A$ dans $\mathcal{M}$. Ce qui permet de voir les monoïdes et les anneaux comme dans une même catégorie, et de généraliser la notion de schéma à des objets qui vont être des recollements de spectres de monoïdes et de spectres d'anneaux.

Ainsi une une bonne partie de la géométrie algébrique va se généraliser à ce cadre. On peut notamment associer à certaines variétés (il faut au minimum qu'elle soit noethérienne) de ce type une fonction $\zeta$. Dans ce cadre, ce qu'on note $\mathbb{F}_1$ est alors juste le monoïde $\{0,1\}$, l'objet initial de toute cette théorie. Malheureusement, la courbe $\overline{\text{Spec}\mathbb{Z}}$ qu'on recherche ne rentre pas dans ce cadre. Mais il existe de nombreuses autres façons de généraliser la constructions des schémas et on espère toujours en trouver une qui permettra de réaliser cette fameuse courbe $\overline{\text{Spec}\mathbb{Z}}$.

## 2 Espace des classes d'adèles et hyperanneaux

Avant de définir ce qu'est un hyperanneau commençons par donner un des exemples qui aurait pu motiver l'utilisation d'hyperanneaux (ce n'est pas du tout l'origine historique de la notion, mais c'est l'objet qui nous amène à étudier ces structures aujourd'hui) : soit $\mathbb{K}$ un corps global (c'est à dire une extension finie de $\mathbb{Q}$ ou une extension finie de $\mathbb{F}_q(X)$). Une place de $\mathbb{K}$ est une classe d'équivalence de valuation non triviale sur $\mathbb{K}$, on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des places de $\mathbb{K}$, et pour tout $p \in \mathcal{P}$ on note $\mathbb{K}_p$ le complété de $\mathbb{K}$ pour la valuation $p$. On définit $\mathbb{A}_\mathbb{K}$ l'anneau des adèles de $\mathbb{K}$ par :

$$\mathbb{A}_\mathbb{K} = \left\{ (x_p) \in \prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{K}_p \text{ tel que } |x_p| \leqslant 1 \text{ pour toute les valuations sauf peut-être un nombre fini} \right\}.$$

On munit $\mathbb{A}_\mathbb{K}$ de la topologie dont une base de voisinage de 0 est donnée par les ensembles de la forme $\prod U_p$ où $U_p$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{K}_p$ et est égal à $\{z||z| \leq 1\}$ pour toute place sauf peut-être un nombre fini.

On a alors une injection :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \hookrightarrow & \mathbb{A}_\mathbb{K} \\ x & \mapsto & (x)_{p\in\mathcal{P}} \end{array},$$

qui fait de $(\mathbb{K},+)$ un sous groupe discret et co-compact de $\mathbb{A}_\mathbb{K}$.

Le groupe multiplicatif $\mathbb{K}^*$ agit naturellement sur $\mathbb{A}_\mathbb{K}$ et l'espace des orbites $\mathbb{H}_\mathbb{K} = \mathbb{A}_\mathbb{K}/\mathbb{K}^*$ est un espace extrêmement riche et subtil qui apparaît assez naturellement à plusieurs occasions. Notamment dans [Con99] où A.Connes met en évidence qu'il permet de donner une interprétation spectral des zéros non triviaux de la fonction $\zeta$ et interprète les formules explicites sur la répartition des nombres premiers comme des formules de traces en géométrie non commutative.

Cet espace est équipé d'un certain nombre de structures : c'est un monoïde, il possède une topologie, une fonction valuation etc... mais jusqu'à il y a peu on ne connaissait aucune structure sur $\mathbb{H}_\mathbb{K}$ qui traduirait la structure additive de $\mathbb{A}_\mathbb{K}$ (ni même finalement celle de $\mathbb{K}$). Voilà pourtant ce qu'on peut faire relativement naturellement.

