

Mouvement brownien et processus de Bessel

Pierre Bertin, Patrick Hoscheit

25 juin 2007

Sujet proposé par Jean BERTOIN

Introduction

Cet exposé traitera des liens de dualité existant entre le mouvement brownien et le processus de Bessel, défini par exemple comme étant la partie radiale d'un mouvement brownien en dimension 3. Nous étudierons trois théorèmes de dualité, dont le dernier constitue l'objet de l'article proposé. Il s'agit d'une dualité de nature géométrique. En effet, la dualité mise en avant dans le théorème de Pitman est une dualité par réflexion, au sens suivant : si X est un mouvement brownien réel, on peut considérer M^X , le processus maximum ($(M^X)_t = \sup_{0 \leq s \leq t} M_s$). C'est un processus évidemment positif, et si l'on considère $Y = 2M^X - X$, ce qui correspond à la réflexion à tout instant de M_t par rapport à $(M^X)_t$, Y est également un processus positif. Le théorème de Pitman affirme justement que le processus Y va correspondre en loi à un processus de Bessel.

Le coeur de l'article n'est pas le théorème de Pitman en soi, mais plutôt la technique que celui-ci a mis au point pour le démontrer. En effet, cette méthode se fonde sur l'observation importante suivante : on peut facilement associer aux processus continus que sont X et Y des chaînes de Markov discrètes, et les résultats pour les chaînes de Markov découlent de raisonnements combinatoires élémentaires. Tout le travail consiste alors à passer à la limite et d'étudier comment les transformations (du type de celles vues plus haut) sont conservées lors de ce passage à la limite. Cette technique est ancienne : le théorème de Donsker en constitue un des premiers exemples, mais Pitman innove en utilisant le passage à la limite pour comparer deux processus. Il redémontre grâce à sa méthode des résultats connus précédemment, qui renseignent eux aussi sur le lien entre mouvement brownien et processus de Bessel.

Nous allons ainsi, avant de nous attaquer au théorème de Pitman, démontrer ces théorèmes qui nous donneront une bonne intuition des phénomènes en jeu, et particulièrement du processus de Bessel. Il s'avère en effet que la description de ce phénomène en termes de norme du mouvement brownien en dimension 3 n'est pas très satisfaisante et qu'il est intéressant d'en donner d'autres caractérisations. Notamment, nous verrons qu'en un certain sens, à préciser, le processus de Bessel correspond au mouvement brownien réel, conditionné à rester positif.

Pour commencer, examinons, à l'aide d'arguments combinatoires, l'équivalent discret des théorèmes annoncés. La deuxième section sera consacrée au développement de quelques outils assez généraux, qui nous seront utiles dans la troisième section, lorsqu'il s'agira de comprendre les circonstances du passage à la limite. Enfin, la quatrième section montrera que les résultats démontrés en temps discret s'étendent bien au temps continu.

Table des matières

1 Propriétés des processus à temps discret	3
1.1 Résultats préliminaires	3
1.2 Conditionnement à rester positif	4
1.3 Dualité par renversement du temps	5
1.4 Théorème de Pitman en temps discret	6
2 Diffusions sur \mathbb{R}	7
2.1 Générateurs infinitésimaux	8
2.2 Application aux processus de Wiener et de Bessel	11
3 Réduction à un processus en temps discret	12
3.1 Définition des chaînes de Markov associées	12
3.2 Convergence de marches aléatoires	13
4 Dualités entre mouvement brownien et processus de Bessel	15
4.1 Le processus de Bessel comme mouvement brownien positif	15
4.2 Dualité par renversement du temps	16
4.3 Théorème de Pitman	16

1 Propriétés des processus à temps discret

Dans cette section, nous ne nous occuperons pas ni du mouvement brownien ni du processus de Bessel, mais seulement de chaînes de Markov. Définissons donc les chaînes de Markov que nous étudierons :

1. Soit X_n une marche aléatoire simple sur \mathbf{Z} , c'est-à-dire une chaîne de Markov dont la matrice de transition $P = (p_{ij})$ vérifie :

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } j = i + 1 \text{ ou } j = i - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Soit Y_n la chaîne de Markov sur \mathbf{N} dont la matrice $Q = (q_{ij})$ vérifie :

$$q_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}j/i & \text{si } j = i + 1 \text{ ou } j = i - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

C'est cette chaîne de Markov qui sera associée au processus de Bessel, mais nous n'en donnerons la démonstration que plus tard.

Nous aurons besoin de faire partir ces chaînes de Markov de différents points, le point de départ sera donc explicité à chaque propriété.

1.1 Résultats préliminaires

Nous aurons besoin des quantités suivantes. Pour $W = \{W_n, n \geq 0\}$ une chaîne de Markov et c un entier, on définit τ_c^W et σ_c^W :

$$\begin{aligned} \tau_c^W &= \inf\{n \geq 0, W_n = c\} \\ \sigma_c^W &= \sup\{n \geq 0, W_n = c\} \end{aligned}$$

Par la suite, nous aurons besoin de connaître le comportement de ces quantités. Il faut donc établir quelques lemmes préliminaires.

Lemme 1 *Si $0 \leq b \leq c$ sont des entiers, si X_n est issu de b , alors*

$$\mathbf{P}(\tau_c^X < \tau_0^X) = \frac{b}{c}$$

Lemme 2 *Si $0 \leq b \leq c$ sont des entiers, si Y_n est issu de b , alors*

$$\mathbf{P}(\tau_c^Y < \infty) = \frac{b}{c}$$

La démonstration de ces lemmes utilise la solution au problème de Dirichlet.

