

Rayon spectral des éléments d'un groupe de Coxeter, d'après C. McMullen

Vincent Humilière et Gabriel Vigny
Réalisé sous la direction de Frédéric Paulin

11 juillet 2002

Table des matières

1	Introduction	2
2	Métrie de Hilbert et application	2
2.1	Définitions et propriétés fondamentales	2
2.1.1	La métrie de Hilbert	2
2.1.2	La métrie équilibrée.	4
2.2	Application.	5
3	Systèmes de Coxeter	8
3.1	Premières propriétés des systèmes de Coxeter	8
3.2	Représentation géométrique des groupes de Coxeter	9
3.3	Le cône de Tits.	12
4	Cône de Tits et métrie de Hilbert.	12
5	Éléments de Coxeter.	14
5.1	Éléments de Coxeter et éléments essentiels.	14
5.2	Lacets dans la chambre fondamentale.	14
5.3	Minoration du rayon spectral des éléments essentiels.	17
6	Systèmes hyperboliques minimaux	18

1 Introduction

Le but de l'article exposé [1] est de voir que, si $\lambda(\omega)$ désigne le rayon spectral d'un élément ω d'un groupe de Coxeter pour sa représentation géométrique standard, alors on a $\lambda(\omega) = 1$ ou alors $\lambda(\omega) \geq \lambda_{Lehmer} \approx 1.1762808$, où λ_{Lehmer} est la plus grande racine réelle du polynôme $1 + x - x^3 - x^4 - x^5 - x^6 - x^7 + x^9 + x^{10}$.

2 Métrique de Hilbert et application

2.1 Définitions et propriétés fondamentales

On renvoie à [3] pour des compléments sur la métrique de Hilbert.

2.1.1 La métrique de Hilbert

Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie et $K \subset V$ un convexe, fermé, d'intérieur non vide, tel que K ne contient pas de droite. Soit $T : V \rightarrow V$ une application linéaire vérifiant $T(K) = K$ (T est alors inversible puisque K est d'intérieur non vide).

DÉFINITION 1 (MÉTRIQUE DE HILBERT) *On note $[x,y]$ le segment de K qui joint x à y et $[a,x,y,b]$ le birapport de quatre points alignés :*

$$[a,x,y,b] = \frac{|y-a|}{|x-a|} \cdot \frac{|y-b|}{|x-b|}.$$

La métrique de Hilbert sur $\overset{\circ}{K}$ est alors définie par :

$$d_K(x,y) = \frac{1}{2} \inf \log [a,x,y,b]$$

où la borne inférieure porte sur tous les points a et b de $\overset{\circ}{K}$ tels que a,x,y et b soient alignés dans cet ordre avec la condition $]x,y[\subset [a,b]$

remarques :

1. Par un argument de décroissance, la condition $d_K(x,y) = \frac{1}{2} \inf \log [a,x,y,b]$ peut aussi s'écrire $d_K(x,y) = 1/2 \log [a,x,y,b]$ où a et b sont les intersections de $]x,y[$ avec K , l'un de ces points étant éventuellement à l'infini (mais pas les deux car K ne contient pas droite).
2. Un calcul immédiat donne le fait que, si $z \in [x,y]$, on a la **propriété d'alignement** :

$$d_K(x,y) = d_K(x,z) + d_K(y,z).$$

(Cela implique que les segments sont des géodésiques pour la métrique de Hilbert.)

3. On a aussi le **principe de contraction** suivant : si $\Phi : V \rightarrow V'$, est une application linéaire qui envoie K dans K' , alors on a $d_{K'}(\Phi(x), \Phi(y)) \leq d_K(x, y)$. En effet, les applications linéaires conservent le birapport.

PROPOSITION 1 *Si K est un convexe, fermé, d'intérieur non vide, et ne contenant pas de droite alors $d_K : K \times K \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une distance*

Preuve.(Voir figure.) La seule difficulté pour montrer que d_K est une distance est l'inégalité triangulaire dans le cas où x, y et z ne sont pas alignés (sinon, on utilise la propriété d'alignement). Pour cela, si l'on se donne x, y et z non alignés, on prend u et v tels que $]x, y[\subset]u, v[$ et $]u, v[$ est maximal dans K (i.e $d_K(x, y) = \frac{1}{2} \log [u, x, y, z]$) de même on prend $]x, z[\subset]u_1, v_1[$ et $]y, z[\subset]u_2, v_2[$ (certains de ces points peuvent être à l'infini ce qui ne pose pas de problème en fait car on a un problème de géométrie projective).

On note alors $P = (u_1, v_2) \cap (u_2, v_1)$, on pose $u' = (u_1, v_2) \cap (x, y)$, $v' = (u_2, v_1) \cap (x, y)$ et $z' = (P, z) \cap (x, y)$.

On appelle perspective l'application qui, ayant fixé un point Q dans le plan, va d'une droite D_1 dans une autre D_2 (Q n'étant dans aucune de ces droites) en associant à x dans D_1 le point y intersection de D_2 avec la droite (Q, x) . On considère alors la perspective de point P de (u_1, v_1) dans (u, v) qui envoie u_1, x, z et v_1 sur respectivement u', x, z' et v' . Comme la perspective est une homographie, elle conserve le birapport.

$$[u_1, x, z, v_1] = [u', x, z', v'].$$

De même, en considérant la perspective de point P allant de (u_2, v_2) sur (u, v) , on en déduit $[u_2, y, z, v_2] = [v', y, z', u']$ et donc :

