Méthodes de min-max en analyse géométrique

Alexis Michelat

Introduction au domaine de recherche

École Normale Supérieure

14 septembre 2015

Table des matières

1 Introduction

Avant de présenter le travail qui a été réalisé à l'occasion du mémoire de master 2, nous allons faire une introduction générale, afin de mettre en lumière le caractère général de la méthode.

Soit X une variété Finslérienne de classe $C^{1,1}$, et $f : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction de classe C^1. Supposons que l'on veuille construire un point critique de la fonction f, en l'interprétant par exemple comme l'énergie sous-tendue derrière un problème géométrique ou physique. On dira qu'un point critique $x \in X$ de f est non-trivial si $f(x) > 0$. Si $\inf f(X) = 0$, on ne peut employer de méthode de minimisation naïve pour trouver un point critique non-trivial, et l'idée est de chercher des points critiques par une méthode de min-max. Autrement dit, si on se donne un ensemble de parties non-vides $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$, on définit

$$\beta = \inf_{A\in\mathscr{A}} \sup_{x\in A} f(x)$$

Grâce à des théorèmes généraux de type "lemme du col" (voie [Str08]), sous des conditions de compatibilité de $\mathscr{A}$ avec f, si $\beta < \infty$, alors β est une valeur critique de f si cette fonction satisfait la condition de Palais-Smale en β. Par conséquent, si de plus $\beta > 0$, on obtient un point critique non-trivial. On rappelle que f vérifie la condition de Palais-Smale au niveau $c \in \mathbb{R}$ si pour toute suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c, \quad \text{et} \quad Df(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

alors il existe une sous-suite de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers un élément $x \in X$. On s'intéressera donc dans la suite de cette introduction aux fonctions ne vérifiant pas la condition de Palais-Smale.

Le principe de la méthode de viscosité est d'approcher f par une famille de fonctions $\{f_\sigma\}_{\sigma\geq 0}$, de la forme

$$f_\sigma(x) = f(x) + \sigma g(x).$$

où g est une fonction de classe C^1 fixée. On définit alors pour tout $\sigma \geq 0$,

$$\beta(\sigma) = \inf_{A\in\mathscr{A}} \sup_{x\in A} f_\sigma(x).$$

Si pour tout $\sigma > 0$, f_σ vérifie la condition de Palais-Smale, et $\beta(\sigma) < \infty$, alors il existe un point critique $x_\sigma \in X$ de f_σ tel que

$$f_\sigma(x_\sigma) = \beta(\sigma).$$

Par ailleurs, on montre facilement que $\beta(\sigma) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \beta(0) = \beta$ quand $\sigma \to 0$. Par conséquent, si l'on parvient à construire une suite $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments strictement positifs convergeant vers 0, et s'il existe $x \in X$ tel que

$$f(x_{\sigma_n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x), \quad \text{et} \quad Df(x_{\sigma_n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Df(x),$$

alors le point $x \in X$ sera un point critique d'énergie non-nulle $\beta(0) = \beta > 0$.

Nous pouvons maintenant présenter l'application qui a été faite de ce principe dans le cas de la construction de géodésiques fermées. Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte de classe C^ν (où $\nu \geq 3$), et $\mathfrak{L}$ la longueur des courbes sur M, définie par

$$\mathfrak{L}(u) = \int_{S^1} |\dot{u}| d\mathscr{L}^1$$

où $\mathscr{L}^1$ est la mesure de Lebesgue en dimension 1. L'espace naturel pour définir $\mathfrak{L}$ est l'espace de Sobolev $\mathrm{W}^{1,1}(S^1, M)$, mais cette fonction n'y vérifie pas la condition de Palais-Smale. En dimension 1, on peut se passer de la méthode précédente, en utilisant l'énergie de Dirichlet

$$u \mapsto \int_{S^1} |\dot{u}|^2 \, d\mathscr{L}^1$$

définie sur $\mathrm{W}^{1,2}(S^1, M)$, qui vérifie la condition de Palais-Smale. Cependant, si l'on veut construire des surfaces minimales par min-max, on ne peut se contenter de remplacer la fonction d'aire par l'énergie de Dirichlet, car celle-ci ne vérifie plus la condition de Palais-Smale en dimension 2, du fait du défaut d'injection de Sobolev dans l'ensemble des fonctions continues. Dans la suite, nous allons appliquer la méthode de viscosité à la longueur, et prendre comme terme supplémentaire la courbure géodésique. Pour être en adéquation avec le contenu du mémoire, nous procédons à un léger glissement de notations pour les fonctions. On définit pour tout $\sigma \geq 0$,

$$E_\sigma(u) = \int_{S^1} \left(1 + \sigma^2 \kappa^2(u)\right) |\dot{u}| \, d\mathscr{L}^1$$

où

$$\kappa(u) = \left| \nabla_{\frac{\dot{u}}{|\dot{u}|}} \frac{\dot{u}}{|\dot{u}|} \right|.$$

On choisit cette quantité, plutôt que l'énergie de Dirichlet, car l'analogue utilisé en dimension 2 est la seconde forme fondamentale, qui est un opérateur d'ordre 2. Cette analogie sera précisée dans la suite. Pour tout $\sigma > 0$, on montre que E_σ vérifie la condition de Palais-Smale. Il reste néanmoins à ce stade trois difficultés pour mener à bien la méthode de viscosité.

1. Trouver une procédure de min-max non-triviale,
2. S'assurer de ne pas perdre de masse à l'infini,
3. Obtenir la convergence dans l'équation d'Euler-Lagrange.

Le premier point peut être facilement résolu grâce à la compacité de (M, g), qui assure que le rayon d'injectivité de (M, g) est strictement positif. Cette rigidité topologique assurant l'existence d'un min-max non-trivial est classique, et constitue l'ingrédient de base des méthodes de min-max dans la théorie d'Almgren-Pitts (voir [Alm62], [Pit81], [CL03], [MN12]). Le deuxième point implique en particulier qu'il faut trouver une suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de points critiques telle que

$$\int_{S^1} \sigma_n^2 \kappa^2(u_n) \, |\dot{u_n}| \, d\mathscr{L}^1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{1.1}$$

ce qui n'est pas gratuit. En effet, on peut construire des contre-exemples, qu'on peut d'ailleurs relever en dimension 2 grâce à la fibration de Hopf et un principe développé par Pinkall (voir [Pin85]). Cependant, il est possible de construire une suite de points critiques vérifiant la condition 1.1, grâce à une méthode issue d'une procédure de régularisation d'équations sur-critiques due à Micheal Struwe (voir [Str00]). Enfin, la troisième difficulté pourra être levée grâce à l'existence d'une loi de quasi-conservation, reposant sur le principe général du théorème de Noether (voir le livre de Frédéric Hélein [Hé96]). Pour des références historiques sur la construction de géodésiques fermées, on pourra consulter la chapitre historique écrit par Nalini Anantharaman dans [Ana06], et l'article de Raoul Bott [Bot82].

Par ailleurs, dans l'optique de construire des surfaces minimale d'indice quelconque, on s'intéressera également à la question de la semi-continuité inférieure de l'indice dans la partie 2.8. De plus, il pourrait être possible de construire des surfaces minimales plongées d'indice arbitraire dans toute variété Riemannienne compacte, répondant ainsi à l'une des conjectures de Yau, résolue en partie (et en codimension 1) grâce aux travaux de Fernando C. Marques et André Neves [MN13].

Je tiens à remercier Tristan Rivière qui m'a encadré pendant plus de deux mois pour réaliser le mémoire de master 2, m'a proposé ce sujet, et s'est toujours montré très disponible.