Pour le lemme 1, on utilise le domaine $D = \{1, \dots, n-1\}$ et la fonction g définie sur $\partial D = \{0, n\}$ par $g(0) = 0$ et $g(n) = 1$. L'unique fonction f P -harmonique sur D vérifiant $f(0) = g(0)$ et $f(n) = g(n)$ est définie par :

$$f(i) = \mathbf{E}(g(X_{\inf(\tau_c^X, \tau_0^X)})) = \mathbf{P}(\tau_c^X < \tau_0^X)$$

Or on vérifie aisément que la fonction $h(i) = ic^{-1}$ est P -harmonique et que $h(0) = g(0)$ et $h(n) = g(n)$, donc $f = h$.

La démonstration du lemme 2 est moins directe puisque le domaine considéré n'est pas borné. Il faut donc choisir une borne supérieure d , établir grâce à la solution du problème de Dirichlet $\mathbf{P}(\tau_c^Y < \tau_d^Y)$, et on obtiendra la probabilité voulue par la formule :

$$\mathbf{P}(\tau_c^Y < \infty) = \lim_{d \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\tau_c^Y < \tau_d^Y)$$

1.2 Conditionnement à rester positif

Propriété 1 Soit $0 < b, c < \infty$.

Si X_n et Y_n sont tous deux issus de b , alors

– Pour $b < c$, la distribution conditionnelle de

$$\{X_n, 0 \leq n \leq \tau_c^X \mid \tau_c^X \leq \tau_0^X\}$$

est identique à la distribution de

$$\{Y_n, 0 \leq n \leq \tau_c^Y\}$$

– Pour $c < b$, la distribution conditionnelle de

$$\{Y_n, 0 \leq n \leq \tau_c^Y \mid \tau_c^Y \leq \infty\}$$

est identique à la distribution de

$$\{X_n, 0 \leq n \leq \tau_c^X\}$$

Commençons par le cas $b < c$. Soit (b, j_1, \dots, j_n) une trajectoire continue s'arrêtant à c . Concrètement, cela signifie que l'on fait des pas de 1 vers le haut ou vers le bas, que $0 < j_k < c$ pour tout $k \leq n-1$, et que $j_n = c$. La probabilité sachant $\tau_c^X \leq \tau_0^X$ que X_n parcourt cette trajectoire est :

$$\frac{p_{b,j_1} \cdots p_{j_{n-1},j_n}}{\mathbf{P}(\tau_c^X \leq \tau_0^X)} = \frac{1}{2^n} c/b$$

Et la probabilité que Y_n parcourt cette trajectoire est :

$$q_{b,j_1} \cdots q_{j_{n-1},j_n} = \left(\frac{1}{2} \frac{j_1}{b}\right) \left(\frac{1}{2} \frac{j_2}{j_1}\right) \cdots \left(\frac{1}{2} \frac{c}{j_{n-1}}\right) = \frac{1}{2^n} c/b$$

On retrouve la même probabilité, le résultat est démontré dans ce premier cas.

Dans le cas $c < b$, on reprend (b, j_1, \dots, j_n) une bonne trajectoire. La probabilité que X_n parcourt cette trajectoire est :

$$p_{b,j_1} \cdots p_{j_{n-1},j_n} = 2^{-n}$$

Et la probabilité sachant $\tau_c^Y < \infty$ que Y_n parcourt cette trajectoire est :

$$\frac{q_{b,j_1} \cdots q_{j_{n-1},j_n}}{\mathbf{P}(\tau_c^Y < \infty)} = \left(\frac{1}{2} \frac{j_1}{b}\right) \left(\frac{1}{2} \frac{j_2}{j_1}\right) \cdots \left(\frac{1}{2} \frac{c}{j_{n-1}}\right) bc^{-1} = 2^{-n}$$

Voilà qui finit la démonstration.

Cette propriété permet de comprendre Y_n à partir de X_n . En effet, on peut définir la chaîne Y_n comme la chaîne X_n conditionnée à ne pas s'annuler. Cependant, cette construction n'est pas viable au sens usuel des probabilités conditionnelles puisque si X_n est une marche aléatoire simple issue de b avec $b > 0$ quelconque, l'événement $\{\forall n \geq 0, X_n \neq 0\}$ a une probabilité nulle. Cependant, cette définition permet de définir le début de la marche Y_n , jusqu'à ce qu'elle atteigne une certaine valeur c , c étant aussi grand que l'on désire. On peut ainsi obtenir le début aussi long que l'on veut de la chaîne Y_n , ce qui permet donc de définir la probabilité des cylindres, puisqu'il s'agit de connaître les k premières valeurs de Y_n . La définition de la chaîne Y_n comme la marche aléatoire simple conditionnée à ne pas s'annuler permet donc de construire Y_n sans trop de difficultés.

1.3 Dualité par renversement du temps

Propriété 2 Soit $0 < c$, si X_n et Y_n sont tous deux issus de 0, alors les deux processus

$$\begin{aligned} & \{c - X(\tau_c^X - n), 0 \leq n \leq \tau_c^X\} \\ & \{Y_n, 0 \leq n \leq \sigma_c^Y\} \end{aligned}$$

ont la même loi.

La démonstration se fait de la même manière. Soit $(0, j_1, \dots, j_{n-1}, c)$ une trajectoire continue sur \mathbf{Z} telle que $j_k < c$ pour tout $k \leq n-1$.

$$\mathbf{P}(X_0 = 0, X_1 = j_1, \dots, X_{n-1} = j_{n-1}, X_n = c) = 2^{-n}$$

Calculons maintenant l'autre probabilité.

