Introduction à la notion de propriété d'hypergroupe

Nolwen Huet
sous la direction de Dominique Bakry

juin 2005

1 Généralisation d'une formule produit trigonométrique

Considérons la formule trigonométrique suivante :

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}.$$

On peut également la voir sous la forme :

$$\cos a \cos b = \int \cos z \ \left(\frac{\delta_{a+b} + \delta_{a-b}}{2}\right)(dz).$$

Essayons de généraliser ce genre de formule produit. On remarque que la famille $\big(\theta \mapsto \cos(n\theta)\big)$, qui forme une base de $\mathrm{L}^2([0;\pi], d\theta)$ peut être vue comme un cas particulier de polynômes de Jacobi. Rappelons que la famille des polynômes de Jacobi de paramètres $\alpha, \beta > -1$ est la famille de polynômes orthogonaux associée à la mesure de probabilité

$$\mu_{\alpha,\beta}(dx) = C_{\alpha,\beta}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\mathbb{1}_{[-1;1]}(x),$$

c'est-à-dire l'orthonormalisée de Schmidt de $(1, x, x^2, \ldots)$ pour le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int fg \ d\mu_{\alpha,\beta}$. C'est aussi la famille de polynômes propres de l'opérateur dit de Jacobi :

$$\mathrm{L}^{\alpha,\beta} = (1-x^2)\partial^2_{xx} + ((\beta-\alpha) - (\alpha+\beta+2)x)\partial_x,$$

associés aux valeurs propres $-\lambda_n$ avec $\lambda_n = n(n+\alpha+\beta+1)$. Si $\alpha = \beta = -1/2$, en posant $x = \cos\theta$, on trouve :

$$\frac{P_n^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(\cos\theta)}{P_n^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(1)} = \cos(n\theta).$$

Une démonstration très technique de Gasper (cf [6]) permet d'élargir la formule précédente sur les cosinus aux polynômes de Jacobi.

Théorème (Gasper)**.** *Soit $\alpha, \beta > -1$ et $-1 < x, y < 1$. Alors :*

- *On a la formule produit suivante :*

$$\forall\, n, \quad \frac{P_n^{\alpha,\beta}(x)P_n^{\alpha,\beta}(y)}{P_n^{\alpha,\beta}(1)} = \int P_n^{\alpha,\beta}(z)\;\; m_{\alpha,\beta}(x,y,dz)$$

  où $m_{\alpha,\beta}(x,y,dz)$ est une mesure borélienne sur $[-1;1]$.
- *La mesure est positive (et donc de probabilité en faisant $n = 0$) si et seulement si*

$$\alpha \geq \beta \geq -1/2 \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} \alpha+\beta \geq 0 \\ \alpha \geq \beta \end{array} \right. .$$

- *Si $\alpha > \beta > -1/2$ alors $m_{\alpha,\beta}(x,y,dz)$ est absolument continue par rapport à $\mu_{\alpha,\beta}$, de densité dans $\mathrm{L}^2(\mu_{\alpha,\beta})$, et par orthogonalité, on a donc :*

$$\sum_n \frac{P_n^{\alpha,\beta}(x)P_n^{\alpha,\beta}(y)P_n^{\alpha,\beta}(z)}{P_n^{\alpha,\beta}(1)} \geq 0$$

  avec convergence de la somme pour presque tout z.

2 La propriété d'hypergroupe

On peut étudier plus généralement cette propriété pour n'importe quelle base hilbertienne (f_n) d'un espace $\mathrm{L}^2(\mu, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ séparable. On se place donc sur un espace mesuré $(E, \mathcal{E}, \mu)$ convenable, tel que $\mathrm{L}^2(\mu)$ soit séparable et qu'on puisse utiliser le théorème de désintégration des mesures (cf [2, ch. III, n$^{\text{os}}$70 à 74]) pour avoir une bonne définition des noyaux markoviens sur $\mathrm{L}^2(\mu)$; par exemple, E est un espace polonais (métrique séparable), muni de sa tribu borélienne. On se donne alors une base hilbertienne (f_n) de $\mathrm{L}^2(\mu)$ dont on suppose qu'on dispose d'une version définie en tout point de E (et non pas seulement μ-presque partout), avec $f_0 = 1$.