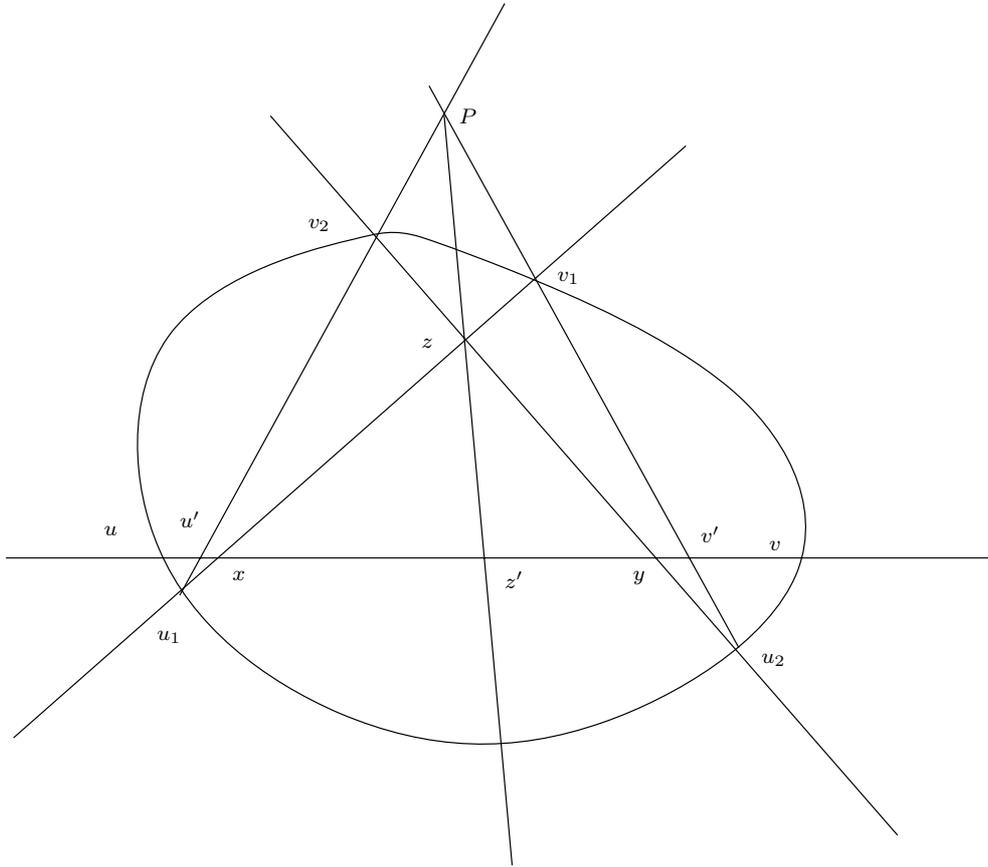
$$d_K(x, z) = \frac{1}{2} \log [u', x, z', v']$$

$$d_K(y, z) = \frac{1}{2} \log [v', y, z', u'].$$

Dès lors, en s'intéressant au segment $[u', v']$ qui est bien un convexe ne contenant pas de droite, on en déduit par le principe d'alignement:

$$d_{[u', v']}(x, y) = d_K(x, z) + d_K(y, z).$$

Par le principe de contraction, on a le fait que $d_{[u',v']}(x,y) \geq d_K(x,y)$. Ceci donne bien le résultat annoncé. \square



Preuve de l'inégalité triangulaire.

DÉFINITION 2 Soit T une application linéaire préservant K , on appelle alors distance de translation, la quantité:

$$\delta(T,K) = \inf_{x \in \overset{\circ}{K}} d_K(x, Tx).$$

2.1.2 La métrique équilibrée.

Dans son article, C. McMullen introduit une variante de la métrique précédente sur les convexes, celle-ci est parfois plus pratique pour le calcul des rayons spectraux.

Nous dirons que le segment $[x,y] \subset K$ s'étend de α si la condition suivante est réalisée:

$$[x + \alpha(x - y), y + \alpha(y - x)] \subset K$$

DÉFINITION 3 (MÉTRIQUE ÉQUILIBRÉE) *La métrique équilibrée sur $\overset{\circ}{K}$ est donnée par:*

$$d_K^*(x,y) = \inf \log(1 + \alpha^{-1})$$

où la borne inférieure porte sur tous les α tels que $[x,y]$ s'étend de α dans K .

remarques:

1. La métrique de Hilbert coïncide avec la métrique équilibrée lorsque le segment $[a,b]$ qui contient $[x,y]$ et qui est maximal dans K a le même centre que $[x,y]$.
2. La preuve de l'inégalité triangulaire est la même que pour la métrique de Hilbert.
3. La propriété d'alignement n'est plus vérifiée.
4. Puisque $[-\alpha,0,1,1+\alpha] = (1+\alpha)^2$, on a l'encadrement:

$$\frac{1}{2}d_K^*(x,y) \leq d_K(x,y) \leq d_K^*(x,y).$$

5. On dispose d'une formule de produit qui permet les preuves par récurrence:

$$d_{K_1 \times K_2}^*((x_1,y_2),(x_2,y_2)) = \max \{(d_{K_1}^*(x_1,x_2), d_{K_2}^*(y_1,y_2))\}.$$

Une telle formule n'est pas vraie pour la métrique de Hilbert puisque chacun des deux compacts peut "limiter le segment d'un des deux côtés".

On introduit comme précédemment:

$$\delta^*(T,K) = \inf_{x \in \overset{\circ}{K}} d_K^*(x, Tx)$$

2.2 Application.

On rappelle que le rayon spectral de T est le plus grand module des racines du polynôme caractéristique de T .

A partir de maintenant, K désigne un cône issu de l'origine, convexe, d'intérieur non vide et ne contenant pas de droite. Le but de cette partie est de montrer que l'on a, avec les notations du début de chapitre sur T :

THÉORÈME 1 *Si K est un cône, alors:*

$$\frac{1}{2} \log(\lambda_+ \lambda_-) \leq \delta(T,K) \leq \log \max \{\lambda_+, \lambda_-\},$$

où $\lambda = \lambda(T^{\pm 1})$.

On en déduit le corollaire qui sera utile:

COROLLAIRE 1 *Si K est un cône et si $\lambda = \lambda(T^{\pm 1})$, alors:*

$$\delta^*(T, K) = \log \lambda(T).$$

Pour cela, on montre le lemme :

LEMME 1 *Si K est un cône, alors $\lambda(T)$ est une valeur propre de T admettant un vecteur propre x dans K .*

Preuve. On décompose V en $X \oplus Y$ où X et Y sont stables par T , avec la condition que le spectre de T restreint à X soit sur le cercle $|z| = \lambda(T)$ et que l'on ait $\lambda(T|_Y) < \lambda(T)$. Une telle décomposition existe en utilisant les théorèmes de décomposition des endomorphismes.

On veut alors montrer que $X \cap K$ est non vide. Pour cela, comme K est d'intérieur non vide, on peut prendre $u = (x, y) \in (X \oplus Y) \cap K$ avec $x \neq 0$. En utilisant une décomposition de Jordan de la matrice de T , on en déduit que:

$$\frac{|T^n(x)|}{|T^n(y)|} \rightarrow \infty$$

quand $n \rightarrow \infty$. Par inégalité triangulaire, on en déduit que tous les points d'accumulation w de $T^n(u)/|T^n(u)|$ sont dans $K \cap X$ et de tels points existent car on a là une suite bornée dans un fermé en dimension finie, donc $K \cap X$ est non vide et comme K est un cône, on a même $\mathbb{R}^+w \subset K \cap X$.