Si on ce donne $u$ et $v$ on peut leur choisir des relèvements $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ dans $\mathbb{A}_\mathbb{K}$, calculer leur somme $\tilde{u}+\tilde{v}$ et regarder l'image de l'adèle obtenue dans $\mathbb{H}_\mathbb{K}$. Bien entendu comme $\mathbb{K}^*$ n'est pas un sous groupe (additif) de $\mathbb{A}_\mathbb{K}$ la somme obtenue va dépendre du choix des relèvements. Ainsi la seule opération raisonnable qu'on peut construire de cette façon va à un deux éléments $u$ et $v$ de $\mathbb{H}_\mathbb{K}$ associer tout un ensemble d'éléments de $\mathbb{H}_\mathbb{K}$ : tous ceux qu'on peut obtenir avec la construction précédente en faisant varier $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$. Il s'avère que ce type de structure (une addition dont le résultat n'est pas un élément mais tout un ensemble d'éléments ) a déjà été étudié par Krasner dans le passé, il a réussit à extraire un bon système d'axiomes pour de telle structure dans [Kra57], donnons quelques définition :

Définition : Un *hypergroupe* est un ensemble $H$ équipé d'une opération $+ : H \times H \to \mathcal{P}(H)$ et d'un élément $0 \in H$ tel que pour tout $x, y, z$ dans H :

1. $x + y = y + x$
2. $0 + x = x$
3. $(x + y) + z = x + (y + z)$
4. Il existe un unique $t$ (qu'on note $-x$) tel que $0 \in x + t$
5. $x \in y + z \Rightarrow z \in x - y$

Bien entendu si $A$ est une partie de $H$ et $x$ un élément de $H$ alors $A + x$ désigne la réunion de $a + x$ pour $a$ parcourant $A$ et si $B$ est une autre partie de $H$ alors $A + B$ désigne la réunion des $a + b$ pour $a$ et $b$ parcourant $A$ et $B$.

Définition : Un *hyperanneau* $(R, +, .)$ est un ensemble non vide équipé d'une hyperopération $+$ et d'une multiplication . tel que :

1. $(R, +)$ est un hypergroupe
2. $(R, .)$ est un monoïde possédant un élément neutre 1 et ayant 0 pour élément absorbant.
3. $\forall r, s, t \in R : r(s + t) = rs + rt$ et $(s + t)r = sr + tr$.

Un hyperanneau est dit commutatif si la multiplication est commutative. Un hypercorps est un hyperanneau dans lequel tout élément non nul a un inverse pour la multiplication. Les anneaux et les corps sont des cas particulier d'hyperanneaux et d'hypercorps.

Définition : Un *morphisme* entre deux hyperanneau $H$ et $H'$ est une application $f$ de $H$ dans $H'$ telle que :

1. $\forall a, b \in H, f(ab) = f(a)f(b)$
2. $\forall a, b \in H, f(a + b) \subset f(a) + f(b)$

**Proposition :** *L'hyperopération construite sur $\mathbb{H}_\mathbb{K}$ précédemment en fait un hyperanneau commutatif, et la projection canonique $\mathbb{A}_\mathbb{K} \to \mathbb{H}_\mathbb{K}$ est un morphisme.*

La démonstration est immédiate et fonctionne bien sûr pour n'importe quel anneau et n'importe quel sous groupe de son groupe multiplicatif.

Etant donné que $\mathbb{K}$ est stable par addition, on remarque que dans $\mathbb{H}_\mathbb{K}$ on a la relation suivante :

$$1 + 1 = \{0, 1\}$$

En effet, si on prend deux relèvement de 1, ie des éléments de $\mathbb{K}^*$ leur somme vaut soit 0 soit c'est élément de $\mathbb{K}^*$ et donc elle vaut soit 0 soit 1 dans $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}$. Ainsi, le sous ensemble $0, 1$ de $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}$ forme un sous-hypercorps de $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}$. Cet hypercorps s'appelle l'hypercorps de Krasner, on le note $\mathbf{K}$. Malgrès qu'il ai l'air d'un objet extrêmement simple, il a énormément de propriétés extrêmement subtiles qu'on va étudier un peu dans la section suivante. On peut déjà noter le résultat suivant :

**Proposition :** *Pour tout anneau $A$ il y a une bijection de $Hom(A, \boldsymbol{K})$ dans $Spec(A)$ donnée par $f \mapsto \ker f$*

Il est naturel de définir un ideal d'un hyperanneau comme étant une partie $I$ de $A$ tel que pour tout $x, y \in I$, $a \in A$ on a $a.x \in I$ et $x + y \subset I$ et un idéal premier de $A$ comme un idéal de $A$ vérifiant $\forall x, y \in A, xy \in I \Rightarrow x \in I$ ou $y \in I$. Le résultat précédant peut alors s'étendre à n'importe quel hyperanneau $A$.