Définition. On dit que les f_n vérifient la propriété d'hypergroupe[1] au point x_0 sous μ si pour tout x dans E, $\|f_n(x)/f_n(x_0)\| \leq 1$ et l'opérateur K_x borné sur $\mathrm{L}^2(\mu)$ défini par la donnée de ses vecteurs propres f_n associées aux valeurs propres $f_n(x)/f_n(x_0)$, est un noyau markovien. C'est-à-dire :

$$\sum_n \alpha_n f_n(y) \geq 0 \Longrightarrow \sum_n \frac{\alpha_n}{f_n(x_0)} f_n(x) f_n(y) \geq 0,$$

les inégalités étant à prendre au sens μ-presque sûr.

Rappel. On appelle noyau markovien ou probabilité de transition (d'une chaîne de Markov par exemple) une fonction K de $E \times \mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que $K(x, .\,)$ soit une probabilité sur E pour tout $x \in E$ et $K(\,.\,, A)$ soit mesurable pour toute partie mesurable $A \in \mathcal{E}$. Un tel noyau induit un opérateur sur les fonctions mesurables qu'on note également K par abus de notation :

$$K : f \longmapsto \left(Kf : x \mapsto \int f(y)\, K(x, dy) \right)$$

Un tel opérateur vérifie :

$$K1 = 1 \quad (1)$$
$$f \geq 0 \Rightarrow Kf \geq 0 \quad (2)$$

et réciproquement, on peut montrer qu'un opérateur qui vérifie ces deux conditions pour une famille assez riche de fonctions f, provient d'un noyau markovien : on dira alors encore que c'est un noyau markovien, par un nouvel abus de langage.

Si maintenant on regarde un opérateur K borné sur $\mathrm{L}^2(\mu)$, symétrique par rapport à μ, il peut encore provenir d'un noyau markovien (qui est alors de mesure invariante μ). On peut montrer que c'est le cas si et seulement si les conditions (1) et (2) sont vérifiées. L'idée est la suivante : un tel noyau définira de façon canonique une mesure sur le produit $E \times E$ par $K(x, dy)\mu(dx)$. On construit donc une prémesure ν sur l'algèbre de Boole engendrée par les produits de parties mesurable par

$$\nu(A \times B) = \int \left(K\mathbb{1}_A \right) \mathbb{1}_B \; d\mu,$$

[1]Dans les bons cas, ces opérateurs K_x vont nous donner une structure de convolution sur les mesures sur E, appelée dans la littérature structure d'hypergroupe. En un sens, il s'agit d'une extension de la notion de groupe, pour lesquels on peut toujours le faire grâce à l'opérateur de translation.

puis on l'étend par le théorème de Carathéodory sur $(E \times E, \mathcal{E} \otimes \mathcal{E})$ tout entier, et enfin on la décompose par le théorème de désintégration (cf [2, ch. III, n$^{\text{os}}$70 à 74]) en $K(x,dy)\mu(dx)$.

Enfin, il n'est pas dur de montrer qu'un tel noyau markovien symétrique et borné sur $\mathrm{L}^2(\mu)$ est une contraction de $\mathrm{L}^2(\mu)$ (d'où la condition sur les valeurs propres dans la définition).

Remarques : – *Formellement, la définition revient à demander d'avoir*

$$\sum_n \frac{f_n(x)f_n(y)\overline{f_n(z)}}{f_n(x_0)} \geq 0$$

puisque cette somme est la densité formelle de $K_x(y,dz)$. Cependant, en règle générale, cette somme n'a pas de sens et on ne prendra ceci comme définition que dans le cas fini (cf partie 5).

– *Dans le cas des polynômes de Jacobi, on a vu que cette densité existe réellement et le théorème de Gasper nous disait donc que les polynômes de Jacobi vérifient la propriété d'hypergroupe au point 1 (pour $\alpha > \beta > -1/2$).*

En fait, on peut démontrer que la propriété d'hypergroupe nous donne les K_x comme points extrêmaux des noyaux markoviens bornés sur $\mathrm{L}^2(\mu)$ admettant les f_n pour vecteurs propres :

Théorème. *Si les f_n vérifient la propriété d'hypergroupe au point x_0, alors un opérateur borné sur $\mathrm{L}^2(\mu)$ et admettant les f_n pour vecteurs propres est un noyau markovien si et seulement si ses valeurs propres se mettent sous la forme :*

$$c_n(\nu) := \int \frac{f_n(x)}{f_n(x_0)}\ \nu(dx)$$

où ν est une mesure de probabilité sur E.