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(Y_0 = 0, Y_1 = c - j_{n-1}, \dots, Y_{n-1} = c - j_1, Y_n = c, n = \sigma_c^Y) \\ = & 1 \times \left(\frac{c - j_{n-2}}{2(c - j_{n-1})} \right) \cdots \left(\frac{c}{2(c - j_1)} \right) \\ & \times \mathbf{P}(n = \sigma_c^Y \mid Y_0 = 0, Y_1 = c - j_{n-1}, \dots, Y_{n-1} = c - j_1, Y_n = c) \\ = & \frac{c}{2^{n-1}} \mathbf{P}(n = \sigma_c^Y \mid Y_0 = 0, Y_1 = c - j_{n-1}, \dots, Y_{n-1} = c - j_1, Y_n = c) \end{aligned}$$

Il faut maintenant calculer la probabilité :

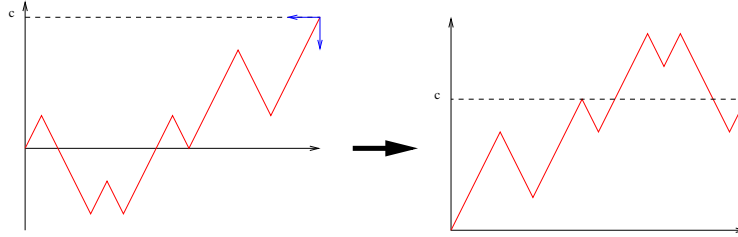
$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(n = \sigma_c^Y \mid Y_0 = 0, Y_1 = c - j_{n-1}, \dots, Y_{n-1} = c - j_1, Y_n = c) = \\ & \mathbf{P}(\forall k > n, Y_k \neq 0 \mid Y_0 = 0, Y_1 = c - j_{n-1}, \dots, Y_{n-1} = c - j_1, Y_n = c) \end{aligned}$$

D'après la propriété de Markov, cette probabilité est la même que :

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\forall k > n, Y_k \neq 0 \mid Y_n = c) \\ = & \mathbf{P}(Y_{n+1} = c + 1 \mid Y_n = c) \mathbf{P}(\forall k > n, Y_k \neq 0 \mid Y_{n+1} = c + 1) \\ = & \left(\frac{c + 1}{2c} \right) \left(1 - \frac{c}{c + 1} \right) = \frac{1}{2c} \end{aligned}$$

En injectant ce résultat dans l'égalité précédente, on retrouve la bonne valeur.

Cette propriété permet d'obtenir Y_n à partir de X_n de façon très visuelle. On arrête X_n la première fois que l'on arrive à c , on fait une symétrie par rapport à c et on renverse l'axe des temps. On voit cette transformation sur le graphique suivant.



L'intérêt de cette propriété est d'avoir une deuxième définition de Y_n à partir de X_n . Cette définition est plus compliquée à appliquer, puisqu'il faut faire un nouveau calcul pour chaque entier c et qu'on a besoin de σ_c^Y qui est plus difficile à calculer que τ_c^Y . Cependant, elle reste intéressante puisqu'il s'agit d'une transformation géométrique, et de fait bien plus facile à imaginer et à visualiser qu'un conditionnement.

1.4 Théorème de Pitman en temps discret

Cette fois nous aurons besoin de nouvelles notations. Pour $W = \{W_n, n \geq 0\}$ un processus à temps discret, on définit 2 nouveaux processus :

$$M_n^W = \sup_{0 \leq k \leq n} W_k$$

$$F_n^W = \inf_{n \leq k < \infty} W_k$$

Théorème 1 (Pitman) *Si X_n et Y_n sont tous deux issus de 1, alors :*

1. $2M_n^X - X_n$ a la même loi que Y_n
2. $2F_n^Y - Y_n$ a la même loi que X_n
3. les lois de M_n^X et F_n^Y sont les mêmes

Géométriquement, $2M_n^X - X_n$ est obtenu en faisant la symétrie de X_n autour de son maximum sur $\{0, \dots, n\}$.

Avant de commencer la démonstration du théorème proprement dit, montrons que les points 2 et 3 du théorème découlent directement du point 1, même en temps continu. On sait que X_n étant une marche aléatoire simple, on a presque sûrement :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty \text{ donc } \lim_{n \rightarrow \infty} M_n^X = \infty$$

Soit $X = \{X(t), t \geq 0\}$ un processus à temps continu (pour rester dans le cas général), continu quelconque vérifiant $\limsup X(t) = \infty$ p.s. et soit $Y = 2M^X - X$. Prenons $t \geq 0$.

$$\forall s \geq t, Y(s) \geq M^X(s) \geq M^X(t) \text{ donc } F^Y(t) \geq M^X(t)$$

Puisque $\lim M^X(s) = \infty$, il existe $s_0 \geq t$ tel que $M^X(s_0) > M^X(t)$. De plus, comme M^X est continu et croissant,

$$s_1 = \inf\{s \leq 0, M^X(s) > M^X(t)\}$$

existe et $M^X(s_1) = M^X(t)$. Enfin, on voit facilement que $X(s_1) = M^X(t)$. Donc $Y(s_1) = M^X(t)$. Donc p.s., les fonctions M^X et F^Y sont égales.

Enfin, si $Y = 2M^X - X$ et $F^Y = M^X$, alors $Y = 2F^Y - X$ et $X = 2F^Y - Y$.

Entamons la preuve du point numéro 1 du théorème. Prenons X_n la marche aléatoire simple et soit Z_n le processus défini par $Z_n = 2M_n^X - X_n$. Il faut montrer que Z_n est une chaîne de Markov issue de 1 et de matrice de transition $Q = (q_{ij})$. Soit $(1, j_1, \dots, j_{n-1}, i)$ une trajectoire possible pour Z , c'est-à-dire que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a $j_k > 0$. On sait alors que $M_n^X \in \{1, \dots, i\}$. La formule

$$M_k^X = \min\{Z_k, \dots, Z_n, M_n^X\}$$

pour $0 \leq k \leq n$ découle tout simplement du fait que $M^X = F^Z$ et permet de calculer M_k^X pour $0 \leq k \leq n$ à la seule condition qu'on connaisse M_n^X . On a aussi directement $X_k = 2M_k^X - Y_k$. Il y a donc i chemins décrits par X tels que Z suive cette trajectoire, chacun associé à une valeur de M_n^X et ils sont équiprobables.