Dès lors, $\mathbb{P}(K \cap X) \subset \mathbb{P}(X)$ est non vide, stable par T . Comme K est fermé, convexe et ne contient pas de droite, $\mathbb{P}(K \cap X)$ est homéomorphe à un disque. Et donc, par le théorème de point fixe de Brouwer, l'application $T : \mathbb{P}(K \cap X) \rightarrow \mathbb{P}(K \cap X)$ admet un point fixe $[v]$. On a alors $T(v) = \alpha v$ avec $|\alpha| = \lambda(T)$ puisque v est dans K . Comme K ne contient pas de droite, on a $\alpha > 0$ et donc $\alpha = \lambda(T)$. \square

COROLLAIRE 2 *On a :*

$$\frac{1}{2} \log(\lambda_+ \lambda_-) \leq \delta(T, K)$$

Preuve. On peut supposer que $\lambda_+ > 1$ et $\lambda_- > 1$ (sinon le résultat est clair). On note V^* le dual de V , et T^* la transposée de T . On note alors $K^* = \{f \in V^* : f(K) \geq 0\}$ qui est fermé par image réciproque, trivialement convexe et conservé par T^* . Comme l'intérieur de K est non vide et ne contient pas de droite, on en déduit que K^* est non vide et ne contient pas de droite non plus (on fixe un produit scalaire sur V , et on identifie alors V avec son dual, on considère un hyperplan H tel que $\overset{\circ}{K} \cap H$ est vide, on prend la normale à cet hyperplan dirigée dans le demi-espace où est K , et les vecteurs situés dans un voisinage de cette normale ont un produit scalaire

positif avec les éléments de K).

Le lemme précédent permet d'affirmer que l'on dispose de f_+ et f_- dans K^* tels que $(T^*)^{\pm 1} f_{\pm} = \lambda_{\pm} f_{\pm}$.

On définit alors $f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ par $f(v) = (f_+(v), f_-(v))$ et $T' : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ par $T'(x, y) = (\lambda_+ x, \lambda_-^{-1} y)$. On a alors $f \circ T = T' \circ f$ et $f(K) = K' = \mathbb{R}^2$ (f_+ et f_- sont linéairement indépendantes puisque $\lambda_+ > 1$ et $\lambda_- > 1$, f engendre alors un cône de \mathbb{R}^2 simpliciel isomorphe à \mathbb{R}^2 , et les isomorphismes linéaires sont des isométries pour la métrique de Hilbert). On en déduit alors l'inégalité

$$\delta(T, K) \geq \delta(f \circ T, K')$$

d'après le principe de contraction, et:

$$\delta(T', K') = \delta(T' \circ f, K')$$

puisque f est surjective. Or un calcul donne (ce calcul est simplifié en remarquant que l'on a $\delta(T', K') = d_K(x, Tx)$ pour tout x de K car prendre un autre élément de K revient à faire un changement de base ce qui est une isométrie):

$$\delta(T', K') = \frac{1}{2} \log(\lambda_+ \lambda_-).$$

Ce qui termine la preuve. \square

PROPOSITION 2 *On a l'inégalité:*

$$\delta^*(T, K) \leq \log \max \{ \lambda_+, \lambda_- \}.$$

Pour prouver cette proposition, on prouve un lemme dans lequel on autorise K à contenir une droite:

LEMME 2 *Si K est un cône convexe d'intérieur non vide d'un espace vectoriel réel de dimension finie V et si $T : V \rightarrow V$ est un automorphisme préservant K , si*

$$1 + \alpha^{-1} > \max \{ \lambda_+, \lambda_- \}$$

alors il existe un point x dans l'intérieur de K tel que $[x, Tx]$ s'étend de α dans K .

Preuve du lemme. La preuve s'obtient par récurrence sur la dimension de V , ce qui est clair pour $n = 0$.

Dès lors, pour tout sous-espace W stable par T , on dispose de l'application canonique $f : V \rightarrow V' = V/W$ et de l'automorphisme T' de V' tel que $f \circ T = T' \circ f$.

Or le spectre de T' est inclus dans celui de T (le polynôme caractéristique de T annule T') et l'hypothèse de récurrence fournit un $x' \in \overset{\circ}{K}' = f(\overset{\circ}{K})$ tel

que $[x', T'(x')]$ s'étende de α . En remontant sur V , on dispose de y et z dans $\overset{\circ}{K}$ tel que $[y, z]$ s'étende de α avec $T(y) = z + s$ pour un s de W .

Si $K \subset V$ contient une droite, en appliquant le résultat ci dessus à W sous espace maximal inclus dans K (et donc stable par T). On dispose de $[y, z]$ qui s'étend de α et même $[y, z + s]$ car la composante en W ne fait pas sortir de K donc $[y, T(y)]$ s'étend de α , ce qui donne le résultat.

Sinon, $K \subset V$ ne contient pas de droite. On suppose $\lambda(T) \geq \lambda(T^{-1})$ (quitte à changer T en T^{-1}). Le lemme donne l'existence d'un $v \in K$ tel que $Tv = \lambda^+v$. On prend alors $W = \mathbb{R}.v \subset V$. En exploitant ce que l'on a fait, on dispose alors de y et z dans K^0 tel que $[y, z]$ s'étende de α avec $T(y) = z + mv$ pour un $m \in \mathbb{R}$.

On pose alors $x = y + Mv$ avec $M > 0$ à préciser, comme $\overset{\circ}{K}$ est convexe, $x \in \overset{\circ}{K}$, on veut que $[x, Tx]$ s'étende de α . On regarde donc :

$$\begin{aligned} x + \alpha(x - Tx) &= y + \alpha(y - Ty) + M(v + \alpha(v - Tv)) \\ x + \alpha(x - Tx) &= y + \alpha(y - z) - mv + M(1 + \alpha(1 - \lambda))v \\ x + \alpha(x - Tx) &= y + \alpha(y - z) + (M\beta - m)v \end{aligned}$$

où $\beta = 1 + \alpha(1 - \lambda)$ est positif par hypothèse. Pour M assez grand, on vérifie donc bien le résultat. De même on a que $Tx + \alpha(Tx - x)$ est bien dans K . Ce qui termine la preuve du lemme. \square

Preuve de la proposition 1. Le lemme ci-dessus permet de conclure puisque sinon, on aurait

$$\delta^*(T, K) > \log \max \{\lambda_+, \lambda_-\}$$

et en choisissant α convenable, on aboutirait à une contradiction. \square

On peut alors prouver le théorème 1. On utilise l'encadrement entre la métrique de Hilbert et la métrique équilibrée dans la proposition précédente pour avoir la deuxième inégalité. \square

3 Systèmes de Coxeter

3.1 Premières propriétés des systèmes de Coxeter

Dans cette section, on donne des définitions relatives aux groupes de Coxeter.