On peut aussi (cf [PCR87] ) mettre sur le spectre (l'ensemble des idéaux premiers) d'un hyperanneau $A$ une topologie et un faisceau d'hyperanneaux dont les tiges sont des hyperanneaux locaux (ie ayant un unique ideal maximal). On remarquera cependant qu'un hyperanneau n'est pas toujours isormophe aux sections globales de son spectre.

Ainsi Spec $\mathbf{K}$ est l'espace a un seul point qui s'envoie de façon unique sur n'importe quel point de l'espace topologique sous jacent de n'importe quel “schéma”.

# 3 Espace vectoriel et algèbre sur l'hypercorps de Krasner

Un espace vectoriel sur l'hypercorps de Krasner est un hypergroupe équipé d'une action de $\mathbf{K}$. Étant donné qu'on va de façon naturelle imposer que 1 agisse par l'identité et que 0 agisse en envoyant tous les éléments sur 0, il s'agit en réalité juste d'un hypergroupe tel que pour tout $x$ on ai $\{0, x\} \subset x + x$. On va s'intéresser dans la suite à des espaces vectoriel stricts sur $\mathbf{K}$, c'est à dire des hypergroupes vérifiant la condition plus forte $x + x = \{0, x\}$.

Il s'avère que la notion de structure de $\mathbf{K}$-espace vectoriel strict sur un ensemble est en fait équivalente à la notion beaucoup plus classique et largement étudiée de géométrie projective (dont toute les droites possèdent au moins 4 points). Tâchons d'énoncer ceci plus précisément.

Définition : Une géométrie projective sur un ensemble $E$ est la donnée d'un ensemble $\mathcal{L}$ de partie de $E$ appelées les droites de $E$ tel que :

1. $\forall x \neq y \in E,\ \exists! L(x, y) \in \mathcal{L}$ t.q. $x, y \in L(x, y)$
2. $\forall x \neq y \in E, z \notin L(x, y)$ on a $\ \forall t \in L(x, y) - \{x\}, \forall u \in L(x, z) - \{x\}, L(t, u) \cap L(y, z) \neq \varnothing$
3. Toute droite contient au moins trois éléments.

Le premier axiome énonce que par deux points passe une et une seule droite, et le deuxième exprime le fait que deux droites incluse dans le même plan projectif se coupent forcement.

On a alors le résultat suivant :

**Théorème :** *Soit $X$ un $\boldsymbol{K}$-espace vectoriel. Alors poser $L(x,y) = (x+y) \cup \{x,y\}$ définit une géométrie projective sur $X - \{0\}$ dont toutes les droites contiennent au moins 4 points. Réciproquement, si $X$ est un ensemble muni d'une géométrie projective dont toute droite contient au moins 4 points, alors l'hyperopération sur $X \cup \{0\}$ défini par :*

$$x + y = \begin{cases} L(x,y) - \{x,y\} & \text{si } x \neq y \in X \\ \{x, 0\} & \text{si } x = y \\ \{x\} & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

*fait de $X \cup \{0\}$ un $\boldsymbol{K}$-espace vectoriel strict. Ces constructions induisent une correspondances bijective*[1] *entre les géométries projectives dont toute droite contiens au moins 4 points et les $\boldsymbol{K}$-espaces vectoriels stricts.*

