THÉORÈMES DE RESTRICTION

HORSIN ROMAIN

Mémoire de première année - FIMFA

Juin 2012

Sujet proposé par David Lannes

Introduction

Lorsqu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ est intégrable, il est bien connu que sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est continue. On peut donc la restreindre à un ensemble de mesure nulle, comme une hypersurface. Lorsque f est dans L^p, avec $1 < p \leq 2$, le théorème de Hausdorff-Young dit que $\widehat{f}$ est dans L^q, où q est l'exposant conjugué de p. A priori, on perd donc la propriété de restriction dans ce cas : il n'y a aucune raison visible pour que $\widehat{f}$ soit définie sur des hypersurfaces. Pourtant, il est possible de restreindre la transformée de Fourier de $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(n \geq 2)$ à toute hypersurface S qui possède des propriétés de courbure convenables, et ce pour $1 \leq p \leq p_0(S) < 2$, où l'indice $p_0(S)$ dépend justement des propriétés de courbures de S. Dans un premier temps, le but du mémoire sera d'obtenir deux versions de difficulté croissante de ce résultat. Dans la seconde partie du mémoire, nous présenterons une application permettant de visualiser l'intérêt que peut présenter un résultat de restriction de la transformée de Fourier. Plus précisément, nous verrons qu'un tel résultat permet de prouver des propriétés de régularité locale de solutions à certaines équations dispersives.

Commençons par préciser ce que l'on entend par "restreindre". On se donne une sous-variété S de dimension m de $\mathbb{R}^n$, avec $1 \leq m \leq n-1$ (on aura en fait rapidement $m = n-1$). On note $d\sigma$ la mesure de Lebesgue induite sur S, et on se donne un indice $p \in [1, 2]$. On dira que la *propriété de restriction L^p* est valide sur S s'il existe $q = q(p)$ tel que l'inégalité

$$\left(\int_{S_0} |\widehat{f}(\xi)|^q d\sigma(\xi) \right)^{1/q} \leq A_{p,q}(S_0) \cdot \|f\|_p \tag{P}$$

soit vraie pour toute fonction $f \in \mathcal{S}$ (espace de Schwartz), dès que S_0 est un ouvert de S tel que $\overline{S_0}$ soit un compact de S. La densité de $\mathcal{S}$ dans L^p permet, lorsque (P) est vraie, de définir $\widehat{f}$ sur S relativement à $d\sigma$ pour toute fonction $f \in L^p$.
Afin de faire apparaitre le(s) point(s) qui posent a priori problème, donnons une idée de comment montrer que S puisse vérifier (P), avec dans un premier temps $q = 2$. On donnera bien entendu des démonstrations rigoureuses et plus détaillées par la suite.
On se ramènera à prouver que

$$\left(\int_{S} |\widehat{f}(\xi)|^2 \psi(\xi) d\sigma(\xi) \right)^{1/2} \leq A \cdot \|f\|_p, \text{ pour } f \in \mathcal{S},$$

où $\psi \in C_0^\infty$ est "convenable". On pose $d\mu = \psi d\sigma$, et on considère l'opérateur

$$Rf(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi x\cdot\xi} f(x) dx,$$

ainsi que son adjoint (formel) que l'on note R^*. Notre but est de montrer que

$$R : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^2(S, d\mu)$$

est borné, et il suffit pour cela de montrer que

$$R^*R : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^{p'}(\mathbb{R}^n)$$

est borné, p' désignant l'exposant conjugué de p.
Or, il se trouve que $(R^*Rf)(x) = (f * K)(x)$, avec $K(x) = \widehat{d\mu}(-x)$. Ceci fait apparaitre une première difficulté, qui est de borner la transformée de Fourier d'une mesure sur une sous-variété. Typiquement, le genre de résultat que l'on aura est $\left|\widehat{d\mu(x)}\right| \leq A|x|^{(1-n)/2}$. Avec cette estimation, obtenir le résultat de restriction résulte essentiellement de l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev, et l'indice p_0 est alors donné par les conditions sur les indices figurant dans cette même inégalité.

Il y a donc a priori deux points : connaitre l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev, et pouvoir obtenir des estimations sur la transformée de Fourier d'une mesure sur une sous-variété. Pour l'inégalité, on en trouvera une démonstration, dans l'annexe A, qui suit celle proposée dans les chapitres 1 et 8 de [1]. Pour ce qui est de $\widehat{d\mu}$, celle-ci est une intégrale à paramètre de la forme

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x) dx, \quad \lambda > 0.$$

On appellera celles-ci les intégrales oscillantes du premier type, et on va les étudier dans le but d'obtenir des estimations semblables à la précédente sur $\widehat{d\mu}$. Dans la partie I, on présente l'étude de ces intégrales en dimension 1, et on développe brièvement l'exemple des intégrales de Bessel. La raison du choix de cet exemple est que celles-ci apparaitront par la suite dans certains calculs, pour lesquels on aura besoin d'utiliser des estimations fournies par l'étude des intégrales oscillantes du premier type. La partie II reprend cette étude, mais en dimension plus grande. Dans la partie III, on en arrive à l'étude des transformées de Fourier de mesures sur une sous-variété. On aura deux cas principaux : le cas d'une sous-variété S de type fini, et le cas d'une hypersurface de courbure de Gauss non nulle. On pourra donc obtenir deux résultats de restriction de la transformée de Fourier à S, qui sont présentés dans III.3. Les parties I, II et III suivent le chapitre 8 de [1].

Un des résultats principaux que l'on aura alors en main est que, lorsque S est une hypersurface de courbure de Gauss non nulle, la propriété de restriction (P) est valable pour $q = 2$, et avec $p_0(S) = p_0 = (2n+2)(n+3)$. Notre objectif sera alors d'obtenir une version améliorée de celui-ci, et plus précisément, on montrera le

Théorème.
Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ une hypersurface de courbure de Gauss jamais nulle, et S_0 un sous-ensemble compact de S. Alors

$$\left(\int_{S_0} |\widehat{f}(\xi)|^q d\sigma(\xi) \right)^{1/q} \leq A(S_0) \cdot \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad f \in \mathcal{S}$$

dès que

$$1 \leq p \leq \frac{2n+2}{n+3} \quad et \quad q = \left(\frac{n-1}{n+1} \right) p', \quad où \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Expliquons brièvement la stratégie de la preuve, afin de faire apparaitre les points qui présentent une difficulté. En écrivant (localement) S comme un graphe et en faisant le changement de variable correspondant, on se ramène à prouver que

$$\left(\int |\widehat{f}(x', \phi(x'))|^q \tilde{\psi}(x') dx' \right)^{1/q} \leq A \|f\|_p,$$

où $x = (x', x_n)$ et $\tilde{\psi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est à support compact assez petit. Ceci invite à considérer l'opérateur

$$(T_\lambda^* f)(x') = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\Phi(x',\xi)} \tilde{\psi}(x') \psi_0(\xi) f(\xi) d\xi,$$

où

$$\Phi(x', \xi) = 2\pi(x' \cdot \xi' + \phi(x')\xi_n),$$

et où $\psi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est à support compact avec $\psi_0(0) = 1$.
Si l'on dispose de l'inégalité fonctionnelle

$$\|T_\lambda^* f\|_{L^q(\mathbb{R}^{n-1})} \leq A\lambda^{-n/p'} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

alors il ne reste essentiellement plus qu'a faire un changement d'échelle (on remplace $f(\xi)$ par $f(\lambda\xi)$) pour conclure. Encore une fois, tout ceci sera détaillé par la suite.

Le point délicat est donc d'obtenir l'inégalité fonctionnelle pour l'opérateur $(T_\lambda^* f)$. Celui-ci est un opérateur de la forme

$$(T_\lambda f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\lambda\Phi(x,\xi)} \psi(x,\xi) f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda > 0,$$

où les fonctions Φ et ψ ont de "bonnes" propriétés.
Dans IV.1, on étudiera en suivant [1].ch9 ces opérateurs, nommés intégrales oscillantes de second type, le but étant d'obtenir pour ces opérateurs des inégalités fonctionnelles du type de celle que l'on vient de voir. Toujours en suivant [1].ch9, on présente dans IV.2 la preuve du théorème de restriction (version améliorée) dont on a pu voir ci-dessus l'idée. Dans IV.3, on quittera les théorèmes de restriction pour présenter une application de l'étude des intégrales oscillantes de second type, la sommabilité de Bochner-Riesz, qui donne un sens à la formule d'inversion de Fourier dans L^p. Plus précisément, pour $f \in L^p$, on se demandera si l'assertion

$$f(x) = \lim_{R \to +\infty} \int_{|\xi| \leq R} \widehat{f}(\xi) \left(1 - \frac{|\xi|^2}{R^2} \right)^\delta e^{2i\pi x \cdot \xi} d\xi$$

est valable pour p et δ convenables.

Nous aurons alors atteint le premier but du mémoire, qui est de prouver les deux théorèmes de restriction dont nous avons parlé. Notre objectif sera alors de présenter un exemple d'utilisation d'une propriété de restriction de la transformée de Fourier pour l'étude de certaines équations dispersives. On considérera des équations aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + iP(D)u = F, \quad u(0,x) = u_0(x),$$

où $u = u(t,x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n$, et

$$D = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

$P(D)u$ est définit par le symbole $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ via

$$P(D)u = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x\cdot\xi} p(\xi)(\mathcal{F}_2 u)(\xi) d\xi.$$

$\mathcal{F}_2$ désigne la transformée de Fourier par rapport à la variable d'espace x.
Notre but sera de regarder comment, sous certaines hypothèses sur u_0 et p, il est possible de rendre la solution de l'équation localement plus régulière pour presque tout temps. Typiquement, on obtiendra des résultats du type :

Théorème.
Soit $s \geq -(m-1)/2$ et $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Alors la solution fondamentale u de l'équation associée à u_0 vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \chi^2(t,x)|(I-\Delta)^{(m-1+2s)/4} u(t,x)|^2 dx dt \leq C_\chi^2 \|u_0\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)},$$

où $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ est "convenable".

Comme on le verra, la preuve de ce théorème nécessite de pouvoir, pour toute fonction $f \in \mathcal{S}$, restreindre la transformée de Fourier de χf au graphe de p, à condition de multiplier celle-ci par un "poids" $(1+|\xi|^2)^{(m-1)/2}$. En suivant [4], on présente dans la partie V ce résultat de restriction de la transformée de Fourier au graphe de p, avant de s'intéresser au résultats (du type du théorème qui précède) de régularité locale des solutions. On conclura cette partie par la cas de la dimension 1, où ces résultats deviennent globaux en temps.

Enfin, précisons que l'on trouvera dans l'annexe B une preuve suivant [3] de l'inégalité de Hausdorff-Young, utilisée à plusieurs reprises dans la partie V. Ceci sera aussi l'occasion de prouver quelques résultats d'interpolation, utilisés dans la partie IV.

Pour conclure cette introduction, précisons que l'on se placera toujours dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa topologie euclidienne et on travaillera avec la mesure de Lebesgue que nous noterons λ. On ne considèrera, sauf mention contraire, que des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs réelles (éventuellement complexes). Pour $r > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$, la notation $B(x,r)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon r.
Pour $1 \leq p < \infty$, on notera L^p ou $L^p(\mathbb{R}^n)$, ou encore $L^p(\mathbb{R}^n, \mu)$ pour une mesure μ appropriée, l'espace vectoriel des fonctions de puissance p intégrable (quotienté par la relation d'égalité presque partout) par rapport à μ, muni de sa norme

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int |f|^p\right)^{1/p} = \sup\left\{\left|\int (hg)\right| : \|g\|_{p'} = 1\right\} = \sup\left\{\left|\int (hg)\right| : \|g\|_{p'} \leq 1\right\}.$$

L'espace de Schwartz sur $\mathbb{R}^n$ sera noté $\mathcal{S}$ ou $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Enfin, la notation $\mathcal{F}(f)$ ou $\widehat{f}$ désigne la transformée de Fourier de f lorsque cela à un sens.

Remerciements

Je tiens à remercier M. David Lannes pour avoir proposé ce sujet fort intéressant, ainsi que pour son aide, ses conseils et sa disponibilité.

Sommaire

I. Intégrales oscillantes du premier type

Nous débutons donc par l'étude des intégrales oscillantes du premier type, dans le cas de la dimension 1. Pour $\lambda > 0$ et $a < b$, on pose

$$I(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx. \tag{I.1}$$

Ici, ϕ est C^∞ à valeurs réelles et ψ est C^∞ à valeurs complexes.
Nous allons étudier le comportement asymptotique de ces intégrales pour $\lambda \to +\infty$, en fonction des points où la phase $i\lambda\phi(x)$ est stationnaire, *ie* $\phi'(x) = 0$.

I.1. **Localisation et changement d'échelle.**

Le terme localisation signifie que, supposant que ψ est à support compact dans $]a;b[$, le comportement asymptotique de $I(\lambda)$ est déterminé par les points où la phase est stationnaire. Plus précisément :

Proposition I.1.1. *On suppose que ψ est à support compact dans $]a;b[$, et que $\phi'(x) \neq 0$ $\forall x \in [a;b]$. Alors :*

$$I(\lambda) = \mathcal{O}\left(\lambda^{-N}\right) \text{ quand } \lambda \to +\infty, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Preuve.
On regarde les opérateurs différentiels donnés par

$$Df(x) = (i\lambda\phi'(x))^{-1}\frac{df}{dx} \quad \text{et} \quad {}^tDf(x) = \frac{-d}{dx}\left(\frac{f}{i\lambda\phi'(x)}\right).$$

On remarque que $D^N(e^{i\lambda\phi}) = e^{i\lambda\phi}$ pour tout N, et N intégrations par parties successives montrent que :

$$\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx = \int_a^b D^N(e^{i\lambda\phi})\psi dx = \int_a^b e^{i\lambda\phi}({}^tD)^N(\psi)dx \tag{I.2}$$

On montre alors par récurrence sur N que $({}^tD)^N(\psi) = \frac{g_N}{\lambda^N}$, où g_N est une fonction C^∞ sur $[a;b]$, ce qui conclut. □

Remarque. *Essentiellement, ce qui fait marcher la preuve est le fait que, comme ψ est à support compact dans $]a;b[$, ψ et ses dérivées s'annulent en a et b. Ceci permet d'annuler les termes entre crochets qui apparaissent dans les intégrations par parties. On peut voir que si*

$$\psi^{(k)}(a) = \psi^{(k)}(b) \text{ et } \phi^{(k)}(a) = \phi^{(k)}(b)\ \forall k \geq 0,$$

on obtient aussi l'annulation des termes entre crochets, et donc la même estimation pour $I(\lambda)$.
On peut donc en conclure que la donnée des points où la phase est stationnaire et des points a et b détermine le comportement asymptotique de $I(\lambda)$.

A présent, on ne va rien supposer sur le support de ψ. On va quand même pouvoir obtenir une estimation asymptotique du comportement de $I(\lambda)$, moins bonne que la précédente, mais indépendante de a et b. Plus précisément :

Proposition I.1.2. *On suppose que $|\phi^{(k)}(x)| \geq 1$ $\forall x \in [a;b]$. Alors :*

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}dx\right| \leq c_k\lambda^{-\frac{1}{k}}, \tag{I.3}$$

dès que ($k = 1$ et ϕ' est monotone) ou que $k \geq 2$.

Preuve. On commence par prouver le cas $k = 1$. On considère l'opérateur D de la preuve précédente. On a :

$$\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}dx = \int_a^b D(e^{i\lambda\phi})dx = \int_a^b e^{i\lambda\phi}({}^tD)(1)dx + \left[(i\lambda\phi')^{-1}e^{i\lambda\phi}\right]_a^b.$$

Le second membre est très clairement borné par $\frac{2}{\lambda}$. Pour le premier, on a :

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}({}^tD)(1)dx\right| = \left|\int_a^b e^{i\lambda\phi(x)}(i\lambda)^{-1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\phi'(x)}\right)dx\right| \leq \frac{1}{\lambda}\int_a^b \left|\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\phi'(x)}\right)\right|dx$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left|\int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\phi'(x)}\right)dx\right| = \frac{1}{\lambda}\left|\frac{1}{\phi'(a)} - \frac{1}{\phi'(b)}\right| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

via la monotonie de ϕ'. Le premier point est donc prouvé avec $c_1 = 3$.
On raisonne ensuite par récurrence sur k, le résultat venant d'être vu pour $k = 1$. Supposons donc le résultat vrai au rang k. Quitte à remplacer ϕ par $-\phi$, on peut supposer que :

$$\phi^{(k+1)}(x) \geq 1 \ \forall x \in [a; b].$$

On note c le point de $[a; b]$ où $|\phi^{(k)}(x)|$ est minimale.

Si $\phi^{(k)}(c) = 0$, alors $|\phi^{(k)}(x)| \geq \delta$ en dehors de $[c - \delta; c + \delta]$. Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\left| \int_a^{c-\delta} e^{i\lambda\phi(x)} dx \right| \leq c_k(\lambda\delta)^{-\frac{1}{k}} \text{ et } \left| \int_{c+\delta}^{b} e^{i\lambda\phi(x)} dx \right| \leq c_k(\lambda\delta)^{-\frac{1}{k}}.$$

Aussi,

$$\left| \int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{i\lambda\phi(x)} dx \right| \leq 2\delta \quad \text{, donc} \quad \left| \int_a^{b} e^{i\lambda\phi(x)} dx \right| \leq 2c_k(\lambda\delta)^{-\frac{1}{k}} + 2\delta.$$

Si $\phi^{(k)}(c) \neq 0$, alors $c = a$ ou $c = b$, et on peut supposer $c = a$. Alors par hypothèse de récurrence :

$$\left| \int_{a+\delta}^{b} e^{i\lambda\phi(x)} dx \right| \leq c_k(\lambda\delta)^{-\frac{1}{k}}.$$

Aussi,

$$\left| \int_{a}^{a+\delta} e^{i\lambda\phi(x)} dx \right| \leq \delta.$$

Dans chaque cas, on prend $\delta = (\lambda)^{-\frac{1}{k+1}}$, et on obtient le résultat au rang $k + 1$. Ceci prouve le résultat. De plus, comme $c_1 = 3$ et $c_{k+1} = 2c_k + 2$, on a $c_k = 5 \times 2^{k-1} - 2$. □

Corollaire. *Sous les mêmes hypothèses, on a :*

$$\left| \int_a^b e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x) dx \right| \leq c_k \lambda^{-\frac{1}{k}} \left[|\psi(b)| + \int_a^b |\psi'(x)| dx \right]. \tag{I.4}$$

Preuve. On pose $F(x) = \displaystyle\int_a^x e^{i\lambda\phi(t)} dt$, de sorte que $I(\lambda) = \displaystyle\int_a^b F'(x)\psi(x) dx$.
La proposition précédente montre que $|F(x)| \leq c_k \lambda^{-\frac{1}{k}} \ \forall x \in [a; b]$. Une intégration par parties montre alors le résultat. □

I.2. **Méthode de la phase stationnaire.**

On va maintenant considérer le cas où la phase est stationnaire en un point, cas qui était exclut jusqu'à présent. On pourra alors obtenir un développement asymptotique de $I(\lambda)$.