Ensuite, si $M_n^X \neq X_n$, c'est-à-dire $M_n^X \neq i$, alors Z_{n+1} est augmenté ou diminué de 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$. Si $M_n^X = X_n$, alors Z_{n+1} est obligatoirement augmenté de 1. Ces deux assertions sont évidentes si on considère Z_n comme la réflexion de X_n autour de son maximum. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z_{n+1} = i + 1 \mid Z_0 = 0, \dots, Z_n = i) &= \frac{1}{2} \times \mathbf{P}(M_n^X \neq i) + 1 \times \mathbf{P}(M_n^X = i) \\ &= \frac{1}{2} \frac{i + 1}{i} = q_{i, i+1} \\ \mathbf{P}(Z_{n+1} = i - 1 \mid Z_0 = 0, \dots, Z_n = i) &= \frac{1}{2} \times \mathbf{P}(M_n^X \neq i) \\ &= \frac{1}{2} \frac{i - 1}{i} = q_{i, i-1} \end{aligned}$$

Donc Z_n est une chaîne de Markov de matrice de transition q_{ij} , le théorème est démontré.

Ce théorème permet de considérer Y_n comme la réflexion de X_n autour de son maximum. C'est ce théorème que nous voulons étendre au temps continu, au mouvement brownien et au processus de Bessel.

2 Diffusions sur \mathbf{R}

Le but de cette section sera de rappeler rapidement quelques propriétés des diffusions sur la droite réelle et d'introduire le vocabulaire des générateurs infinitésimaux. Nous allons mener ensuite les calculs en ce qui concerne les processus de Wiener et de Bessel, pour pouvoir les appliquer dans la section 3 et y étudier les convergences de mesures.

2.1 Générateurs infinitésimaux

Introduisons d'abord quelques notations qui seront utilisées durant tout l'exposé. Soit $\Omega = \mathcal{C}^0(\mathbf{R}_+, I)$ l'espace des chemins continus sur un intervalle I et X le processus canonique : $X(t, \omega) = \omega(t)$. L'espace Ω sera muni de la tribu engendrée par les variables aléatoires X_t : $\mathcal{F} = \sigma(X_t, 0 \leq t < \infty)$, ainsi que de la filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$. Enfin, on pose

$$\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$$

Diffusions régulières

Définition 1 Pour tout $x \in I$, soit \mathbf{P}_x une probabilité sur Ω . On dit alors que $\{\mathbf{P}_x\}$ est une diffusion si, pour tout x ,

$$\mathbf{P}_x(X(0) = x) = 1$$

et si X vérifie une propriété de Markov forte : si θ_t est le shift, T un temps d'arrêt, si F et G sont mesurables positives, si F est \mathcal{F}_T -mesurable, on a

$$\mathbf{E}_x(1_{\{T < \infty\}} F \cdot G \circ \theta_T) = \mathbf{E}_x(1_{\{T < \infty\}} F \cdot \mathbf{E}_{X(T)}(G))$$

On utilisera dans la suite les processus de Wiener (mouvement brownien en dimension 1) et le processus de Bessel. Ce sont des diffusions et on note respectivement P^x et Q^x les mesures associées sur $\Omega = \mathcal{C}^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$. La loi de Blumenthal se généralise aux diffusions puisque c'est une conséquence immédiate de la propriété de Markov :

Théorème 2 La tribu \mathcal{F}_{0+} est triviale

Cette loi permet de considérer les événements qui se produisent arbitrairement près du temps 0, et notamment :

$$A = \{\exists \epsilon > 0, \forall s \in [0, \epsilon], X_s = x\}$$

La loi de Blumenthal affirme que les réels se divisent en deux catégories : les points pour lesquels $\mathbf{P}_x(A) = 1$, dits *absorbants* et les points pour lesquels $\mathbf{P}_x(A) = 0$, dits *instantanés*. On note τ_x le temps d'arrêt $\inf\{t \geq 0, X_t = x\}$, avec bien sûr $\inf \emptyset = \infty$.

Définition 2 On dit que x est un point régulier si

$$\mathbf{P}_x(\forall \epsilon > 0, \exists t \in [0, \epsilon], X_t > x) = \mathbf{P}_x(\forall \epsilon > 0, \exists t \in [0, \epsilon], X_t < x) = 1$$

En particulier, tout point régulier est instantané.

Définition 3 On dit que la diffusion $\{\mathbf{P}_x\}$ est régulière si pour tout x intérieur à I , pour tout $y \in I$, $\mathbf{P}_x(\tau_y < \infty) > 0$

Il existe (bien sûr) un lien fort entre points réguliers et diffusions régulières, qui est explicité par le théorème suivant :

Théorème 3 *Si la diffusion $\{\mathbf{P}_x\}$ est régulière, tous les points sont réguliers. Réciproquement, si tout point intérieur à I est régulier, et si pour tout point frontière y , il existe x intérieur tel que $\mathbf{P}_x(\tau_y < \infty) > 0$, alors la diffusion est régulière*

A partir de maintenant, toutes les diffusions seront régulières. En particulier, on démontre assez facilement que le mouvement brownien et le processus de Bessel sont des diffusions régulières.

Fonction d'échelle

Introduisons maintenant la notion de fonction d'échelle. Soit $[a,b] \subset I$ et notons

$$s_{ab}(x) = \mathbf{P}_x(\tau_b < \tau_a)$$

On peut démontrer, grâce à la propriété de Markov, que la fonction s_{ab} est toujours strictement croissante et continue. La propriété la plus importante est toutefois l'existence d'une fonction globale permettant de calculer s_{ab} pour tous a,b dans I .