2 Construction de géodésiques fermées

2.1 Principe de la méthode

Soit (M^m, g) une variété Riemannienne compacte de classe C^ν ($\nu \geq 3$), munie de sa connexion de Levi-Civita ∇. Cette régularité est nécessaire si l'on veut appliquer le théorème de plongement isométrique de Nash ([Nas56]), et si l'on veut disposer des résultats sur la dérivée seconde de l'énergie, qui fait apparaître des dérivées covariantes du tenseur de courbure R. On suppose ainsi M plongée dans $\mathbb{R}^q$, où $q \in \mathbb{N}$ est un entier fixé. On définit l'espace de Sobolev

$$\mathrm{W}^{2,2}(S^1, M) = \mathrm{W}^{2,2}(S^1, \mathbb{R}^q) \cap \left\{ u : u(t) \in M \ \forall t \in S^1 \right\},$$

et l'espace des immersions

$$\mathrm{W}^{2,2}_\iota(S^1, M) = \mathrm{W}^{2,2}(S^1, M) \cap \left\{ u : \dot{u}(t) \neq 0 \ \forall t \in S^1 \right\}.$$

Notons que grâce à l'injection de Sobolev $\mathrm{W}^{2,2}(S^1, M) \subset C^{1,\frac{1}{2}}(S^1, M)$, ces conditions ont bien un sens partout, quitte à choisir un représentant continu. Enfin, si $u \in \mathrm{W}^{2,2}_\iota(S^1, M)$, l'espace des champs de vecteurs le long de u sera noté

$$\mathrm{W}^{2,2}_u(S^1, TM) = \mathrm{W}^{2,2}(S^1, TM) \cap \left\{ v : v(t) \in T_{u(t)}M \ \forall t \in S^1 \right\}.$$

Pour tout $\sigma > 0$, on définit $E_\sigma : \mathrm{W}^{2,2}_\iota(S^1, M) \to \mathbb{R}$ par

$$E_\sigma(u) = \int_{S^1} (1 + \sigma^2 \kappa^2(u)) |\dot{u}| d\mathscr{L}^1$$

où $\kappa(u) = \left| \nabla_{\frac{\dot{u}}{|\dot{u}|}} \frac{\dot{u}}{|\dot{u}|} \right|$ est la courbure associée à l'immersion $u \in \mathrm{W}^{2,2}_\iota(S^1, M)$. On notera quand la courbe est paramétrée par longueur d'arc D_t le transport parallèle. On peut alors montrer que E_σ est de classe $C^{\nu-1}$, et vérifie la condition de Palais-Smale à tout niveau $c > 0$.

2.2 Équation d'Euler-Lagrange

On peut montrer que la différentielle de E_σ est donnée par la formule suivante :

$$DE_\sigma(u) \cdot v = \int_0^L 2\sigma^2 \left\langle D^t v, D_t \dot{u} \right\rangle + (1 - 3\sigma^2 \kappa^2(u)) \left\langle D_t v, \dot{u} \right\rangle + 2\sigma^2 \left\langle R(v, \dot{u})\dot{u}, D_t \dot{u} \right\rangle d\mathscr{L}^1$$

pour tout $v \in \mathrm{W}^{2,2}_u(S^1, M)$, ce qui mène à l'équation d'Euler-Lagrange

$$D_t \dot{u} = \sigma^2 D_t \left(2 D_t^2 \dot{u} + 3\kappa^2(u) \left| \dot{u} \right| \right) + 2\sigma^2 R(D_t \dot{u}, \dot{u}) \dot{u} \tag{2.1}$$

Nous aurons également besoin de la dérivée seconde, pour traiter du problème de l'indice dans la section 2.5.

$$\begin{aligned} D^2 E_\sigma(u)[v,v] = 2\sigma^2 \int_0^L & |D_t^2 v|^2 + |R(v, \dot{u})\dot{u}|^2 + 2 \Big(4 \left\langle D_t v, \dot{u} \right\rangle^2 + 2 \left\langle D_t v, \dot{u} \right\rangle - |D_t v|^2 + \left\langle R(\dot{u}, v)v, \dot{u} \right\rangle \Big) \kappa^2(u) \\ & - \left(\left\langle D_t^2 v, \dot{u} \right\rangle + \left\langle D_t v, D_t \dot{u} \right\rangle \right)^2 - 8 \left\langle D_t v, \dot{u} \right\rangle \left\langle D_t^2 v, D_t \dot{u} \right\rangle + \left\langle \nabla_{\dot{u}} R(v, \dot{u}) v, D_t \dot{u} \right\rangle \\ & + \left\langle \nabla_v R(v, \dot{u})\dot{u}, D_t \dot{u} \right\rangle + \left\langle R(D_t v), \dot{u})v, D_t \dot{u} \right\rangle - \left\langle R(D_t \dot{u}, v)v, D_t \dot{u} \right\rangle + 3 \left\langle R(v, \dot{u}) D_t v, D_t \dot{u} \right\rangle \\ & + \left\langle R(\dot{u}, D_t v)\dot{u}, D_t \dot{u} \right\rangle + 2 \left\langle R(v, \dot{u}) D_t v, D_t \dot{u} \right\rangle - 6 \left\langle D_t v, \dot{u} \right\rangle \left\langle R(v, \dot{u})\dot{u}, D_t \dot{u} \right\rangle d\mathscr{L}^1 \\ & + 4\sigma^2 \int_0^L \left\langle D_t v, \dot{u} \right\rangle \left(\left\langle D_t^2 v, D_t \dot{u} \right\rangle - 2 \left\langle D_t v, \dot{u} \right\rangle \kappa^2(u) + \left\langle R(v, \dot{u})\dot{u}, D_t \dot{u} \right\rangle \right) d\mathscr{L}^1 \\ & + \int_0^L \left(1 + \sigma^2 \kappa^2(u) \right) \Big(|D_t v|^2 - \left\langle D_t v, \dot{u} \right\rangle^2 - \left\langle R(\dot{u}, v)v, \dot{u} \right\rangle \Big) d\mathscr{L}^1 \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.3 Construction de points critiques associés à des processus de min-max

Dans cette partie, nous allons construire une suite de points critiques $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ associée à une suite $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0, et vérifiant

$$\sigma_n^2 \int_{S^1} \kappa^2(u_n)|\dot{u}_n| d\mathscr{L}^1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

C'est donc ici que nous allons implémenter la méthode de Michael Struwe (décrite dans [Str00]) de construction de "bons" points critiques. Si X est un ensemble on notera $\mathscr{P}^*(X)$ l'ensemble de ses parties non-vides.

Définition 2.1. On dit qu'un sous-ensemble $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}^*(\mathrm{W}^{2,2}(S^1, M))$ est admissible si pour tout $A \subset \mathscr{A}$, il existe un sous-ensemble propre $A_0 \subset A$, constitué de courbes constantes, tel que $A \setminus A_0 \subset \mathrm{W}^{2,2}_\iota(S^1, M)$. L'ensemble $\mathscr{A}$ est dit admissible invariant s'il est admissible, et si pour tout homéomorphisme φ de $\mathrm{W}^{2,2}_\iota(S^1, M)$ isotope à l'identité dans $\mathrm{W}^{2,2}_\iota(S^1, M)$, pour tout $A \in \mathscr{A}$, $\varphi(A) \in \mathscr{A}$. La famille $\mathscr{A}$ est k-continue pour un entier $k \in \mathbb{N}$ non nul si pour tout $A \in \mathscr{A}$, $A = \{u_t\}_{t\in[0,1]^k}$ et l'application $[0,1]^k \to \mathrm{W}^{2,2}(S^1, M)$, $t \to u_t$ est continue.

On fixe à présent un ensemble $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}^*\left(\mathrm{W}^{2,2}(S^1, M)\right)$ admissible invariant k-continu (où $k \in \mathbb{N}$ est un entier non-nul fixé) tel que

$$0 < \beta(0) = \inf_{A\in\mathscr{A}} \sup \mathfrak{L}(A) < \infty.$$

On définit alors la famille quasi-invariante $\mathscr{A}_\sigma$ issue de $\mathscr{A}$ par

$$\mathscr{A}_0 = \{A_0, A \in \mathscr{A} \text{ et } A_0 \neq \varnothing\},$$

où pour tout $A \in \mathscr{A}$,

$$A_0 = A \cap \left\{u : \mathfrak{L}(u) \geq \frac{\beta(0)}{2}\right\}.$$

Pour tout $\sigma > 0$, on définit

$$\beta(\sigma) = \inf_{A_0\in\mathscr{A}_0} \sup E_\sigma(A_0) < \infty.$$

La continuité de la famille de E_σ assure que $\beta(\sigma) \geq \beta(0)$ pour tout $\sigma \geq 0$, et que

$$\beta(\sigma) \underset{\sigma\to 0}{\longrightarrow} \beta(0).$$

Comme $\sigma \mapsto E_\sigma$ est une fonction croissante en σ, on en déduit que β est une croissante, donc d'après le théorème de Lebesgue, elle est dérivable $\mathscr{L}^1$ presque partout. En particulier, on a

$$\delta = \liminf_{\sigma\to 0} \left(\sigma \log \frac{1}{\sigma} \beta'(\sigma) = 0\right) = 0.$$

En effet, par l'absurde, si $\delta > 0$, alors pour $\sigma > 0$ assez petit, on a

$$\beta(\sigma) - \beta(0) \geq \int_0^\sigma \beta'(s) ds \geq \frac{1}{2}\delta \int_0^\sigma \frac{ds}{s \log \frac{1}{s}} = \infty,$$

ce qui fournit une contradiction. On souhaiterait être en mesure de "dériver sous le min-max", pour obtenir une suite $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui tende vers 0, et une suite de points critiques $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ associés à $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, vérifiant

$$\sigma_n \log \frac{1}{\sigma_n} \frac{dE_{\sigma_n}}{d\sigma}(u_n) \to 0 \text{ quand } n \to \infty,$$

ce qui donnerait

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 \int_{S^1} \kappa^2(u_n)|\dot{u}_n| d\mathscr{L}^1 = 0.$$

En effet, on a le résultat suivant.