Systèmes de Coxeter. Dans toute cette section, W désigne un groupe et S une partie génératrice de W constituée exclusivement d'éléments d'ordre

deux. Pour de plus amples informations sur le sujet, on pourra consulter [2] ou [4]

Si s et s' sont deux éléments de S , on note $m(s,s')$ l'ordre de ss' . On appelle *système de Coxeter* tout couple (W,S) tel que S et l'ensemble des relations $(ss')^{m(s,s')} = 1$ pour $m(s,s')$ fini forment une présentation de W .

Concrètement, ceci signifie que si (W,S) est un système de Coxeter, pour tout groupe G et toute application $f : S \rightarrow G$ qui vérifie $(f(s)f(s'))^{m(s,s')} = 1$ pour $m(s,s')$ fini, il existe un unique morphisme de groupe $f : W \rightarrow G$ prolongeant f .

Exemple 1: Le *groupe diédral* d'ordre n noté D_n est le groupe engendré par deux éléments a et b d'ordre 2 tels que ab soit d'ordre n : $\langle a,b \mid a^2 = b^2 = (ab)^n = 1 \rangle$ forme une présentation de D_n . Par définition, $(D_n, \{a,b\})$ est donc un système de Coxeter.

Exemple 2: Soit \mathfrak{S}_n le groupe symétrique d'ordre n , avec $n \geq 2$. Soit s_i la transposition de $(i, i+1)$, pour $1 \leq i < n$. Enfin, on pose $S = \{s_1, \dots, s_{n-1}\}$ alors, (\mathfrak{S}_n, S) forme un système de Coxeter (On en trouvera une démonstration dans [2] IV.2.4).

Diagramme de Coxeter. On appelle *diagramme de Coxeter* associé au système de Coxeter (W,S) , le couple (Γ, f) tel que Γ soit le graphe admettant S pour ensemble des sommets et pour ensemble des arêtes les parties $\{s, s'\}$ de S telles que $3 \leq m(s, s') \leq \infty$ et f soit l'application qui à l'arête $\{s, s'\}$ de Γ associe $m(s, s')$.

Réciproquement, à tout couple (Γ, f) où Γ est un graphe et f une application de l'ensemble des arêtes de Γ dans $\{n \in \mathbb{N} / n \geq 3\} \cup \{\infty\}$, on peut associer un système de Coxeter. Un système de Coxeter sera dit *irréductible* si son diagramme de Coxeter est connexe et une *composante irréductible* de (W,S) sera le système de Coxeter associé à une composante connexe du diagramme de (W,S) .

Exemple: Le diagramme de Coxeter de \mathfrak{S}_n est le suivant:



3.2 Représentation géométrique des groupes de Coxeter

L'existence d'une représentation "géométrique" est une propriété importante des groupes de Coxeter. Dans toute cette section, (W,S) est un système de Coxeter avec S fini.

Forme associée à un groupe de Coxeter On considère l'espace vectoriel $V = \mathbb{R}^S$, de base canonique $(e_s)_{s \in S}$. On considère ensuite la forme bilinéaire symétrique $B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur la base de V par

$$B(e_s, e_t) = -2 \cos\left(\frac{\pi}{m(s,t)}\right).$$

On a alors une action de W sur V définie sur les éléments s de S par

$$s \cdot v = v - B(e_s, v)e_s.$$

Pour voir qu'il s'agit bien d'une action du groupe W , il suffit de vérifier que pour tout s et s' dans S avec $m(s, s')$ fini, l'action itérée $m(s, s')$ fois de l'action de s' suivie de l'action s est triviale (ce qui sera prouvé dans le paragraphe suivant). On a alors une application f de S dans le groupe des bijections de V qui vérifie $(f(s)f(s'))^{m(s, s')} = 1$ pour $m(s, s')$ fini. Cette application se prolonge donc de manière unique en un morphisme de groupe de W dans le groupe des bijections de V , ceci définit bien une action de groupe. Par ailleurs, l'action de W sur V préserve B .

De plus, la forme linéaire $f_s : v \mapsto B(e_s, v)$ est non nulle car $f_s(e_s) = 2$. Son noyau est donc un hyperplan: l'hyperplan orthogonal à e_s pour B . Si on note $\sigma_s(v) = s \cdot v$, on $\sigma_s(e_s) = -e_s$ et $\sigma_s(v) = v$ si $B(e_s, v) = 0$. Par conséquent, σ_s est la réflexion d'hyperplan $\{e_s\}^\perp$.

Le plan $V_{s, s'}$ et le groupe engendré par σ_s et $\sigma_{s'}$. On note $V_{s, s'} = \mathbb{R}e_s \oplus \mathbb{R}e_{s'}$. Il est intéressant de regarder l'action de W sur ce sous-espace afin de mieux la comprendre.

Posons $m = m(s, s')$.

PROPOSITION 3 *La restriction de B à $V_{s, s'}$ est positive. Elle est non dégénérée si et seulement si m est fini.*

PREUVE: Il suffit de voir que si $z = xe_s + ye_{s'}$, alors

$$B(z, z) = \left(x - y \cos \frac{\pi}{m}\right)^2 + \left(y \sin \frac{\pi}{m}\right)^2,$$

ce qui montre la proposition. \square

Les réflexions σ_s et $\sigma_{s'}$ laissent stable $V_{s, s'}$. On a le résultat suivant:

LEMME 3 *La restriction de $\sigma_s \sigma_{s'}$ à $V_{s, s'}$ est d'ordre m .*

PREUVE: Distinguons deux cas:

a) $m = +\infty$.

Dans ce cas, on montre aisément par récurrence que $(\sigma_s \sigma_{s'})^n(e_s) = 2n(e_s + e_{s'}) + e_s$ pour tout n dans \mathbb{Z} . Il en résulte que la restriction de $\sigma_s \sigma_{s'}$ à $V_{s, s'}$ n'est pas d'ordre fini.

b) m est fini.