Ainsi si on définit une extension de corps de $\mathbf{K}$ comme étant un hypercorps (commutatif) contenant $\mathbf{K}$ comme sous corps (ie tel que $1 + 1 = \{0, 1\}$ ), la donnée d'une extension finie de $\mathbf{K}$ correspond à celle d'un groupe commutatif $G$ équipé d'une géométrie projective (dont toute droite contient au moins 4 points) telle que la multiplication par un élément de $G$ préserve les droites. De tels objets s'appellent des espaces projectifs homogènes et ils ont déjà beaucoup été étudiés, et on sais obtenir la classification suivante (cf [CC10]) :

**Théorème :** *Soit $L$ une extension fini de $\boldsymbol{K}$, on est alors dans l'un des trois cas (disjoint) suivant :*
*- $L$ est unidimensionnel, c'est à dire qu'il existe un groupe $G$ tel que $L = G \cup \{0\}$, la structure additive sur $L$ venant de la géométrie sur $G$ admettant $G$ tout entier comme unique droite (on note $\boldsymbol{K}[G]$ l'extension ainsi obtenue)*
*- $L$ est de la forme $\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q^*$ (espace des orbites de $\mathbb{F}_{q^n}$ sous l'action multiplicative de $\mathbb{F}_q^*$).*
*- $L^*$ est un plan projectif non-désarguésien.*

Un plan projectif est un espace projectif engendré par trois points, et un espace projectif Non-désarguésien est un espace projectif dans lequel le théorème de Désargues n'est pas vérifié, plus précisément :

Définition : une Géométrie projective est dite désarguésienne si elle vérifie la propriété suivante : Si $d_a$,$d_b$ et $d_c$ sont trois droites concourantes et coplanaires, $A, A' \in d_a$, $B, B' \in d_b$, $C, C' \in d_c$ alors les trois points d'intersections des droites $(AB)$ et $(A'B')$, $(AC)$ et $(A'C')$, $(BC)$ et $(B'C')$ sont alignés. Dans le cas contraire elle est dite non-désarguésienne.

À l'heure actuelle, on ignore si le dernier cas de cette classification est ou non possible. Hall avait conjecturé dans [HJ47] que c'était impossible si $L^*$ est cyclique, et ceci est toujours un problème ouvert. Il semblerait que le cas général (c'est à dire de savoir s'il existe ou non un plan projectif homogène non-désarguésien) n'ait pas été étudié pour l'instant.

On remarque aussi le phénomène suivant : si $p$ est un nombre premier ne divisant pas le cardinal de $G$ alors $x \mapsto x^p$ est un automorphisme de $\mathbf{K}[G]$, si $p$ est le nombre premier divisant $q$ alors $x \mapsto x^p$ est un automorphisme de $\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q^*$. Enfin Hall a prouvé dans [HJ47] que dans le troisième cas, si on note $(n+1)$ le cardinal de n'importe quel droite, et que $L^*$ est cyclique, alors si $p$ est un diviseur de $n$, $x \mapsto x^p$ est encore un automorphisme de $L$. J'ai observé que la démonstration de Hall pouvait s'étendre au cas où $L^*$ n'est pas nécessairement cyclique. J'ai ensuite donné une

1. Cela devient une équivalence de catégorie si on restreint la notion de morphisme de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels aux morphismes injectifs

preuve directe (n'utilisant pas le théorème de classification qui est assez difficile) et sensiblement plus courte que celle de Hall du résultat suivant :

**Théorème :** *Si $L$ est une extension finie de $K$, que $n+1$ désigne le cardinal de n'importe quelle droite de $L^*$ et que $p$ est un diviseur de $n$ alors $x \mapsto x^p$ est un automorphisme de $L$.*

On peut interpréter ceci comme l'existence d'un analogue du morphisme de Frobenius sur les extensions finis de $\mathbf{K}$.

**Démonstration :** On admettra quelques résultats combinatoires classiques sur les géométries projectives. Notamment on rappelle que le cardinal d'un espace projectif fini est $1+n+...+n^d$ où $d$ est la dimension de l'espace et $n$ le cardinal d'une droite quelconque moins un. Notons $G = L^*$ et considérons $\mathbb{Z}[G]$ l'algèbre de groupe de $G$, on note $e_g$ l'élément de $\mathbb{Z}[G]$ correspondant à $g$. On note aussi $\phi$ l'automorphisme de $\mathbb{Z}[G]$ induit par le morphisme $x \mapsto x^{-1}$.