Cette propriété est donc très intéressante puisqu'elle donne une description des valeurs propres possibles pour un noyau markovien, on cherche maintenant à savoir quand elle est vérifiée.

3 Cas des vecteurs propres d'opérateur de Sturm-Liouville

On a remarqué que les polynômes de Jacobi, qui vérifiaient la propriété d'hypergroupe au point 1, sont les valeurs propres de l'opérateur $\mathrm{L}^{\alpha,\beta}$. On va donc chercher de façon plus systématique à montrer la propriété d'hypergroupe pour des familles de vecteurs propres d'opérateurs de type Sturm-Liouville.

On pose $E = \overline{I}$, avec I intervalle ouvert réel d'adhérence compacte, qu'on munit de sa tribu borélienne. On le munit d'une mesure $\mu(dx) = \rho(x)dx$, avec $\rho > 0$ sur I et on regarde l'opérateur différentiel de la forme :

$$L = \partial^2_{x,x} + a(x)\partial_x$$

avec $a = \rho'/\rho$. Cet opérateur est symétrique par rapport μ, au sens où, pour toutes fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^2$ à support compact sur I,

$$\int Lf\, g\, d\mu = \int f\, Lg\, d\mu.$$

Si ρ est convenable, $\mathrm{L}^2(\mu)$ admet une base hilbertienne (f_n) de vecteurs propres de L associés à des valeurs propres simples, telle que $f_0 = 1$ et que les f_n vérifient les conditions de Neumann au bord de I.

Remarque. *L'opérateur de Jacobi se met bien sous cette forme quitte à poser $x = \cos\theta$ ou $x = \sin\varphi$.*

On observe alors que la propriété d'hypergroupe revient à un principe du maximum pour les solutions de l'équation des ondes associée :

Proposition 1. *Soit x_0 une borne de I, (f_n) vérifie la propriété d'hypergroupe sous μ au point x_0 si, pour tout f assez régulière,*

$$f \geq 0 \Longrightarrow F \geq 0$$

où F est solution de l'équation dite «des ondes» associée à L :

$$\begin{cases} (L_x - L_y)F = 0 & \text{sur } I \times I; \\ F = f & \text{sur } \{x_0\} \times I; \\ F \text{ vérifie les conditions de Neumann.} \end{cases}$$

Dans le cas symétrique, on sait démontrer le résultat suivant :

Théorème (Achour)**.** *Si I est symétrique, ρ est symétrique et log-concave (i.e. a décroissante), alors la famille des f_n vérifie la propriété d'hypergroupe en les deux bornes de I.*

La démonstration de ce théorème est beaucoup plus simple que celle du théorème de Gasper où il fallait calculer explicitement le noyau formel

$$\sum_n \frac{P_n(x)P_n(y)P_n(z)}{P_n(1)}.$$

En effet, elle repose essentiellement sur un lemme de type «Stockes» pour les solutions F de l'équation des ondes, appliqué à un contour bien choisi :

Lemme 1. *Soit Ω un borélien à bords $\mathcal{C}^1$ par morceaux de $I \times I$, alors*

$$\int_{\partial\Omega} (\nabla F \odot n)\ \rho(x)\rho(y)\ d\sigma = 0$$

où n désigne la normale extérieure au bord de Ω, $d\sigma$ la mesure de longueur de $\partial\Omega$ et $\odot$ la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique $x^2 - y^2$.