Théorème 2.2. *Il existe une suite $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres strictement positifs tendant vers 0, et une suite de points critiques $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{E_{\sigma_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ telles que*

$$\beta(0) \leq E_{\sigma_n}(u_n) = \beta(\sigma_n), \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_n^2 \int_{S^1} \kappa^2(u_n)|\dot{u}_n| d\mathscr{L}^1 = 0.$$

2.4 Passage à la limite

Théorème 2.3. *Soit (M^m, g) une variété Riemannienne compacte de classe C^ν ($\nu \geq 3$), telle qu'il existe une famille $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}^*\left(\mathrm{W}^{2,2}(S^1, M)\right)$ admissible invariante k-continue (pour un entier $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$). Pour tout $\sigma \geq 0$, on définit*

$$\beta(\sigma) = \inf_{A_0 \in \mathscr{A}_0} \sup_{u \in A_0} E_\sigma(u) < \infty$$

Si $\beta(0) > 0$, alors il existe une suite $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels strictement positifs convergeant vers 0, et une suite de points critiques $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ associée à $\{E_{\sigma_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$E_{\sigma_n}(u_n) = \beta(\sigma_n), \quad \sigma_n^2 \int_{S^1} \kappa^2(u_n)|\dot{u}_n| d\mathscr{L}^1 \leq \frac{1}{\log \frac{1}{\sigma_n}}$$

et une géodésique fermée non-triviale $u : S^1 \to M$ de classe C^ν et de longueur $\beta(0)$, telle que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u dans $L^\infty(S^1, M)$ et pour la topologie faible-$*$ dans $\mathrm{W}^{1,\infty}(S^1, M)$.

Démonstration. **Étape 1** : Loi de quasi-conservation et convergence de la longueur.

Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite donnée par le théorème précédent, donnée en paramétrisation normale (on note $L_n = \mathfrak{L}(u_n)$). On considère la suite $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ associée, donnée par

$$v_n = \dot{u}_n - \sigma_n^2(2D_t^2\dot{u}_n + 3\kappa^2(u_n)\dot{u}_n). \tag{2.3}$$

A priori, v_n est seulement dans le dual de $\mathrm{W}^{2,2}_{u_n}(S^1, TM)$. Cependant, d'après l'équation (2.1), on a

$$D_t v_n = 2\sigma_n^2 R(D_t\dot{u}_n, \dot{u}_n)\dot{u}_n \in \mathrm{L}^2([0, L_n]).$$

Donc $v_n \in \mathrm{W}^{1,2}_{u_n}(S^1, TM)$, et on a

$$\begin{aligned} \langle \dot{u}_n, v_n\rangle &= 1 - \sigma_n^2\left(2\left\langle D_t^2\dot{u}_n, \dot{u}_n\right\rangle + 3\kappa^2(u_n)\right) && (2.4)\\ &= 1 - \sigma_n^2\kappa^2(u_n) && (2.5) \end{aligned}$$

car $|\dot{u}_n| = 1$, et donc $0 = 2\langle D_t\dot{u}_n, \dot{u}_n\rangle$. Cette relation implique que

$$0 = \left\langle D_t^2\dot{u}_n, \dot{u}_n\right\rangle + \langle D_t\dot{u}_n, D_t\dot{u}_n\rangle = \left\langle D_t^2\dot{u}_n, \dot{u}_n\right\rangle + \kappa^2(u_n).$$

Remarquons que le fait que $v_n \in \mathrm{W}^{1,2}([0, L_n])$ montre qu'en réalité $u_n \in C^{\nu-1}([0, L_n])$. En effet,

$$2\sigma_n^2 D_t^2\dot{u}_n = \dot{u}_n - v_n - 3\sigma_n^2\kappa^2(u_n)\dot{u}_n \in \mathrm{L}^1([0, L_n])$$

donc $D_t^2\dot{u}_n \in L^1([0, L_n])$, donc $u \in \mathrm{W}^{3,1}([0, L_n])$ et en dérivant l'équation, on obtient immédiatement la régularité par itération. De plus, par hypothèse sur $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, on a $D_t v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ dans L^2. En effet,

$$\int_0^{L_n} |R(D_t\dot{u}_n, \dot{u}_n)\dot{u}_n|^2 d\mathscr{L}^1 \leq \|R\|^2_{\mathrm{L}^\infty(M)} \int_0^{L_n} |D_t\dot{u}_n|^2 d\mathscr{L}^1.$$

Par conséquent,

$$\|D_t v_n\|_{\mathrm{L}^2(S^1)} \leq 2\,\|R\|_{\mathrm{L}^\infty(M)}\,\sigma_n\left(\sigma_n^2\int_{S^1}\kappa^2(u_n)|\dot{u}_n|d\mathscr{L}^1\right)^{\frac{1}{2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

En particulier, on en déduit qu'il existe un vecteur $\overline{v} \in \mathbb{R}^q$ tel que

$$\|v_n - \overline{v}\|_{\mathrm{L}^\infty(S^1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, si $\overline{v_n} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{S^1} v_n d\mathscr{L}^1$, on a

$$\|v_n - \overline{v_n}\|_{\mathrm{L}^\infty(S^1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ceci implique que

$$\int_0^{L_n} \langle v_n, \overline{v_n}\rangle \, d\mathscr{L}^1 = \int_0^{L_n} |\overline{v_n}|^2 d\mathscr{L}^1 + \int_0^{L_n} \langle v_n - \overline{v_n}, \overline{v_n}\rangle \, d\mathscr{L}^1 = L_n|\overline{v_n}|^2 + \int_0^{L_n} \langle v_n - \overline{v_n}, \overline{v_n}\rangle \, d\mathscr{L}^1$$

et

$$\varepsilon_n = \int_0^{L_n} \langle v_n - \overline{v_n}, \overline{v_n}\rangle \, d\mathscr{L}^1 \leq L_n|\overline{v_n}| \, \|v_n - \overline{v_n}\|_{\mathrm{L}^\infty(S^1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \left|\int_0^{L_n} \langle v_n, \overline{v_n}\rangle \, d\mathscr{L}^1\right| &= \left|\int_0^{L_n} \langle \dot{u}_n, \overline{v_n}\rangle \, d\mathscr{L}^1 - 3\sigma_n^2 \int_0^{L_n} \left\langle \kappa^2(u_n)\dot{u_n}, \overline{v_n}\right\rangle d\mathscr{L}^1\right| \\ &\leq L_n|\overline{v_n}| + 3|\overline{v_n}|\sigma_n^2 \int_0^{L_n} \kappa^2(u_n) d\mathscr{L}^1 \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que

$$L_n|\overline{v_n}|^2 + \varepsilon_n \leq L_n|\overline{v_n}| + 3\sigma_n^2 \int_{S^1} \kappa^2(u_n)|\dot{u}_n| d\mathscr{L}^1.$$

Or, $L_n \geq \beta(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc

$$|\overline{v_n}| \leq 1 + \frac{3}{\beta(0)}\sigma_n^2 \int_{S^1} \kappa^2(u_n)|\dot{u}_n| d\mathscr{L}^1 - |v_n - \overline{v_n}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Étape 2 : convergence faible.