Théorème 4 *Il existe une fonction continue strictement croissante S définie sur I , telle que pour tout $a \leq x \leq b$ dans I ,*

$$s_{ab}(x) = \mathbf{P}_x(\tau_b < \tau_a) = \frac{S(x) - S(a)}{S(b) - S(a)}$$

La fonction S est la *fonction d'échelle* de la diffusion $\{\mathbf{P}_x\}$. A titre d'exemple, la fonction d'échelle du mouvement brownien réel est $S(x) = x$. (cf plus loin pour une démonstration)

Semigroupes et générateurs infinitésimaux

On notera $\mathcal{C}_b^0(I, \mathbf{R})$ l'espace des fonctions continues bornées sur I , muni de la norme évidente. La diffusion $\{\mathbf{P}_x\}$ permet de définir des opérateurs T_t , $t \geq 0$ sur $\mathcal{C}_b^0(I, \mathbf{R})$ par

$$(T_t f)(x) = \mathbf{E}_x(f(X_t))$$

On peut démontrer que l'opérateur T_t est continu, de norme inférieure à 1. On a même la continuité jointe: $(t,x) \mapsto (T_t f)(x)$ est continue, ce qui montre que T_t est à valeurs dans $\mathcal{C}_b^0(I, \mathbf{R})$. Les opérateurs $(T_t)_{t \geq 0}$ forment un semigroupe, puisque $T_0 = Id$ et que $T_t T_s = T_{t+s}$. Pour vérifier cela, il suffit d'appliquer la propriété de Markov :

$$\begin{aligned} (T_{t+s} f)(x) &= \mathbf{E}_x(f(X_{t+s})) \\ &= \mathbf{E}_x(\mathbf{E}_{X_t}(f(X_s))) \\ &= (T_t(T_s f))(x) \end{aligned}$$

Ce semigrroupe permet d'associer à toute diffusion un opérateur, dit *générateur infinitésimal* dont il d'agira de montrer qu'il caractérise la diffusion, au sens où, si deux diffusions ont même générateur, les mesures \mathbf{P}_x sont les mêmes. Définissons, pour $\lambda > 0$, un opérateur sur $\mathcal{C}_b^0(I, \mathbf{R})$ par :

$$(G_\lambda f)(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} (T_t f(x)) dt$$

L'application $\lambda \mapsto (G_\lambda f)(x)$ n'est autre que la transformée de Laplace de l'application continue $t \mapsto (T_t f)(x)$. On voit immédiatement que G_λ est un opérateur linéaire continu de norme inférieure à $1/\lambda$, de $\mathcal{C}_b^0(I, \mathbf{R})$ vers lui-même. La formule importante est la suivante, dont on déduit toutes les propriétés des $(G_\lambda)_{\lambda > 0}$:

Théorème 5 $\forall \lambda, \mu > 0, G_\lambda - G_\mu + (\lambda - \mu)G_\lambda G_\mu = 0$

La démonstration est élémentaire et repose sur le théorème de Fubini et la structure de semi groupe de $(T_t)_{t > 0}$. Cette formule a pour conséquence de nombreuses propriétés des fonctions G_λ , notamment le fait que G_λ et G_μ commutent toujours, que toutes les G_λ sont injectives et surtout le fait que $\text{Im}(G_\lambda)$ ne dépend pas de $\lambda > 0$. En effet, si on prend $f = G_\mu g$, la formule de la résolvante donne

$$f = G_\lambda g + (\lambda - \mu)G_\lambda G_\mu g = G_\lambda(g + (\lambda - \mu)G_\mu g)$$

donc $\text{Im}(G_\mu) \subset \text{Im}(G_\lambda)$.

Définition 4 Soit Δ l'image commune des G_λ et posons, sur Δ , $\Gamma = Id - G_1^{-1}$. On dit que Γ est le générateur infinitésimal de la diffusion $\{\mathbf{P}_x\}$.

On peut maintenant énoncer et démontrer le théorème annoncé :

Théorème 6 *Le générateur infinitésimal détermine entièrement $\{\mathbf{P}_x\}$*

Démonstration : La formule de la résolvante donne, pour $\lambda = 1$,

$$G_1 - G_\mu + (1 - \mu)G_1 G_\mu = 0$$

d'où, en appliquant G^{-1} , sur Δ , on a $Id - G_1^{-1}G_\mu + (1 - \mu)G_\mu = 0$ ou encore $G_\mu^{-1} = \mu - \Gamma$. Ainsi, les G_λ sont déterminés par Γ . Or, la transformée de Laplace est bijective sur $\mathcal{C}_b^0(I, \mathbf{R})$, donc les T_t sont déterminés de manière unique. Le lemme de classe monotone montre que les mesures \mathbf{P}_x sont déterminées par leurs valeurs sur les cylindres

$$\{X \in \Omega, X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n\}$$

pour $n \in \mathbf{N}$, $t_1 < \dots < t_n$ A_1, \dots, A_n boréliens. Essayons donc d'évaluer l'espérance

$$\mathbf{E}_x(f_1(X_{t_1}) \dots f_n(X_{t_n}))$$

où les f_1, \dots, f_n sont continues bornées sur I . Pour $n = 1$, par définition de T_{t_1} , la propriété est claire. Posons, si $n \geq 1$, $t_{n+1} = t_n + s$ et $Y_{n-1} = f_1(X_{t_1}) \dots f_{n-1}(X_{t_n})$. La propriété de Markov (faible, en t_n) donne

$$\mathbf{E}_x(Y_{n-1}f_n(X_{t_n})f_{n+1}(X_{t_n+s})) = \mathbf{E}_x(Y_{n-1}g(X_{t_n}))$$

où g est la fonction continue bornée $g(x) = f_n(x)\mathbf{E}_x(f_{n+1}(X_s))$. On se ramène donc à l'hypothèse de récurrence, ce qui démontre la propriété. \square

Pour calculer l'opérateur associé à une diffusion, il existe une formule explicite qui est surtout simple à manipuler. Elle est un corollaire de la formule plus générale suivante, due à Dynkin :

Théorème 7 Soit $\{\mathbf{P}_x\}$ une diffusion de générateur (Γ, Δ) . Soit T un temps d'arrêt dans L^1 , $f \in \Delta$. Alors

$$\mathbf{E}_x\left(\int_0^T \Gamma f(X_t) dt\right) = \mathbf{E}_x(f(X_T)) - f(x)$$

Une fois que l'on a cette formule, il est immédiat que l'on peut calculer, pour $f \in \Delta$,

$$\Gamma f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{E}_x(f(X_t)) - f(x)}{t}$$

2.2 Application aux processus de Wiener et de Bessel

Puisque les générateurs infinitésimaux caractérisent les diffusions, on peut se servir d'eux pour redéfinir les processus qui nous intéressent et en obtenir une vision plus intrinsèque.