On l'applique au triangle MM^+M^- (cf fig.1), pour M dans le triangle inférieur $\{y \leq -|x|\} \cap I \times I$ du carré $I \times I$ et, en remarquant que $\nabla F \odot n$ est une dérivée, une intégration par partie donne :

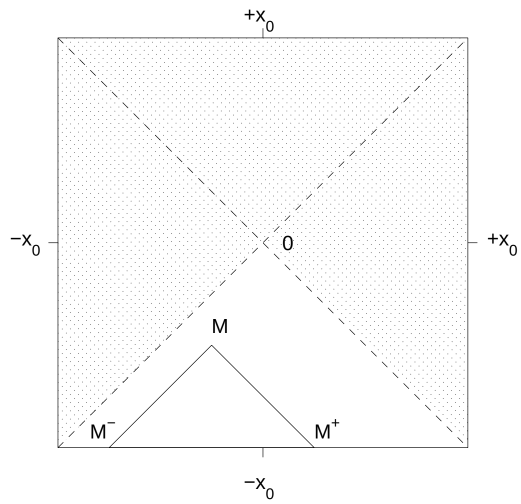

FIG. 1 – Formule de Stockes sur MM^+M^-

Lemme 2. *On pose $A^-(x,y) = a(y) - a(x)$, $A^+(x,y) = a(x) + a(y)$ et $G(x,y) = F(x,y)\,\rho(x)\rho(y)$. Alors :*

$$2G(M) = G(M^-) + G(M^+) + \int_{M^-M} G\,A^+\ d\sigma + \int_{MM^+} G\,A^-\ d\sigma.$$

La log-concavité et la symétrie de ρ nous donnent la positivité de A^- et A^+ sur le triangle inférieur, d'où f positive implique F positive sur le triangle inférieur et finalement sur $I \times I$ tout entier grâce aux symétries du problème.

4 Vers des extensions des résultats d'Achour et de Gasper

Une direction de recherche possible est de trouver des extensions au théorème d'Achour, pour le dissymétriser. On peut pour cela généraliser le lemme précédent à des cas où F est la solution d'une équation de la forme $(L^1_x - L^2_y)F = 0$ où les opérateurs L^1 et L^2 sont associés à des fonctions m_1 et m_2 différentes, en posant cette fois $G(x, y) = F(x, y)c_1(x)c_2(y)$ pour des fonctions c_1 et c_2 bien choisies. Il est cependant difficile de s'affranchir de l'hypothèse d'antisymétrie sur a et on n'arrive pas pour l'instant à redémontrer le cas général du théorème de Gasper avec une méthode de type Achour.

On pourrait également essayer d'étendre le corollaire suivant du théorème d'Achour aux polynômes de Jacobi asymétriques :

Corollaire. *Pour tout sous-intervalle symétrique $[-x_0; x_0]$ de $[-1; 1]$, $(P_n^{\alpha,\alpha})$ vérifie la propriété d'hypergroupe au point x_0 (ou $-x_0$ par symétrie) pour la mesure induite sur le sous-intervalle.*

Une autre question qu'on se pose est : comment étendre ce genre de résultat à des cadres pluridimensionnels ? sur des variétés riemaniennes compactes ?

Si on se place sur un espace produit, il n'est pas difficile de voir que la propriété d'hypergroupe se conserve : soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ et $(F, \mathcal{F}, \nu)$ deux espaces probabilisés, (f_n) et (g_n) des bases hilbertiennes respectivement de $\mathrm{L}^2(\mu)$ et $\mathrm{L}^2(\nu)$ vérifiant la propriété d'hypergroupe aux points respectivement x_0 et x'_0. On forme l'espace produit probabilisé $(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}, \mu \otimes \nu)$ et on munit de façon canonique $\mathrm{L}^2(\mu \otimes \nu)$ de la base $(f_n(x)g_m(x'))_{\mathbb{N}^2}$. Alors :

Proposition 2. *$(f_n(x)g_m(x'))_{\mathbb{N}^2}$ vérifie la propriété d'hypergroupe au point (x_0, x'_0).*

Formellement il s'agit simplement de voir que

$$\begin{aligned} &\sum_{n,m} \frac{f_n(x)g_m(x')f_n(y)g_m(y')\overline{f_n(z)g_m(z')}}{f_n(x_0)g_m(x'_0)} \\ &= \sum_n \frac{f_n(x)f_n(y)\overline{f_n(z)}}{f_n(x_0)} \sum_m \frac{g_m(x')g_m(y')\overline{g_m(z')}}{g_m(x'_0)} \geq 0 \end{aligned}$$

et plus rigoureusement il s'agit de voir que le produit tensoriel $\tilde{K}$ de deux noyaux markoviens K et K' est encore un noyau markovien, $\tilde{K}$ étant défini

par
$$\tilde{K}f(x,x') = \int f(y,y')\ K(x,dy)K'(x',dy'),$$
ce qui est immédiat.