On obtient ainsi finalement

$$|\overline{v}| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{L_n} \int_0^{L_n} |v_n| d\mathscr{L}^1 \leq 1. \tag{2.6}$$

La suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathrm{W}^{1,\infty}(S^1, M)$, car M est compacte, et $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Par conséquent, d'après les théorèmes d'Ascoli et de Banach-Alaoglu, on peut extraire une sous-suite (qu'on note toujours $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$), telle que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour la convergence faible * vers une fonction $u \in \mathrm{W}^{1,\infty}([0, L], M)$. En particulier, $\{\dot{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout vers $\dot{u}$, donc pour tout intervalle I non-vide de $\mathbb{R}$ tel que $I \subset [0, L_n]$ pour n suffisamment grand, on a d'après le théorème de convergence dominée,et d'après l'équation (2.4), on a

$$\int_I \langle \dot{u}_n, v_n\rangle \, d\mathscr{L}^1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_I \langle \dot{u}, \overline{v}\rangle \, d\mathscr{L}^1$$

tandis que d'après (2.4), on a

$$\frac{1}{\mathscr{L}^1(I)} \int_I \langle \dot{u}_n, v_n\rangle \, d\mathscr{L}^1 = 1 - \frac{1}{\mathscr{L}^1(I)} \int_I \sigma_n^2\kappa^2(u_n) d\mathscr{L}^1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

d'où

$$\frac{1}{\mathscr{L}^1(I)} \int_I \langle \dot{u}, \overline{v}\rangle \, d\mathscr{L}^1 = 1$$

or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\dot{u}_n| = 1$, donc $|\dot{u}| \leq 1$ presque partout. Or, d'après (2.6), $|\overline{v}| \leq 1$, donc nécessairement, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a $|\dot{u}| = 1$, et $|\overline{v}| = 1$. Par conséquent, on a

$$L = \int_{S^1} |\dot{u}| d\mathscr{L}^1 = \lim_{n\to\infty} L_n \geq \beta(0),$$

Comme $E_{\sigma_n}(u_n) = \beta(\sigma_n)$, et $\beta(\sigma_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \beta(0)$, on a $L = \beta(0)$. En effet,

$$\beta(0) = \beta(\sigma_n) + o(1) = L_n + \int_{S^1} \sigma_n^2\kappa^2(u_n)|\dot{u}_n| d\mathscr{L}^1 + o(1),$$

donc $L_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \beta(0)$.

Étape 3 : Passage à la limite dans l'équation d'Euler-Lagrange.

Nous voulons à présent passer à la limite dans l'équation. Pour faciliter la présentation, détaillons dans le lemme suivant le résultat technique dont nous aurons besoin.

Lemme 2.4. *Soit $v \in \mathrm{W}^{2,2}_u(S^1, TM)$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = P(u_n)v_n \in \mathrm{W}^{2,2}_{u_n}(S^1, TM)$, où $P(u_n)$ est la projection orthogonale sur $T_{u_n}M$. Alors*

$$\begin{aligned}
&1) \quad v_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathrm{L}^\infty}{\longrightarrow}} v,\\
&2) \quad \{D_t v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } \mathrm{L}^\infty \text{ et } D_t v_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathrm{L}^2}{\longrightarrow}} D_t v,\\
&3) \quad \int_0^{L_n} \sigma_n^2 |D_t^2 v_n| d\mathscr{L}^1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Démonstration du lemme (2.4). Si $\mathfrak{n}$ est un champ de vecteurs normal à M, la projection orthogonale $P(u_n) : \mathbb{R}^q \to T_{u_n}M$ est donnée par

$$P(u_n)v = v - \mathfrak{n}(u_n)\langle \mathfrak{n}(u_n), v\rangle = v - \mathfrak{n}(u_n)\langle \mathfrak{n}(u_n) - \mathfrak{n}(u), v\rangle$$

et $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ dans L^∞, donc $P(u_n)v \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v$ dans L^∞.

$$\begin{aligned}
D_t(P(u_n)v - v) = &-D\mathfrak{n}(u_n)[\dot{u}_n]\langle \mathfrak{n}(u_n) - \mathfrak{n}(u), v\rangle - \mathfrak{n}(u_n)\langle D\mathfrak{n}(u_n)[\dot{u}_n] - D\mathfrak{n}(u)[\dot{u}], v\rangle\\
&- \mathfrak{n}(u_n)\langle \mathfrak{n}(u_n) - \mathfrak{n}(u), D_t v\rangle .
\end{aligned}$$

On en déduit bien que $D_t(P(u_n)v)$ est borné dans L^∞, et converge dans L^2 vers $D_t v$. Enfin,

$$D_t^2(P(u_n)v) = D^2P(u_n)[\dot{u}_n, \dot{u}_n]v + DP(u_n)[D_t\dot{u}_n]v + 2P(u_n)[\dot{u}_n]D_t v + P(u_n)D_t^2 v$$

et P étant de classe $C^{\nu-1}$ (avec $\nu - 1 \geq 2$), il existe une constante C indépendante de n telle que

$$\int_0^{L_n} \sigma_n^2 |D_t^2(P(u_n)v)|^2 d\mathscr{L}^1 \leq C\sigma_n^2 \|v\|_{\mathrm{W}^{2,2}(S^1)} + C\sigma_n \|v\|_{\mathrm{L}^2(S^1)} \left(\int_0^{L_n} \sigma_n^2 \kappa^2(u_n) d\mathscr{L}^1\right)^{\frac{1}{2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

d'où le résultat.

On définit à présent $F(u_n)\cdot v_n$ par

$$\begin{aligned}
\sigma_n^2 F(u_n)\cdot v_n &= \sigma_n^2 \int_0^{L_n} 2\left\langle D_t^2 v_n, D_t\dot{u}_n\right\rangle + 3\kappa^2(u_n)\langle \dot{u}_n, D_t v_n\rangle + 2\langle R(D_t\dot{u}_n, \dot{u}_n)\dot{u}_n, v_n\rangle d\mathscr{L}^1\\
&\leq 2\left(\int_0^{L_n} \sigma_n^2 |D_t^2 v_n| d\mathscr{L}^1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{L_n} \sigma_n^2 |D_t\dot{u}_n| d\mathscr{L}^1\right)^{\frac{1}{2}} + 3\|D_t v_n\|_{\mathrm{L}^\infty(S^1)} \int_0^{L_n} \sigma_n^2 \kappa^2(u_n) d\mathscr{L}^1\\
&\quad + 2\|R\|_{\mathrm{L}^\infty(M)} \|v_n\|_{\mathrm{L}^2(S^1)} \sigma_n \left(\int_0^{L_n} \sigma_n^2 \kappa^2(u_n) d\mathscr{L}^1\right)^{\frac{1}{2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

tandis que

$$\int_0^{L_n} \langle D_t v_n, \dot{u}_n\rangle d\mathscr{L}^1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^L \langle D_t v, \dot{u}\rangle d\mathscr{L}^1.$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est un point critique de E_{σ_n}, on a

$$DE_{\sigma_n}(u_n) = \int_0^{L_n} \langle D_t v_n, \dot{u}_n\rangle d\mathscr{L}^1 + \sigma_n^2 F(u_n)\cdot v_n = 0$$

d'où l'on déduit que

$$\int_0^L \langle D_t v, \dot{u}\rangle \, d\mathscr{L}^1 = 0$$

pour tout $v \in \mathrm{W}^{2,2}_u(S^1, TM)$, c'est-à-dire que u vérifie au sens des distributions

$$\frac{d^2}{dt^2}u + \mathbb{I}(u)(\dot{u}, \dot{u}) = 0 \tag{2.7}$$

où $\mathbb{I}$ est la deuxième forme fondamentale de M. On en déduit que $\dfrac{d^2}{dt^2}u \in L^\infty([0,L], M)$, d'où $u \in \mathrm{W}^{2,\infty}([0,L])$, et par itération $u \in C^\nu([0,L])$, $|\dot{u}| = 1$,

$$D_t u = \frac{d^2}{dt^2}u + \mathbb{I}(u)(\dot{u}, \dot{u}) = 0 \tag{2.8}$$

donc u est bien une géodésique fermée non triviale, car de longueur $\mathfrak{L}(u) = \beta(0) > 0$. Ceci termine la preuve du théorème.

Remarque 2.5. L'itération se fait de la manière suivante : si (M^m, g) est de classe C^ν, la seconde forme fondamentale est de classe $C^{\nu-1}$. En effet, en regardant l'équation des géodésiques dans une carte locales, si $\left\{\Gamma^k_{i,j}\right\}_{1\leq 1, j, k \leq m}$ sont les symboles de Christoffel de M sur une carte locale contenant un segment de $u(S^1)$, l'équation (2.7) est équivalente à

$$\frac{d^2}{dt^2}u_k(t) + \sum_{i,j=1}^m \frac{d}{dt}u_i(t)\frac{d}{dt}u_j(t)\Gamma^k_{i,j}(u(t)) = 0,$$

et Γ étant de classe $C^{\nu-1}$, il suffit de dériver $\nu - 1$ fois cette équation pour montrer que u est de classe ν.