Proposition I.2.1 (Méthode de la Phase Stationnaire)**.**
Soit $k \geq 2$. Supposons que $\phi^{(k)}(x_0) \neq 0$ pour un certain x_0, alors que $\phi(x_0) = \phi'(x_0) = ... = \phi^{(k-1)}(x_0) = 0$. Supposons de plus que ψ soit supportée dans un voisinage suffisamment petit de x_0. Alors :

$$I(\lambda) \sim \lambda^{-\frac{1}{k}} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \lambda^{-\frac{j}{k}}, \tag{I.5}$$

au sens où, $\forall r, N \in \mathbb{N}$,

$$\left(\frac{d}{d\lambda} \right)^r \left[I(\lambda) - \lambda^{-\frac{1}{k}} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \lambda^{-\frac{j}{k}} \right] = \mathcal{O}\left(\lambda^{-r-\frac{N+1}{k}} \right) \text{ quand } \lambda \to \infty. \tag{I.6}$$

Preuve. On se contente de prouver le cas $k = 2$, qui est en fait le seul que l'on utilisera par la suite.

Dans un premier temps, on va montrer que $\forall l \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x^2} x^l e^{-x^2} dx \sim \lambda^{-\frac{l+1}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} c_j^{(l)} \lambda^{-j}. \tag{I.7}$$

Pour cela, on remarque que le membre de gauche est $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1-i\lambda)x^2} x^l dx$. Travaillant avec la détermination principale de la racine carrée, on effectue le changement de variable $z = \sqrt{1-i\lambda}x$. On obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1-i\lambda)x^2} x^l dx = (1-i\lambda)^{-\frac{l+1}{2}} \times 2 \int_{\sqrt{1-i\lambda}\mathbb{R}_+} e^{-z^2} z^l dz.$$

Or,

$$\int_{\sqrt{1-i\lambda}\mathbb{R}_+} e^{-z^2} z^l dz = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-z^2} z^l dz.$$

Ce changement de contour est en effet légitime, et se justifie par une technique classique, en utilisant l'holomorphie de $f(z) = e^{-z^2} z^l$ au voisinage des triangles rectangles ABC, où A est l'origine, B est sur la demi-droite $\sqrt{1-i\lambda}\mathbb{R}_+$, et où C est le projeté orthogonal de B sur la demi-droite $\mathbb{R}_+$. On a donc l'identité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1-i\lambda)x^2} x^l dx = (1-i\lambda)^{-\frac{l+1}{2}} \times 2 \int_{\mathbb{R}_+} e^{-x^2} x^l dx.$$

Or $(1-i\lambda)^{-\frac{l+1}{2}} = \lambda^{-\frac{l+1}{2}} (\lambda^{-1} - i)^{-\frac{l+1}{2}}$, et il suffit donc d'utiliser le développement en série entière de $(\omega - i)^{-\frac{l+1}{2}}$ valable pour $|\omega| < 1$ pour obtenir (I.7).

Dans un second temps, on prouve que si $\eta \in C_0^\infty$ et $l \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x^2} x^l \eta(x) dx \right| \leq A\lambda^{-\frac{l+1}{2}}. \tag{I.8}$$

Pour voir ceci, on introduit $\alpha \in C^\infty$ telle que $\alpha(x) = 1$ si $|x| \leq 1$ et $\alpha(x) = 0$ si $|x| \geq 2$. Soit $\epsilon > 0$. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x^2} x^l \eta(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x^2} x^l \eta(x) \alpha\left(\frac{x}{\epsilon}\right) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x^2} x^l \eta(x) \left[1 - \alpha\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right] dx.$$

La première intégrale est égale à

$$\epsilon^{l+1} \int_{-2}^{2} e^{i\lambda\epsilon^2 y^2} y^l \eta(\epsilon y) dy,$$

via le changement de variable $y = \frac{x}{\epsilon}$. Cette dernière intégrale est bornée par

$$\|\eta\|_\infty \int_{-2}^{2} |y|^l dy = \frac{2^{l+2}}{l+1} \|\eta\|_\infty.$$

Donc

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x^2} x^l \eta(x) \alpha\left(\frac{x}{\epsilon}\right) dx \right| \leq C\epsilon^{l+1}.$$

Pour la seconde intégrale, un raisonnement analogue à celui de la preuve de la proposition I.1.1 permet de voir que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x^2} x^l \eta(x) \left[1 - \alpha\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x^2} ({}^tD)^N \left\{ x^l \eta(x) \left[1 - \alpha\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right]\right\} dx.$$

Donc la seconde intégrale est bornée par :

$$\int_{|x| \geq \epsilon} \left| ({}^tD)^N \left\{ x^l \eta(x) \right\} \right| dx.$$

Or on prouve par récurrence sur N que

$$({}^tD)^N \left\{ x^l \eta(x) \right\} = \frac{x^{l-2N}}{\lambda^N} g_N(x),$$

où $g_N \in C_0^\infty$. Ainsi la seconde intégrale est bornée par :

$$\|g_N\|_\infty \times \frac{2}{\lambda^N} \epsilon^{l-2N+1},$$

dès que $l - 2N < -1$. On obtient alors (I.8) en choisissant $\epsilon = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ et en combinant les deux majorations précédentes.

De plus, si $g \in \mathcal{S}$ s'annule sur un voisinage de 0, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x^2} g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{i\lambda x^2} \frac{g(x)}{x} dx$$

$$= \left[\frac{e^{i\lambda x^2}}{2i\lambda} \times \frac{g(x)}{x} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x^2}}{2i\lambda} \times \left(\frac{g(x)}{x} \right)' dx.$$

Le terme entre crochets est nul, et donc le même argument d'intégration par parties (celui qui utilise D^N) permet de voir que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x^2} g(x)dx = \mathcal{O}\left(\lambda^{-N}\right). \tag{I.9}$$

Dans un troisième temps, on prouve le résultat pour $\phi(x) = x^2$ (donc $x_0 = 0$). Pour cela, on se donne $\tilde{\psi} \in C_0^\infty$ telle que $\tilde{\psi}$ vaut 1 sur le support de ψ. On a :

$$\int e^{i\lambda x^2} \psi(x)dx = \int e^{i\lambda x^2} e^{-x^2} \left[e^{x^2} \psi(x) \right] \tilde{\psi}(x)dx.$$

Pour tout $N \geq 0$, on a le développement de Taylor en 0 :

$$e^{x^2} \psi(x) = \sum_{j=0}^{N} b_j x^j + R_N(x) x^{N+1} = P_N(x) + R_N(x) x^{N+1}.$$

On peut donc découper l'intégrale précédente en trois morceaux :

$$\sum_{j=0}^{N} b_j \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x^2} e^{-x^2} x^j dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x^2} x^{N+1} R_N(x) e^{-x^2} \tilde{\psi}(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x^2} P_N(x) e^{-x^2} \left[\tilde{\psi}(x) - 1 \right] dx.$$

On prouve alors la proposition dans le cas $k = 2$ et $\phi(x) = x^2$ en appliquant (I.7) à la première intégrale, (I.8) à la seconde, et (I.9) à la troisième.

Enfin, on prouve la proposition pour $k = 2$ et ϕ quelconque. Pour cela, on écrit :

$$\phi(x) = c(x - x_0)^2 + R(x)(x - x_0)^2,$$

avec $R(x) \to 0$ quand $x \to x_0$, et $c \neq 0$.
On se donne alors un voisinage U de x_0 tel que $\phi'(x) \neq 0$ si $x \neq x_0$ est dans U et $R(x) < 1$ sur U. Soit alors

$$y = (x - x_0) \left[1 + R(x)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

C'est un difféomorphisme local qui envoie U sur un voisinage de $y = 0$, et on a $cy^2 = \phi(x)$, de telle sorte que

$$\int e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x)dx = \int e^{i\lambda c y^2} \tilde{\psi}(y)dy,$$

où $\tilde{\psi} \in C_0^\infty$ si le support de ψ prolonge U, ce que, quitte à réduire U, nous pouvons supposer. On se ramène ainsi au cas précédent, ce qui conclut la preuve. □

Remarque. *Ce résultat montre que le comportement asymptotique de $I(\lambda)$ est, dans le cas où la phase est stationnaire en un unique point x_0 du support de ψ, contrôlé par le premier indice $k \geq 2$ tel que $\phi^{(k)}(x_0) \neq 0$.*
Par ailleurs, en suivant la preuve précédente dans le cas $k = 2$ et en écrivant précisément les valeurs du premier terme dans les divers développements, il est possible de voir que

$$a_0 = \left(\frac{2\pi}{-i\phi''(x_0)} \right)^{1/2} \psi(x_0).$$

I.3. **Quelques considérations sur les intégrales de Bessel.**

Dans ce paragraphe, nous expliquons brièvement en quoi ce qui précède s'applique à une famille de fonctions, les fonctions de Bessel, qui interviendront par la suite dans certains calculs, comme par exemple le calcul de la transformée de Fourier de la mesure de Lebesgue induite sur la sphère unité. On aura alors besoin des résultats qui vont suivre.
Pour $m \in \mathbb{N}$, la fonction de Bessel d'ordre m est définie par :

$$J_m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ir\sin(\theta)} e^{-im\theta} d\theta. \tag{I.10}$$

Il s'agit bien d'une intégrale oscillante du premier type (de la forme de (I.1)), avec $\phi = \sin$.
On peut écrire la partition $1 = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$, où ψ_1 a un petit support au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ et vaut 1 sur un voisinage (plus petit) de $\frac{\pi}{2}$, et où ψ_2 a un petit support au voisinage de $\frac{3\pi}{2}$ et vaut 1 sur un voisinage (plus petit) de $\frac{3\pi}{2}$. ψ_3 est ensuite définie comme $1 - \psi_1 - \psi_2$, et les trois fonctions sont C^∞.

Insérant cette partition dans (I.10), on obtient trois intégrales, dont les deux premières vérifient le cas $k = 2$ du corollaire de la proposition I.1.2. La troisième vérifie le cas $k = 1$, et donc nous obtenons :

$$J_m(r) = \mathcal{O}\left(r^{-1/2}\right) \text{ quand } r \to +\infty.$$

En appliquant la proposition I.2.1 aux deux premirères intégrales, et l'estimation expliquée dans la remarque suivant la proposition I.1.1 à la troisième, on peut même obtenir le développement asymptotique :

$$J_m(r) \sim r^{-1/2} e^{ir} \sum_{j=0}^{\infty} a_j r^{-j} + r^{-1/2} e^{-ir} \sum_{j=0}^{\infty} b_j r^{-j} \tag{I.11}$$

Par ailleurs, rappelons que la fonction J_m peut aussi être définie pour $m > -\frac{1}{2}$ réel par la formule :

$$J_m(r) = \frac{(r/2)^m}{\Gamma(m+1/2)\pi^{1/2}} \times \int_{-1}^{1} e^{irt} \left(1 - t^2\right)^{m-1/2} dt. \tag{I.12}$$

Pour prouver que les deux définitions coïncident bien sur les valeurs entières de m, on peut raisonner par récurrence sur m en utilisant la formule

$$\frac{d}{dr}[r^{-m} J_m(r)] = -r^m J_{m+1}(r)$$

vérifiée par les deux définitions. On ne redémontre pas le calcul permettant d'établir cette formule. En cas de besoin, on pourra trouver la preuve détaillée de ceci dans le chapitre 4 de [2].

II. Intégrales oscillantes du premier type, cas de plusieurs variables

Les résultats de la première partie ont une généralisation lorsque l'on considère des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. On va encore étudier le comportement de l'intégrale

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)} \psi(x) dx,$$

sous réserve que cette écriture ait un sens, et où $\lambda > 0$.
Cependant, il ne sera plus question de points où la phase ϕ est stationnaire au sens que nous avons précédemment donné à cette dénomination. Mais l'idée de la partie précédente reste la même : on va contrôler le comportement asymptotique de l'intégrale par les points critiques de la phase. Rappelons que si la phase ϕ est définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^n$, ont dit que x_0 est un point critique de ϕ si

$$(\nabla\phi)(x_0) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \ \dots \ , \frac{\partial\phi}{\partial x_n}\right)\Bigg|_{x=x_0} = 0.$$

II.1. **Contrôle par les points critiques.**

Nous allons présenter ici deux résultats qui sont les analogues des proposition I.1.1 et I.1.2. Le premier est le parfait analogue de la proposition I.1.1 au sens où les hypothèses et la conclusion sont les mêmes.

Proposition II.1.1.
Supposons que ψ soit C^∞ à support compact, et que la phase ϕ soit une fonction C^∞ à valeurs réelles qui n'a pas de point critique sur le support de ψ. Alors

$$I(\lambda) = \mathcal{O}\left(\lambda^{-N}\right),$$

quand $\lambda \to +\infty$ et $\forall N \in \mathbb{N}$.

Preuve.
Quelque soit x_0 dans le support de ψ, il existe une constante $c > 0$, un vecteur unitaire ξ et une boule $B(x_0)$ tel que $\forall x \in B(x_0)$,

$$\left(\nabla\phi\right)(x)\cdot\xi \geq c > 0.$$

Par compacité, on peut recouvrir le support de ψ par un nombre fini de boules du type $B(x_0)$, et ainsi écrire via une partition de l'unité :

$$I(\lambda) = \sum_{k=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\phi(x)}\psi_k(x)dx,$$

où chaque ψ_k est à support dans une boule du type $B(x_0)$. La somme étant finie, il suffit de prouver l'estimation souhaitée pour chaque intégrale.
Quitte à changer de système de coordonnées, on peut supposer que ξ et x_1 sont colinéaires. On écrit alors :

$$\int e^{i\lambda\phi(x)}\psi_k(x)dx = \int\left(\int e^{i\lambda\phi(x_1,\ \dots\ ,x_n)}\psi_k(x_1,\ \dots\ ,x_n)dx_1\right)dx_2...dx_n.$$

Il suffit alors d'appliquer la proposition I.1.1 à l'intégrale qui est à l'intérieur, et de remarquer que ceci donne l'estimation à l'intégrale complète car les intégrations successives par rapport à chaque variable ont lieu sur des domaines bornés. □

Passons maintenant à la généralisation de la proposition I.1.2, qui est un analogue plus faible de celle-ci. On va d'abord prouver le résultat suivant :

Lemme II.1.1. *Considérons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des polynômes homogènes de degré k de $\mathbb{R}^n$, et notons $d(k,n)$ sa dimension. Alors il existe des vecteurs unitaires $\xi^1, ..., \xi^{d(k,n)}$ tel que la famille*

$$\left\{(\xi^j\cdot X)^k, j = 1...d(k,n)\right\}$$

soit une base de E.

Preuve.
E est muni du produit scalaire $(P,Q) = \sum_{|\alpha|=k} \alpha!\ a_\alpha b_\alpha$, où $P(X) = \sum a_\alpha X^\alpha$ et $Q(X) = \sum b_\alpha X^\alpha$, pour laquelle la famille $\{X^\alpha\ :\ |\alpha| = k\}$ est orthonormale.

On remarque que $(P,Q) = \left[Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right](P)$, de sorte que si P est orthogonal à chaque $(\xi\cdot X)^k$, alors

$$\left(\xi\cdot\nabla\right)^k(P) = 0 \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^n.$$

Autrement dit,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)P(t\xi) = 0 \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^n.$$

Donc P est identiquement nul, ce qui conclut. □

Proposition II.1.2.
Supposons que ψ soit C^∞ et supportée dans la boule unité. Supposons de plus que ϕ soit à valeurs réelles et telle que pour un multi-indice donné α de longueur strictement positive k, on ait :

$$|\partial_x^\alpha \phi| \geq 1$$

sur le support de ψ. Alors :

$$|I(\lambda)| \leq c_k(\phi) \cdot \lambda^{-1/k} \cdot \left(\|\psi\|_\infty + \|\nabla\psi\|_1\right), \tag{II.1}$$

où la constante $c_k(\phi)$ ne dépend pas de ψ et λ, et reste bornée tant que la norme C^{k+1} de ϕ le reste.

Preuve.
On remarque que si α est de longueur k et tel que $|\partial_x^\alpha \phi(x_0)| \geq 1$, alors il existe un vecteur unitaire ξ et une constante a_k tel que

$$\left|(\xi \cdot \nabla)^k \phi(x_0)\right| \geq a_k > 0.$$

En effet, considérons $P(x) = \sum_{|\alpha|=k} x^\alpha \partial_x^\alpha(\phi(x_0))$, qui est un polynôme homogène de degré k, non nul par hypothèse. L'une de ses coordonnées dans la base fournie dans le lemme précédent est donc non nulle, ce qui justifie l'affirmation.
Comme on peut supposer que la norme C^{k+1} de ϕ est bornée, on peut dire (par les accroissements finis) que

$$\left|(\xi \cdot \nabla)^k \phi(x)\right| \geq a_k/2 > 0,$$

$\forall x \in B(x_0)$, où $B(x_0)$ est une boule centrée en x_0 et de rayon $c \cdot \|\phi\|_{C^{k+1}}^{-1}$. On recouvre alors la boule unité par un nombre fini de telles boules, et via une partition de l'unité adaptée (ρ_j) à ce recouvrement, on peut écrire

$$\int e^{i\lambda\phi(x)}\psi(x)dx = \sum_{j=1}^m \int e^{i\lambda\phi(x)}\psi_j(x)dx,$$

avec $\psi_j = \psi \cdot \rho_j$.
Comme précédemment, on suppose que ξ et x_1 sont colinéaires. Alors :

$$\int e^{i\lambda\phi(x)}\psi_j(x)dx = \int \left(\int e^{i\lambda\phi(x_1, \dots, x_n)}\psi_j(x_1, \dots, x_n)dx_1 \right) dx_2 ... dx_n.$$

Appliquant le corollaire de la proposition I.1.2, on peut borner l'intégrale à l'intérieur par :

$$c_k(a_k\lambda)^{-1/k} \left[\|\psi\|_\infty + \int \left| \frac{\partial\psi}{\partial x_1}(x_1, ..., x_n) \right| dx_1 \right],$$

et on obtient (II.1) pour chaque intégrale en intégrant selon les variables restantes (toujours sur un domaine borné).
On somme ensuite sur j pour obtenir le résultat souhaité. □

II.2. **Cas de points critiques non dégénérés.**

Le résultat suivant est l'extension du cas $k = 2$ de la proposition I.2.1. Il demande néanmoins de considérer des hypothèses différentes de celle-ci. Cependant, l'idée reste la même, à savoir qu'on va contrôler la Hessienne de ϕ pour obtenir un développement asymptotique de $I(\lambda)$.
Il est utile pour ce paragraphe de connaitre le

Théorème (Lemme de Morse)**.** *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞, nulle en un point x_0, et telle que x_0 soit un point critique non dégénéré de f. Alors il existe des voisinages U et U' de x_0 dans $\mathbb{R}^n$, ainsi qu'un difféomorphisme $\phi : U \to U'$ tel que $\forall x = (x_1, ..., x_n) \in U$,*

$$f(\phi(x)) = \sum_{i=1}^m x_i^2 - \sum_{i=m+1}^n x_i^2. \tag{II.2}$$

Supposons que x_0 soit un point critique de la phase ϕ. Rappelons que celui-ci est dit non-dégénéré si la matrice Hessienne de ϕ en x_0 est inversible, et que les points critiques non dégénérés sont nécessairement isolés, comme le montre la formule de Taylor ou le lemme de Morse. Utilisant de tels points, on a la :

Proposition II.2.1.
Supposons que x_0 soit un point critique non dégénéré de ϕ et que $\phi(x_0) = 0$. Si ψ est supportée dans un voisinage suffisamment petit de x_0, alors :

$$I(\lambda) \sim \lambda^{-n/2} \sum_{j=0}^{\infty} a_j \lambda^{-j}, \tag{II.3}$$

ceci devant être pris dans le même sens que (I.5) et (I.6).