Processus de Wiener

Commençons par calculer la fonction d'échelle du mouvement brownien. Prenons $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien réel. Soit $a < b$ et $x \in [a, b]$. Notons τ le temps d'arrêt $\inf\{t \geq 0, B_t = a \text{ ou } B_t = b\}$. Comme le mouvement brownien est une martingale, le théorème d'arrêt donne

$$\mathbf{E}_x(B_\tau) = \mathbf{E}_x(B_0) = x$$

Or, B_τ est à valeurs dans $\{a, b\}$, donc on a immédiatement

$$s_{ab}(x) = \frac{x - a}{b - a}$$

Le mouvement brownien possède donc pour fonction d'échelle l'identité: on dit qu'il est à échelle naturelle.

Théorème 8 Soit (B_t) un mouvement brownien sur la droite réelle. Alors son générateur infinitésimal est (Γ, Δ) où Δ est l'espace

$$\Delta = \{f \in \mathcal{C}_b^0(I, \mathbf{R}), f'' \in \mathcal{C}_b^0(I, \mathbf{R})\}$$

et où Γ est l'opérateur défini sur Δ par

$$\Gamma f = \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}$$

A la lumière des paragraphes précédents, on pourrait donc définir le mouvement brownien sur \mathbf{R} comme l'unique diffusion régulière à valeurs dans \mathbf{R} dont le générateur est donné par l'opérateur Γ .

Processus de Bessel

De même que pour le mouvement brownien, calculons la fonction d'échelle du processus de Bessel. Prenons (Y_t) un processus de Bessel, $Y_t = \|B_t\|$, où (B_t) est un mouvement brownien en dimension 3. Si on prend $a < b$, $x \in [a, b]$, on cherche à évaluer la probabilité $\mathbf{P}_x(\tau_b < \tau_a)$. Considérons le domaine dans \mathbf{R}^3 compris strictement entre les boules $\bar{B}(0, a)$ et $\bar{B}(0, b)$. Définissons la fonction g sur ∂D par $g(x) = 1$ si $\|x\| = a$ et $g(x) = 0$ sinon. Si on note T le temps d'arrêt $\inf\{t \geq 0, B_t \notin D\}$, un théorème classique affirme que, pour $y \in D$,

$$h(y) = \mathbf{E}_y(g(B_T)) = \mathbf{P}_y(\tau_{\bar{B}(0, a)} < \tau_{\bar{B}(0, b)})$$

est l'unique solution au problème de Dirichlet avec condition aux frontières donnée par g . Or, un calcul immédiat montre que la fonction définie par

$$\tilde{h}(y) = \frac{1/a - 1/\|y\|}{1/a - 1/b}$$

vérifie aussi les conditions de Dirichlet, d'où l'égalité de ces deux fonctions. Ceci permet d'identifier la fonction d'échelle du processus de Bessel à la fonction $-1/y$ définie sur $]0, +\infty[$.

Théorème 9 *Soit (Y_t) un processus de Bessel en dimension 3. Alors son générateur infinitésimal est défini par*

$$\Gamma_3 f = \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{df}{dx}$$

3 Réduction à un processus en temps discret

3.1 Définition des chaînes de Markov associées

On va maintenant essayer de définir des chaînes de Markov à partir des processus X et Y . Ceci devra se faire en respectant certaines conditions : d'une part, les chaînes de Markov devront tendre vers les processus continus lorsque le pas de temps tend vers 0 (cette affirmation est volontairement imprécise, on verra plus loin quel sens rigoureux lui donner). D'autre part, on fera en sorte que les chaînes conservent l'essentiel des propriétés des processus dont ils sont issus.

On note Ω^* le sous-ensemble de Ω formé des fonctions telles que $\limsup \omega(t) = +\infty$, muni de la tribu induite. On note de plus $\mathbf{Z}_\delta = \{j\delta, j \in \mathbf{Z}\}$. On définit alors une fonction $\rho_\delta^{(m)} : \Omega^* \rightarrow \mathbf{R}_+$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \rho_\delta^{(0)} w &= \inf\{t \geq 0, w(t) \in \mathbf{Z}_\delta\} \\ \rho_\delta^{(n+1)} w &= \inf\{t \geq \rho_\delta^{(n)}, w(t) \in \mathbf{Z}_\delta, w(t) \neq w(\rho_\delta^{(n)} w)\} \end{aligned}$$

On voit bien ce que représentent les temps $\rho_\delta^{(n)} w$: ce sont les temps successifs auxquels le processus continu w atteint un nouveau point sur le réseau \mathbf{Z}_δ . Définissons maintenant le processus des valeurs prises en ces points :

$$V_\delta^{(n)} w = w(\rho_\delta^{(n)})$$

La propriété de Markov forte vérifiée par les diffusions $\{P^x\}$ et $\{Q^x\}$, ainsi que le fait que les $\rho_\delta^{(n)}$ sont des temps d'arrêt montrent immédiatement que le processus $V_\delta^{(n)}$ est, sous P^x et sous Q^x , une chaîne de Markov à temps discret. Déterminons la matrice de transition : sous P^x , il s'agit de la marche aléatoire simple dont la matrice P est $p_{ij} = 1/2$ si $j = i+1$ ou $j = i-1$, $p_{ij} = 0$ sinon. Sous Q^x , on sait que le processus de Bessel admet pour fonction d'échelle $y \mapsto -1/y$. On calcule donc :

$$\begin{aligned} Q^x(V_\delta^{(n+1)} w = j\delta \mid V_\delta^{(n)} w = i\delta) &= 0 \text{ si } j \neq i+1 \text{ et } j \neq i-1 \\ &= Q^{i\delta}(\tau_{(i+1)\delta} \leq \tau_{(i-1)\delta}) = \frac{i+1}{2i} \text{ si } j = i+1 \\ &= Q^{i\delta}(\tau_{(i-1)\delta} \leq \tau_{(i+1)\delta}) = \frac{i-1}{2i} \text{ si } j = i-1 \end{aligned}$$