2.5 Indice

On peut se demander si l'indice de la courbe est semi-continu inférieurement. Cette question est motivée par l'analogue des géodésiques en dimension 2, c'est-à-dire par le construction de surface minimales de genre arbitraire.

Définition 2.6. Soit $\sigma \geq 0$, et u un point critique de E_σ, *i.e.* un élément $u \in \mathrm{W}^{2,2}_\iota(S^1, M)$ tel que $DE(u) = 0$. L'indice de u, noté $\mathrm{Ind}(u) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ est égal à la dimension du du sous-espace vectoriel de $\mathrm{W}^{2,2}_u(S^1, TM)$ sur lequel la dérivée seconde $D^2E_\sigma(u)$ (voir par (2.2)) est définie négative.

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.7. *Soit $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres strictement positifs tendant vers 0. Si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points critiques associée à $\{E_{\sigma_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $\{\dot{u}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$) converge dans L^∞ (resp. presque partout) vers une géodésique $u \in \mathrm{W}^{2,2}_\iota(S^1, M)$ (resp. vers $\dot{u}$) non triviale, de longueur $L > 0$. Si $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que $v_n \in \mathrm{W}^{2,2}_{u_n}(S^1, TM)$, $v_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathrm{L}^\infty}{\longrightarrow}} v \in \mathrm{W}^{2,2}_u(S^1, TM)$, $D_t v_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathrm{L}^2}{\longrightarrow}} D_t v$, $\{D_t v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans L^∞, et*

$$\int_{S^1} \sigma_n^2 \kappa^2(u_n)|\dot{u}_n| d\mathscr{L}^1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \int_{S^1} \sigma_n^2 |D_t^2 v_n|^2 |\dot{u}_n| d\mathscr{L}^1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Alors

$$D^2E_{\sigma_n}(u_n)[v_n, v_n] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} D^2E_0(u)[v,v] = \int_0^L \Big(|D_t v|^2 - \langle D_t v, \dot{u}\rangle^2 - \langle R(\dot{u}, v)v, \dot{u}\rangle\Big) \, d\mathscr{L}^1.$$

On en déduit le résultat principal de cette section.

Théorème 2.8. *Sous les hypothèses du théorème 2.3, si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de points critiques convergeant vers une géodésique non triviale $u \in \mathrm{W}^{2,2}_\iota(S^1, M)$, on a*

$$\mathrm{Ind}(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathrm{Ind}(u_n).$$

Démonstration. Si $v \in \mathrm{W}^{2,2}_u(S^1, TM)$, soit $P(u_n)$ désigne la projection orthogonale sur $T_{u_n}M$, alors si $v_n = P(u_n)$, la suite $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les conditions du lemme précédent (voir. le lemme 2.4) Par conséquent, si $v^1, \cdots, v^I \in \mathrm{W}^{1,2}(S^1, M)$ désigne une famille libre orthonormée dans $\mathrm{L}^2(S^1, M)$ telle que D^2E_0 soit définie négative sur $\mathrm{Vect}\left\{v^1, \cdots, v^I\right\}$, alors si $v^j_n = P(u_n)v^j$, la famille $\left\{v^1_n, \cdots, v^I_n\right\}$ est libre dans $\mathrm{W}^{2,2}_{u_n}(S^1, M)$, pour n suffisamment grand et pour tout $j \in 1, \cdots, I$, $\left\{v^j_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les conditions du lemme précédent. Comme $D^2E_0(u)[v^j, v^j] < 0$, on en déduit que

$$D^2E_{\sigma_n}(u_n)[v^j_n, v^j_n] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} D^2E_0(u)[v^j, v^j] < 0$$

donc pour n assez grand $D^2E_{\sigma_n}(u_n)[v^j_n, v^j_n] < 0$, et $\left\{v^1_n, \cdots, v^I_n\right\}$ est libre, donc

$$I \leq \liminf_{n\to\infty} \mathrm{Ind}(u_n).$$

Ceci implique que

$$\mathrm{Ind}(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathrm{Ind}(u_n).$$

2.6 Construction de min-max adaptés

Théorème 2.9. *Soit (M^m, g) une variété Riemannienne compacte de classe C^ν ($\nu \geq 3$). Il existe un ensemble admissible invariant $\mathscr{A}$ dans $\mathrm{W}^{2,2}(S^1, M)$.*

Démonstration. D'après un théorème de Hurewicz, si M est une variété compacte, et $\pi_1(M) = \{1\}$ (remarquons, comme il a été mentionné dans l'introduction, qu'il est inutile de considérer le problème pour les variété non simplement connexes), alors si $H_i(M) = \{1\}$ pour tout $i < k$, $H_k(M) \neq \{1\}$, alors $\pi_i(M) = \{1\}$ pour $i < k$, et $\pi_k(M) \simeq H_k(M)$. Comme M est de dimension m, $H_m(M, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, donc il existe $k \leq m$ tel que $\pi_k(M) \neq \{1\}$. Soit donc $f : S^k \to M$ une application continue homotopiquement non triviale. On peut supposer f de classe C^ν, car d'après un résultat de Whitney, toute application continue entre variétés est homotope à une application régulière (voir [Hir76], [Whi57]). Considérons sur S^k le balayage standard par des courbes, de la forme

$$\{x_3 = 1 - 2t_3, \cdots, x_{k+1} = 1 - 2t_{k+1}\} \tag{2.9}$$

où $(t_3, \cdots, t_{k+1}) \in [0,1]^{k-1}$. Ceci fournit une application $g : S^k \to S^k$ de degré 1. Notons, pour $t \in [0,1]^{k-1}$, $u_t : S^1 \to S^k$ le cercle défini par (2.9). On définit alors

$$\mathscr{A} = \left\{\{\varphi \circ f \circ u_t\}_{t\in[0,1]^{k-1}}, \varphi \in \text{Homéo}_0(\mathrm{W}^{2,2}_\iota(S^1, M))\right\}$$

où $\text{Homéo}_0(\mathrm{W}^{2,2}_\iota(S^1, M)))$ désigne l'ensemble des homéomorphismes de $\mathrm{W}^{2,2}_\iota(S^1, M)$ isotopes à l'identité. La variété Riemannienne (M, g) étant compacte, son rayon d'injectivité $\mathrm{inj}(M)$ est strictement positif. Pour tout $\varphi \in \text{Homéo}_0(\mathrm{W}^{2,2}_\iota(S^1, M))$,

$$\sup_{t\in[0,1]^{k-1}} \mathfrak{L}(\varphi \circ f \circ u_t) \geq \mathrm{inj}(M).$$

En effet, dans le cas contraire, toute les courbes $\varphi \circ f \circ u_t : S^1 \to M$ seraient homotopiquement nulles. Et cela est équivalent au fait que $\varphi \circ f \circ g$ soit homotopiquement nulle. Or φ étant isotope à l'identité, $\varphi \circ f \circ g$ est homotope à $f \circ g$, qui est donc homotopiquement nulle. Ceci est impossible, car $g : S^k \to S^k$ est de degré 1, $f : S^k \to M$ est homotopiquement non triviale. Par conséquent

$$\beta(0) = \inf_{A\in\mathscr{A}} \sup_{u\in\mathscr{A}} \mathfrak{L}(u) \geq \mathrm{inj}(M) > 0,$$

ce qui conclut la preuve du théorème.