Par contre, si on se place sur d'autres domaines même simples comme la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$, ce n'est plus évident. Par exemple, si on regarde les valeurs propres du laplacien, elles ne sont même plus associées à des espaces propres de dimension 1 si on se place sur une sphère, à cause des invariances par rotation, ce qui complique les choses.

On peut également suivre une autre piste pour étendre le résultat de Gasper sur les polynômes de Jacobi, inspirée par la thèse de Yan Doumerc [4]. Il étudie en effet certaines matrices aléatoires ou plutôt parties de matrices aléatoires de $\mathrm{SO}(n)$ dont les propriétés sont semblables aux processus de Jacobi. Pour comprendre l'idée, commençons par donner une interprétation géométrique des polynômes de Jacobi à paramètres demi-entiers :

Soit $\Delta_{\mathbb{S}}^n$ le laplacien sphérique sur la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$. Il se définit dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ par :
$$\Delta_{\mathbb{S}}^n = \sum_{i,j}(\delta_{i,j} - x_i x_j)\partial^2_{x_i x_j} - n\sum_i x_i \partial_{x_i}.$$
Si on l'applique à des fonctions ne dépendant que des p premières composantes, il devient :
$$\Delta_{\mathbb{S}}^{n,p} = \sum_{i,j=1}^{p}(\delta_{i,j} - x_i x_j)\partial^2_{x_i x_j} - n\sum_{i=1}^{p} x_i \partial_{x_i}.$$

Enfin, si les fonctions ne dépendent que du rayon dans $\mathbb{R}^p$, i.e. de $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots x_p^2}$, on obtient l'opérateur :
$$(1-r^2)\partial^2_{rr} + \left(\frac{p-1}{r} - nr\right)\partial_r.$$
Quitte à faire le changement de variable $x = 2r^2 - 1$, on reconnait, à un facteur 4 près, l'opérateur de Jacobi de paramètres $\alpha = \frac{n-p-1}{2}$ et $\beta = \frac{p-2}{2}$:
$$L^{\alpha,\beta} = (1-x^2)\partial^2_{xx} + \left(\frac{2p-n-1}{2} - \frac{n+1}{2}x\right)\partial_x.$$
On obtient ainsi tous les opérateurs de Jacobi à paramètres demi-entiers $k/2$ et $l/2$, avec $k,l \geq -1$. Une autre façon de dire les choses est la suivante : soit

$(B_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un mouvement brownien sur la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$; si on note X sa projection orthogonale sur un sous-espace de dimension p, alors $Y = (2\|X\|^2 - 1)/2$ est une diffusion sur $[-1;1]$ de générateur infinitésimal 4 fois l'opérateur de Jacobi de paramètres $\frac{n-p-1}{2}$ et $\frac{p-2}{2}$. En particulier, si on note Y^x un tel processus associé à un brownien partant d'un point tel que $Y_0^x = x$, alors on peut définir le noyau markovien :

$$P_t(f) : x \mapsto \mathrm{E}(f(Y_t^x))$$

et alors $(t,x) \mapsto P_t f(x)$ est solution de l'équation «de la chaleur» associée à $L = 4L^{\frac{n-p-1}{2},\frac{p-2}{2}}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t F &=& L_x.F \\ F(0,x) &=& f(x) \end{array}\right. .$$

Y. Doumerc, quant à lui, part d'un mouvement brownien sur $\mathrm{SO}(n)$ dont il regarde la projection X sur les p première lignes et m premières colonnes, c'est-à-dire le coin en haut à gauche de la matrice aléatoire considérée. Dans le cas $m = 1$, on peut identifier la première colonne à $\mathbb{S}^{n-1}$, et comme la projection du brownien de $\mathrm{SO}(n)$ est encore un brownien sur $\mathbb{S}^{n-1}$, on revient aux considérations précédentes. Plus généralement, on étudie les propriétés de $J = XX^*$. C'est un processus de Markov à valeur dans l'ensemble des matrices $m \times m$. Son générateur est un opérateur ne dépendant que de p et $q = n - p$; en considérant des valeurs non-entières de p et q, on élargit la définition de l'opérateur de Jacobi à un cadre pluridimensionnel. On peut alors étudier les valeurs propres de cet opérateur et se poser la question de la propriété d'hypergroupe.