Ainsi, sous Q^x , la chaîne $V_\delta^{(n)} w$ a pour matrice $Q = (q_{ij})$ où $q_{01} = 1$ et, pour $i \geq 1$, $q_{ij} = j/2i$ si $j = i+1$ ou $j = i-1$ et $q_{ij} = 0$ sinon. Les marches ainsi définies héritent des propriétés des processus à temps continu qui ont servi à les définir. Par exemple, le mouvement brownien et la P -marche admettent tous deux 0 comme point récurrent, tandis que le processus de Bessel et la Q -marche sont transitoires.

Essayons de voir maintenant ce qui se passe lorsqu'on fait tendre δ vers 0. On s'attend intuitivement à ce que les marches aléatoires "convergent" vers le processus continu dont elles sont issues. Le paragraphe suivant sera consacré à l'étude du mode et des conditions de convergence.

3.2 Convergence de marches aléatoires

Pour étudier le passage à la limite, il faut que les processus soient définis sur le même espace : injectons donc les marches aléatoires dans l'espace Ω . Nous avons déjà la transformation : $w \mapsto (V_\delta^{(n)})_{n \geq 0}$. Il faut maintenant renvoyer la chaîne de Markov dans l'espace des fonctions continues. Il suffit de prendre la fonction affine par morceaux obtenue en reliant les points, mais il faut encore choisir le pas de temps. Le pas de temps le plus naturel est $E_P^x(\rho_\delta^{(n+1)} - \rho_\delta^{(n)}) = \delta^2$. Formellement, on note $V_\delta : \Omega^* \rightarrow \Omega$ définie par $V_\delta w(n\delta^2) = V_\delta^{(n)} w$ et $V_\delta w$ affine par morceaux.

On définit alors les mesures sur Ω^* qui ne chargent que les chemins obtenus par ce procédé :

$$\begin{aligned} P_\delta^x &= P^x V_\delta \\ Q_\delta^x &= Q^x V_\delta \end{aligned}$$

On se donne sur Ω la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, qui en fait un espace polonais. On munit l'espace des mesures de probabilité sur Ω de la topologie faible-* associée, c'est-à-dire qu'une suite de mesures (μ_n) converge

faiblement vers μ si et seulement si, pour toute fonction f de Ω dans \mathbf{R} , continue et bornée,

$$\int f d\mu_n \longrightarrow \int f d\mu$$

On peut alors décrire précisément le phénomène de convergence des marches aléatoires :

Théorème 10 *Soit $x \geq 0$ fixé.*

1. *La mesure $P_{1/\sqrt{n}}^x$ converge faiblement vers la mesure de Wiener P^x*
2. *La mesure $Q_{1/\sqrt{n}}^x$ converge faiblement vers la mesure de Bessel Q^x*

La première assertion est un cas particulier du théorème de Donsker. La démonstration est la même que celle qui a été utilisée pour définir le mouvement brownien à partir de marches aléatoires de pas infinitésimal : pour tout n -uplet de temps (t_1, \dots, t_n) , on regarde la distribution de $(w(t_1), \dots, w(t_n))$ selon $P_{1/\sqrt{n}}^x$ et on voit qu'on tend vers la même distribution que $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ avec B_t un mouvement brownien.

Le théorème de Donsker est difficile à démontrer, et sa généralisation pour la mesure Q^x est encore plus difficile (elle découle d'un article de Lamperti [Lam62] sur la convergence de chaînes de Markov dont la matrice de transition est asymptotiquement d'une certaine forme). Par contre, on peut donner des arguments heuristiques qui donnent au moins une intuition du résultat. Si on essaie, en ce qui concerne la P -marche, de calculer l'analogie du générateur infinitésimal au moyen de la formule de Dynkin, on est amené à évaluer l'espérance suivante, pour f suffisamment régulière,

$$E_{P,\delta}^x \left(\frac{f(X_{\delta^2}) - f(X_0)}{\delta^2} \right)$$

Or, un calcul simple montre que cette espérance vaut

$$\frac{f(x + \delta) + f(x - \delta) - 2f(x)}{2\delta^2}$$

Quand $\delta \rightarrow 0$, cette expression converge vers $f''(x)/2$, ce qui correspond bien à l'image de f par le générateur infinitésimal du mouvement brownien. ($\frac{1}{2}d^2/dx^2$)

Le même argument s'applique encore dans le cas de la mesure Q^x : l'espérance étudiée vaut maintenant

$$\frac{f(x + \delta) + f(x - \delta) - 2f(x)}{2\delta^2} + \frac{f(x + \delta) - f(x - \delta)}{2x\delta}$$

Comme précédemment, le premier terme tend vers $f''(x)/2$ quand δ tend vers 0. Le deuxième terme tend clairement vers $f'(x)/x$. Encore une fois, ceci correspond à l'image de f par le générateur du processus de Bessel ($\frac{1}{2}d^2/dx^2 + \frac{1}{x}d/dx$). Le générateur d'une diffusion caractérisant celle-ci, les convergences ci-dessus donnent un bon indice de la convergence des mesures.