2.7 Conclusion

Théorème 2.10. *Soit (M^m, g) une variété Riemannienne compacte de classe C^ν ($\nu \geq 3$). Il existe un ensemble $\mathscr{A}$ admissible invariant k-continu (pour un entier $1 \leq k \leq m$) pour $\mathrm{W}^{2,2}(S^1, M)$. De plus, il existe une suite $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres strictement positifs décroissante vers 0 et une suite de points critiques $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ associée à $\{E_{\sigma_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, telles que, si*

$$\beta(\sigma_n) = \inf_{A_0\in\mathscr{A}_0} \sup_{u\in A_0} E_{\sigma_n}(u), \quad \beta(0) = \inf_{A\in\mathscr{A}} \sup_{u\in A} \mathfrak{L}(u) > 0,$$

alors

$$E_{\sigma_n}(u_n) = \beta(\sigma_n), \quad \sigma_n^2 \int_{S^1} \kappa^2(u_n)|\dot{u}_n| d\mathscr{L}^1 \leq \frac{1}{\log \frac{1}{\sigma_n}},$$

et $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement dans $\mathrm{L}^\infty(S^1, M)$ et faiblement dans $\mathrm{W}^{1,\infty}(S^1, M)$ pour la topologie faible-$*$, vers une géodésique fermée u de classe C^ν, et de longueur $\beta(0) > 0$. De plus, on a

$$\mathrm{Ind}(u) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathrm{Ind}(u_n).$$

2.8 Contre-exemples

Cette famille de contre-exemple a pour but de justifier le travail de sélection d'une bonne suite de points critiques, et montre que l'on n'a pas gratuitement une convergence vers une géodésique en prenant une suite arbitraire de points critiques associée à $\{E_{\sigma_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

2.8.1 Cas des surfaces à courbure sectionnelle constante

Dans cette sous-partie, on considère une surface compacte de classe 3, munie d'une métrique à courbure sectionnelle constante égale à $\mathscr{K}_M \in \mathbb{R}$. Soit $\sigma > 0$, et u_σ un point critique de E_σ. Par l'analyse de la section précédente, on sait déjà que u est lisse, et que u vérifie (2.10)

$$D_t\dot{u} = \sigma^2 \left\{ D_t \left(2D_t^2\dot{u} + 3\kappa^2\dot{u} \right) + 2R(D_t\dot{u}, \dot{u})\dot{u} \right\} \tag{2.10}$$

Soit ν le vecteur normal unitaire à u, et k la courbure signée, définie par

$$D_t\dot{u} = k\nu$$

En effet, $\langle D_t\dot{u}, \dot{u}\rangle = 0$, donc k est bien définie. De plus, les équations de Frénet en dimension 2 donnent

$$D_t\nu = -k\dot{u},$$

donc, on a successivement,

$$\begin{aligned} &D_t^2\dot{u} = \dot{k}\nu - k^2\dot{u}, \\ &D_t^3\dot{u} = \ddot{k}\nu + \dot{k}(-k\dot{u}) - 2\dot{k}k\dot{u} - k^2(k\nu) = \ddot{k}\nu - 3\dot{k}k\dot{u} - k^3\nu. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$D_t(k^2\dot{u}) = 2\dot{k}k\dot{u} + k^3\nu$$

D'où l'on déduit que (2.10) est équivalente à

$$k\nu = \sigma^2(2\ddot{k} + k^3)\nu + 2\sigma^2 kR(\nu, \dot{u})\dot{u}$$

En prenant le produit scalaire par ν, on obtient donc

$$k_\sigma(t) = \sigma^2(2\ddot{k}_\sigma(t) + k_\sigma^3(t) + 2\mathscr{K}_M k_\sigma(t)) \tag{2.11}$$

Il est possible d'intégrer explicitement cette équation à l'aide des fonctions elliptiques de Jacobi. Faisons quelques rappels sur ces fonctions, afin de fixer les notations.

Soit $0 \leq p < 1$, on définit la fonction $f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f_p(t) = \int_0^t \frac{d\theta}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \theta}} \tag{2.12}$$

La fonction f_p est strictement croissante, lisse, et de dérivée partout strictement positive, donc c'est un difféomorphisme de $\mathbb{R}$. On définit alors les fonctions elliptiques de Jacobi sn, cn et dn par

$$\begin{aligned}
\mathrm{sn}(t,p) &= \sin f_p^{-1}(t) \\
\mathrm{cn}(t,p) &= \cos f_p^{-1}(t) \\
\mathrm{dn}(t,p) &= \sqrt{1 - p^2 \mathrm{sn}^2(t)}
\end{aligned}$$

D'autre part, on définit la fonction $K : [0,1[\to \mathbb{R}_+$ par

$$K(p) = f_p\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \theta}}.$$

Les fonctions sn, cn, sont $4K$-périodiques, et dn est $2K$-périodique. De plus, si $\mathrm{sn}_p = \mathrm{sn}(\cdot, p)$, $\mathrm{cn}_p = \mathrm{cn}(\cdot, p)$, $\mathrm{dn}_p = \mathrm{dn}(\cdot, p)$, alors

$$\begin{aligned}
\dot{\mathrm{sn}}_p &= \mathrm{cn}_p \mathrm{dn}_p \\
\dot{\mathrm{cn}}_p &= -\mathrm{cn}_p \mathrm{dn}_p \\
\dot{\mathrm{dn}}_p &= -p^2 \mathrm{sn}_p \mathrm{cn}_p
\end{aligned}$$

Or si $\mathrm{dn} = \mathrm{dn}(\cdot, p)$, avec $0 \leq p < 1$,

$$\ddot{\mathrm{dn}} + 2\mathrm{dn}^3 - (2 - p^2)\mathrm{dn} = 0$$

et si $u(t) = a\, \mathrm{dn}(bt, p)$, u vérifie l'équation différentielle

$$\ddot{u} + 2\left(\frac{b}{a}\right)^2 u^3 - b^2(2 - p^2)u = 0$$

Donc si on fixe $0 \leq p < 1$, on a

$$k(t) = \pm \left(\frac{1}{\sigma^2} \frac{2(1 - 2\sigma^2 \mathscr{K}_M)}{(2 - p^2)}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{dn}\left(\left(\frac{1 - 2\sigma^2 \mathscr{K}_M}{2(2 - p^2)}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sigma}, p\right)$$

et

$$\sigma^2 k_\sigma^2(t) = 2\frac{1 - 2\sigma^2 \mathscr{K}_M}{2 - p^2}\left(1 - p^2 \mathrm{sn}^2\left(\left(\frac{1 - 2\sigma^2 \mathscr{K}_M}{2(2 - p^2)}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sigma}, p\right)\right)$$

Soit (en faisant à présent dépendre p de σ),

$$C(\sigma) = \left(\frac{1 - 2\sigma^2 \mathscr{K}_M}{2(2 - p(\sigma)^2)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Alors, k_σ^2 est une fonction $2\sigma C(\sigma)^{-1} K(p(\sigma))$-périodique (et c'est la période minimale pour une fonction elliptique), et également $L(\sigma)$-périodique. On en déduit qu'il existe $m(\sigma) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ telle que $L(\sigma) = 2\sigma m(\sigma) C(\sigma)^{-1} K(p(\sigma))$. En particulier, (voir [LS84], p. 19),

$$\begin{aligned}
\int_0^{L(\sigma)} \sigma^2 k_\sigma^2(t) dt &= 8\sigma\, m(\sigma) C(\sigma) \int_0^{K(\sigma)} \mathrm{dn}_{p(\sigma)}^2(t) dt \\
&= 4\sigma\, m(\sigma) \sqrt{\frac{2 - 4\sigma^2 \mathscr{K}_M}{2 - p^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - p(\sigma)^2 \sin^2(t)} dt
\end{aligned}$$

Par conséquent, si $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres strictement positifs, et

$$L = \liminf_{n\to\infty} L(\sigma_n) > 0$$

si on suppose que $p(\sigma) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} p \in [0,1[$, on a alors $K(p(\sigma_n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} K(p) \in]0,\infty[$

$$\begin{aligned}\int_0^{L(\sigma_n)} \sigma_n^2 k_{\sigma_n}^2(t)dt &= \frac{2L(\sigma_n)C(\sigma_n)^2}{K(p(\sigma_n))}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-p(\sigma_n)^2\sin^2(t)}dt \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{4L}{(2-p^2)K(p)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-p^2\sin^2(t)}\,dt > 0,\end{aligned}$$

ce qui fournit le contre-exemple annoncé. En effet, comme

$$\beta(\sigma_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \beta(0),$$

et $E_{\sigma_n}(u_n) = \beta(\sigma_n)$, on a

$$\liminf_{n\to\infty} E_{\sigma_n}(u_n) - E_0(u_n) > 0, \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} \mathscr{H}^1(u_n(S^1)) < \beta(0).$$