Preuve.
L'idée de la preuve est très ressemblante à celle de la proposition I.2.1.
On commence par considérer le cas où ϕ est la forme quadratique Q donnée par

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 - \sum_{j=m+1}^{n} x_j^2.$$

On a un analogue de (I.7), pour un multi-indice $l = (l_1;\ ...\ ; l_n)$, qui est

$$\int e^{i\lambda Q(x)} e^{-|x|^2} x^l dx \sim \lambda^{-n/2-|l|/2} \sum_{j=0}^{\infty} c_j(m; l)\lambda^{-j}. \tag{II.4}$$

La preuve de ceci est très semblable à celle de (I.7). Pour commencer, on écrit l'intégrale dans (II.4) sous la forme d'un produit :

$$\prod_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm i\lambda x_j^2} e^{-x_j^2} x_j^{l_j} dx_j = \prod_{j=1}^{n} (1 \pm i\lambda)^{-(l_j+1)/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^{l_j} dx,$$

avec la même méthode que pour (I.7). On isole alors le terme

$$\prod_{j=1}^{n} \lambda^{-(l_j+1)/2} = \lambda^{-(n+|l|)/2},$$

et on développe en série entière la fonction

$$\prod_{j=1}^{n} \left(\lambda^{-1} \pm i\right)^{-(l_j+1)/2}$$

pour λ assez grand.

L'analogue de (I.8) est la majoration :

$$\left| \int e^{i\lambda Q(x)} x^l \eta(x) dx \right| \leq A\lambda^{-(n+|l|)/2}, \tag{II.5}$$

si η est de classe C^∞ à support compact.
Pour prouver ceci, on considère les cônes

$$T_j = \left\{x\ ; |x_j|^2 \geq |x|^2/2n\right\} \text{ et } T_j^0 = \left\{x\ ; |x_j|^2 \geq |x|^2/n\right\}.$$

On a $\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{n} T_j^0$, et via une partition de l'unité en coordonnées polaires, on peut trouver des fonctions $\Omega_1, ..., \Omega_n$ homogènes de degré 0, chacune supportée dans T_j et C^∞ hors d'un voisinage de l'origine tel que

$$\sum_{j=1}^{n} \Omega_j(x) = 1 \quad \forall x \neq 0.$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\int e^{i\lambda Q(x)} x^l \eta(x) dx = \sum_{j=1}^{n} \int e^{i\lambda Q(x)} x^l \eta(x) \Omega_j(x) dx.$$

Dans chaque cône T_j, on utilise une technique d'intégration par parties analogue aux précédentes, en utilisant l'opérateur

$$D_j f(x) = (\pm 2i\lambda x_j)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

En utilisant le fait que $D_j\left(e^{i\lambda Q(x)}\right) = e^{i\lambda Q(x)}$ et que $|x_j| \geq (2n)^{-1/2}|x|$ dans T_j, on prouve par récurrence que

$$\left|\left({}^t D_j\right)^N \Omega_j(x)\right| \leq C_N \lambda^{-N} \cdot |x|^{-2N}.$$

On conclut alors la preuve de (II.5) en adaptant celle de (I.8).

Par un argument similaire à celui de la preuve de (I.9), on prouve que $\forall \eta \in \mathcal{S}$ telle que $\eta = 0$ au voisinage de l'origine,

$$\int e^{i\lambda Q(x)} \eta(x) dx = \mathcal{O}\left(\lambda^{-N}\right) \quad \forall N \geq 0.$$

Comme dans la preuve de la proposition I.2.1, on obtient le résultat dans le cas où $\phi = Q$ en combinant (II.4), (II.5), et la dernière estimation.

Dans le cas général, on utilise le lemme de Morse (II.2) pour se ramener au cas précédent. □

Remarque. *Comme dans la proposition I.2.1, on peut obtenir*

$$a_0 = \psi(x_0) \cdot (2\pi)^{n/2} \prod_{j=1}^{n} (-i\mu_j)^{-1/2},$$

où les μ_j sont les valeurs propres de la Hessienne de ϕ.

III. Transformée de Fourier de mesures sur des sous-variétés

Soit S un sous-ensemble ouvert d'une sous-variété C^∞ de dimension m de $\mathbb{R}^n$. Notons $d\sigma$ la mesure de Lebesgue induite sur S. On se donne une fonction $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support compact telle que l'intersection de S et du support de ψ soit un compact de S.
On considère alors la mesure de Borel finie $d\mu = \psi(x) d\sigma$ sur $\mathbb{R}^n$ qui est supportée sur S. On va étudier le comportement asymptotique de $\widehat{d\mu}$. selon les propriétés que vérifie la sous-variété. Il s'agit, comme nous avons pu le dire en introduction, du point important qui permettra d'obtenir une propriété de restriction du type de (P).

III.1. **Hypersurfaces de courbure de Gauss non nulle.**

On s'intéresse d'abord au cas où S est la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Pour $n > 1$, on a

$$\widehat{d\sigma\,(\xi)} = \int_{\mathbb{S}^n} e^{-2i\pi x \cdot \xi} d\sigma(x).$$

On rappelle que le volume et l'aire de la boule euclidienne centrée en 0 de dimension n et de rayon r sont donnés respectivement par

$$\frac{\pi^{n/2} r^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \text{ et } \frac{\pi^{n/2} n r^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}. \tag{III.1}$$

Proposition III.1.1. *On a :*

$$\widehat{d\sigma\,(\xi)} = 2\pi \left|\xi\right|^{(2-n)/2} J_{(n-2)/2}(2\pi|\xi|). \tag{III.2}$$

Preuve.
On peut supposer $\xi = (0, ..., \xi_n)$, le cas général résultant de celui-ci. On a donc :

$$\widehat{d\sigma\,(\xi)} = \int_{\mathbb{S}^n} e^{-2i\pi|\xi|\cos(\theta)} d\sigma(x),$$

où θ désigne l'angle que x fait avec le vecteur $(0, ..., 0, 1)$. Passant en coordonnées sphériques sur $\mathbb{S}^n$, on a

$$d\sigma = d\sigma_{n-1} = (\sin(\theta))^{n-2} d\sigma_{n-2} d\theta.$$

Donc

$$\widehat{d\sigma\,(\xi)} = |\sigma_{n-2}| \cdot \int_0^{\pi} e^{-2i\pi|\xi|\cos(\theta)}(\sin(\theta))^{n-2}d\theta,$$

où $|\sigma_{n-2}| = \displaystyle\int_{\mathbb{S}^{n-2}} 1d\sigma_{n-2}$ est l'aire de la sphère unité de dimension $n-2$.

En utilisant (III.1) et la formule (I.12), on obtient (III.2). □

En appliquant l'estimation asymptotique (I.11), on a le :

Corollaire.

$$\left|\widehat{d\sigma(\xi)}\right| = \mathcal{O}\left(|\xi|^{(1-n)/2}\right). \tag{III.3}$$

Ainsi, si l'on est convaincu par l'ébauche de preuve donnée dans l'introduction, la sphère unité est une hypersurface qui a priori est candidate à vérifier la propriété de restriction (P).

On va maintenant montrer que l'estimation faite pour la sphère peut s'étendre à un cadre plus général, et qu'elle découle des propriétés de courbure de la sous-variété.
On suppose que S est une sous-variété de dimension $n-1$ et que sa courbure de Gauss est non nulle en chaque point. Rappelons la signification de ceci :
Soit $x_0 \in S$, que l'on ramène à l'origine par rotation ou translation. Ceci permet d'écrire le plan tangent à S en x_0 comme l'hyperplan $x_n = 0$. Au voisinage de x_0, S peut être donnée par un graphe

$$x_n = \phi(x_1, ..., x_{n-1}),$$

avec ϕ de classe C^∞ à support compact et $\phi(0) = (\nabla\phi)(0) = 0$.
La courbure de Gauss de S en x_0 est alors donnée par le déterminant de la matrice Hessienne de ϕ en x_0.

Théorème III.1.1.
Sous ces hypothèses, on a

$$\left|\widehat{d\mu(\xi)}\right| \leq A|\xi|^{(1-n)/2}, \tag{III.4}$$

en posant $d\mu = \psi d\sigma$.

Preuve.
Nous allons à un moment appliquer la proposition II.2.1, et pour cela, il sera plus confortable de remplacer n par $n+1$ dans cette preuve.
Quitte à utiliser une partition de l'unité, on peut supposer que l'intersection de S avec le support de ψ est suffisamment petite pour que l'on puisse décrire S comme un graphe

$$x_{n+1} = \phi(x_1, ..., x_n).$$

Ainsi, $d\sigma = (1 + |\nabla\phi|^2)^{1/2}dx_1...dx_n$.
Via le changement de variable

$$(x_1, ..., x_{n+1}) = (x_1, ..., x_n, \phi(x_1, ..., x_n)),$$

on est réduit à prouver que, si $\tilde{\psi}$ est supportée dans un petit voisinage de l'origine, on a

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\Phi(x,\eta)}\tilde{\psi}(x)dx\right| \leq A\lambda^{-n/2}, \tag{III.5}$$

où $\lambda = |\xi| > 0$, $\xi = \lambda\eta$ avec $\eta = (\eta_1, ..., \eta_{n+1})$, et

$$\Phi(x, \eta) = x \cdot \eta = \sum_{i=1}^{n} x_i\eta_i + \phi(x_1, ..., x_n)\eta_{n+1}.$$

Rappelons par ailleurs que $\phi(0) = (\nabla\phi)(0) = 0$.

On sépare alors la preuve en trois cas :

- Soit $\eta \in \mathbb{S}^n$ et $\eta_N = (0, ..., 0, 1)$. On a
$$\nabla_x \Phi(x, \eta_N)|_{x=0} = 0,$$
et on souhaite vérifier que si η est suffisamment proche de η_N, alors il existe $x = x(\eta)$ tel que
$$\nabla_x \Phi(x, \eta)|_{x=x(\eta)} = 0.$$
Or ceci correspond à un système de n équations dont on peut trouver une solution par le théorème des fonctions implicites, à condition que le déterminant de la matrice Hessienne de Φ en $(0, \eta_N)$ soit non nul, ce qui est précisémment la raison pour laquelle nous avons fait l'hypothèse de non-annulation de la courbure de Gauss de S. Notons que ce déterminant évalué en $(x(\eta), \eta)$ reste non nul sur un η-voisinage de η_N.
On peut donc appliquer la proposition II.2.1 à chaque point critique non dégénéré $x(\eta)$, si le support de $\tilde{\psi}$ est suffisamment petit (cas auquel on se ramène via une partition de l'unité), ce qui donne (III.5).
- Si $\eta \in \mathbb{S}^n$ est suffisamment proche de $\eta_S = (0, ..., 0, -1)$, le raisonnement est le même.
- Dans le cas où η est ailleurs, on a
$$\nabla_x \Phi(x, \eta) = (\eta_1, ..., \eta_n) + \eta_{n+1} \nabla \phi(x).$$
De plus,
$$\left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \right)^{1/2} \geq c > 0 \text{ et } \nabla \phi(x) = \mathcal{O}(x) \text{ quand } x \to 0.$$
Donc, si le support de $\tilde{\phi}$ est suffisamment proche de l'origine, on a :
$$|\nabla_x \Phi(x, \eta)| \geq c' > 0,$$
et on applique la proposition II.1.1, ce qui conclut la preuve.

□

III.2. **Sous-variétés de type fini.**

On présente maintenant le même genre d'estimations, mais dans le cas d'une sous-variété de type fini. Soit S une sous-varité C^∞ de $\mathbb{R}^n$ de dimension m avec $1 \leq m \leq n-1$. On se donne un point sur S et on regarde S au voisinage de celui-ci, de sorte que S soit l'image d'une immersion C^∞ $\phi : U \to \mathbb{R}^n$, où U est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^m$.
On suppose que pour tout point $x_0 \in U$, et tout vecteur unitaire $\eta \in \mathbb{R}^n$, il existe un multi-indice α de longueur supérieure à 1 tel que
$$\partial_x^\alpha [\phi(x) \cdot \eta]|_{x=x_0} \neq 0.$$
Notons que si (x', η') est assez proche de (x_0, η), on a
$$\partial_x^\alpha [\phi(x) \cdot \eta']|_{x=x'} \neq 0.$$
Le plus petit k tel que, pour tout vecteur unitaire η, il existe α avec $1 \leq |\alpha| \leq k$ tel que
$$\partial_x^\alpha [\phi(x) \cdot \eta]|_{x=x_0} \neq 0$$
est appelé le type de ϕ (et de S) en x_0.
Si $U_1 \subset U$ est compact, le type de ϕ dans U_1 est défini comme le maximum des types en $x_0 \in U_1$.

Théorème III.2.1.
Soit S une sous-variété C^∞ de dimension m dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que S est de type fini, et on pose $d\mu = \psi d\sigma$ comme précédemment. Alors :
$$\left| \widehat{d\mu(\xi)} \right| \leq A|\xi|^{-1/k}, \tag{III.6}$$
où k est le type de S sur le support de ψ.

Preuve.
Comme précédemment, on se ramène au cas où :
$$\int_S e^{-2i\pi x \cdot \xi} d\mu(x) = \int e^{-2i\pi \phi(x) \cdot \xi} \tilde{\psi}(x) dx,$$
avec $\tilde{\psi}$ de support aussi petit que l'on veut.

On écrit $\xi = \lambda\eta$, avec $\lambda > 0$ et η unitaire. On sait qu'il existe un multi-indice α de longueur inférieure à k tel que

$$\partial_x^\alpha [\phi(x) \cdot \eta] \neq 0$$

pour tout x dans le support de $\tilde{\psi}$, à condition que celui-ci soit assez petit. Il suffit alors d'appliquer la proposition II.2.1 pour conclure. □

III.3. **Théorème de restriction.**

Les estimations que nous venons d'établir pour les mesures de surfaces vont nous permettre d'obtenir une condition suffisante sur S pour pouvoir y définir la transformée de Fourier, ce qui est notre objectif. On se donne les mêmes hypothèses que précédemment, à savoir que S est une sous-variété C^∞ de dimension $m < n$ de $\mathbb{R}^n$. $d\sigma$ désigne toujours la mesure de Lebesgue induite sur S. On suppose de plus que $n \geq 2$. Soit $1 \leq p \leq 2$. Alors :

Théorème III.3.1. *On suppose que S est de type k. Alors il existe un indice $p_0 = p_0(S)$, avec $1 < p_0 < 2$, tel que S vérifie la propriété de restriction (P) avec $q = 2$ et $1 \leq p \leq p_0$. On a de plus :*

$$p_0 = \frac{2nk}{2nk-1}.$$

Preuve.
On note tout d'abord que le cas $p = 1$ ne présente pas de difficultés, donc on suppose $p > 1$.
Via une partition de l'unité, il suffit de prouver que pour toute fonction ψ bien choisie (qui permet d'appliquer le théorème précédent), C^∞ à support compact,

$$\left(\int_S |\widehat{f}(\xi)|^2 \psi(\xi) d\sigma(\xi) \right)^{1/2} \leq A \cdot \|f\|_p, \text{ pour } f \in \mathcal{S}.$$

Comme précédemment, on pose $d\mu = \psi d\sigma$.
Nos considérations nous amènent à regarder l'opérateur R définit pour $f \in \mathcal{S}$ par

$$Rf(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi x\cdot\xi} f(x) dx.$$

Nous souhaitons prouver que celui-ci est borné de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(S, d\mu)$.

Nous allons pour ceci devoir considérer l'adjoint (formel) de R, donné pour $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$R^* f(x) = \int_S e^{2i\pi x\cdot\xi} f(\xi) d\mu(\xi).$$

On a :

$$\langle Rf, Rf \rangle_{L^2(S,d\mu)} = \langle R^*Rf, f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Donc pour prouver que

$$R : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^2(S, d\mu)$$

est borné, il suffit par l'inégalité de Hölder de montrer que

$$R^*R : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^{p'}(\mathbb{R}^n)$$

est borné, p' désignant l'exposant conjugué de p.
Or, par le théorème de Fubini, on a :

$$(R^*Rf)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_S e^{2i\pi\xi\cdot(x-y)} d\mu(\xi) \right) f(y) dy = (f * K)(x),$$

avec

$$K(x) = \widehat{d\mu}(-x).$$

Par le théorème III.2.1, on a

$$|K(x)| \leq A|x|^{-1/k},$$

et puisque K est bornée :

$$|K(x)| \leq A|x|^{-\gamma} \text{ pour } 0 \leq \gamma \leq 1/k.$$

Par l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev (voir annexe A), l'opérateur

$$f \to f * |x|^{-\gamma}$$

est borné de L^p dans L^q, dès que $1 < p < q < \infty$ et $1/q = 1/p - 1 + \gamma/n$.

Posant $q = p'$, (l'indice q ici est celui du théorème de Hardy-Littlewood-Sobolev, à ne pas confondre avec l'indice $q = 2$ de la propriété de restriction) on obtient la borne souhaitée sur R^*R, et donc sur R. De plus, on a $1/q = 1 - 1/p$, donc la restriction $0 \leq \gamma \leq 1/k$ devient $1 \leq p \leq (2nk)/(2nk-1)$, ce qui donne la valeur de p_0 annoncée et conclut la preuve. □

Remarque.
Insistons sur le fait que l'étape importante de la preuve était l'utilisation de la borne asymptotique sur $|\widehat{d\mu}(-x)|$. *On s'est ici placé dans le cas où cette borne était celle fournie par le théorème III.2.1.*
Cependant, si on se place dans cas $S = \mathbb{S}^{n-1}$, *la proposition III.1.1 permet de voir que le théorème est vrai pour*

$$1 \leq p \leq \frac{2n+2}{n+3}, \ \textit{ie} \ \frac{1}{p} - \frac{1}{p'} \geq \frac{2}{n+1}.$$

Il en est de même si S *vérifie les hypothèses du théorème III.1.1, à savoir que* S *est une hypersurface de courbure de Gauss non nulle.*
Il est donc possible d'obtenir des améliorations de l'indice p_0 *dans ces cas particuliers. Nous donnerons dans la suite une version encore améliorée (vis à vis des indices) du théorème, en ne se restreignant notamment plus au cas* $q = 2$.

IV. Intégrales oscillantes du second type

Les intégrales oscillantes du premier type étaient des intégrales avec un paramètre λ. Nous avons contrôlé leur comportement lorsque $\lambda \to +\infty$ par des conditions sur les points critiques de la phase. Ceci a permis d'estimer asymptotiquement des mesures supportées sur des surfaces, et avec ceci en main, nous avons pu prouver un théorème permettant de restreindre la transformée de Fourier à des hypersurfaces, et à des sous-variétés de type k.
Nous allons maintenant considérer des opérateurs (à paramètre) de la forme :

$$(T_\lambda f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\lambda\Phi(x,\xi)}\psi(x,\xi)f(x)dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda > 0.$$

Cet opérateur envoie des fonctions définies sur $\mathbb{R}^{n-1}$ sur des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$. On supposera que ψ est à support compact en (x, ξ).
Nous allons prouver des inégalités fonctionnelles (dépendantes du paramètre) pour ces opérateurs, et en les appliquant à un opérateur particulier, on va pouvoir prouver une version améliorée du théorème III.3.1.