Pour la démonstration du théorème de Pitman, nous aurons également besoin du résultat suivant :

Théorème 11 *Si δ converge vers 0, par exemple suivant $\{1/\sqrt{n}, n > 0\}$.*

1. *La mesure P_δ^δ converge faiblement vers la mesure de Wiener P^0*
2. *La mesure Q_δ^δ converge faiblement vers la mesure de Bessel Q^0*

Il s'agit maintenant de voir comment les transformations (en particulier les inversions de temps et les réflexions définies au paragraphe (1)) passent à la limite. C'est l'objet du théorème suivant, qui fournit la clé de la démonstration des deux théorèmes annoncés (14 et 15).

Théorème 12 *Soit μ_n une suite de mesures sur Ω convergeant faiblement vers μ et soit $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega$ une transformation mesurable et continue μ -p.p. Alors, $\mu_n \Phi$ converge faiblement vers $\mu \Phi$.*

Ainsi, si $P_\delta^x \Phi = Q_\delta^x$, alors $P^x \Phi = Q^x$.

4 Dualités entre mouvement brownien et processus de Bessel

Cette section va servir à étendre les différentes dualités déjà constatées dans le cadre des chaînes de Markov aux processus à temps continu. On ne va pas donner de démonstrations complètes de ces théorèmes, mais il ne s'agit plus que de vérifications techniques, le travail essentiel ayant déjà été fait dans la première partie. Les théorèmes de passage à la limite s'appliquent sous réserve de trouver les bonnes transformations, telles que décrites dans le théorème 12.

4.1 Le processus de Bessel comme mouvement brownien positif

Théorème 13 *Soit $b > 0, c < \infty$.*

Si X est un mouvement brownien et Y un processus de Bessel, tous deux issus de b , alors

- *Pour $b < c$, la distribution conditionnelle de*

$$\{X(t), 0 \leq t \leq \tau_c^X \mid \tau_c^X \leq \tau_0^X\}$$

est identique à la distribution de

$$\{Y(t), 0 \leq t \leq \tau_c^Y\}$$

- *Pour $c < b$, la distribution conditionnelle de*

$$\{Y(t), 0 \leq t \leq \tau_c^Y \mid \tau_c^Y \leq \infty\}$$

est identique à la distribution de

$$\{X(t), 0 \leq t \leq \tau_c^X\}$$

Ceci justifie donc le titre de la section : de manière analogue à ce que nous avons fait dans la partie (1.2), on peut, grâce à ce théorème, voir le processus de Bessel comme un mouvement brownien conditionné à rester positif. Encore une fois, il est clair que l'événement $\{\tau_0^X = \infty\}$ est de probabilité nulle, mais comme il est possible de voir cet événement comme limite décroissante des événements $\{\tau_0 \geq \tau_c\}$ lorsque $c \rightarrow \infty$, le théorème permet de donner une bonne idée de ce qui se passe en $c = \infty$.

4.2 Dualité par renversement du temps

Théorème 14 *Soit X un mouvement brownien et Y un processus de Bessel, tous deux issus de 0 et soit $0 < c$. Alors les deux processus*

$$\{c - X(\tau_c^X - t), 0 \leq t \leq \tau_c^X\}$$

et

$$\{Y(t), 0 \leq t \leq \sigma_c^Y\}$$

ont la même loi.

La démonstration de ce théorème est assez claire: la transformation à utiliser est évidente. Il nous fournit des informations sur la structure du processus de Bessel avant qu'il ne passe définitivement au-dessus de c . Le théorème permet donc d'étudier plus simplement le processus de Bessel. Pitman signale dans son article que ce théorème, ainsi que le précédent, peuvent s'étendre à de nombreux couples de diffusions sur la droite réelle. Ce n'est pas le cas du théorème suivant, apparemment spécifique au couple mouvement brownien–processus de Bessel.

4.3 Théorème de Pitman

Venons-en enfin au théorème démontré par Pitman dans l'article qui nous intéresse.

Théorème 15 (Pitman) *Soit X un mouvement brownien et Y un processus de Bessel, tous deux issus de 0.*

1. $2M^X - X$ est un processus de Bessel
2. $2F^Y - Y$ est un mouvement brownien
3. les lois de M^X et F^Y sont les mêmes

Pour ce théorème, il faut se rappeler qu'on avait utilisé des chaînes de Markov issues de 1 et non de 0, ce qui revient à utiliser des processus issus de δ . Il faut donc utiliser le fait que P_δ^δ et Q_δ^δ convergent respectivement vers P^0 et Q^0 .

Conclusion

La méthode de Pitman permet donc de donner des démonstrations très intuitives de résultats déjà connus ou nouveaux. Ces résultats peuvent à leur tour être utilisés pour donner des renseignements sur les chemins browniens, à l'image du

théorème 14 qui donne une description, pour un processus de Bessel issu de 0, du chemin parcouru avant σ_c . Ceci n'est qu'un exemple parmi les théorèmes de type "Williams" (voir par exemple [Wil70] ou [Wil74]) qui permettent de décomposer les chemins browniens en plusieurs étapes simplement descriptibles.

Nous tenons à remercier tout particulièrement Jean Bertoin pour nous avoir fait découvrir ce thème des chemins browniens et nous avoir aidé à prendre du recul sur l'interprétation des théorèmes.

Références

- [Bil68] Patrick Billingsley. *Convergence of probability measures*. Wiley, 1968.
- [Lam62] John Lamperti. A new class of probability limit theorems. *J. math. mech.*, 11:749–772, 1962.
- [Pit75] Jim Pitman. One-dimensional brownian motion and the three-dimensional bessel process. *Adv. appl. prob.*, 7:511–526, 1975.
- [RY99] Daniel Revuz and Marc Yor. *Continuous martingales and brownian motion*. Springer, 3 edition, 1999.
- [Wil70] David Williams. Decomposing the brownian path. *Bull. amer. math. soc.*, 76:871–873, 1970.
- [Wil74] David Williams. Path decomposition and continuity of local time for one-dimensional diffusions, i. *Proc. London Math. Soc.*, 28:738–768, 1974.