2.8.2 Cas général

L'équation que l'on trouve dans le cas d'une surface générale est la suivante

$$k_\sigma(t) = \sigma^2\left(2\ddot{k}_\sigma(t) + k_\sigma^3(t) + 2\mathscr{K}\left(\dot{u}(t),\nu(t)\right)k_\sigma(t)\right)\right) \tag{2.13}$$

où $\mathscr{K}\left(\dot{u}(t),\nu(t)\right)$ est la courbure sectionnelle associée au 2-plan $\dot{u}(t)\wedge\nu(t)$. Soit $\mathscr{K}_M^+$ (resp. $\mathscr{K}_M^-$) le maximum (resp. le minimum) de la courbure sectionnelle sur M. Alors on a si s désigne le signe

$$\begin{aligned}\ddot{k}_\sigma(t) + \frac{1}{2}k_\sigma^3(t) + \left(\mathscr{K}_M^{\mathrm{s}(k_\sigma(t))} - \frac{1}{2\sigma^2}\right)k_\sigma(t) \geq 0 \\ \ddot{k}_\sigma(t) + \frac{1}{2}k_\sigma^3(t) + \left(\mathscr{K}_M^{-\mathrm{s}(k_\sigma(t))} - \frac{1}{2\sigma^2}\right)k_\sigma(t) \leq 0\end{aligned}$$

Notons

$$C(\sigma,\mathscr{K}) = \left(\frac{1-2\sigma^2\mathscr{K}}{2(2-p(\sigma)^2)}\right)$$

Par une application élémentaire du principe de comparaison, il existe une solution k_σ telle que

$$\frac{2}{\sigma}C(\sigma,\mathscr{K}_M^+)\mathrm{dn}\left(C(\sigma,\mathscr{K}_M^+)\frac{t}{\sigma},p(\sigma)\right) \leq k_\sigma(t) \leq \frac{2}{\sigma}C(\sigma,\mathscr{K}_M^-)\mathrm{dn}\left(C(\sigma,\mathscr{K}_M^-)\frac{t}{\sigma},p(\sigma)\right)$$

On obtient ainsi une famille de contre-exemples sur les surfaces. Par ailleurs, d'après l'article de Joel Langer et David A. Singer ([LS84]), on peut étendre cette procédure à la construction de contre-exemples en toute dimension, qui seront des fonctions elliptiques modifiées.

3 Construction de surfaces minimales

Ce travail avait pour buts de justifier la validité de l'approche en dimension supérieure, mais aussi de fournir des contre-exemples à l'existence d'une régularité gratuite obtenue directement en faisant tendre le paramètre σ vers 0. En effet, grâce à un résultat de 1985 de Ulrich Pinkall ([Pin85]), on peut relever les points critiques de l'énergie, et ainsi construire un contre-exemple en dimension 2 (voir [MR15]).

Dans le cas des surfaces, l'analogue de E_σ est

$$A_\sigma(\vec{\Phi}) = \int_\Sigma (1+\sigma^2 \left|\mathbb{I}_{\vec{\Phi}}\right|^2_{g_{\vec{\Phi}}}) d\mathrm{vol}_{g_{\vec{\Phi}}}$$

où $\vec{\Phi} : \Sigma \to N$ est une immersion d'une surface de Riemann fermée (Σ, g_0) fixée à valeurs dans une variété Riemannienne fermée (N, g), $\mathbb{I}_{\vec{\Phi}}$ la seconde forme fondamentale associée à $\vec{\Phi}(\Sigma)$, et $\mathrm{vol}_{g_{\vec{\Phi}}}$ l'élément de volume associé à $\vec{\Phi}(\Sigma)$, défini localement par

$$\mathrm{vol}_{g_{\vec{\Phi}}} = \sqrt{|\partial_{x_1}\vec{\Phi}|^2|\partial_{x_2}\vec{\Phi}|^2 - \left\langle \partial_{x_1}\vec{\Phi}, \partial_{x_2}\vec{\Phi}\right\rangle^2}\,\mathscr{H}^2_{g_0},$$

où $\mathscr{H}^2_{g_0}$ est la mesure de Hausdorff associée à la métrique g_0 définie sur Σ. Si $x \in \vec{\Phi}(\Sigma)$, $X, Y \in T_x\Sigma$

$$\mathbb{I}_{\vec{\Phi}}(X,Y) = \left((\vec{\Phi}^*\nabla)_X(\vec{\Phi}_* Y)\right)^\perp \in \vec{\Phi}_*(T_x\Sigma)^\perp \subset T_{\vec{\Phi}(x)}M$$

où $\vec{\Phi}^*\nabla$ est le tiré en arrière de la connexion de Levi-Civita ∇ de (N^m, g), et $\perp$ désigne la projection orthogonale $T_{\vec{\Phi}(x)}N \to \vec{\Phi}_*(T_x\Sigma)^\perp$. Par conséquent, par symétrie de $\mathbb{I}_{\vec{\Phi}}$ on a

$$\left|\mathbb{I}_{\vec{\Phi}}\right|^2_{g_{\vec{\Phi}}} = \left|\mathbb{I}_{\vec{\Phi}}(\partial_{x_1}\vec{\Phi}, \partial_{x_1}\vec{\Phi})\right|^2_{g_{\vec{\Phi}}} + 2\left|\mathbb{I}_{\vec{\Phi}}(\partial_{x_1}\vec{\Phi}, \partial_{x_2}\vec{\Phi})\right|^2_{g_{\vec{\Phi}}} + \left|\mathbb{I}_{\vec{\Phi}}(\partial_{x_2}\vec{\Phi}, \partial_{x_2}\vec{\Phi})\right|^2_{g_{\vec{\Phi}}}$$

Cependant, contrairement au cas de la dimension 1, on n'a pas d'injection dans les fonctions continues de $\mathrm{W}^{2,2}(\Sigma, N)$, et de plus A_σ ne vérifie pas la condition de Palais-Smale sur $\mathrm{W}^{2,2}(\Sigma, N)$. Il faut donc remplacer A_σ par A^p_σ, où $p > 1$ est un paramètre arbitraire. On définit donc

$$A^p_\sigma(\vec{\Phi}) = \int_\Sigma (1+\sigma^2 \left|\mathbb{I}_{\vec{\Phi}}\right|^{2p}_{g_{\vec{\Phi}}}) d\mathrm{vol}_{g_{\vec{\Phi}}},$$

et cette fonction vérifie bien la condition de Palais-Smale sur $\mathrm{W}^{2,2p}_\iota(\Sigma, N)$, l'ouvert de $\mathrm{W}^{2,2p}(\Sigma, N)$ défini par

$$\mathrm{W}^{2,2p}_\iota(\Sigma, N) = \left\{\vec{\Phi} \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\Sigma, N), \exists C > 1\ C^{-1}g_0 \leq \vec{\Phi}^*g \leq Cg_0,\ \vec{n}_{\vec{\Phi}} \in \mathrm{W}^{1,2p}(\Sigma, \mathscr{G}_2(TN))\right\}$$

où $\vec{n}_{\vec{\Phi}}$ est l'application de Gauss de $\vec{\Phi}$, et $\mathscr{G}_2(TN)$ est le fibré des 2-plans de N. La fonction A^p_σ est de classe C^2 sur $\mathrm{W}^{2,2p}_\iota(\Sigma, N)$, et y vérifie la condition de Palais-Smale.

On se donne une famille Γ d'homotopies régulières dans $\mathrm{W}^{2,2p}_\iota(\Sigma, N)$, c'est-à-dire que si $\forall \gamma \in \Gamma$, $\gamma = \{\vec{\Phi}^\gamma_t\}_{t\in[0,1]}$, où pour tout $t \in [0,1]$, $\vec{\Phi}^\gamma_t \in \mathrm{W}^{2,2p}_\iota(\Sigma, N)$. On définit alors

$$\beta(\sigma) = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max A^p_\sigma(\gamma(\Sigma)), \quad \beta(0) = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max \mathscr{H}^2_g(\gamma(\Sigma))$$

Grâce à la condition de Palais-Smale, et l'argument de [Str00] on peut alors prouver le résultat suivant :

Théorème 3.1. *Soit (N^m, g) une sous-variété fermée de classe de $\mathbb{R}^q$ $(3 \leq m \leq q-1)$, et (Σ, g_0) une surface de Riemann fermée. Il existe une suite $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres strictement positifs tendant vers 0 et une suite de points critiques $\{\vec{\Phi}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ associée à $\left\{A^p_{\sigma_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\mathscr{H}^2_g(\vec{\Phi}_n(\Sigma)) \geq \beta(0), \quad \int_\Sigma \sigma_n^2 \left|\mathbb{I}_{\vec{\Phi}_n}\right|^{2p}_{g_{\vec{\Phi}_n}} d\mathrm{vol}_{g_{\vec{\Phi}_n}} = o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{\sigma_n}}\right) \tag{3.1}$$

Le processus de convergence est bien plus subtil : il faut considérer $\{\vec{\Phi}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en tant que varifold, utiliser la formule de monotonie pour montrer que la limite faible $\vec{\Phi}$ est un varifold rectifiable. D'autre part, un résultat de quantification permet de montrer que sous les conditions du théorème précédent, A^p_σ n'a pas de point critique d'énergie arbitrairement petite, pour tout n suffisamment grand. Il permet notamment de montrer qu'il n'y a pas de masse perdue à l'infini, et que $\vec{\Phi}$ est de plus rectifiable. Pour ces notations, et les motivations pour l'introduction des différentes notions, on pourra consulter notamment [Fed69], [Sim83], [HS86], [CM11], [Kra08]. Les deux théorèmes suivants sont les résultats centraux de [Riv15].