IV.1. **Etude générale.**

Nous commençons par considérer l'opérateur $T_\lambda f$ qui envoie des fonctions f définies sur $\mathbb{R}^n$ sur des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$:

$$(T_\lambda f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\Phi(x,\xi)}\psi(x,\xi)f(x)dx. \tag{IV.1}$$

On prouve d'abord le lemme suivant :

Lemme IV.1.1.
Soit S *l'opérateur donné par*

$$(Sf)(x) = \int s(x,y)f(y)dy,$$

où

$$\sup_x \int |s(x,y)|dy \leq 1, \quad \textit{et} \quad \sup_y \int |s(x,y)|dx \leq 1.$$

Alors

$$S : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n), \quad \|S\| \leq 1.$$

Preuve.

$$\|S\| = \sup |\langle Sf, g\rangle| = \sup \left| \int \int s(x,y)f(x)\overline{g}(y)dydx \right|,$$

le sup étant pris sur les fonctions f et g de la boule unité fermée de L^2. Comme
$$|f\overline{g}| \leq \frac{1}{2}\left(|f|^2 + |g|^2\right),$$
on peut borner toute ces intégrales par
$$\frac{1}{2}\left[\int\int |s(x,y)||f(y)|^2 dydx + \int\int |s(x,y)||g(x)|^2 dydx\right].$$
Dans la première intégrale, on intégre d'abord par rapport à x, et dans la seconde par rapport à y. On effectue alors le passage à la borne sup en utilisant les deux hypothèses de l'énoncé, et le résultat suit facilement. □

Passons maintenant à une première inégalité fonctionnelle :

Proposition IV.1.1.
Supposons que Φ est C^∞ à valeurs réelles, et que
$$\det\left(\frac{\partial^2\Phi(x,\xi)}{\partial x_i \partial \xi_j}\right)_{i,j} \neq 0 \tag{IV.2}$$
sur le support de ψ. Alors
$$\|T_\lambda f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq A\lambda^{-n/2}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{IV.3}$$

Preuve.
Quitte à utiliser une partition de l'unité, on peut supposer que le support de ψ est assez petit. Pour prouver le résultat, il suffit de voir que la norme d'opérateur de $T_\lambda T_\lambda^*$ est bornée par $A\lambda^{-n}$, où T_λ^* désigne l'adjoint de T_λ, donné par :
$$\left(T_\lambda^* f\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\Phi(x,\xi)}\overline{\psi}(x,\xi)f(\xi)d\xi.$$
Via le théorème de Fubini,
$$\left(T_\lambda T_\lambda^* f\right)(\xi) = \int K_\lambda(\xi,\eta)f(\eta)d\eta,$$
où
$$K_\lambda(\xi,\eta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda[\Phi(x,\xi)-\Phi(x,\eta)]}\psi(x,\xi)\overline{\psi}(x,\eta)dx \tag{IV.4}$$
L'idée est donc d'obtenir une borne convenable sur K_λ.
Notons $M(x,\xi)$ la matrice $\left(\frac{\partial^2\Phi(x,\xi)}{\partial x_i\partial\xi_j}\right)_{i,j}$, et pour $a \in \mathbb{R}^n$, $\nabla_x^a = \langle a, \nabla_x\rangle$ l'opérateur de différentiation dans la direction a.
Pour un couple (ξ,η) fixé, posons
$$\Delta = \Delta(x,\xi,\eta) = \nabla_x^{a(x)}\left[\Phi(x,\xi) - \Phi(x,\eta)\right], \quad a(x) \in \mathbb{R}^n.$$
Alors
$$\Delta = \langle M(x,\xi)\cdot[a(x)], \xi-\eta\rangle + \mathcal{O}\left(|\xi-\eta|^2\right).$$
Les hypothèses nous autorisent à choisir
$$a(x) = M(x,\xi)^{-1}\left(\frac{\xi-\eta}{|\xi-\eta|}\right),$$
de sorte que
$$\langle M(x,\xi)\cdot[a(x)], \xi-\eta\rangle = |\xi-\eta|.$$
Donc
$$|\Delta(x,\xi,\eta)| \geq c|\xi-\eta| \quad \forall(\xi,\eta)\in supp(K_\lambda),$$
à condition que le support de ψ soit suffisamment petit, ce que l'on peut supposer.
Ceci, combiné au fait que Δ soit C^∞, nous permet de considérer l'opérateur
$$D_x = \left[i\lambda\Delta(x,\xi,\eta)\right]^{-1}\nabla_x^{a(x)}.$$
En utilisant la même technique d'intégration par parties qu'auparavant, on peut écrire
$$K_\lambda(\xi,\eta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda[\Phi(x,\xi)-\Phi(x,\eta)]}\left({}^tD_x\right)^N\left[\psi(x,\xi)\overline{\psi}(x,\eta)\right]dx,$$
et obtenir la borne
$$|K_\lambda(\xi,\eta)| \leq A_N\left(1+\lambda|\xi-\eta|\right)^{-N}, \quad N \geq 0.$$

On prend alors $N > n$, et on applique le lemme précédent à l'opérateur $T_\lambda T_\lambda^*$. Ceci permet de borner sa norme par

$$A' \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{(1+\lambda|\xi|)^N} = A\lambda^{-n},$$

ce qui conclut. □

On va maintenant passer à une seconde inégalité fonctionnelle, plus difficile à mettre en place, dont résultera la version améliorée du théorème de restriction.
On considère désormais l'opérateur

$$(T_\lambda f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\lambda\Phi(x,\xi)} \psi(x,\xi) f(x) dx,$$

qui envoie des fonctions définies sur $\mathbb{R}^{n-1}$ vers des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$, et son adjoint

$$(T_\lambda^* f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\Phi(x,\xi)} \overline{\psi}(x,\xi) f(\xi) d\xi.$$

ψ est toujours à support compact en (x,ξ), et on suppose que pour tout (x^0,ξ^0) dans le support de ψ, la forme bilinéaire donnée sur $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^n$ par

$$B(u,v) = \langle v, \nabla_x \rangle \langle u, \nabla_\xi \rangle \cdot \Phi(x,\xi)\big|_{(x^0,\xi^0)}$$

est de rang maximal $n-1$.
Ceci implique qu'il existe un unique vecteur (au signe près) unitaire $\tilde{u}$ tel que la fonction

$$F : x \mapsto \langle \tilde{u}, \nabla_\xi \rangle \cdot \Phi(x, \xi^0)$$

ait un point critique en $x = x^0$.
On va supposer que celui-ci est non dégéréré, *ie* que

$$\det \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F(x) \right) \neq 0$$

en $x = x^0$.

Théorème IV.1.1. *Sous ces hypothèses,*

$$\|T_\lambda f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq A\lambda^{-n/q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}, \tag{IV.5}$$

avec $q = \left(\frac{n+1}{n-1}\right) p'$, $1 \leq p \leq 2$ *et où* p' *est l'exposant conjugé de* p.

Version duale équivalente :

$$\|T_\lambda^* f\|_{L^q(\mathbb{R}^{n-1})} \leq A\lambda^{-n/p'} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

où $q = \left(\frac{n-1}{n+1}\right) p'$ *et* $1 \leq p \leq (2n+2)/(n+3)$.

Preuve.
On commence par remarquer que le cas $p = 1$ (donc $q = \infty$) est facile à obtenir. On va donc prouver le cas $p = 2$, pour ensuite obtenir tous les autres par interpolation. La version duale (équivalente) de ce dernier est

$$\|T_\lambda^* f\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})} \leq A\lambda^{-n/r'} \|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)},$$

avec $r' = (2n+2)/(n-1)$ et $r = (2n+2)/(n+3)$.
On peut écrire

$$\|T_\lambda^* f\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} K_\lambda(\xi,\eta) f(\xi) \overline{f}(\eta) d\xi d\eta,$$

avec

$$K_\lambda(\xi,\eta) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\lambda[\Phi(x,\eta)-\Phi(x,\xi)]} \psi(x,\eta) \overline{\psi}(x,\xi) dx \tag{IV.6}$$

Posons $U = T_\lambda T_\lambda^*$, de sorte que $\|T_\lambda^* f\|_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}^2 = \langle Uf, f \rangle$. Par l'inégalité de Hölder, il suffit ainsi de prouver que

$$\|Uf\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)} \leq A\lambda^{-2n/r'} \|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}.$$

Pour prouver cela, l'idée est de plonger U dans une famille d'opérateurs analytiques $\{U^s\}$ dans la bande $(1-n)/2 \leq \Re(s) \leq 1$, puis d'utiliser un lemme d'interpolation complexe (voir annexe B). Plus précisément, on aura $U^0 = U$ et

$$\left\{ \begin{array}{ll} \|U^s f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq A\lambda^{-n} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} & \text{si } \Re(s) = 1, \\ \|U^s f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq A \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} & \text{si } \Re(s) = (1-n)/2. \end{array} \right. \tag{IV.7}$$

Le problème est donc de construire ces opérateurs.

Pour cela, on commence par étendre la phase Φ définie sur $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^n$ à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Pour $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $y \in \mathbb{R}$, on note $\tilde{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^n$. On étend alors Φ par

$$\tilde{\Phi}(\tilde{x}, \xi) = \Phi(x, \xi) + y\Phi_0(\xi),$$

où $\Phi_0(\xi)$ est choisie de telle sorte que

$$\langle u, \nabla_\xi \rangle \cdot \Phi_0(\xi) \neq 0,$$

de sorte que le déterminant de la Hessienne de $\tilde{\Phi}$ ne s'annule jamais.

Fixons maintenant ζ de classe C^∞ à support compact telle que $\zeta(y) = 1$ pour $|y| \leq 1$, et considérons la famille de fonctions (vues comme distributions ici) $\{\alpha_s\}$ sur $\mathbb{R}$ donnée par prolongement analytique de la famille de fonctions $\{\alpha_s\}$ initialement données pour $\Re(s) > 0$ par

$$\alpha_s(y) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{e^{s^2}}{\Gamma(s)} y^{s-1}\zeta(y) & \text{si } y > 0, \\ 0 & \text{si } y \leq 0. \end{array} \right.$$

Précisons que le facteur $\frac{e^{s^2}}{\Gamma(s)}$ tend vers 0 en $s = 0, -1, -2, ...$ et est rapidement décroissant en $s = \sigma + it$ quant $t \to +\infty$ et σ est dans une bande fixée. Ceci découle des propriétés de la fonction Γ, et constitue la raison de la présence de ce facteur dans la définition précédente.
Prouvons le prolongement analytique dont nous parlions. Pour cela, on se donne un entier N et une fonction $\phi \in \mathcal{S}$. En faisant N intégrations par parties successives, on a :

$$\alpha_s(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_s(y)\phi(y)dy = (-1)^N \frac{e^{s^2}}{\Gamma(s)C_N(s)} \int_0^{+\infty} y^{N+s-1} \left(\frac{d}{dy}\right)^N [\zeta(y)\phi(y)]\, dy, \tag{IV.8}$$

où $C_N(s) = (N+s-1)(N+s-2)...s$.
Cette identité prolonge analytiquement α_s pour $\Re(s) > -N$, et donc à $\mathbb{C}$ tout entier.

Remarquons que si l'on prend $N = 1$ dans (IV.8) et que l'on fait tendre $s \to 0$, on obtient

$$\alpha_0(\phi) = \zeta(0)\phi(0) = \phi(0),$$

et donc

$$\alpha_0 = \delta_0, \tag{IV.9}$$

la mesure de Dirac en 0.

Par ailleurs, on dispose de l'estimation

$$\left| \int \alpha_s(y) e^{iyu} dy \right| \leq A_\sigma (1+|u|)^{-\sigma}, \quad s = \sigma + it,\ \sigma \leq 1. \tag{IV.10}$$

(L'intégrale est définie par prolongement analytique.)
En effet, soit $\tilde{\zeta}$ une fonction C^∞ à support compact telle que $\tilde{\zeta}(y) = 1$ sur le support de ζ. Prenons $\phi(y) = e^{iyu}\tilde{\zeta}(y)$. On a

$$\int \alpha_s(y) e^{iyu} dy = \int \alpha_s(y)\phi(y)dy,$$

de sorte que si $-N < \sigma \leq -N+1$, la formule (IV.8) permet de se ramener au cas $0 < \sigma \leq 1$.
Dans ce cas, on remarque que (IV.10) est claire quand $|u|$ est petit, puisque α_s est intégrable. Sinon, pour $|u|$ assez grand, on écrit :

$$\int \alpha_s(y) e^{iuy} dy = \int_0^{1/|u|} \alpha_s(y) e^{iuy} dy + \int_{1/|u|}^\infty \alpha_s(y) e^{iuy} dy.$$

Clairement,

$$\int_0^{1/|u|} \alpha_s(y) e^{iuy} dy = \mathcal{O}\left(\int_0^{1/|u|} y^{\sigma-1} dy\right) = \mathcal{O}\left(|u|^{-\sigma}\right).$$

Pour la seconde intégrale, on applique la formule (I.4) du corollaire de la proposition I.1.2 dans le cas $k=1$. On obtient alors

$$\int_{1/|u|}^{\infty} \alpha_s e^{iuy} dy = \mathcal{O}\left(|u|^{-1} \cdot |u|^{1-\sigma}\right) = \mathcal{O}\left(|u|^{-\sigma}\right),$$

et on obtient donc (IV.10).

On a maintenant assez d'éléments pour définir la famille $\{U^s\}$. On pose

$$K^s(\xi,\eta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\left[\tilde{\Phi}(\tilde{x},\eta) - \tilde{\Phi}(\tilde{x},\xi)\right]} \psi(x,\eta)\overline{\psi}(x,\xi)\alpha_s(y) dx dy, \tag{IV.11}$$

qui est définie par prolongement analytique, puis

$$U^s f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} K^s(\xi,\eta) f(\eta) d\eta.$$

Remarquons que $U^0 = U$ en vertu de (IV.9).

Observons que pour $\Re(s) = 1$, la définition (IV.11) est donnée par convergence des intégrales, et non par prolongement analytique, et que U^s est en fait donné par la composition $S_2 \circ S_1$, où

$$\left(S_1 f\right)(\tilde{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda\tilde{\Phi}(\tilde{x},\eta)} \psi(x,\eta)\tilde{\zeta}(y) f(\eta) d\eta$$

et

$$\left(S_2 g\right)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\tilde{\Phi}(\tilde{x},\xi)} \overline{\psi}(x,\eta)\zeta(y)|y|^{s-1} \frac{e^{s^2}}{\Gamma(s)} g(\tilde{x}) d\tilde{x}.$$

Ces deux opérateurs vérifient les conditions de la proposition IV.1.1 puisque la Hessienne de $\tilde{\Phi}$ est de déterminant non nul. Il en résulte l'inégalité L^2 de (IV.7).

L'inégalité (L^1, L^∞) de (IV.7) va résulter (facilement) de

$$|K^s(\xi,\eta)| \leq A \quad \text{pour } \Re(s) = (1-n)/2. \tag{IV.12}$$

Pour prouver ceci, notons $\widehat{\alpha_s}(u)$ le prolongement analytique de $\displaystyle\int \alpha_s(y) e^{iuy} dy$.

La combinaison des formules (IV.6) et (IV.11), ainsi que la définition de $\tilde{\Phi}$, permettent de voir que

$$K^s(\xi,\eta) = K_\lambda(\xi,\eta) \cdot \widehat{\alpha_s}\left(\lambda\left[\Phi_0(\eta) - \Phi_0(\xi)\right]\right).$$

Or on a vu (IV.10) que

$$|\widehat{\alpha_s}(u)| \leq A(1+|u|)^{(n-1)/2},$$

et donc il nous suffit (ce point sera détaillé) de prouver que

$$|K_\lambda(\xi,\eta)| \leq A(1+\lambda|\xi-\eta|)^{(1-n)/2}. \tag{IV.13}$$

Pour voir ceci, on commence par supposer que ψ est supportée dans un voisinage suffisamment petit d'un point (x^0,ξ^0), cas auquel on peut se ramener en utilisant une partition de l'unité. Posons

$$\Psi(x,\xi,\eta) = \Phi(x,\eta) - \Phi(x,\xi).$$

Un calcul permet de voir que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left[\Psi(x,\xi,\eta) - \nabla_\xi \Phi(x,\xi)\cdot(\eta-\xi)\right] = \mathcal{O}\left(|\xi-\eta|^2\right) \tag{IV.14}$$

pour tout multi-indice α.
On a alors deux cas possibles :

- La direction de $\eta - \xi$ ou celle de $\xi - \eta$ est proche de celle de $\tilde{u}$.
- Le cas contraire.

Dans le premier cas, l'hypothèse sur les points critiques de la fonction

$$F : x \mapsto \langle \tilde{u}, \nabla_\xi \rangle \cdot \Phi(x, \xi^0),$$

combinée à l'estimation (IV.14) et à la continuité du déterminant permet de voir que le déterminant de la Hessienne de

$$x \mapsto \Psi(x, \xi, \eta)$$

est en valeur absolue supérieur à $|\xi - \eta|^{n-1}$. On peut alors obtenir (IV.13) en appliquant la proposition II.2.1 : Celle-ci permet d'écrire une estimation de la forme

$$|K_\lambda(\xi, \eta)| \leq A\lambda^{(1-n)/2}|a_0|,$$

où a_0 est le premier coefficient du développement asymptotique donné par la proposition II.2.1. La remarque qui suit celle-ci combinée à l'estimation précédente sur le déterminant de la Hessienne de Ψ permet de majorer

$$|a_0| \leq C|\xi - \eta|^{(1-n)/2},$$

ce qui donne (IV.13).

Dans l'autre cas, $\nabla_x \nabla_\xi \Phi(x, \xi)$ est de rang $n - 1$ et $\eta - \xi$ est "loin" des directions critiques $\tilde{u}$ et $-\tilde{u}$. Donc

$$|\nabla_x \Psi(x, \xi, \eta)| \geq c|\xi - \eta|.$$

On applique alors la proposition II.1.1 :

$$K_\lambda(\xi, \eta) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i\lambda(\xi-\eta)\left[\frac{\Phi(x,\eta)-\Phi(x,\xi)}{\xi-\eta}\right]} \psi(x, \eta)\overline{\psi}(x, \xi)dx = \mathcal{O}\left(\lambda|\xi - \eta|^{-N}\right) \quad \forall N \geq 0,$$

quand $\lambda|\xi - \eta| \to +\infty$, ce qui donne (IV.13) via un choix convenable de N.

Avec (IV.13) en main, on peut écrire

$$|K_\lambda(\xi, \eta) \cdot \widehat{\alpha_s} \left(\lambda \left[\Phi_0(\eta) - \Phi_0(\xi)\right]\right)| \leq A(1 + \lambda|\xi - \eta|)^{(1-n)/2} \cdot (1 + |(\lambda \left[\Phi_0(\eta) - \Phi_0(\xi)\right])|)^{(n-1)/2}.$$

Or

$$|\Phi_0(\eta) - \Phi_0(\xi)| \leq C|\xi - \eta|$$

par les accroissements finis.
On en déduit (IV.12), et avec l'inégalité (L^1, L^∞) de (IV.7).

On applique alors le lemme d'interpolation complexe (voir Annexe B) à la famille $\{U^s\}$, avec $b = 1$; $a = (1 - n)/2$; $\theta = (n - 1)/(n + 1)$; $(p_0, q_0) = (1, \infty)$; $(p_1, q_1) = (2, 2)$; $M_0 = A$ et $M_1 = A\lambda^{-n}$.

Ainsi,

$$\|Uf\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^n)} \leq A\lambda^{-2n/r'} \|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)},$$

avec $r' = (2n + 2)/(n - 1)$ et $r = (2n + 2)/(n + 3)$.
Comme nous l'avions expliqué, ceci prouve le théorème dans le cas $(p = 2, q = 2(n + 1)/(n - 1))$. Le cas $(p = 1, q = \infty)$ étant facile à obtenir, on obtient la version complète du théorème en utilisant le lemme avec $U^s = T_\lambda$, ou bien le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin. $\square$

IV.2. **Retour au théorème de Restriction.**

L'inégalité fonctionnelle fournie par le théorème précédent va nous permettre d'améliorer le théorème III.3.1, à condition de se restreindre à des hypersurfaces de courbure de Gauss non nulle (partout).