Comme B est non dégénérée, B muni $V_{s,s'}$ d'une structure d'espace euclidien. Comme le produit scalaire de e_s et de $e_{s'}$ vaut $-2 \cos \frac{\pi}{m}$, l'angle entre e_s et $e_{s'}$ est $\pi - \frac{\pi}{m}$ (car leur norme euclidienne est $\sqrt{2}$). Donc leurs droites orthogonales respectives forment un angle de $\frac{\pi}{m}$. La rotation $\sigma_s \sigma_{s'}$ est donc d'ordre m car d'angle $\frac{2\pi}{m}$. \square

Revenons maintenant à V :

PROPOSITION 4 *Le sous groupe de $GL(E)$ engendré par σ_s et $\sigma_{s'}$ est isomorphe au groupe diédral D_m .*

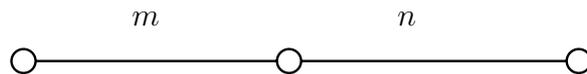
PREUVE: Il suffit de constater que l'ordre de $\sigma_s \sigma_{s'}$ est le même que celui de sa restriction à $V_{s,s'}$. \square

On notera dans toute la suite s à la place de σ_s .

Valeurs propres. Soit $\lambda(w)$ le *rayon spectral* de l'élément w de W . Notons $\ker(B) = \{v : B(v,v') = 0, \forall v' \in V\}$ le *noyau* de B . Les éléments de $\ker(B)$ sont laissés invariants par les éléments de S donc aussi par les éléments de W . Donc B induit une forme quadratique non dégénérée \tilde{B} sur $V/\ker(B)$, préservée par W . Soit $w \in W$, alors, ${}^t w \tilde{B} w = \tilde{B}$ donc ${}^t w \tilde{B} = \tilde{B} w^{-1}$ d'où $(\lambda I - {}^t w) \tilde{B} = \tilde{B} (\lambda I - w^{-1})$ et comme $\det \tilde{B} \neq 0$, on a $\det(\lambda I - w) = \det(\lambda I - w^{-1})$. On a donc $\lambda(w) = \lambda(w^{-1})$.

Classification par signature. Soit (W,S) un système de Coxeter irréductible. Alors, on peut ranger (W,S) en fonction de la signature de B sur V . Soit n le cardinal de S . Lorsque B est positive, on dira que (W,S) est sphérique si la signature de B est $(n,0)$ et affine si la signature est $(n-1,0)$. Si B n'est pas positive, on dira que (W,S) est hyperbolique si la signature est $(p,1)$ avec $p \geq 0$ et de rang supérieur si la signature est (p,q) avec $p \geq 0$ et $q \geq 2$. Ces quatre cas constituent en fait tous les cas possibles (on pourra par exemple consulter [2]V.4).

Exemple : Voici un exemple de système de Coxeter hyperbolique. On considère le système dont le diagramme de Coxeter est



Ce diagramme est connexe donc le système est irréductible. Il s'agit par exemple du groupe engendré par les réflexions sur les côtés d'un triangle

rectangle bien choisit. On pose $a = \cos \frac{\pi}{m}$ et $b = \cos \frac{\pi}{n}$. La matrice de B est alors 2 fois la matrice suivante:

$$\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ -a & 1 & -b \\ 0 & -b & 1 \end{pmatrix}$$

Son polynome caractéristique est $(t-1)(t^2-2t+c)$, où $c = 1-a^2-b^2$, et dont les racines sont 1 , $1 - \sqrt{a^2+b^2}$ et $1 + \sqrt{a^2+b^2}$. On voit donc que lorsque $a^2 + b^2 > 1$, la signature de B est $(2,1)$ et le système est hyperbolique.

3.3 Le cône de Tits.

Chambre fondamentale et cône de Tits. Le groupe de Coxeter W agit aussi naturellement sur le dual V^* de V . En notant $\langle f, v \rangle$ l'image de $v \in V$ par $f \in V^*$, cette action duale est donnée par

$$\langle w \cdot f, v \rangle = \langle f, w^{-1} \cdot v \rangle.$$

Le rayon spectral de w agissant sur V est égal au rayon spectral de w agissant sur V^* . En effet, si λ_0 est une valeur propre de w , c'en est aussi une de w^{-1} donc il existe v_0 dans V tel que $w^{-1} \cdot v_0 = \lambda_0 v_0$. On pose alors f_0 une forme linéaire valant 1 en v_0 et nulle sur un supplémentaire de la droite engendrée par v_0 . Cette forme linéaire est alors un vecteur propre de w agissant sur V^* . On montre de cette manière que les représentations géométriques de w sur V et sur V^* ont les mêmes valeurs propres et donc le même rayon spectral.

La *chambre fondamentale* C dans V^* pour (W, S) est définie par:

$$C = \{f \in V^* : \langle f, e_s \rangle \geq 0, \forall s \in S\}.$$

Le passage au dual permet un traitement identique de l'action géométrique même dans le cas où $\ker(B) \neq \{0\}$.

Le *cône de Tits* est la réunion des orbites des points de C pour l'action de W , ce que l'on note $W \cdot C$. On admettra le résultat suivant:

THÉORÈME 2 *Le cône de Tits $W \cdot C$ est convexe. De plus, $w(\overset{\circ}{C}) \cap \overset{\circ}{C}$ si et seulement si $w = id$.*

Pour une preuve de ce résultat, on pourra se reporter à [2] V.4.

4 Cône de Tits et métrique de Hilbert.

Dans cette partie, on cherche à prouver que le cône de Tits ne contient pas de droite. La distance de Hilbert sera alors bien définie et on pourra appliquer les résultats de la partie 2.

Notation: Pour $A \subset V$, on note $A^\perp = \{f \in V^* : \langle f, a \rangle = 0, \forall a \in A\}$. De même, pour $F \subset V^*$, on note $F^\perp = \{v \in V : \langle f, v \rangle = 0, \forall f \in F\}$.

PROPOSITION 5 *Si (W, S) est un système de Coxeter irréductible hyperbolique ou de rang supérieur, alors $\overset{\circ}{C} \cap \ker(B)^\perp \neq \emptyset$.*

PREUVE: On considère la *matrice d'adjacence* de (W, S) définie par $A(s, t) = (2I - B)(e_s, e_t), \forall (s, t) \in S^2$. Notons α le rayon spectral de A . Les coefficients diagonaux de A sont nuls et les autres sont strictement positifs. La théorie de Perron-Frobenius sur les matrices à coefficients positifs s'applique donc à A (on pourra par exemple consulter [5], p.218). Donc α est une valeur propre simple de A et il existe un vecteur propre $v_0 = \sum_{s \in S} a_s e_s$, avec $a_s > 0$ tel que $Av_0 = \alpha v_0$ et $Bv_0 = (2 - \alpha)v_0$.