5 Le cas fini et la propriété GKS

La notion de propriété d'hypergroupe et la propriété duale, nommée GKS d'après Griffith, Kelly et Sherman, interviennent dans des problèmes qu'on se pose en mécanique statistique sur l'ensemble $\{-1,1\}^n$, et plus généralement des ensembles finis E quelconques, et leurs produits.

On se donne un ensemble fini E de cardinal $n+1$ muni d'une mesure μ qui charge tous les points de E. Soit $(f_i)_{i=0\ldots n}$ une base orthonormée de $\mathrm{L}^2(\mu)$ telle que $f_0 = 1$. On cherche à montrer des résultats de positivité et de corrélation positive pour une mesure de Gibbs donnée. Plus précisément, soit H une fonction sur E qu'on appelle hamiltonien (qui correspond à l'énergie de l'état considéré) ; on lui associe la mesure dite «de Gibbs» $d\mu_{\mathrm{H}} = \frac{e^{\mathrm{H}}}{Z_{\mathrm{H}}}d\mu$ où Z_{H} est la constante en faisant une mesure de probabilité. Appelons fonction GKS toute fonction sur E s'exprimant comme une combinaison linéaire à coefficients positifs des f_i. Les deux inégalités qu'on cherche à montrer sont les suivantes :

(GKS 1) Si F et H sont GKS, alors $\int F\ d\mu_{\mathrm{H}} \geq 0$.

(GKS 2) Si F, G et H sont GKS, alors $\int FG\ d\mu_{\mathrm{H}} - \int F\ d\mu_{\mathrm{H}} \int G\ d\mu_{\mathrm{H}} \geq 0$.

Il semble que ces inégalités soient liées aux propriétés d'hypergroupe et GKS, sa duale, qu'on définit comme suit :

Définition. – (f_i) vérifie la propriété d'hypergroupe au point x_0 si pour tout x, y, z :

$$k(x,y,z) = \sum_i \frac{f_i(x) f_i(y) \overline{f_i(z)}}{f_i(x_0)} \geq 0. \tag{HGP}$$

Dans le cas fini, cette définition prend tout son sens et est bien équivalente à celle précédente.

– (f_i) vérifie la propriété GKS si pour tout k, l, m :

$$C_{k,l,m} = \int f_k(x) f_l(x) \overline{f_m(x)} d\mu(x) \geq 0. \tag{GKS}$$

Remarques : – *Pour la propriété d'hypergroupe, il s'agit de façon équivalente de voir que la convolution définie par*

$$\nu_1 \star \nu_2(z) = \left(\int k(x,y,z)\ \nu_1(dx) \nu_2(dy) \right) \mu(z)$$

est telle que la convolée de deux mesures de probabilité est encore une probabilité.

– *Pour GKS, il s'agit en fait de voir que la multiplication des fonctions de la base est à coefficients positifs dans la base puisque*

$$f_k f_l = \sum_m C_{k,l,m} f_m.$$

Pour bien voir la dualité de ces deux propriétés on peut poser $g_i(x) = \sqrt{\mu(x)} f_i(x)$; numérotons les points de E, la matrice $\big(g_i(x_j)\big)$ donne alors une correspondance entre les matrices orthogonales (ou unitaires) $n \times n$ à première colonne strictement positive et les couples $\big(\mu, (f_i)\big)$ de mesure chargeant tous les points de E et base associée telle que $f_0 = 1$. Les propriétés deviennent alors :

$$\forall k,l,m, \quad \sum_i \frac{g_i(x_k) g_i(x_l) \overline{g_i(x_m)}}{g_i(x_0)} \geq 0; \tag{HGP'}$$

$$\forall k,l,m, \quad \sum_i \frac{g_k(x_i) g_l(x_i) \overline{g_m(x_i)}}{g_0(x_i)} \geq 0. \tag{GKS'}$$