Si $P$ est une partie quelconque de $L^*$, posons

$$\theta_P = \sum_{h \in P} e_h \in \mathbb{Z}[G].$$

On fait alors l'observation suivante, pour tout $P, P' \subset L^*$

$$\theta_P.\phi(\theta_{P'}) = \sum_{p\in P, p'\in P'} e_{p.p'^{-1}} = \sum_{g\in L^*} |\{(p,p') \in P \times P' | g = p.p'^{-1}\}|.e_g,$$

finalement :

$$\theta_P.\phi(\theta_{P'}) = \sum_{g\in L^*} |P \cap g.P'|.e_g.$$

Ainsi, si $H$ est un hyperplan et $d$ une droite, comme $H \cap g.d$ est de cardinal 1 ou $n+1$ (ie toujours congru à 1 modulo $p$) on a :

$$\theta_H.\phi(\theta_d) \equiv T \bmod p,$$

où l'on a posé $T = \sum_{g\in G} e_g$.

Ainsi :

$$(\theta_H)^p.\phi(\theta_d) \equiv (\theta_H)^{p-1}.T \bmod p.$$

Or

$$\theta_H.T = \sum_{h\in H} e_h.T = (n^{d-1} + ... + n + 1)T \equiv T \bmod p,$$

et

$$(\theta_H)^p = \left(\sum e_h\right)^p \equiv \sum e_h^p \equiv \theta_{F_p(H)} \bmod p,$$

d'où

$$\theta_{F_p(H)}\phi(\theta_d) \equiv T \bmod p.$$

On en conclut que le cardinal de l'intersection de $F_p(H)$ avec n'importe quelle droite de $L^*$ est congrue à 1 modulo $p$, en particulier $F_p(H)$ rencontre toutes les droites. Le lemme suivant va nous permettre de conclure :

**Lemme :** *Soit $D$ une partie d'un espace projectif qui rencontre toute les droites et dont le cardinal est inférieur ou égal à celui d'un hyperplan. Alors $D$ est un hyperplan.*

**Démonstration :** Il suffit de montrer que $D$ est un sous espace projectif et que son cardinal est bien celui d'un hyperplan. C'est à dire que si $x$ et $y$ sont deux points de $D$ alors $D$ contient la droite $L(x,y)$. Montrons cela par l'absurde : on suppose que $z \in L(x,y)$ n'est pas dans $D$, et on fixe un hyperplan $H$ quelconque ne contenant pas $z$. L'application qui a un point $h$ de $H$ associe la droite $L(z,h)$ est une bijection entre $H$ et l'ensemble des droites passant par $z$. Chacune des droites passant par $z$ rencontre $D$ en au moins un point différent de $z$. Étant donné que les droites passant par $z$ ne se coupent que en $z$ et qu'il y a autant de droites passant par $z$ que de points dans $D$, il est nécessaire que chaque droites passant par $z$ rencontre $d$ en exactement un point. Ce qui est contradictoire avec le fait que $L(x,y)$ passe par $z$ et rencontre $D$ en au moins deux points : $x$ et $y$.

Le fait que le cardinal de $D$ est bien celui d'un hyperplan découle du fait que si on prend $z$ n'appartenant pas à $D$, alors $D$ rencontre toutes les droites passant par $z$, et on a vu qu'il y en a autant que de point dans un hyperplan. □

Étant donné que $F_p(H)$ est l'image d'un hyperplan son cardinal est bien inférieur ou égal à celui d'un hyperplan, et donc le lemme précédant s'applique : pour tout hyperplan $H$, son image $F_p(H)$ est encore un hyperplan. Ceci permet de prouver que pour toute droite $d$ de $L^*$ son image $F_p(d)$ est encore une droite, en effet il suffit d'écrire que

$$d = \bigcap_{d \subset H \text{ hyperplan}} H$$

Comme $F_p$ est une bijection de $L^*$ on a :

$$F_p(d) = \bigcap_{d \subset H \text{ hyperplan}} F_p(H)$$

qui est donc un sous espace projectif, et donc une droite de par son cardinal.