Comme $2 - \alpha$ est la plus petite valeur propre de B (car α est la plus grande de A), et comme (W, S) est hyperbolique ou de rang supérieur, $2 - \alpha < 0$. On peut donc définir la forme linéaire f_0 par

$$\langle f_0, v \rangle = \frac{1}{2 - \alpha} B(v_0, v) \quad , \forall v \in V.$$

Alors f_0 appartient à $\ker(B)^\perp$ car si on a $v \in \ker(B)$ alors $\langle f_0, v \rangle = 0$. Et de plus $\langle f_0, e_s \rangle = a_s > 0$ donc $f_0 \in \overset{\circ}{C}$. \square

On peut à présent prouver le résultat annoncé:

PROPOSITION 6 *Soit (W, S) un système de Coxeter irréductible hyperbolique ou de rang supérieur. Alors, l'adhérence du cône de Tits $K = \overline{W \cdot \overset{\circ}{C}}$ ne contient pas de droite.*

PREUVE: Soit X le plus grand sous espace vectoriel de V^* contenu dans K . On suppose par l'absurde que $X \neq \{0\}$. Alors, $X^\perp \subset V$ est un espace laissé stable par W . Comme (W, S) est irréductible, l'action de W sur $V/\ker(B)$ est irréductible. Comme $X^\perp \neq V$, on a nécessairement $X^\perp \subset \ker(B)$ donc $\ker(B)^\perp \subset X$.

Comme $\overset{\circ}{C} \cap \ker(B)^\perp \neq \emptyset$, il existe $f_0 \in \ker(B)^\perp$ et un voisinage de l'origine $U \subset V^*$ tel que $f_0 + U \subset \overset{\circ}{C} \subset K$. Comme $-f_0 \in X \subset K$ et comme K est convexe, on a $U = (-f_0) + f_0 + U \subset K$ donc $K = V^*$.

Montrons que ceci implique W fini. En effet, il existe alors w dans W tel que $w(C) \cap \overset{\circ}{C} \neq \emptyset$. Soit $g \in \overset{\circ}{C}$ et $f \in C$ tels que $w(f) = g$. Alors, $\forall s \in S, \langle w(f), e_s \rangle = -\langle g, e_s \rangle < 0$, donc $\langle f, w^{-1}(e_s) \rangle < 0$, donc $w^{-1}(e_s) < 0, \forall s \in S$. Or, un résultat sur les groupes de Coxeter donne:

$$\text{Si } l(w^{-1}s) > l(w^{-1}), \text{ alors } w^{-1}(e_s) > 0,$$

où $l(w)$ désigne la longueur du mot w (On pourra consulter [4] p.111). On a donc $\forall s \in S, l(w^{-1}s) \leq l(w^{-1}) = l(w)$. Or ceci implique $l(W) < l(w)$ (cf.

[2]IV.1.ex 22). Donc W fini, ce qui implique B positive (cf [2] V.4.8). Ceci contredit l'hypothèse. Donc X est vide. \square

Dans le cas hyperbolique ou de rang supérieur, K est donc un cône convexe fermé d'intérieur non vide, ne contenant pas de droite. On peut donc y définir la distance de Hilbert. Celle-ci étant invariante par les applications linéaires préservant K et K étant stable par W , on a:

COROLLAIRE 3 *Dans le cas hyperbolique ou de rang supérieur, le groupe de Coxeter W agit isométriquement sur $\overset{\circ}{K}$ pour la distance de Hilbert.* \square

Comme $\lambda(w) = \lambda(w^{-1})$, en appliquant les résultats de la partie 2, on a le corollaire suivant:

COROLLAIRE 4 *Soit w un élément d'un groupe de Coxeter irréductible hyperbolique ou de rang supérieur. Alors, $\lambda(w) \geq 1$ est une valeur propre de w , et*

$$\log \lambda(w) = \delta(w, K).$$

\square

5 Éléments de Coxeter.

5.1 Éléments de Coxeter et éléments essentiels.

Commençons par introduire quelques définitions. Si $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ on appelle *élément de Coxeter* tout élément $w \in W$ tel qu'il existe une permutation σ de \mathfrak{S}_n avec

$$w = s_{\sigma_1} \cdots s_{\sigma_n}.$$

On note W_I le sous-groupe de W engendré par une partie I de S . Alors, (W_I, I) forme aussi un système de Coxeter (On peut trouver une preuve de ce résultat dans [2]IV.1.) Un élément $w \in W$ est dit *essentiel* s'il n'est pas dans un conjugué d'un sous-groupe W_I avec $I \subsetneq S$.

Le but de cette partie est de prouver le théorème suivant:

THÉORÈME 3 *Soit (W, S) un système de Coxeter et w un élément essentiel de W . Alors, on a l'inégalité*

$$\lambda(w) \geq \inf_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \lambda(s_{\sigma_1} \cdots s_{\sigma_n}).$$

5.2 Lacets dans la chambre fondamentale.

Supposons à présent que (W, S) est hyperbolique ou de rang supérieur. Alors, W agit isométriquement sur $\overset{\circ}{K}$, avec $X = C \cap \overset{\circ}{K}$ pour domaine fondamental (i.e X contient un et un seul élément de chaque orbite.)

Lacets représentant un élément de W . Soit $\gamma : [0,1] \rightarrow \overset{\circ}{K}$ un chemin affine par morceau. Il existe une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ telle que γ soit affine sur les intervalles $[t_i, t_{i+1}]$. On pose ensuite $x_i = \gamma(t_i)$ et on définit la longueur de γ (pour la distance de Hilbert) par

$$L(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} d_K(x_i, x_{i+1}).$$

La somme est indépendante du choix de la subdivision à cause de l'égalité triangulaire pour les points colinéaires et $L(\gamma)$ est donc bien définie.

On appellera ici *lacet* dans X toute chemin affine par morceau $\gamma : [0,1] \rightarrow X$ avec $\gamma(0) = \gamma(1)$.

On note $\pi : \overset{\circ}{K} \rightarrow X$ la projection naturelle caractérisée par $x \in W \cdot \pi(x)$.

Un *relèvement* de γ est un chemin $\tilde{\gamma} : [0,1] \rightarrow \overset{\circ}{K}$ tel que $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

S'il existe $w \in W$ tel que $\tilde{\gamma}(1) = w \cdot \tilde{\gamma}(0)$ et $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(0)$, on dit que γ *représente* w . Un lacet donné dans X a en général plusieurs relèvements et représente donc plusieurs éléments dans W .