Pour la première inégalité, on a le résultat suivant :

Proposition 3. *Si (f_i) vérifie la propriété GKS, alors on a l'inégalité (GKS 1).*

Pour l'instant (GKS 2) a pu être démontrée dans $\{-1;1\}^n$ et de nombreux autres cas issus des groupes pour lesquels on a toujours (HGP) et (GKS) (cf [1]). On conjecture que ces deux propriétés suffisent en fait à avoir (GKS 2), mais on n'arrive toujours pas à prouver que (GKS 2) est valide pour tout produit fini d'ensembles provenant de groupes finis ou compacts, où les deux propriétés sont pourtant toujours réalisées comme on l'indique ci-dessous. Notons qu'il n'est déjà pas facile d'exhiber des cas où l'une des deux propriétés est vérifiée sans que sa duale le soit.

Voyons l'interprétation de (HGP) et (GKS) pour les groupes finis. Soit un groupe fini G ; on pose E l'ensemble des classes de conjugaison de G muni de la mesure μ provenant de la probabilité uniforme sur G :

$$\mu(x) = \frac{|x|}{|G|}.$$

Les caractères des représentations irréductibles de G, qui associent à un élément g de G la trace de sa matrice dans la représentation considérée, s'avèrent former une famille de fonctions sur les classes de conjugaison qui est une base orthonormale de $\mathrm{L}^2(\mu)$ (voir par exemple [3] ou tout autre livre traitant des représentations de groupes finis). Cette base vérifie (HGP) et (GKS) :

En effet, pour (HGP), on peut montrer que la convolution définie dans la remarque précédente est la convolution héritée de la convolution habituelle sur les groupes qui préserve bien la positivité. La formule d'inversion de Fourier, couplée au fait que la transformée de Fourier de la convolée est le produit des transformées, permet de le voir.

Quant à (GKS), il suffit de remarquer que le produit de deux caractères est lui-même le caractère du produit tensoriel des deux représentations : il est donc bien à coefficients positifs en les caractères des représentation irréductibles, puisque chaque coefficient correspond au nombre de fois qu'apparait la représentation considérée dans la décomposition en représentations irréductibles du produit tensoriel ; ce sont les coefficients dits de Clebsch-Gordan du groupe G (l'appellation provient de la mécanique statistique, cf par ex. [7]) .

Comme pour la propriété d'hypergroupe, on pourrait étendre la définition de la propriété GKS aux cas non finis. Cependant, on a pour l'instant aucun critère de type Achour pour que les vecteur propres d'opérateurs de Sturm-Liouville satisfasse GKS, même si on en connaît un certain nombre d'exemples, parmi lesquels les polynômes de Jacobi : c'est la formule de linéarisation prouvée par Gasper (cf [5]). En fait, les travaux réalisés sur la question actuellement ne prennent principalement que le point de vue des polynômes orthogonaux, et non celui des opérateurs de Sturm-Liouville, qui pourrait être le point de départ de l'étude d'opérateurs différentiels plus complexes, multidimensionnels.

Références

[1] D. Bakry et M. Echerbault – « Sur les inégalités GKS », *Séminaire de probabilités XXX*, Lectures Notes in Mathematics, vol. 1626, Springer, 1996, p. 178–206.

[2] C. Dellacherie et P.-A. Meyer – *Probabilités et potentiel*, Hermann, 1975–1992.

[3] P. Diaconis – *Group representations in probability and statistics*, Lecture notes-monograph series, vol. 11, institute of mathematical statistics, 1988.

[4] Y. Doumerc – « Matrices aléatoires, processus stochastiques et groupes de réflexions », Thèse, Université Toulouse III, 2005.

[5] G. Gasper – « Linearization of the product of Jacobi polynomials », *Can J. of Math.* (1970), no. 22, p. 582–593.

[6] — , « Banach algebras for Jacobi series and positivity of a kernel », *Annals of Math.* (1972), no. 95, p. 261–280.

[7] Wikipedia – « `http ://en.wikipedia.org/wiki/Clebsch-Gordan_coefficients` ».