Théorème IV.2.1.
Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ une hypersurface de courbure de Gauss jamais nulle, et S_0 un sous-ensemble compact de S. Alors

$$\left(\int_{S_0} |\widehat{f}(\xi)|^q d\sigma(\xi)\right)^{1/q} \leq A(S_0) \cdot \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad f \in \mathcal{S} \tag{IV.15}$$

dès que

$$1 \leq p \leq \frac{2n+2}{n+3} \quad et \quad q = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)p', \quad où \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Preuve.
Comme on l'a déjà fait auparavant, on peut supposer que S est donnée par le graphe

$$x_n = \phi(x_1, ..., x_{n-1}) = \phi(x'), \quad \phi(0) = \nabla\phi(0) = 0$$

au voisinage d'un point de S_0 que l'on a ramené à l'origine. De plus

$$\det\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}\right)(x') \neq 0$$

pour x' assez petit.
On a

$$d\sigma(x) = \left(1 + |\nabla\phi|^2\right)^{1/2} dx',$$

et via le changement de variable $x = (x', \phi(x'))$, on se ramène à montrer

$$\left(\int |\widehat{f}(x', \phi(x'))|^q \tilde{\psi}(x') dx'\right)^{1/q} \leq A \|f\|_p, \tag{IV.16}$$

où $\tilde{\psi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est à support compact, que l'on peut supposer assez petit quitte à utiliser une partition de l'unité.
Ceci invite à considérer l'opérateur

$$\left(T_\lambda^* f\right)(x') = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\Phi(x',\xi)} \tilde{\psi}(x') \psi_0(\xi) f(\xi) d\xi,$$

où

$$\Phi(x', \xi) = 2\pi(x' \cdot \xi' + \phi(x')\xi_n),$$

et où $\psi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est à support compact avec $\psi_0(0) = 1$.

La phase Φ vérifie les conditions du théorème précédent (avec notamment $x_0 = 0$ et $\tilde{u} = (0, ..., 0, 1)$). Appliquant la version duale de celui-ci, on a

$$\|T_\lambda^* f\|_{L^q(\mathbb{R}^{n-1})} \leq A\lambda^{-n/p'} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

avec p et q satisfaisant les conditions données dans l'énoncé.
Dans cette inégalité, on remplace f par f_λ, donnée par $f_\lambda(\xi) = f(\lambda\xi)$, et on effectue le changement de variable que cela suggère. Il reste alors à constater que

$$\|f_\lambda\|_p = \lambda^{-n/p} \|f\|_p,$$

et que

$$\psi_0(\xi/\lambda) \to 1$$

quand $\lambda \to +\infty$ pour obtenir (IV.16), puis (IV.15), et donc le théorème. □

Remarque. *Comme précédemment, la densité de l'espace de Schwarz $\mathcal{S}$ dans L^p permet alors de restreindre la transformée de Fourier de $f \in L^p$, si p vérifie les conditions du théorème.*

IV.3. **Inversion de Fourier - Sommabilité de Bochner-Riesz.**

Comme application de l'étude des intégrales oscillantes de second type, nous nous intéressons ici au problème suivant : Considérons $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Peut-on donner un sens à la formule d'inversion de Fourier

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi x\cdot\xi} d\xi, \quad \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2i\pi x\cdot\xi} dx\ ?$$

Il est connu que la réponse est oui pour par exemple $f \in L^2$, ou pour $f \in L^1$ telle que $\widehat{f} \in L^1$. Nous allons essayer de voir si c'est également le cas pour d'autres indices $p > 1$. L'idée de la "Sommabilité de Bochner-Riesz" est de considérer le problème en terme de sommabilité, au sens où l'on se demande si l'assertion

$$f(x) = \lim_{R\to+\infty} \int_{|\xi|\leq R} \widehat{f}(\xi) \left(1 - \frac{|\xi|^2}{R^2}\right)^\delta e^{2i\pi x\cdot\xi} d\xi \tag{IV.17}$$

est valable pour un certain δ convenable.

En dimension 1, peut montrer que (IV.17) est valable presque partout , et ce pour n'importe quelle $f \in L^p$ avec $1 < p < \infty$. Il s'agit du

Théorème IV.3.1 (Carleson-Hunt).
Pour $f \in L^p(\mathbb{R})$, avec $1 < p < \infty$,

$$f(x) = \lim_{R \to +\infty} \int_{|\xi| \le R} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi x \cdot \xi} d\xi$$

pour presque-tout $x \in \mathbb{R}$.

C'est un résultat que nous mentionnons à titre de remarque. Nous ne le prouverons pas.

Toujours en dimension 1, on peut voir que dans le cas $\delta > 0$, l'intégrale dans (IV.17) est en fait la convolution entre f et une approximation de l'unité quand $R \to +\infty$, qui converge donc vers f au sens de $\|.\|_p$. Ainsi, (IV.17) a encore un sens.

Passons au cas $n \geq 2$. On va s'intéresser à (IV.17) en terme de convergence en norme. Nous allons donc regarder si l'opérateur

$$f(x) \mapsto \left(S^\delta f\right)(x) = \int_{|\xi| \le 1} \widehat{f}(\xi)(1 - |\xi|^2)^\delta e^{2i\pi x \cdot \xi} d\xi \tag{IV.18}$$

est borné de L^p dans lui-même.
Posant

$$K^\delta(x) = \int_{|\xi| \le 1} (1 - |\xi|^2)^\delta e^{2i\pi x \cdot \xi} d\xi,$$

on peut écrire

$$\left(S^\delta f\right) = f * K^\delta.$$

Il est alors possible de donner deux résultats immédiats :
-Lorsque $\delta > (n-1)/2$, K^δ est intégrable, et il est alors connu que $S^\delta f \in L^p$, $1 \le p \le \infty$ (dès que f est dans le même espace).
-Lorsque $\delta = 0$, c'est également le cas pour $p = 2$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Le problème est donc d'étudier le cas $n \geq 2;\ 0 < \delta \le (n-1)/2$, ce que nous allons faire. Plus précisément, nous allons prouver la

Proposition IV.3.1.
L'opérateur S^δ, défini pour $S \in \mathcal{S}$ par la formule (IV.18), s'étend en un opérateur borné de $L^p(\mathbb{R}^n)$ dans lui-même dès que

$$\frac{2n}{n+1+2\delta} < p < \frac{2n}{n-1-2\delta}$$

et

$$1 \le p \le \frac{2(n+1)}{n+3} \quad \textit{ou} \quad \frac{2(n+1)}{n-1} \le p \le \infty.$$

Avant de prouver ce résultat, on commence par donner une réécriture de l'opérateur K^δ :

Lemme IV.3.1.

$$K^\delta(x) = \pi^{-\delta}\Gamma(1+\delta)|x|^{-(n/2)-\delta} J_{n/2+\delta}(2\pi|x|),$$

où J est la fonction de Bessel donnée par (I.12).

Preuve.
Il s'agit juste d'un calcul qui utilise quelques formules connues. On rappelle les grandes lignes de la méthode. Tout d'abord, rappelons que la transformée de Fourier d'une fonction radiale $f(x) = f_0(|x|)$ est donnée par

$$\widehat{f}(\xi) = 2\pi|\xi|^{(2-n)/2} \int_0^{+\infty} J_{(n-2)/2}(2\pi|\xi|r) f_0(r) r^{n/2} dr$$

Pour voir ceci, il suffit d'écrire la définition de la transformée de Fourier, de faire un changement de variable polaire (qui s'écrit en dimension n $r^{n-1} dr d\sigma$, avec $d\sigma$ la mesure de Lebesgue induite sur la sphère unité).

On voit alors apparaitre $\widehat{d\sigma}$, et on utilise la formule (III.2).
Rappelons aussi la formule des compléments (que l'on ne redémontre pas) :

$$u^{\delta+\beta} = \frac{\Gamma(\delta+\beta+1)}{\Gamma(\delta+1)\Gamma(\beta)} \int_0^u (u-s)^{\beta-1} s^\delta ds.$$

Combinant celle-ci et la formule (I.12), on obtient l'identité

$$J_{u+v+1}(t) = \frac{t^{v+1}}{2^v\Gamma(v+1)} \int_0^1 J_u(ts)(1-s^2)^v ds.$$

En remarquant qu'après le changement de variable $\xi \mapsto -\xi$, K^δ est la transformée de Fourier d'une fonction radiale, on combine la formule de transformation de Fourier d'une fonction radiale avec la dernière identité pour obtenir la formule du lemme. On pourra si nécessaire trouver les détails de ces calculs dans le chapitre 4 de [2]. □

Remarque.
La formule asymptotique (I.11) montre en particulier que K^δ *est borné, et que*

$$K^\delta(x) \sim |x|^{-(n+1)/2-\delta} \left[e^{2i\pi|x|} \sum_{j=0}^\infty \alpha_j |x|^{-j} + e^{-2i\pi|x|} \sum_{j=0}^\infty \beta_j |x|^{-j} \right], \tag{IV.19}$$

lorsque $|x| \to +\infty$.

Nous pouvons maintenant prouver la proposition IV.3.1 et ainsi donner un sens à la formule d'inversion de Fourier dans des espaces L^p convenables.

Preuve. (de la proposition IV.3.1)
Rappelons que S^δ est donné (initialement pour $f \in \mathcal{S}$) par la convolution

$$S^\delta f = f * K^\delta.$$

Aussi, nous avions vu le développement asymptotique

$$K^\delta(x) \sim |x|^{-(n+1)/2-\delta} \left[e^{2i\pi|x|} \sum_{j=0}^\infty \alpha_j |x|^{-j} + e^{-2i\pi|x|} \sum_{j=0}^\infty \beta_j |x|^{-j} \right],$$

lorsque $|x| \to +\infty$.
Écrivons

$$f * K^\delta(x) = \int_{|y|<1} f(x-y)K^\delta(y)dy + \int_{|y|\geq 1} f(x-y)K^\delta(y)dy.$$

La première intégrale, notons la $I(x)$, est la convolution entre f et la fonction $K^\delta \mathbb{1}_{\{|y|<1\}}(y)$, qui est intégrable. Ainsi donc,

$$\|I\|_p \leq A \|f\|_p .$$

Il nous reste donc à obtenir une inégalité du même type pour la seconde intégrale, que nous notons J.
Utilisant le développement asymptotique rappelé ci-dessus, on peut écrire J comme une somme finie comme suit :
On a d'abord un premier terme, qui correspond au premier terme du développement asymptotique, qui est une somme de deux opérateurs donnés par

$$(Tf)(x) = \int_{|y|\geq 1} e^{\pm 2i\pi|y|} f(x-y)|y|^{-(n+1)/2-\delta} dy, \tag{IV.20}$$

à une constante multiplicative près.
Nous avons ensuite une somme finie d'opérateurs du même type, où le terme $|y|^{-(n+1)/2-\delta}$ est remplacé par $|y|^{-(n+1)/2-\delta-j}$ avec $j > 0$. Ces opérateurs sont donc "meilleurs" que celui donné par (IV.20) au sens où ils vérifient une inégalité fonctionnelle (du type de celle que l'on cherche) dès que (IV.20) la vérifie.
Enfin, lorsque j atteint un certain rang, les opérateurs sont dans L^1, et ne posent donc aucun problème pour obtenir une inégalité fonctionnelle comme on le souhaite.
Ainsi donc, il nous suffit de considérer le terme (IV.20).
Considérons la fonction η de classe C^∞ à support compact qui vérifie $\eta(y) = 1$ si $|y| \leq 1$ et $\eta(y) = 0$ si $|y| \geq 2$, et posons

$$\psi(y) = |y|^{-(n+1)/2-\delta} \left[\eta(y) - \eta(2y)\right].$$

Celle-ci est de classe C^∞ et supportée dans la couronne $1/2 \leq |y| \leq 2$. De plus, elle permet d'écrire l'identité

$$|y|^{-(n+1)/2-\delta} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-[(n+1)/2+\delta]k} \cdot \psi\left(y/2^k\right).$$

Il s'agit là d'une technique de décomposition dyadique, que l'on ne redémontre pas. On pourra se référer au chapitre 4 de [1] pour une explication détaillée de celle-ci. Ceci permet d'écrire

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} T_k, \quad \text{avec} \quad (T_k f)(x) = 2^{-[(n+1)/2-\delta]k} \int e^{2i\pi|y|} f(x-y)\psi\left(y/2^k\right) dy.$$

La norme d'opérateur de T_k, en tant qu'opérateur de L^p dans lui même, est alors donnée par

$$\|T_k\| = 2^{-[(n+1)/2+\delta]k} \cdot \|G_{2\pi 2^k}\| \cdot 2^{nk}.$$

L'opérateur G est donné dans le lemme IV.3.2 que nous prouverons ci-dessous. On a alors

$$\|T_k\| \leq A 2^{-[(n+1)/2+\delta]k} \cdot 2^{-nk/p'} \cdot 2^{nk},$$

avec $1 \leq p \leq 2(n+1)/(n+3)$. Ce dernier point est une conséquence du lemme IV.3.2 que nous allons prouver ci-dessous. Admettons pour le moment cette dernière inégalité.
Le terme de droite est le terme général d'une série qui est convergente si et seulement si

$$-\left[\frac{n+1}{2} + \delta\right] - \frac{n}{p'} + n < 0 \Leftrightarrow p > \frac{2n}{n+1+2\delta}.$$

Ceci donne la conclusion voulue pour T, puis pour S^δ, pour $1 \leq p \leq \frac{2(n+1)}{(n+3)}$ et $p > \frac{2n}{n+1+2\delta}$. Par dualité, on obtient le résultat pour $\frac{2(n+1)}{n-1} \leq p < \infty$ et $p < \frac{2n}{n-1-2\delta}$, ce qui conclut. $\square$

Il reste donc à prouver l'inégalité fonctionnelle que nous avons admise dans la preuve précédente. Celle-ci résulte du lemme suivant :

Lemme IV.3.2.
Considérons l'opérateur donné par

$$(G_\lambda f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda|x-y|} \psi(x-y) f(y) dy, \tag{IV.21}$$

où ψ est une fonction C^∞ à support compact nulle sur un voisinage de l'origine.
Alors

$$\|G_\lambda f\|_p \leq A \lambda^{-n/p'} \|f\|_p, \tag{IV.22}$$

pour $1 \leq p \leq (2n+2)/(n+3)$, p' désignant toujours l'exposant conjugué de p.

Preuve.
Dans le but d'utiliser le théorème IV.1.1, on commence par considérer l'opérateur

$$\left(\tilde{G}_\lambda f\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda|x-y|} \tilde{\psi}(x,y) f(y) dy,$$

avec $\tilde{\psi}$ de classe C^∞ à support compact en (x,y). On demande de plus que le support de $\tilde{\psi}$ ne rencontre pas la diagonale $\{(x,y), x = y\}$.
On écrit $x = (x', x_n)$, avec

$$x' = (x_1, ..., x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \quad \text{et} \quad x_n \in \mathbb{R}.$$

Fixons x_n, et posons

$$\left(\tilde{G}_\lambda f\right)(x) = (T^*_\lambda f)(x'),$$

ce dernier élément étant une intégrale oscillante de second type.
Utilisant la même écriture $y = (y', y_n)$, la phase Φ (au sens des intégrales oscillantes de type deux) est ici donnée par

$$\Phi(x', y) = -\left(|x'-y'|^2 + |x_n - y_n|^2\right)^{1/2}.$$

Φ vérifie les hypothèses du théorème IV.1.1, avec notamment

$$\tilde{u} = \frac{x-y}{|x-y|}.$$

Invoquant la version duale de ce théorème, on a

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left|\left(\tilde{G}_\lambda f\right)(x',x_n)\right|^q dx'\right)^{1/q} \leq A\lambda^{-n/p'}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

avec p et q donnés par le théorème IV.1.1 (on a notamment l'encadrement annoncé pour p.). En particulier, $q \geq p$. Rappelons que pour un tel coupe d'indices, L^q s'injecte continument dans L^p lorsque l'intégration à lieu sur un domaine borné. Ici, x' évolue dans un compact, et on a ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left|\left(\tilde{G}_\lambda f\right)(x',x_n)\right|^p dx' \leq A\lambda^{-np/p'}\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

On intègre alors l'inégalité selon x_n, qui évolue aussi dans un compact, ce qui donne :

$$\left\|\tilde{G}_\lambda f\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq A\lambda^{-n/p'}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{IV.23}$$

Pour arriver au résultat, considérons un x_0 fixé, et x tel que x soit proche de x_0, disons $|x-x_0| \leq 1$. Alors

$$\mathbb{1}_{\{|x-x_0|\leq 1\}}(x)G_\lambda f(x)$$

est un opérateur du type de $\tilde{G}_\lambda$.
Alors (IV.23) implique que

$$\int_{|x-x_0|\leq 1}|(G_\lambda f)(x)|^p dx \leq A\lambda^{-np/p'}\int_{|x-x_0|\leq c}|f(x)|^p dx.$$

La constante c, qui est déterminée par la taille du support de ψ, existe car pour de tels x proches de x_0, $x-y$ est dans le support de ψ lorsque y est lui-même dans une boule centrée en x_0. Les fonctions f et $f\mathbb{1}_{\overline{B}(x_0,c)}$ donnent ainsi la même image

$$\mathbb{1}_{\{|x-x_0|\leq 1\}}(x)G_\lambda f(x),$$

ce qui explique l'existence de c et la forme du second membre de l'inégalité. En intégrant cette dernière par rapport à x_0, on obtient l'inégalité fonctionnelle (IV.22), et donc le lemme. □

V. Application aux équations dispersives

On en vient maintenant à un exemple d'utilisation d'une propriété de restriction de la transformée de Fourier. On considére ici des équations aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + iP(D)u = F, \quad u(0,x) = u_0(x),$$

où $u = u(t,x)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, et

$$D = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial x_1},...,\frac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

$P(D)u$ est définit par le symbole $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ via

$$P(D)u = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi x\cdot\xi}p(\xi)(\mathcal{F}_2 u)(\xi)d\xi.$$

$\mathcal{F}_2$ désigne la transformée de Fourier par rapport à la variable d'espace x.

A titre d'exemple, on peut citer les équations de Schrödinger, pour lesquelles on a $P(D)u = \Delta u$, c'est à dire $p(\xi) = -|\xi|^2$.

La solution fondamentale (associée à u_0) de l'équation s'écrit

$$u(t,\cdot) = e^{-itP(D)}u_0.$$

La solution associée à u_0 s'écrit

$$u(t,\cdot) = e^{-iP(D)}u_0 + \int_0^t e^{i(s-t)P(D)}F(s,\cdot)ds.$$

Nous allons montrer que, sous certaines hyporhèses sur p et u_0, il est possible de rendre la solution de l'équation localement plus régulière pour presque tout temps. Comme nous avons pu le mentionner en introduction, on utilise pour cela un nouveau résultat de restriction de la transformée de Fourier.

Hypothèses sur p :

- (H1) $p \in L^{\infty}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, et il existe $R \geq 0$ tel que p soit continument différentiable pour $|\xi| > R$.
- (H2) Il existe $m > 1$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ tels que
$$|p(\xi)| \leq c_1(1+|\xi|)^m \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \tag{A}$$
et
$$|(\partial p/\partial \xi_j)(\xi)| \geq c_2(1+|\xi|)^{m-1}|\xi_j|/|\xi|, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ |\xi| > R,\ j = 1...n. \tag{B}$$

De telles hypothèses sont vérifiés par l'équation de Schrödinger. Celle-ci pourra d'ailleurs servir d'exemple illustrant tous les résultats qui vont suivre.