Lacets en position générale. Rappelons que C est un cône polyédral dans V^* . Les faces de C qui sont de codimension 1 sont exactement les ensembles $C(s) = \{f \in C : f(s) = 0\}$, pour $s \in S$. Les faces de codimension 2 sont les $C(s) \cap C(t), s \neq t$.

Un lacet de X (au sens défini précédemment) sera dit *en position générale* s'il ne rencontre aucune face de codimension 2 et s'il ne rencontre les faces de codimension 1 qu'en un ensemble fini. On a alors le résultat suivant:

PROPOSITION 7 *On a $\delta(w, K) = \inf L(\gamma)$ où l'infimum porte sur tous les lacets $\gamma : [0,1] \rightarrow X$ représentant w , en position générale.*

PREUVE: Remarquons dans un premier temps que, si on note t_i les instants où γ touche ∂C , pour tout intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, il existe $w_i \in W$ tel que $\tilde{\gamma}(t) = w_i \cdot \gamma(t), \forall t \in [t_i, t_{i+1}]$. Donc on a

$$\begin{aligned} L(\tilde{\gamma}) &= \sum d_K(\tilde{\gamma}(t_i), \tilde{\gamma}(t_{i+1})) \\ &= \sum d_K(w_i \cdot \gamma(t_i), w_i \cdot \gamma(t_{i+1})) \\ &= \sum d_K(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \\ &= L(\gamma). \end{aligned}$$

Supposons que γ représente w par l'intermédiaire du relèvement $\tilde{\gamma}$. On a $L(\gamma) = L(\tilde{\gamma}) \geq d_K(\tilde{\gamma}(0), w \cdot \tilde{\gamma}(0))$ par inégalité triangulaire. Donc

$$L(\gamma) \geq \delta(w, K).$$

Montrons l'autre inégalité: il existe $x_n \in \overset{\circ}{K}$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_K(x_n, w \cdot x_n) = \delta(w, K).$$

Comme la réunion des orbites des points des faces de codimension 1 est nulle part dense, on peut même supposer que $\pi(x_n) \in \overset{\circ}{C}$.

Soit $\tilde{\gamma}_n$ le chemin joignant x_n à $w \cdot x_n$ en ligne droite. Alors $L(\tilde{\gamma}_n)$ converge vers $\log(\lambda(w))$. De plus, comme la réunion des orbites $W \cdot (C(s) \cap C(t))$ des faces de codimension 2 de C ne sépare pas $\overset{\circ}{K}$ en plusieurs composantes connexes, on peut modifier légèrement $\tilde{\gamma}_n$ (en introduisant éventuellement de nouveaux segments mais en n'augmentant pas sa longueur de plus de $\frac{1}{n}$) de telle sorte que $\gamma_n = \pi \circ \tilde{\gamma}_n$ soit en position générale. Alors $L(\gamma_n)$ converge vers $\delta(w, K)$. \square

On a vu précédemment que $\delta(w, K) = \log(\lambda(w))$. On a donc le corollaire suivant:

COROLLAIRE 5 *On a $\log \lambda(w) = \inf L(\gamma)$ où l'infimum porte sur tous les lacets $\gamma : [0,1] \rightarrow X$ représentant w , en position générale.*

Soit γ un lacet de X en position générale, et soit $t_1 < t_2 < \dots < t_m$ les paramètres tels que $\gamma(t_i) \in \partial C$. Il existe un unique $g_i \in S$ tel que $\gamma(t_i) \in C(g_i)$. On dira que w est un sous mot de $g_1 \cdots g_n$ si $w = g_{i_1} \cdots g_{i_k}$ avec $i_1 < i_2 < \dots < i_k$. On a alors une caractérisation des éléments représentés par γ :

PROPOSITION 8 *Le lacet γ représente w si et seulement si w est conjugué à un sous mot de $g_1 \cdots g_n$.*

PREUVE: Remarquons dans un premier temps que $\tilde{\gamma}$ représente w si et seulement si $g \cdot \tilde{\gamma}$ représente gwg^{-1} .

De plus, si l'on définit un relèvement $\tilde{\gamma}$ par:

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } t \in [0, t_1], \\ g_1 g_2 \cdots g_k \cdot \gamma(t) & \text{si } t \in [t_k, t_{k+1}], \\ g_1 g_2 \cdots g_m \cdot \gamma(t) & \text{si } t \in [t_m, 1]. \end{cases}$$

Alors, $\tilde{\gamma}$ est bien défini et continu. On en déduit que γ représente $g_1 g_2 \cdots g_m$. En ignorant certains des t_i , on montre de même que γ représente tous les sous mots de $g_1 g_2 \cdots g_m$.

Réciproquement, si $\tilde{\gamma}$ est un relèvement de γ , avec $\tilde{\gamma}(0)$ dans X , alors on a pour tout t un élément $w(t)$ de W tel que $\tilde{\gamma}(t) = w(t) \cdot \gamma(t)$. L'élément $w(t)$ ne peut changer que lorsque $\gamma(t)$ touche une face $C(g_i)$, et s'il change c'est alors en composant par g_i à droite. Donc $\tilde{\gamma}$ a la forme ci-dessus. \square

5.3 Minoration du rayon spectral des éléments essentiels.

On peut à présent démontrer le théorème déjà énoncé plus haut:

THÉORÈME 4 *Soit (W,S) un système de Coxeter et $w \in W$ un élément essentiel. Alors, on a l'innégalité*

$$\lambda(w) \geq \inf_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \lambda(s_{\sigma_1} \cdots s_{\sigma_n}).$$

PREUVE: Remarquons d'abord que le théorème dans le cas général est une conséquence du cas irréductible. En effet, supposons que le diagramme de (W,S) ait plusieurs composantes connexes (on peut supposer pour simplifier qu'il y en a deux, S_1 et S_2). Alors, si $s_1 \in S_1$ et si $s_2 \in S_2$, $s_1 s_2 s_1 s_2 = 1$ donc s_1 et s_2 commutent. Finalement, tout élément w de W s'écrit comme le produit d'un élément de W_{S_1} et d'un élément de W_{S_2} et on a W isomorphe à $W_{S_1} \times W_{S_2}$. De plus, on a $V = V_1 \oplus V_2$ où V_i est l'espace vectoriel engendré par les e_s qui vérifient $s \in S_i$. Le groupe W_{S_1} (resp. W_{S_2}) agit trivialement sur V_2 (resp. V_1). La matrice d'un élément w de W est donc diagonale par blocs avec deux blocs diagonaux de tailles respectives $|S_1|$ et $|S_2|$. Le rayon spectral d'une telle matrice étant le maximum des rayons spectraux des blocs, il suffit de prouver le théorème dans le cas irréductible.