On a prouvé que $F_p$ conservait la structure d'espace projectif de $L$, c'est à dire sa structure hyperadditive, comme il est clair que $F_p$ préserve la structure multiplicative de $L$ c'est bien un automorphisme de $L$. □

Revenons sur le problème de l'existence d'un plan projectif homogène non-désarguésien (c'est à dire d'une extension de l'hypercorps de Krasner qui correspond au troisième cas de la classification donnée plus haut).

Dans le cas où $L^*$ est un plan projectif, on peut observer que l'action de $L^*$ sur les droites est transitive, il suffit donc de connaître une droite de $L^*$ pour connaître toute la structure additive de $L$. Par des arguments similaires à ceux utilisées pour le résultat précèdent, on peut montrer que plus précisément :

**Proposition :** *Un plan projectif fini homogène commutatif est entièrement caractérisé par un groupe abélien fini $G$, de cardinal $n^2+n+1$ et un ensemble $\Delta \subset G$ de cardinal $(n+1)$ tel que tout élément non nul de $G$ s'écrive de façon unique $d_i - d_j$ avec $d_i$ et $d_j$ dans $\Delta$. L'ensemble des droites est alors l'ensemble des $g\Delta$, pour $g$ parcourant $G$.*

Étant donné qu'un plan projectif homogène non cyclique est automatiquement non-désarguésien (à cause du théorème de classification), il suffit, pour chercher s'il existe des exemples de plan projectif homogène non-désarquésien, de voir s'il existe des ensembles $\Delta$ comme dans la proposition précédente sur des groupes non commutatifs. Cela permet d'explorer algorithmiquement assez simplement les exemples de cardinaux raisonnables. Dans l'autre sens, Hall donne dans [HJ47] un certain nombre d'obstructions (portant entre autre sur le cardinal du groupe) à l'existence d'un plan projectif cyclique non-désarguésien, je compte aussi déterminer si ces obstructions peuvent s'étendre au cas non cyclique.

Enfin un résultat récent de Don Zagier et Koen Thas [TZ08] montre que si $P$ est un plan projectif fini munie d'une action d'un groupe $G$ transitive sur les drapeaux point/droite alors il y a deux cas (disjoint) possible :
-Soit $P$ est désarguésien (et donc isomorphe à un espace projectif sur un corps fini)
-Soit il existe un entier $n$ tel que $p = n^2 + n + 1$ soit un nombre premier distinct de 7 et 73 tel que l'équation $X^n + Y^n = Z^n + W^n$ n'ai pas de solutions non trivial dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $P$ est en bijection avec $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ les droites de $P$ étant les ensembles de la forme $a + (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{*n}$.
On conjecture en théorie des nombres qu'il n'existe pas de tels nombres premiers $p$, et on sais qu'il n'existe aucun contre exemple à cette conjecture avec $p$ de taille raisonnable. Un tel nombre premier fournirait un exemple de plan projectif cyclique non désarguésien. On pense qu'il est peut-être possible à partir d'un plan projectif homogène de ce ramener à la situation traité par Thas et Zagier en utilisant des colinéations supplémentaires comme le morphisme de Frobenius qu'on a construit précédemment.

# 4 Arithmétique de $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}$

La structure hyperadditive sur $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}$ va nettement améliorer les résultats sur son arithmétique, par exemple :

**Proposition :** *Les idéaux premiers fermés (pour la topologie quotient) de $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}$ correspondent bijectivement aux places de $\mathbb{K}$ via l'application : $w \to \rho_w = \{x \in \mathbb{H}_{\mathbb{K}}\ tq\ x_w = 0\}$.*

Alors que si on regarde juste les idéaux premiers fermés du monoïde $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}$ on trouve toutes les parties de l'ensemble des valuations de $\mathbb{K}$.