Précisons maintenant quelques notations :
Pour $s \in \mathbb{R}$, on note $H^s(\mathbb{R}^n)$ l'espace de Sobolev, qui rappelons-le est l'espace des distributions tempérées $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telles que $(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}v \in L^2(\mathbb{R})$, muni de la norme $\left\|(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}v(\xi)\right\|_2$.
On pose alors
$$H^s_{\text{u};\text{loc}}(\mathbb{R}^n) = \left\{v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),\ \forall \chi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n),\ \exists C_\chi > 0, \chi v \in H^s(\mathbb{R}^n), \quad \text{avec} \quad \|(\tau_a\chi)v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq C_\chi,\ \forall a \in \mathbb{R}^n\right\},$$
où $\tau_a\chi(x) = \chi(x-a)$.
Aussi, pour $s \in \mathbb{R}$, et $1 < p < \infty$, on pose
$$H^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),\ \mathcal{F}^{-1}(1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}f \in L^p(\mathbb{R}^n)\right\} = \left\{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),\ (I-\Delta)^{s/2}f \in L^p(\mathbb{R}^n)\right\},$$
muni de la norme
$$\|f\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = \left\|(I-\Delta)^{s/2}f\right\|_p.$$
On définit $H^{s,p}_{\text{u,loc}}(\mathbb{R}^n)$ comme précédemment.

Remarque.
Pour $p = 2$, $H^{s,p}(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)$, *et les normes respectives de ces deux espaces sont équivalentes. En particuler,* $H^{s,2}_{u,loc}(\mathbb{R}^n) = H^s_{u;loc}(\mathbb{R}^n)$.

V.1. **Un autre théorème de Restriction.**

Nous commençons par prouver un nouveau résultat sur la restriction de la transformée de Fourier.

On considère une fonction $\chi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de la forme
$$\chi(t,x) = \chi_0(t)\chi_1(x_1)...\chi_n(x_n).$$
On suppose que χ_j est de classe C^∞ et à support compact $\forall j$.
Dans la suite, on utilisera la densité de telles fonctions dans l'espace des fonctions C^∞ à support compact.

Soit $q \in [1,2]$, et α tel que
$$\begin{cases} 2\alpha < m-1-((2-q)/q)n \text{ si } q < 2, \\ 2\alpha \leq m-1 \text{ si } q = 2. \end{cases} \tag{V.1}$$

Théorème V.1.1.
Il existe une constante $C_\chi = C_\chi(\chi, q, \alpha, n, m)$ *telle que* $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$, *on ait la propriété de restriction*
$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{\alpha q/2}|(\mathcal{F}\chi f)(p(\xi),\xi)|^q d\xi\right)^{1/q} \leq C_\chi \|f\|_2. \tag{V.2}$$
De plus,
$$C_\chi \leq C\left|\prod_{j=0}^{n}\|\chi_j\|_2 + \|\chi_0\|_\infty \sum_{j=1}^{n}\|\chi_j\|_2\|\chi_1\|_\infty \cdots \|\chi_{j-1}\|_\infty\|\chi_{j+1}\|_\infty \cdots \|\chi_n\|_\infty\right], \tag{V.3}$$
où C *est une constante.*

Preuve.
Soit R donné par (H1). On coupe l'intégrale donnée dans (V.2) en

$$\int_{|\xi|\leq R} + \int_{|\xi|>R}.$$

Clairement, la première intégrale est bornée par

$$C_R \left\|\mathcal{F}(\chi f)\right\|^q_{L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})} \leq C_R \left\|\chi f\right\|^q_{L^1(\mathbb{R}^{n+1})} \leq C_R \prod_{j=0}^{n} \left\|\chi_j\right\|_2^q \cdot \left\|f\right\|_2^q.$$

Il nous faut donc estimer la seconde.

Pour cela, on pose $\Gamma_j = \{\xi \in \mathbb{R}^n,\ |\xi| > R, |\xi_j| \geq (1/\sqrt{n})|\xi|\}$. Comme les Γ_j, $j = 1...n$, recouvrent $\{\xi \in \mathbb{R}^n,\ |\xi| > R\}$, il suffit d'estimer chaque intégrale sur Γ_j. On fait le cas $j = 1$, les autres étant identiques.
On veut donc estimer :

$$\int_{\Gamma_1} (1 + |\xi|^2)^{\alpha q/2} |(\mathcal{F}\chi f)(p(\xi), \xi)|^q d\xi.$$

On va effectuer le changement de variable

$$\xi \mapsto \eta(\xi)$$

donné par

$$\eta : \Gamma_1 \to \mathbb{R}^n,\ \ \eta_1(\xi) = p(\xi),\ \eta_j(\xi) = \xi_j,\ j = 2...n.$$

Le jacobien de η est $J(\xi) = (\partial p/\partial \xi_1)(\xi)$. Donc par (H2)

$$|J(\xi)| \geq c_2(1 + |\xi|)^{m-1}|\xi_1|/|\xi| \geq (c_2/\sqrt{n})(1 + |\xi|)^{m-1} \geq (c_3/\sqrt{n})(1 + |\xi|^2)^{(m-1)/2}. \tag{V.4}$$

On peut écrire $\Gamma_1 = \Gamma_1^+ \cup \Gamma_1^-$, avec $\Gamma_1^+ = \{\xi \in \Gamma_1,\ \xi_1 \geq 0\}$ et $\Gamma_1^- = \{\xi \in \Gamma_1,\ \xi_1 \leq 0\}$.

Ainsi, $\eta : \Gamma_1^\pm \to \mathbb{R}^n$ est injective : Si ξ et $\tilde{\xi}$ ont même image, alors $\xi_j = \tilde{\xi}_j$ pour $j \geq 2$, et

$$p(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = p(\tilde{\xi}_1, \xi_2, ..., \xi_n).$$

Or pour $\xi \in \Gamma_1^\pm$, le segment reliant $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ à $(\tilde{\xi}_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ reste dans $\Gamma_1^\pm$, et $(\partial p/\partial \xi_1)(\xi) \neq 0$. Le théorème de Rolle donne alors l'injectivité annoncée.

On peut donc effectuer le changement de variable. Notons $G_1^\pm$ l'image par η de $\Gamma_1^\pm$ et $\xi^\pm : G_1^\pm \to \Gamma_1^\pm$ la réciproque. On a

$$\int_{\Gamma_1^\pm} (1+|\xi|^2)^{\alpha q/2} |(\mathcal{F}\chi f)(p(\xi), \xi)|^q d\xi = \int_{G_1^\pm} (1+|\xi^\pm(\eta)|^2)^{q\alpha/2} |\det(\partial\eta/\partial\xi)(\xi^\pm)(\eta)|^{-1} |\mathcal{F}(\chi f)(\eta_1, \xi_1^\pm(\eta), \eta')|^q d\eta,$$

avec $\eta' = (\eta_2, ..., \eta_n)$ et $\xi_1^\pm(\eta)$ la première coordonnée de $\xi^\pm(\eta)$.
Par(V.4),

$$(1 + |\xi|^2)^{q\alpha/2} |\det(\partial\eta/\partial\xi)(\xi)(\eta)|^{-1}| \leq (\sqrt{n}/c_3)(1 + |\xi|^2)^{-(m-1-q\alpha)/2}.$$

Donc

$$\int_{\Gamma_1^\pm} (1 + |\xi|^2)^{\alpha q/2} |(\mathcal{F}\chi f)(p(\xi), \xi)|^q d\xi \leq (\sqrt{n}/c_3) \int_{G_1^\pm} (1 + |\xi^\pm(\eta)|^2))^{-(m-1-q\alpha)/2} |\mathcal{F}(\chi f)(\eta_1, \xi_1^\pm(\eta), \eta')|^q d\eta.$$

On remarque maintenant que, puisque $\xi_j^\pm(\eta) = \eta_j$ pour $j \geq 2$, on a

$$|\xi^\pm(\eta)| \geq |\eta'|. \tag{V.5}$$

Par ailleurs, comme $p(\xi^\pm(\eta)) = \eta_1$, il résulte de (A) que

$$|\eta_1| \leq c_1(1 + |\xi^\pm(\eta)|)^m \leq c_1'(1 + |\xi^\pm(\eta)|^2)^{m/2}.$$

Quitte à majorer c_1' par une autre constante, on peut supposer que $c_1' \geq 1$. On a alors

$$(1 + |\eta_1|^2)^{1/2} \leq 2c_1'(1 + |\xi^\pm(\eta)|^2)^{m/2}. \tag{V.6}$$

De plus, par l'inégalité de Hölder (avec l'exposant $2/q$ et son conjugé), on a

$$\int_{G_1^\pm}(1+|\xi^\pm(\eta)|^2))^{-(m-1-q\alpha)/2}|\mathcal{F}(\chi f)(\eta_1,\xi_1^\pm(\eta),\eta')|^q d\eta \tag{V.7}$$

$$\leq \left[\int_{G_1^\pm}(1+|\xi^\pm(\eta)|^2))^{-(m-1-q\alpha)/(2-q)}d\eta\right]^{(2-q)/2}\cdot\left[\int_{G_1^\pm}|\mathcal{F}(\chi f)(\eta_1,\xi_1^\pm(\eta),\eta')|^2 d\eta\right]^{q/2}.$$

Cette dernière majoration requiert de se placer dans le cas $q<2$. On a alors

$$\int_{G_1^\pm}(1+|\xi^\pm(\eta)|^2))^{-(m-1-q\alpha)/(2-q)}d\eta<\infty.$$

En effet, (V.1) équivaut à

$$(2/(2-q))(m-1-q\alpha)>m+n-1.$$

Donc

$$(2/(2-q))(m-1-q\alpha)=m(1+\delta)+(n-1)(1+\delta),$$

avec

$$\delta=\frac{(2/(2-q))(m-1-q\alpha)}{m+n-1}-1>0.$$

Donc

$$(1+|\xi^\pm(\eta)|^2))^{-(m-1-q\alpha)/(2-q)}=(1+|\xi^\pm(\eta)|^2))^{-m(1+\delta)/2}\times(1+|\xi^\pm(\eta)|^2))^{-(n-1)(1+\delta)/2}.$$

Par (V.6), on a

$$(1+|\xi^\pm(\eta)|^2))^{-m(1+\delta)/2}\leq C(1+|\eta_1|^2))^{-(1+\delta)/2},$$

et par (V.5),

$$(1+|\xi^\pm(\eta)|^2))^{-(n-1)(1+\delta)/2}\leq C(1+|\eta'|^2))^{-(n-1)(1+\delta)/2}.$$

Donc

$$(1+|\xi^\pm(\eta)|^2))^{-(m-1-q\alpha)/(2-q)}\leq C(1+|\eta_1|^2))^{-(1+\delta)/2}\cdot(1+|\eta'|^2))^{-(n-1)(1+\delta)/2}.$$

Donc

$$\int_{G_1^\pm}(1+|\xi^\pm(\eta)|^2))^{-(m-1-q\alpha)/(2-q)}d\eta\leq C\int_{G_1^\pm}(1+|\eta_1|^2))^{-(1+\delta)/2}\cdot(1+|\eta'|^2))^{-(n-1)(1+\delta)/2}d\eta<\infty$$

Ainsi,

$$\int_{G_1^\pm}(1+|\xi^\pm(\eta)|^2))^{-(m-1-q\alpha)/2}|\mathcal{F}(\chi f)(\eta_1,\xi_1^\pm(\eta),\eta')|^q d\eta\leq M\left[\int_{G_1^\pm}|\mathcal{F}(\chi f)(\eta_1,\xi_1^\pm(\eta),\eta')|^2 d\eta\right]^{q/2}.$$

Dans le cas $q=2$, (V.1) implique que $(1+|\xi^\pm(\eta)|^2))^{-(m-1-q\alpha)/2}$ est uniformément borné en $\eta\in G_1^\pm$, et on obtient donc la même majoration que précédemment en prenant M une borne uniforme (en η) sur $(1+|\xi^\pm(\eta)|^2))^{-(m-1-q\alpha)/2}$.

Il reste à estimer l'intégrale du terme de droite. On va montrer que

$$\int_{G_1^\pm}|\mathcal{F}(\chi f)(\eta_1,\xi_1^\pm(\eta),\eta')|^2 d\eta\leq C_\chi^2\,\|f\|_2^2, \tag{V.8}$$

et même que

$$\int_{\mathbb{R}^n}\sup_{\xi_1\in\mathbb{R}}|\mathcal{F}(\chi f)(\eta_1,\xi_1,\eta')|^2 d\eta\leq C_\chi^2\,\|f\|_2^2, \tag{V.9}$$

dont résulte clairement (V.8).

En effet, posons $\tilde\chi=\chi_0\chi_2...\chi_n$, et écrivons

$$\chi f=\chi_1(x_1)(\tilde\chi f)(t,x_1,x_2,...,x_n).$$

On a

$$\mathcal{F}(\chi f)(\eta_1,\xi_1,\eta')=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}(\chi_1)(\xi_1-x)\cdot\mathcal{F}(\tilde\chi f)(\eta_1,x,\eta')dx.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis le théorème de Plancherel, on a donc

$$|\mathcal{F}(\chi f)(\eta_1,\xi_1,\eta')|^2\leq\|\chi_1\|_2^2\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}|\mathcal{F}(\tilde\chi f)(\eta_1,x,\eta')|^2dx.$$

Le membre de droite ne dépend pas de ξ_1, et on peut donc prendre le sup sur cette inégalité, puis intégrer. On obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{\xi_1\in\mathbb{R}} |\mathcal{F}(\chi f)(\eta_1,\xi_1,\eta')|^2 d\eta \leq \|\chi_1\|_2^2 \cdot \int_{\mathbb{R}^{n+1}} |\mathcal{F}(\tilde{\chi} f)(\eta_1,x,\eta')|^2 d\eta_1 dx d\eta' = \|\chi_1\|_2^2 \, \|\tilde{\chi} f\|_2^2 \leq \|\chi_1\|_2^2 \, \|\tilde{\chi}\|_2^2 \, \|f\|_2^2 \, ,$$

ce qui termine la preuve. □

Remarque.
On remarque que la condition (A) de (H2) n'est pas nécessaire dans le cas $q = 2$.

En adaptant la preuve précédente, on peut obtenir une estimation de type $L^{r'}$ avec $1 \leq r' < 2$. On se donne χ comme précédemment, $r \geq 2$ et $1 \leq q \leq 2$. La condition (V.1) est remplacée par

$$\begin{cases} \alpha < (m-1)/r - n(1/q - 1/r) \text{ si } r \geq 2, r > q \\ 2\alpha \leq m-1 \text{ si } r = q = 2. \end{cases} \tag{V.10}$$

Théorème V.1.2. *Il existe une constante $C'_\chi = C'_\chi(\chi, q, \alpha, n, m)$ telle que $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$, on ait la propriété de restriction*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{\alpha q/2} |(\mathcal{F}\chi f)(p(\xi),\xi)|^q d\xi \right)^{1/q} \leq C'_\chi \, \|f\|_{r'} \, . \tag{V.11}$$

r' désigne l'exposant conjugué de r.

Preuve.
Il s'agit d'adapter la démonstration précédente. L'estimation pour $|\xi| \leq R$ est analogue : il suffit juste d'utiliser l'inégalité de Hölder à la place de celle de Cauchy-Schwarz. La partie qui correspond au changement de variable est aussi identique. Il s'agit ensuite de modifier les estimations qui suivent. Pour celles-ci, on donne ci-dessous les estimations analogues. On omettra les détails de la démonstration, puisqu'il s'agit des mêmes raisonnements que précédemment.
A la place de (V.7), on a (toujours par l'inégalité de Hölder),

$$\int_{G_1^\pm} (1+|\xi^\pm(\eta)|^2))^{-(m-1-q\alpha)/2} |\mathcal{F}(\chi f)(\eta_1,\xi_1^\pm(\eta),\eta')|^q d\eta \tag{V.12}$$

$$\leq \left[\int_{G_1^\pm} (1+|\xi^\pm(\eta)|^2))^{-((m-1-q\alpha)/2)(r/r-q)} d\eta \right]^{(r-q)/r} \cdot \left[\int_{G_1^\pm} |\mathcal{F}(\chi f)(\eta_1,\xi_1^\pm(\eta),\eta')|^r d\eta \right]^{q/r} .$$

Dans le cas $r > q$, (V.10) équivaut à

$$(r/(r-q))(m-1-q\alpha) > m+n-1,$$

et en procédant comme dans la preuve précédente, on en déduit

$$\int_{G_1^\pm} (1+|\xi^\pm(\eta)|^2))^{-((m-1-q\alpha)/2)(r/r-q)} d\eta < \infty.$$

Dans le cas $r = q$, le raisonnement est le même qu'auparavant.
L'analogue de (V.9) est

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{\xi_1\in\mathbb{R}} |\mathcal{F}(\chi f)(\eta_1,\xi_1,\eta')|^r d\eta \leq C_\chi^r \, \|f\|_{r'}^r \, , \tag{V.13}$$

qui s'obtient de manière analogue : il suffit simplement d'utiliser l'inégalité de Hölder (avec les exposants r et r') au lieu de celle de Cauchy-Schwarz, et le théorème de Hausdorff-Young au lieu de celui de Plancherel. □

Remarque.
On a comme précédemment l'estimation

$$C_\chi \leq C \left| \prod_{j=0}^n \|\chi_j\|_r + \|\chi_0\|_\infty \sum_{j=1}^n \|\xi_j\|_{r'} \|\chi_1\|_\infty \cdots \|\chi_{j-1}\|_\infty \|\chi_{j+1}\|_\infty \cdots \|\chi_n\|_\infty \right] .$$

V.2. **Effets régularisants.**

Théorème V.2.1.
On suppose que p vérifie l'hypothèse (H1) et la condition (B) de (H2). Soit $s \geq -(m-1)/2$ *et* $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$*. Alors la solution fondamentale u de l'équation associée à* u_0 *vérifie*

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \chi^2(t,x)|(I-\Delta)^{(m-1+2s)/4}u(t,x)|^2 dxdt \leq C_\chi^2 \|u_0\|^2_{H^s(\mathbb{R}^n)}, \tag{V.14}$$

où χ *et* C_χ *sont donnés par le théorème V.1.1.*
Il résulte de ceci que $u \in L^2\left(-T,\ T\ ; H^{s+(m-1)/2}_{u,loc}(\mathbb{R}^n)\right)$ *pour tout* $T > 0$.