Remarquons de plus que si (W,S) est irréductible et n'est pas hyperbolique ou de rang supérieur, $\lambda(w) = 1, \forall w \in W$. Ceci est évident dans le cas sphérique puisque les éléments de W sont orthogonaux pour la forme B définie positive. Pour le cas affine, ce résultat vient en regardant les matrices des éléments de W dans une base orthonormale pour la forme quadratique B .

On a donc plus qu'à prouver le théorème dans le cas irréductible et hyperbolique ou de rang supérieur.

Soit w un élément essentiel d'un tel groupe. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un lacet $\gamma : [0,1] \rightarrow X$ représentant w et tel que $L(\gamma) \leq \delta(w,K) + \varepsilon$.

Soit $\gamma(t_i) \in C(g_i)$ les points de γ qui rencontrent ∂C . Alors, w est conjugué à un sous mot de $g_1 g_2 \cdots g_n$. Comme w est essentiel, tous les éléments de S doivent apparaître dans ce sous mot. Par suite, $g_1 g_2 \cdots g_n$ contient aussi un sous mot w' qui est un élément de Coxeter et qui est aussi représenté par γ . On a donc

$$\inf_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \log \lambda(s_{\sigma_1} \cdots s_{\sigma_n}) \leq \log \lambda(w') \leq \delta(w',K) \leq L(\gamma) \leq \delta(w,K) + \varepsilon,$$

ce qui termine la preuve. \square

On a donc réduit l'étude du rayon spectral des éléments de W , qui est en général infini, à celle d'un nombre fini d'éléments que sont les *éléments de Coxeter*.

6 Systèmes hyperboliques minimaux

Dans cette section, on résume la démarche permettant de parvenir à la preuve du résultat énoncé en introduction. Pour une démonstration plus détaillée, on pourra se reporter à [1].

On rappelle que α est par définition le rayon spectral de la matrice d'adjacence de (W, S) . On considère alors $\beta = \beta(W, S)$ l'unique racine plus grande que 1 de l'équation

$$2 + \beta + \frac{1}{\beta} = \alpha^2$$

On commence alors par montrer le résultat suivant:

PROPOSITION 9 *Tout système de Coxeter (W, S) satisfait*

$$\inf_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \lambda(s_{\sigma_1} \cdots s_{\sigma_n}) \geq \beta(W, S).$$

On introduit ensuite deux nouvelles notations: on pose

$$\lambda(W, S) = \inf\{\lambda(w) : w \in W \text{ et } \lambda(w) > 1\}.$$

Si tous les éléments de W admettent 1 pour rayon spectral, on posera $\lambda(W, S) = 1$. On considère aussi

$$\lambda_{cox}(W, S) = \inf_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \lambda(s_{\sigma_1} \cdots s_{\sigma_n}).$$

On veut donc prouver le résultat suivant:

THÉORÈME 5 *Pour tout système de coxeter (W, S) , on a soit $\lambda(W, S) = 1$ soit $\lambda(W, S) \geq \lambda_{Lehmer}$.*

Pour parvenir à ce résultat, on commence par réduire l'étude à un nombre fini d'éléments par l'intermédiaire de la proposition suivante:

PROPOSITION 10 *Soit (W, S) un système de Coxeter avec $\lambda(W, S) \geq 1$. Alors, on a l'égalité*

$$\lambda(W, S) = \inf\{\lambda_{cox}(W_I, I) : I \subset S, \text{ et } (W_I, I) \text{ hyperbolique ou de rang supérieur}\}.$$

La preuve de ce résultat utilise bien entendu le théorème 3.

Relation d'ordre. On peut définir un ordre partiel sur la collection des systèmes de Coxeter, défini par: $(W,S) \leq (W',S')$ si et seulement s'il existe une injection $i : S \rightarrow S'$ telle que $m(s,t) \leq m(i(s),i(t))$, pour tous s et t dans S . On écrira $(W,S) \cong (W',S')$ si i s'étend en un isomorphisme et $(W,S) < (W',S')$ sinon. Notons que l'on a alors $\beta(W,S) \leq \beta(W',S')$ si $(W,S) \leq (W',S')$.

On dira qu'un système de Coxeter (W,S) est *hyperbolique minimal* si tout système de Coxeter (W',S') vérifiant $(W,S) < (W',S')$ n'a que des composantes sphériques ou affines. On peut alors montrer que pour tout système hyperbolique ou de rang supérieur (W_0,S_0) il existe un système hyperbolique minimal (W,S) tel que $(W,S) \leq (W_0,S_0)$.

Avec la proposition précédente, on a donc:

COROLLAIRE 6 *Soit (W,S) un système de Coxeter hyperbolique minimal. Alors, on a l'égalité*

$$\lambda(W,S) = \inf \lambda_{\text{cox}}(W,S).$$

On suppose $\lambda(W,S) > 1$. Alors, par les résultats précédents, il existe un sous système irréductible, hyperbolique ou de rang supérieur (W_I,I) avec $I \subset S$ et un système hyperbolique minimal $(W',S') \leq (W_I,I)$ tel que,

$$\lambda(W,S) = \lambda_{\text{cox}}(W_I,I) \geq \beta(W_I,I) \geq \beta(W',S').$$

Or, une étude exhaustive des systèmes hyperboliques minimaux (il n'en existe que 38, à isomorphisme près), utilisant le corollaire précédent, montre que pour tout système hyperbolique minimal (W',S') , on a $\beta(W',S') \geq \lambda_{\text{Lehmer}}$. Ceci termine la preuve du théorème.

Références

- [1] Curtis T. McMullen. *Coxeter groups, Salem numbers and the Hilbert metric*. Prépublication Université de Harvard, 2001.
- [2] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie, Ch 4-6*, Hermann, 1968; Masson, 1981.
- [3] P. de la Harpe. On Hilbert's metric for simplices. In *Geometric Group Theory, Vol. 1 (Sussex, 1991)*, pages 97-119. Cambridge University Press, 1993.
- [4] J.E Humphreys. *Reflection groups and Coxeter*. Cambridge University Press, 1990.
- [5] X. Gourdon. *Les maths en tête - Algèbre* Ellipses, 1994.