Si $a$ est un élément d'un hyperanneau $A$ alors on remarque que $a.A$ est bien un idéal de $A$, on appelle un idéal de cette forme un idéal principal. Un élément premier d'un hyperanneau $A$ est un élément $p \in A$ tel que l'idéal $pA$ soit premier. On note $P(A)$ l'ensemble des éléments premiers de $A$. On a alors le résultat suivant :

**Théorème :**
*1)Les seuls idéaux premiers de $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}$ sont ceux de la forme $\rho_w$ pour une certaine valuation $w$ de $\mathbb{K}$*
*2) Le groupe $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}^* = C_{\mathbb{K}} = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^*/\mathbb{K}^*$ agit transitivement sur l'espace des générateurs de $\rho_w$.*
*3) Le stabilisateur de n'importe quel générateur de $\rho_w$ pour cette action est le sous groupe $K_w^* \subset C_{\mathbb{K}}$*

On remarque aussi que si on se donne deux générateurs de $\rho_w$ leur produit est encore un générateur de $\rho_w$, plus précisément l'ensemble des générateurs de $\rho_w$ forme (sous la multiplication de $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}$) un groupe isomorphe à $C_{\mathbb{K}}/\mathbb{K}_w^*$ et $P(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$ est une réunion disjointe de groupes.

Si on suppose maintenant que $\mathbb{K}$ est de caractéristique $p \neq 0$ alors l'espace des valuations de $K$ est une courbe projective sur $\mathbb{F}_q$ qu'on va noter $X$. Soit maintenant $K'$ une extension finie de $K$, l'espace des valuations de $K'$ correspond à un revêtement (éventuellement ramifié) $X'$ de $X$. On peut considérer $\tilde{X}$ la courbe pro-algébrique obtenue comme limite de toutes les courbes $X'$ quand

$K'$ parcourt toutes les extensions abéliennes de $X$. Si on fixe $w$ un point de $X$ on peut regarder le groupe fondamental du revêtement en $x$, qu'on note $\Pi_1(X', x)$, et celui ci est équipé d'une action de $C_{\mathbb{K}}$ (qui agit sur le revêtement $X' \to X$ via le morphisme fournit par la théorie du corps de classe). Et on peut vérifier assez simplement (grâce à la théorie du corps de classe) que $\Pi_1(X', x)$ est justement isomorphe (comme $C_{\mathbb{K}}$ module) à l'ensemble des générateurs de $\rho_w$. Ainsi $P(\mathbb{H}_{\mathbb{K}})$ apparaît comme le "groupoïde" des boucles du revêtement $X' \to X$.

Dans le cas où la caractéristique de $\mathbb{K}$ est nulle tout ce qui précède ne s'applique plus, dans le sens où on ne sait pas faire correspondre à $K$ une courbe dont les points sont les valuations sur $K$. En revanche on peut toujours considérer le groupoïde des éléments premier de $\mathbb{H}_{\mathbb{K}}$, on a ainsi obtenue un précieux renseignement sur l'hypothétique courbe associée à $\mathbb{K}$ : on connaît le groupoïde des boucles de son revêtement abélien maximal.

## Références


[CC06] A. Connes and C. Consani. Schemes over 1 and zeta functions. *Compositio Mathematica*, pages 1–33, 2006.

[CC10] A. Connes and C. Consani. The hyperring of adele classes. *Arxiv preprint arXiv :1001.4260*, 2010.

[Con99] A. Connes. Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function. *Selecta Mathematica, New Series*, 5(1) :29–106, 1999.

[HJ47] M. Hall Jr. Cyclic projective planes. *Duke Mathematical Journal*, 14(4) :1079–1090, 1947.

[Kra57] M.M. Krasner. Approximation des corps values complets de caractéristique p $\neq$ 0 par ceux de caractéristique 0. *Algèbre supérieure*, page 129, 1957.

[PCR87] R. Procesi Ciampi and R. Rota. The hyperring spectrum. *Riv. Mat. Pura Appl.*, (1) :71–80, 1987.

[TZ08] K. Thas and D. Zagier. Finite projective planes, Fermat curves, and Gaussian periods. *Journal of the European Mathematical Society*, 10(1) :173, 2008.