Preuve*.*
Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$. Posons

$$J(f) = J = \left|\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \chi(t,x)(I-\Delta)^{(m-1+2s)/4}u(t,x)\overline{f(t,x)}dtdx\right|.$$

On rappelle la notation

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \overline{g}$$

lorsque cela à un sens.
Comme

$$u(t,\cdot) = e^{-itP(D)}u_0,$$

on peut écrire

$$J = \left|\left\langle u_0, (I-\Delta)^{(m-1+2s)/4} \int_{\mathbb{R}} e^{itP(D)}(\chi f)dt\right\rangle\right|.$$

Par l'identité de Parseval, on a donc :

$$J = \left|\left\langle \widehat{u_0}, (1+|\xi|^2)^{(m-1+2s)/4} \int_{\mathbb{R}} e^{itP(D)}\mathcal{F}_2(\chi f)dt\right\rangle\right| = \left|\left\langle \widehat{u_0}, (1+|\xi|^2)^{(m-1+2s)/4}\mathcal{F}(\chi f)(-p(\xi)/2\pi, \xi)\right\rangle\right|.$$

Donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$J \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u_0}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \times \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{(m-1)/2}|\mathcal{F}(\chi f)(-p(\xi)/2\pi,\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}.$$

Le premier facteur est exactement $\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}$, et en utilisant le théoreme V.1.1 avec $q = 2$ et $\alpha = (m-1)/2$ pour majorer le second, on obtient

$$J \leq C_\chi \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \cdot \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}.$$

Par densité, cette inégalité reste vrai pour $f \in L^2(\mathbb{R}^{n+1})$.
Pour conclure, il suffit de se rappeler que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \chi^2(t,x)|(I-\Delta)^{(m-1+2s)/4}u(t,x)|^2 dxdt\right)^{1/2} = \sup\{J(f), \|f\|_2 = 1\}.$$

□

Remarque.
Ce théorème permet de conclure en particulier que

$$u \in L^2\left(-T,\ T\ ; H^{s+(m-1)/2}_{u,loc}(\mathbb{R}^n)\right)$$

pour tout $T > 0$.
Par un théorème d'injection de Sobolev, ceci implique que

$$u \in L^2\left(-T,\ T\ ; C^k_b(\mathbb{R}^n)\right),$$

où $C^k_b(\mathbb{R}^n))$ *est l'espace des fonctions de classe* C^k *dont les dérivées jusqu'à l'ordre k sont bornées, k étant soumis à la condition* $s > (n-m+2k+1)/2$.
Autrement dit, moyennant certaines hyptothèses sur u_0 *et p, la solution associée u est, pour presque tout temps d'un intervalle borné, assez régulière.*

Comme dans le paragraphe précédent, on dispose d'une version L^p du théorème. Plus précisément :

Théorème V.2.2.
Supposons que p satisfasse les hypothèses (H1) et (H2), et que $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq 2$. Alors

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \chi^r(t,x)|(I-\Delta)^{\alpha/2}u(t,x)|^r dxdt\right)^{1/r} \leq C'_\chi \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \tag{V.15}$$

où χ et C'_χ sont données par le théorème V.1.2, et où α, r, p satisfont les conditions

$$\begin{cases} \alpha < (m+n-1)/r - n/p \\ r \geq 2. \end{cases} \tag{V.16}$$

Autrement dit, pour tout $T > 0$,

$$u \in L^r\left(-T\ ,\ T; H^{\alpha,r}_{u,loc}(\mathbb{R}^n)\right).$$

Preuve.
Il suffit d'adapter la preuve précédente. J devient alors

$$J = \left|\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \chi(t,x)(I-\Delta)^{\alpha/2}u(t,x)\overline{f(t,x)}dtdx\right|.$$

Comme précédemment, on en arrive à

$$J \leq \|\widehat{u_0}\|_{p'} \times \left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{\alpha p/2}|\mathcal{F}(\chi f)(-p(\xi)/2\pi,\xi)|^p d\xi\right)^{1/p}$$

en utilisant l'inégalité de Hölder au lieu de celle de Cauchy-Schwarz.
Par l'inégalité de Hausdorff-Young, on a alors

$$J \leq \|u_0\|_p \times \left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^{\alpha p/2}|\mathcal{F}(\chi f)(-p(\xi)/2\pi,\xi)|^p d\xi\right)^{1/p}$$

Il suffit alors d'utiliser le théorème V.1.2, ce qui est possible à cause de (V.16), pour obtenir

$$J \leq C'_\chi \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^{r'}(\mathbb{R}^{n+1})},$$

et ainsi conclure de la même manière que pour le théorème V.2.1. □

Dans le cas de la solution non homogène, on peut aussi obtenir des propriétés de régularité locale, comme le montre le :

Théorème V.2.3.
On suppose que p vérifie (H1) et (H2). Soit $s > -(m-1)/2$ et $1 \leq q \leq 2$. On suppose que $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$ et que $F \in L^1_{loc}(\mathbb{R}; H^{s,q}(\mathbb{R}^n))$. Soit α donné par (V.1) et $T > 0$.
Pour toute fonction χ donnée par le théorème V.1.1 et supportée dans $[-T,T]\times\mathbb{R}^n$, la solution (générale) u vérifie

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi^2(t,x)|(I-\Delta)^{(s+\alpha)/2}u(t,x)|^2 dxdt\right)^{1/2} \leq C_\chi\left(\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} + \|F\|_{L^1(-T,T;H^{s,q}(\mathbb{R}^n))}\right).$$

En particulier,

$$u \in L^2\left(-T,T; H^{s+\alpha}_{u,loc}(\mathbb{R}^n)\right).$$

Preuve.
Rappelons que

$$u(t,\cdot) = e^{-iP(D)}u_0 + \int_0^t e^{i(s-t)P(D)}F(s,\cdot)ds.$$

On considère le terme intégral de cette formule, les informations sur l'autre terme étant déjà connues.

On raisonne de manière semblable aux preuves précédentes. Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$ supportée dans $[-T,T]\times\mathbb{R}^n$, on pose

$$J = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \chi(t,x)(I-\Delta)^{(s+\alpha)/2}\left(\int_0^t e^{-i(t-s)P(D)}F(s,x)ds\right)\overline{f(t,x)}dtdx.$$

En utilisant l'identité de Parseval (pour la variable x) et le théorème de Fubini, on a

$$J = \int_{-T}^T dt\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_2(\chi\overline{f})(t,\xi)(1+|\xi|^2)^{(s+\alpha)/2}\left(\int_0^t e^{-i(t-s)p(\xi)}\mathcal{F}_2F(s,\xi)ds\right)d\xi$$

$$= \int_{-T}^{T} ds \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{(s+\alpha)/2} \mathcal{F}_2 F(s,\xi) \left(\int_s^T e^{-itp(\xi)} \mathcal{F}_2(\chi \overline{f}) dt \right) e^{isp(\xi)} d\xi$$

$$= \int_{-T}^{T} ds \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{(s+\alpha)/2} \mathcal{F}_2 F(s,\xi) \mathcal{F}(\chi \overline{f_s})(p(\xi)/2\pi, \xi) e^{isp(\xi)} d\xi,$$

avec

$$(f_s)(t,x) = \mathbb{1}_{[s,T]}(t) f(t,x).$$

Par l'inégalité de Hölder

$$|J| \leq \int_{-T}^{T} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{sq'/2} |\mathcal{F}_2 F(s,\xi)|^{q'} d\xi \right)^{1/q'} \times \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{\alpha q/2} |\mathcal{F}(\chi \overline{f_s})(p(\xi)/2\pi, \xi)|^q d\xi \right)^{1/q} ds.$$

En utilisant l'inégalité de Hausdorff-Young pour le premier facteur et le théorème V.1.1 pour le second, on obtient

$$|J| \leq C_\chi \int_{-T}^{T} \|F(s,\cdot)\|_{H^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \|f_s\|_2 \, ds \leq C_\chi \|F\|_{L^1(-T,T;H^{s,q}(\mathbb{R}^n))} \|f\|_2 \, .$$

On obtient ainsi le résultat en raisonnant de la même manière que dans la preuve du théorème V.2.1 (ceci donne l'estimation pour le terme intégral), et en utilisant ce même théorème pour le terme correspondant à la solution fondamentale. □

V.3. **Cas de la dimension** 1.

En dimension 1, on peut obtenir des résultats analogues au précédents (pour la solution homogène), mais cette fois ceux-ci sont globaux en temps, au sens où les résultats du type $u \in L^p(-T,\ T\,;\cdot)$ deviennent $u \in L^p(\mathbb{R}\,;\cdot)$. L'argument tient essentiellement dans le fait que l'on peut obtenir la propriété de restriction de la transformée de Fourier pour des fonctions χ qui ne dépendent pas du temps. On a plus précisément la :

Proposition V.3.1. *Soit $2 \leq p \leq \infty$ et p' l'exposant conjugué de p. On suppose que p vérifie (H1) et que*

$$|p'(\xi)| \geq C_2 |\xi|^{m-1} \qquad \forall\ |\xi| \geq R. \tag{B'}$$

Alors il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ et $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |\xi|^{m-1} |\mathcal{F}(\chi a)(p(\xi),\xi)|^p d\xi \right)^{1/p} \leq C \left(\|\chi\|_p + \|\widehat{\chi}\|_{p'} \right) \left(\|a\|_{p',p'} + \|a\|_{1,p'} \right), \tag{V.17}$$

où $\|a\|_{p,q}$ désigne la norme usuelle sur $L^p(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{R}^n))$.

Preuve.
L'idée de la preuve est semblable à celle du théorème V.1.1, et on ira donc un peu plus vite.
On a

$$\left(\int_{|\xi|\leq R} |\xi|^{m-1} |\mathcal{F}(\chi a)(p(\xi),\xi)|^p d\xi \right)^{1/p} \leq C_R \|\chi\|_p \|a\|_{1,p'} \, .$$

Pour voir ceci, on peut adapter la preuve de la majoration analogue dans le cas du théorème V.1.1.

Par ailleurs, on calcule

$$|\mathcal{F}(\chi a)(\tau,\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi t\tau} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x\xi} \chi(x) a(t,x) dx \right) dt \right|$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi t\tau} \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{\chi}(\eta) (\mathcal{F}_2 a)(t,\xi-\eta) d\eta \right) dt \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} \widehat{\chi}(\eta) (\mathcal{F} a)(\tau,\xi-\eta) d\eta \right|.$$

Donc

$$|\mathcal{F}(\chi a)(\tau,\xi)| \leq \|\widehat{\chi}\|_{p'} \left(\int_{\mathbb{R}} |(\mathcal{F} a)(\tau,\eta)|^p d\eta \right)^{1/p}.$$

Ainsi,

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\mathcal{F}(\chi a)(\tau,\xi)|^p \leq \|\widehat{\chi}\|_{p'}^p \left(\int_{\mathbb{R}} |(\mathcal{F} a)(\tau,\eta)|^p d\eta \right). \tag{e}$$

Alors, en utilisant ceci et la condition (B)', on a aisément,

$$\int_{|\xi|\geq R} |\mathcal{F}(\chi a)(p(\xi),\xi)|^p |\xi|^{m-1} d\xi \leq C \|\widehat{\chi}\|_{p'}^p \int_{|\xi|\geq R} \int_{\mathbb{R}} |(\mathcal{F} a)|^p (p(\xi),\eta) |p'(\xi)| d\xi d\eta.$$

Comme dans la preuve du théorème V.1.1, on effectue le changement de variable $\eta = p(\xi)$, qui conduit à la majoration

$$\int_{|\xi|\geq R} |\mathcal{F}(\chi a)(p(\xi),\xi)|^p |\xi|^{m-1} d\xi \leq C \left\|\widehat{\chi}\right\|_{p'}^p \left\|a\right\|_{p',p'}^p ,$$

et donne le résultat annoncé. $\square$

Remarque.
En regardant la preuve qui précéde, on voit que dans le cas $R = 0$, on peut remplacer le terme de droite de (V.17) par

$$C \left\|a\right\|_{p',p'} \left(\left\|\chi\right\|_p + \left\|\widehat{\chi}\right\|_{p'}\right).$$

Notons aussi que (A) n'est pas nécessaire pour obtenir le théorème précédent.

Il résulte de tout ceci que l'on peut obtenir des versions "globales" des théorèmes V.2.1 et V.2.2 en se dispensant de la localisation en temps de ceux-ci, et en supposant cette fois-ci que p vérifie (H1) et (B') avec $R = 0$:

Proposition V.3.2.

- *Supposons que $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ avec $s \geq -(m-1)/2$. Alors la solution fondamentale u associée vérifie*
$$\left\|\chi u\right\|_{L^2(\mathbb{R}_+;H^{s+(m-1)/2}(\mathbb{R}))} \leq C \left\|u_0\right\|_{H^s} \left\|\chi\right\|_2 . \tag{V.18}$$
$\forall \chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
En particulier, $u \in L^2\left(\mathbb{R}; H^{s+(m-1)/2}_{u,loc}(\mathbb{R})\right)$.
- *Supposons que $u_0 \in \mathcal{S}$ et que $(I - d^2/dx^2)^{s/2} u_0 \in \mathcal{F}^{-1}(L^q(\mathbb{R}))$, pour $1 \leq q \leq 2$ et $s \geq -(m-1)/q'$. Alors $\forall \chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,*
$$\left\|\chi (I - d^2/dx^2)^{s/2+(m-1)/2q'} u\right\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^2)} \leq C \left\|(1+\xi^2)^{s/2}\widehat{u_0}\right\|_q \left[\left\|\chi\right\|_{q'} + \left\|\widehat{\chi}\right\|_q\right]. \tag{V.19}$$
En particulier, $\chi(I - d^2/dx^2)^{s/2+(m-1)/2q'} u \in L^{q'}\left(\mathbb{R}; L^{q'}_{u,loc}(\mathbb{R})\right)$.

Preuve.
Pour le premier point, on adapte la preuve du théorème V.2.1, et pour le second, celle du théorème V.2.2. On se donne $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, et on considère

$$J = \int a(t,x)\overline{\chi(x)|D|^{(m-1)/2+s}u(t,x)}dtdx,$$

avec $\widehat{|D|f(\xi)} = |\xi|\widehat{f}(\xi)$.
Par la même méthode que pour le théorème V.2.1, on a

$$J = \int \mathcal{F}(\overline{\chi}a)(-p(\xi)/2\pi,\xi)|\xi|^{(m-1)/2+s}\widehat{u_0}(\xi)d\xi.$$

En utilisant la proposition V.3.1, on a

$$|J| \leq \left\|u_0\right\|_{H^s} \left(\int |\mathcal{F}(\overline{\chi}a)(-p(\xi)/2\pi,\xi)|^2 |\xi|^{m-1} d\xi\right)^{1/2} \leq C \left\|u_0\right\|_{H^s} \left\|\chi\right\|_2 \left\|a\right\|_{2,2} ,$$

et on conclut comme dans la preuve du théorème V.2.1.

Pour le second point, on considère

$$J = \int a(t,x)\overline{\chi(x)(I - d^2/dx^2)^{s/2+(m-1)/2q'}u(t,x)}dtdx.$$

Comme dans la preuve du théorème V.2.2,

$$J = \int dt \int \mathcal{F}_2(\overline{\chi}a)(t,\xi)(1+\xi^2)^{s/2+(m-1)/2q'} e^{itp(\xi)}\overline{\widehat{u_0}}(\xi)d\xi.$$

Donc

$$|J| \leq \left\|(1+\xi^2)^{s/2}\widehat{u_0}\right\|_q \left(\int |\mathcal{F}(\overline{\chi}a)(-p(\xi)/2\pi,\xi)|^{q'} (1+\xi^2)^{(m-1)/2} d\xi\right)^{1/q'}$$

$$\leq C\left\|(1+\xi^2)^{s/2}\widehat{u_0}\right\|_q\left[\left(\int|\mathcal{F}(\overline{\chi}a)(-p(\xi)/2\pi,\xi)|^{q'}d\xi\right)^{1/q'}\right.$$
$$\left.+\left\|(1+\xi^2)^{s/2}\widehat{u_0}\right\|_q\left(\int|\mathcal{F}(\overline{\chi}a)(-p(\xi)/2\pi,\xi)|^{q'}|\xi|^{m-1}d\xi\right)^{1/q'}\right].$$

En utilisant l'estimation (e) V.3.1 et la proposition V.3.1, on a alors

$$|J|\leq C\left\|(1+\xi^2)^{s/2}\widehat{u_0}\right\|_q\left[\|\widehat{\chi}\|_q\left(\int|\mathcal{F}(a)(-p(\xi)/2\pi,\eta)|^{q'}d\eta d\xi\right)^{1/q'}+\left(\|\chi\|_{q'}+\|\widehat{\chi}\|_q\right)\|a\|_{q,q}\right].$$

Par l'inégalité de Hausdorff-Young, on a donc

$$|J|\leq C\left\|(1+\xi^2)^{s/2}\widehat{u_0}\right\|_q\left(\|\chi\|_{q'}+\|\widehat{\chi}\|_q\right)\|a\|_{q,q},$$

et on conclut comme précédemment. □

Remarque.
Le premier point implique que,sous les mêmes hypothèses, $u\in L^2\left(\mathbb{R}_+,C_b^k(\mathbb{R})\right)$ *pour* k *tel que* $s>(2+2k-m)/2$.

VI. Annexe A : Inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev

Pour cette partie, il est utile de connaitre les résultats suivants :

- $\forall x;y\in\mathbb{R}^n$, $\forall\delta>0$:
$$B(x;\delta)\cap B(y;\delta)\neq\emptyset\Rightarrow B(y;\delta)\subset B(x;3\delta),\tag{i}$$
où $B(x;\delta)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon δ.

- Pour tout ensemble mesurable A, tout vecteur $x\in\mathbb{R}^n$ et tout scalaire k, on a
$$\lambda(kA+x)=|k|^n\lambda(A).\tag{ii}$$

- Pour $B=B(x;\delta)$, on pose $B^*=\bigcup B_1$, où B_1 parcourt l'ensemble des boules de rayon δ qui intersectent B. On a alors :
$$\lambda(B^*(x;\delta))\leq 3^n\lambda(B(x;\delta)).\tag{iii}$$
Ceci se voit en combinant (i) et (ii) .

- Si E est un ensemble mesurable, alors :
$$\lambda(E)=\sup\{\lambda(K),\ K\text{ compact }\subset E\}.\tag{iv}$$

- Soit $f:(\mathbb{R}^n;\lambda)\to\mathbb{R}_+$ borélienne, et $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ une fonction croissante de classe C^1 telle que $g(0)=0$. Alors :
$$\int_{\mathbb{R}^n}g\circ f d\lambda=\int_0^{+\infty}g'(t)\lambda\left(\{f\geq t\}\right)dt.\tag{v}$$

- (Intégration des fonctions radiales) Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Alors, si $|.|$ désigne la norme euclidienne, on a :
$$\int_{\mathbb{R}^n}f\left(|x|\right)dx=c_n\int_0^{+\infty}f(r)r^{n-1}dr,\tag{vi}$$
où c_n est une constante.

Définition. *Pour une fonction* f *à valeurs rélles localement intégrable sur* $\mathbb{R}^n$ *et* $\forall\delta>0$, *on pose :*

$$(A_\delta f)(x)=\frac{1}{\lambda(B(x;\delta))}\int_{B(x;\delta)}f(y)d\lambda(y).$$

On définit alors la fonction maximale de Hardy-Littlewood :

$$(Mf)(x) = \sup_{\delta>0} \left(A_\delta |f|\right)(x).$$

Pour prouver l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev, nous devons d'abord étudier cette fonction et notamment prouver une majoration de sa norme dans L^p.

VI.1. **Inégalité maximale de Hardy-Littlewood.**

Nous commençons par prouver un lemme de recouvrement, qui permet de majorer la mesure d'une réunion finie d'ouverts en utilisant seulement quelques-uns de ceux-ci. Plus précisément :

Lemme VI.1.1 (Lemme de recouvrement de Vitali)**.**
Soit E un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ tel que E soit une réunion finie de boules ouvertes $E = \bigcup_{i\in I} B_i$. Alors on peut choisir une sous-famille disjointe $B_1; ...; B_m$ telle que :

$$3^n \sum_{j=1}^{m} \lambda(B_j) \geq \lambda(E).$$

Preuve.
Soit B_1 la boule de la famille $(B_i)_{i\in I}$ qui a le rayon maximal. Parmi les boules restantes, on choisit B_2 la boule disjointe de B_1 de rayon maximal. On répète le procédé jusqu'à ce qu'il s'arrête (ce qui est le cas car il y a un nombre fini de boules), et ceci nous fournit des boules $B_1; ...; B_m$ disjointes.
Par définition, B_1^* contient toutes les boules de la famille qui rencontrent B_1 et dont le rayon est inférieur à celui de B_1. Plus généralement, B_j^* contient toutes les boules restantes qui rencontrent B_j et dont le rayon est inférieur à celui de B_j. Ainsi, on obtient :

$$\bigcup_{i\in I} B_i \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_j^*.$$

Ainsi,

$$\lambda(E) \leq \sum_{j=1}^{m} \lambda\left(B_j^*\right) \leq 3^n \sum_{j=1}^{m} \lambda\left(B_j\right),$$

la dernière majoration étant obtenue par (iii). □

On en vient maintenant au résultat sur la fonction maximale.

Théorème VI.1.1 (Inégalité maximale de Hardy-Littlewood)**.** *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$. Alors :*

$$\text{Si } f \in L^p, 1 \leq p \leq \infty, \text{ alors } Mf \text{ est finie presque-partout.} \tag{a}$$

$$\text{Si } f \in L^1, \text{ alors } \forall\alpha > 0,\ \lambda\left(\{x|(Mf)(x) > \alpha\}\right) \leq \frac{3^n}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|d\lambda(y). \tag{b}$$

$$\text{Si } f \in L^p, 1 < p \leq \infty, \text{ alors } Mf \text{ est dans } L^p, \text{ et } \ \|Mf\|_p \leq A_p\|f\|_p. \tag{c}$$

La constante A_p ne dépend que de p.

Preuve. On remarque que (a) est une conséquence de (b) et (c), et il suffit donc de prouver ces deux assertions pour conclure.
Pour cela, on introduit la fonction $\overline{Mf}$ définie par :

$$\overline{Mf}(x) = \sup_{x\in B} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f(y)|d\lambda(y),$$

où le sup est pris sur toutes les boules B qui contiennent x. Il est clair que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq (Mf)(x) \leq \overline{Mf}(x)$, et il suffit donc de prouver les inégalités de (b) et (c) pour la fonction $\overline{Mf}$.

On commence par prouver (b). On suppose donc $f \in L^1$ et on pose $E_\alpha = \{x | \overline{M f}(x) > \alpha\}$. On veut majorer convenablement $\lambda(E_\alpha)$.
Soit $K \subset E_\alpha$ un compact. Pour tout $x \in K$, il existe par définition de E_α une boule ouverte B_x contenant x telle que :

$$\lambda(B_x) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{B_x} |f(y)| d\lambda(y).$$

Par compacité, on recouvre K par un nombre fini de telles boules $B_1; ...; B_m$. Quitte à appliquer le lemme précédent, on peut supposer ces boules disjointes et telles que :

$$3^n \sum_{i=1}^{m} \lambda(B_i) \geq \lambda(K),$$

d'où on tire :

$$\lambda(K) \leq \frac{3^n}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| d\lambda(y).$$

(b) est ainsi prouvée en passant au sup et en utilisant (iv).

Passons maintenant à la preuve de (c). Pour cela, on écrit (via (v)) que :

$$\int (\overline{M f})^p d\lambda = p \int_0^{+\infty} \lambda\left(\{\overline{M f} > \alpha\}\right) \alpha^{p-1} d\alpha. \tag{E}$$

On va chercher à majorer convenablement cette expression, et on veut donc majorer le terme $\lambda\left(\{\overline{M f} > \alpha\}\right)$. Le seul problème est que l'on ne peut plus utiliser (b) puisque f n'est plus supposée intégrable. On va contourner le problème en considérant la fonction :

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } |f(x)| > \frac{\alpha}{2} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On remarque que $\overline{M f} \leq \overline{M f_\alpha} + \frac{\alpha}{2}$, et donc $\left\{\overline{M f} > \alpha\right\} \subset \left\{\overline{M f_\alpha} > \frac{\alpha}{2}\right\}$. On a donc :

$$\lambda\left(\left\{x | (\overline{M f})(x) > \alpha\right\}\right) \leq \frac{c}{\alpha} \int_{\left\{|f| > \frac{\alpha}{2}\right\}} |f| d\lambda,$$

avec $c = 2 \times 3^n$. On peut donc via (E) majorer de la manière suivante :

$$\|\overline{M f}\|_p^p \leq pc \int_0^{+\infty} \left(\int_{\left\{|f| > \frac{\alpha}{2}\right\}} |f| \alpha^{p-2} d\lambda \right) d\alpha = pc \int |f|(x) \left(\int_0^{2|f(x)|} \alpha^{p-2} d\alpha \right) d\lambda(x)$$

$$= pc \int \frac{|f|^p}{p-1} 2^{p-1} d\lambda = \frac{pc}{p-1} 2^{p-1} \|f\|_p^p,$$

la première égalité étant une conséquence du théorème de Fubini.
Ainsi, (c) est prouvée, et ceci conclut la preuve du théorème. □

Mentionnons, à titre de remarque, le corollaire suivant :

Corollaire (Théorème de Différentiation de Lebesgue)**.**
Si f est intégrable, alors pour presque tout x :

$$\lim_{\delta \to 0} (A_\delta f)(x) = f(x).$$

Preuve.
On pose :

$$\left(\overline{A_\delta f}\right)(x) = \frac{1}{\lambda\left(B(x;\delta)\right)} \int_{B(x;\delta)} |f(y) - f(x)| d\lambda(y) \text{ et } \left(\overline{A f}\right)(x) = \limsup_{\delta \to 0} \left(\overline{A_\delta f}\right)(x).$$

On sait qu'il existe g continue telle que $\|f - g\| < \frac{1}{k}$, $\forall k \geq 1$. Posons $h = f - g$.
On a $\left(\overline{A_\delta h}\right)(x) \leq (Mh)(x) + |h(x)|$. Comme g est continue, $\overline{A g} = 0$. De plus, en passant à la limite l'inégalité $\left(\overline{A_\delta f}\right) \leq \left(\overline{A_\delta g}\right) + \left(\overline{A_\delta h}\right)$, on obtient $\overline{A f} \leq \overline{A g} + \overline{A h} = \overline{A h} \leq (Mh) + |h|$. On va maintenant

pouvoir utiliser le théorème.

$\forall \alpha > 0$, $\left\{\overline{Af} > 2\alpha\right\} \subset \{Mh > \alpha\} \bigcup \{|h| > \alpha\}$. Or, par le théorème et l'inégalité de Markov, on a :

$$\lambda(\{Mh > \alpha\}) \leq \frac{3^n}{\alpha}\|h\|_1 \leq \frac{3^n}{k\alpha} \text{ et } \lambda(\{|h| > \alpha\}) \leq \frac{\|h\|_1}{\alpha} \leq \frac{1}{k\alpha}.$$

Ceci étant vrai $\forall k \geq 1$, on en déduit que $\lambda\left(\left\{\overline{Af} > 2\alpha\right\}\right) = 0$, ce qui conclut la preuve. □

Remarque. *Autrement dit, pour presque tout x, si on prend la valeur moyenne de f sur une boule centrée en x dont on fait tendre le rayon vers 0, on retrouve la valeur de $f(x)$.*

VI.2. **Inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev.**

On va maintenant pouvoir prouver l'inégalité. Avant cela, nous prouvons le lemme suivant :

Lemme VI.2.1. *Soit Φ une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}^n$, radiale, décroissante et intégrable. Pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$, on a :*

$$|f * \Phi(x)| \leq (Mf)(x) \int \Phi d\lambda.$$

Preuve.
Quitte à considérer $\dfrac{\Phi}{\|\Phi\|_1}$, on suppose que $\|\Phi\|_1 = 1$. Lorsque Φ est étagée, disons

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} a_i \mathbb{1}_{B_i},$$

où les a_i sont strictement positifs et où les B_i sont des boules ouvertes centrées en 0, on a

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \lambda(B_i) = 1$$

et

$$|f * \mathbb{1}_{B_i}| \leq \lambda(B_i)(Mf)(x),$$

et le résultat est donc clair.
Dans le cas général, on utilise une approximation de Φ par des fonctions du type précédent pour conclure. □

On peut maintenant passer à l'inégalité :

Théorème VI.2.1 (Inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev)**.**
Soit $1 < p < q < \infty$ et $0 < \gamma < n$ tel que :

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{n-\gamma}{n}.$$

Alors $\forall f \in L^p$,

$$\left\|f * (|y|)^{-\gamma}\right\|_q \leq A_{p,q}\|f\|_p,$$

où $|.|$ désigne la norme euclidienne.

Preuve. Ecrivons :

$$\left[f * (|y|)^{-\gamma}\right](x) = \int_{|y|<R} f(x-y)|y|^{-\gamma}dy + \int_{|y|\geq R} f(x-y)|y|^{-\gamma}dy,$$

pour $R > 0$ fixé que nous choisirons ultérieurement.
La première intégrale est la convolution entre f et la fonction $|y|^{-\gamma}\mathbb{1}_{B(0;R)}(y)$. Appliquant le lemme précédent, on peut borner la première intégrale par :

$$(Mf)(x) \int_{|y|\leq R} |y|^{-\gamma}dy = cR^{n-\gamma}(Mf)(x).$$

La dernière égalité est une conséquence de (vi).
L'inégalité de Hölder permet de borner la seconde intégrale par :

$$\|f\|_p \left\||y|^{-\gamma}\mathbb{1}_{B(0;R)^c}(y)\right\|_{p'}.$$

Ici, p' désigne l'exposant conjugé de p. Via les hypothèses du théorème, on a

$$\gamma p' - n = \frac{np'}{q} > 0,$$

donc $-\gamma p' < -n$, et donc

$$\left\| |y|^{-\gamma} \mathbb{1}_{B(0;R)^c}(y) \right\|_{p'} < \infty.$$

Par (vi), on a :

$$\left\| |y|^{-\gamma} \mathbb{1}_{B(0;R)^c}(y) \right\|_{p'} = cR^{-\frac{n}{q}}.$$

En choisissant R tel que

$$(Mf)(x) = R^{-\frac{n}{p}} \|f\|_p ,$$

et en sommant les deux majorations, on obtient :

$$\left| f * (|y|)^{-\gamma} \right| (x) \leq A \left[(Mf)(x) \right]^{\frac{p}{q}} \|f\|_p^{1-\frac{p}{q}} .$$

Le résultat se déduit alors aisément du théorème VI.1.1. □

VII. Annexe B : Inégalité de Hausdorff-Young

VII.1. Théorème d'interpolation de Riesz-Thorin.

Ce résultat dit essentiellement qu'un opérateur linéaire borné sur deux espaces L^p l'est automatiquement sur les espaces intermédiaires. Lorsque l'on appliquera ceci à l'opérateur linéaire correspondant à la transformation de Fourier, on obtiendra l'inégalité de Hausdorff-Young, qui permet d'interpréter la transformée de Fourier d'une fonction L^p comme une fonction L^q, où q est l'exposant conjugué de $p \in]1; 2]$. On commence par prouver le lemme suivant :

Lemme VII.1.1 (Lemme des trois droites de Hadamard)**.**
Soit $F(z)$ une fonction analytique et bornée sur la bande $0 < \Re(z) < 1$, et continue sur $0 \leq \Re(z) \leq 1$. Si

$$|F(it)| \leq M_0 < \infty, \quad |F(1+it)| \leq M_1 < \infty, \quad |t| < \infty,$$

alors

$$|F(\theta + it)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}, \quad |t| < \infty, \quad 0 < \theta < 1.$$

Preuve. Soit $\epsilon > 0$ et λ un réel. Posons :

$$F_\epsilon(z) = e^{\epsilon z^2 + \lambda z} F(z).$$

On a

$$|F_\epsilon(z)| = e^{\epsilon \Re(z^2) + \lambda \Re(z)} |F(z)| \leq e^{\epsilon - \epsilon \Im(z)^2 + \lambda \Re(z)} |F(z)| \to 0$$

quand $\Im(z) \to \pm\infty$.
Aussi

$$|F_\epsilon(it)| \leq M_0 \text{ et } |F_\epsilon(1+it)| \leq M_1 e^{\epsilon + \lambda}.$$

Par le principe du maximum, on a alors

$$|F_\epsilon(z)| \leq \max\left(M_0, M_1 e^{\epsilon+\lambda}\right),$$

donc

$$|F(\theta + it)| \leq e^{-\epsilon(\theta^2 - t^2)} \max\left(M_0 e^{-\theta\lambda}, M_1 e^{(1-\theta)\lambda + \epsilon}\right),$$

ceci étant valable pour θ et t quelconques et fixés. En faisant tendre $\epsilon \to 0$, on obtient :

$$|F(\theta + it)| \leq \max\left(M_0 e^{-\theta\lambda}, M_1 e^{(1-\theta)\lambda}\right).$$

En choisissant λ tel que

$$e^\lambda = \frac{M_0}{M_1},$$

on a

$$M_0 e^{-\theta\lambda} = M_1 e^{(1-\theta)\lambda},$$

ce qui donne la conclusion attendue. □

Théorème VII.1.1 (Théorème d'interpolation de Riesz-Thorin).
Soit T un opérateur linéaire.
Soit $p_0 \neq p_1$ et $q_0 \neq q_1$ tels que
$$T : L^{p_0}(\mathbb{R}^n, d\lambda) \to L^{q_0}(\mathbb{R}^n, d\lambda)$$
avec la norme M_0 et
$$T : L^{p_1}(\mathbb{R}^n, d\lambda) \to L^{q_1}(\mathbb{R}^n, d\lambda)$$
avec la norme M_1.
Alors
$$T : L^{p}(\mathbb{R}^n, d\lambda) \to L^{q}(\mathbb{R}^n, d\lambda)$$
avec la norme
$$M \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}.$$
De plus, $0 < \theta < 1$ et
$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Preuve*.*
On note
$$\langle h, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} h(y) g(y) dy$$
lorsque cela a un sens.
Notons q' l'exposant conjugué de q. On a
$$\|h\|_q = \sup \left\{ |\langle h, g \rangle| : \|g\|_{q'} = 1 \right\}$$
et
$$M = \sup \left\{ |\langle Tf, g \rangle| : \|f\|_p = \|g\|_{q'} = 1 \right\}.$$
Comme p et q' sont finis, on peut supposer que f et g sont continues à support compact. Pour $0 \leq \Re(z) \leq 1$, on pose
$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}, \quad \frac{1}{q'(z)} = \frac{1-z}{q'_0} + \frac{z}{q'_1},$$
et pour $x, y \in \mathbb{R}^n$
$$\phi(z) = \phi(x, z) = |f(x)|^{p/p(z)} f(x) / |f(x)|,$$
$$\psi(z) = \psi(y, z) = |g(y)|^{q'/q'(z)} g(y) / |g(y)|.$$

Pour $j = 0, 1$, on montre aisément que $\phi(z) \in L^{p_j}$ et $\psi(z) \in L^{q'_j}$, et donc $T\phi(z) \in L^{q_j}$. Aussi, $\phi'(z) \in L^{p_j}$ et $\psi'(z) \in L^{q'_j}$, et donc $(T\phi)'(z) \in L^{q_j}$, et ceci pour $0 < \Re(z) < 1$.
L'inégalité de Hölder permet donc de définir
$$F(z) = \langle T\phi(z), \psi(z) \rangle, \quad 0 \leq \Re(z) \leq 1,$$
qui est continue et bornée sur cette bande, et analytique sur la bande $0 < \Re(z) < 1$.
On a
$$\|\phi(it)\|_{p_0} = \|\phi(1+it)\|_{p_1} = \|\psi(it)\|_{q'_0} = \|\psi(1+it)\|_{q'_1} = 1.$$
Par l'inégalité de Hölder, on a donc :
$$|F(it)| \leq \|T\phi(it)\|_{q_0} \cdot \|\psi(it)\|_{q'_0} \leq M_0,$$
et
$$|F(1+it)| \leq \|T\phi(1+it)\|_{q_1} \cdot \|\psi(1+it)\|_{q'_1} \leq M_1.$$
De plus,
$$\phi(\theta) = f \quad \text{et} \quad \psi(\theta) = g,$$
et donc :
$$F(\theta) = \langle Tf, g \rangle,$$
de sorte que le lemme des trois droites donne le résultat voulu. □

En adaptant la preuve précédente, on peut obtenir le même genre de résultat pour des opérateurs complexes particuliers. Plus précisément, on a :

Lemme VII.1.2.
Supposons que l'on dispose d'une famille d'opérateurs $\{U^s\}$ sur la bande $a \leq \Re(s) \leq b$ donnés par :

$$(U^s f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K_s(x,y) f(y) dy.$$

On suppose que les noyaux K_s ont un support compact commun en (x,y), et sont uniformément bornés pour $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et $a \leq \Re(s) \leq b$. On suppose également que $\forall (x,y)$, $s \mapsto K_s(x,y)$ est analytique sur la bande $a < \Re(s) < b$ et continue sur $a \leq \Re(s) \leq b$. Enfin, on suppose que :

$$\begin{cases} \|U^s f\|_{L^{q_0}} \leq M_0 \|f\|_{L^{p_0}} & si\ \Re(s) = a, \\ \|U^s f\|_{L^{q_1}} \leq M_1 \|f\|_{L^{p_1}} & si\ \Re(s) = b, \end{cases}$$

avec $1 \leq p_i, q_i \leq \infty$. Alors

$$\left\| U^{a(1-\theta)+b\theta} f \right\|_{L^q} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{L^p},$$

avec

$$0 \leq \theta \leq 1, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

Preuve.
La preuve est très semblable à celle du théorème d'interpolation de Riesz-Thorin, et nous allons donc aller un peu plus vite. Il suffit de prouver que :

$$\left| \int U^{a(1-\theta)+b\theta}(f) \cdot g dx \right| \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta},$$

pour $\|f\|_p = 1$ et $\|g\|_{q'} = 1$, q' désignant l'exposant conjugué de q.
On pose encore

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}, \quad \frac{1}{q'(z)} = \frac{1-z}{q'_0} + \frac{z}{q'_1},$$

et

$$\phi(z) = \phi(x,z) = |f(x)|^{p/p(z)} f(x)/|f(x)|,$$
$$\psi(z) = \psi(y,z) = |g(y)|^{q'/q'(z)} g(y)/|g(y)|.$$

La fonction

$$I(z) = M_0^{1-z} M_1^{z} \cdot \int U^{a(1-\theta)+b\theta} \phi(z,x) \cdot \psi(z,x) dx$$

est analytique et bornée sur $0 < \Re(s) < 1$, continue sur $0 \leq \Re(s) \leq 1$ et vérifie $|I(s)| \leq 1$ pour $\Re(s) = 0$ ou $\Re(s) = 1$.
Le lemme des trois droites montre alors que $|I(\theta)| \leq 1$ pour $0 \leq \theta \leq 1$, ce qui permet de conclure. $\square$

VII.2. **Inégalité de Hausdorff-Young.**

Nous allons appliquer le théorème précédent lorsque T correspond à la transformée de Fourier définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$(\mathcal{F} f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int e^{-2i\pi x \cdot \xi} f(x) dx.$$

Il est clair que

$$\mathcal{F} : L_1 \to L_\infty,$$

et le théorème de Plancherel dit exactement que

$$\mathcal{F} : L_2 \to L_2,$$

les normes d'opérateurs étant à chaque fois égales à 1.
Le théorème de Riesz-Thorin dit alors que l'opérateur

$$\mathcal{F} : L_p \to L_q$$

est borné de norme inférieure à 1.
De plus, on a

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2}, \quad 0 < \theta < 1.$$

On a donc

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

On en déduit donc le

Théorème VII.2.1 (Inégalité de Hausdorff-Young).
Si $1 \leq p \leq 2$*, et si* q *est l'exposant conjugué de* p*, alors*

$$\|\mathcal{F}f\|_q \leq \|f\|_p \,.$$

Autrement dit, la transformée de Fourier de $f \in L^p$ *est bien définie, et s'interprète comme un élément de* L^q.

Références

[1] Elias M. Stein, *Harmonic Analysis : Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals.* Princeton University Press, 1993.

[2] E. M. Stein & G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton University Press, 1971.

[3] J.Bergh & J. Löfström, *Interpolation Spaces : An Introduction.* Springer-Verlag, 1976.

[4] J. C. Saut & P. Constantin, *Local Smoothing Properties Of Dispersive Equations.* Journal Of The American Mathematical Society, 1988.

[5] R. A. Adams & J. J. F. Fournier, *Sobolev Spaces.* Pure And Applied Mathematics Series, 2003.