Théorème 3.2. *Sous les conditions du théorème 3.1, quitte à extraire une sous-suite, il existe une surface de Riemann fermée S telle que* $\text{genre}(S) \leq \text{genre}(\Sigma)$*, et une application $\vec{\Phi} : S \to N^m$ conforme et N^m-harmonique telle que*

$$\mathscr{H}_g^2(\vec{\Phi}(S)) = \lim_{n\to\infty} \mathscr{H}_g^2(\vec{\Phi}_n(\Sigma))$$

et la suite de varifold associé à $\{\vec{\Phi}_k\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\vec{\Phi}$ au sens des mesures de Radon.

Si l'on dispose d'un min-max non trivial on peut en déduire le résultat suivant :

Théorème 3.3. *Soit Γ une famille d'homotopies régulières dans $\mathrm{W}_\iota^{2,2p}(\Sigma, N)$, telle que*

$$\beta(0) = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max \mathscr{H}_g^2(\gamma(\Sigma)) > 0.$$

Il existe une surface de Riemann fermée S telle que $\text{genre}(S) \leq \text{genre}(\Sigma)$*, et une application $\vec{\Phi} : S \to N^m$ conforme N^m-harmonique telle que*

$$\mathscr{H}_g^2(\vec{\Phi}(S)) = \beta(0).$$

Une application N^m-harmonique est une application vérifiant la définition suivante.

Définition 3.4. Une application $\vec{\Phi} \in \mathrm{W}^{1,2}(\Sigma, N)$ est dite N-harmonique si pour tout ouvert $U \subset \Sigma$, et toute fonction lisse f sur N de support à distance positive de $\vec{\Phi}(\partial U)$, on a

$$\int_U \left\langle d(f(\vec{\Phi})), d\vec{\Phi} \right\rangle - f(\vec{\Phi})\mathbb{I}(\vec{\Phi})(d\vec{\Phi}, d\vec{\Phi}) d\mathscr{H}_{g_0}^2$$

où $\mathbb{I}$ est la seconde forme fondamentale de N^m, vue comme sous-variété de $\mathbb{R}^q$.

4 Applications

Cette approche a aussi pu être utilisée avec succès dans la construction de surfaces minimales à bord libre. Soit (N, g) une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de classe 2, difféomorphe à S^2. On cherche à construire des immersions minimales conformes du disque unité $D \subset \mathbb{R}^2$ dans N, telles que $u(S^1)$ soit orthogonal à N au bord. D'après [Da 15], ceci équivaut à être l'extension harmonique d'une application $\frac{1}{2}$-harmonique, *i.e.* un point critique de

$$E_0(u) = \|u\|^2_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(S^1)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n||u_n|^2$$

On utilise alors l'énergie relaxée

$$E_\sigma(u) = E_0(u) + \sigma^2 \int_{S^1} |\dot{u}|^2 d\mathscr{L}^1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(|n| + \sigma^2 n^2\right) |u_n|^2$$

L'énergie de Dirichlet en dimension 1 vérifiant la condition de Palais-Smale, E_σ la vérifie sur sur $\mathrm{W}^{1,2}(S^1, N)$. Fixons un générateur γ de $H_2(N^2, \mathbb{Z})$. Si U est le sous-espace de $C^0([0,1], \mathrm{W}^{1,2}(S^1, N)$ des éléments u tels que u_0 et u_1 soient constants, et $u([0,1] \times S^1) \simeq \gamma$, alors on peut définir

$$\beta(\sigma) = \inf_{u\in U} \max E_\sigma(u), \quad \beta(0) = \inf_{u\in U} \max E_0(u).$$

L'existence d'un point critique de E_σ pour tout $\sigma > 0$ est alors fournie par le lemme du col, mais à nouveau il faut choisir une suite adéquate de points critiques pour faire converger la méthode. Dans [DR15], il est prouvé que $\beta(0) > 0$, et que l'on peut obtenir grâce à la méthode précédente une solution non-triviale au problème initial. De plus, ce résultat améliore les hypothèses de régularité sur N (l'hypothèse de régularité C^4 était nécessaire dans les résultats précédents).

Par ailleurs, la méthode permettant *a priori* de réaliser des min-max non triviaux, on pourrait également se demander si les surfaces minimales de Lawson dans S^3 (construites dans [Law70]) proviennent d'un min-max.

Références

[Alm62] F. J. Almgren Jr. – « The homotopy groups of the integral cycle groups », *Topology 1, p. 257-299* (1962).

[Ana06] N. Anantharaman – « L'héritage scientifique de Poincaré, chapitre 7 », *Belin* (2006).

[Bot82] R. Bott – « Lectures on morse theory, old and new », *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, Vol. 7, No. 2* (1982).

[CL03] T. H. Colding et C. D. Lellis – « The min-max construction of minimal surfaces », *Surveys of Differential Geometry, IX, International Press* (2003).

[CM11] T. H. Colding et W. P. Minicozzi II – *A Course in Minimal Surfaces*, 2011.

[Da 15] F. Da Lio – « Compactness and bubble analysis for 1/2-harmonic maps », *Ann. Inst. H. Poincar Anal. Non Linaire 32, no. 1, 201224.* (2015).

[DR15] F. Da Lio et T. Rivière – « A viscosity approach to the min-max construction of free boundary discs », *En préparation* (2015).

[Fed69] H. Federer – *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, 1969.

[Hé96] F. Hélein – *Applications harmoniques, lois de conservation, et repères mobiles*, 1996.

[Hir76] M. W. Hirsch – *Differential Topology*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag New-York, 1976.

[HS86] R. Hardt et L. Simon – *Seminar on Geometric Measure Theory*, Birkhaüser, 1986.

[Kra08] S. Krantz – *Geometric integration theory*, Cornerstones, 2008.

[Law70] H. Lawson – « Complete minimal surfaces in S^3 », *Annals of Math. 92, no. 3, p. 335-374* (1970).

[LS84] J. Langer et D. A. Singer – « The total squared curvature of closed curves », *Journal of Differential Geometry, Vol. 20, pp. 1-22* (1984).

[MN12] F. C. Marques et A. Neves – « Min-Max theory and the Willmore conjecture », *Annals of Mathematics* (2012).

[MN13] F. C. Marques et A. Neves – « Existence of infinitely many manimal hypersurfaces in positive ricci curvature », *Prépublication, $arXiv$* : 1311.6501v1 (2013).

[MR15] A. Michelat et T. Rivière – « A viscosity method for the min-max construction of closed geodesics », *En préparation* (2015).

[Nas56] J. F. Nash – « The imbedding problem for riemannian manifolds », *Annals of Mathematics, vol. 63, p. 20-63* (1956).

[Pin85] U. Pinkall – « Hopf tori in S^3 », *Inventiones Mathematicae, 81, 379-389* (1985).

[Pit81] J. T. Pitts – *Existence and regularity of minimal surfaces on riemannian manifolds*, Princeton University Press, 1981.

[Riv15] T. Rivière – « A Viscosity Method in the Min-max Theory of Minimal Surfaces », *En préparation* (2015).

[Sim83] L. Simon – *Lectures on Geometric Measure Theory*, Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University, Volume 3, 1983.

[Str00] M. Struwe – « Positive solutions of critical semilinear elliptic equations on non-contractible planar domains », *J. Eu. Math. Sic. 2, 329-388* (2000).

[Str08] — , *Variational methods, Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems, fourth edition*, 2008.

[Whi57] H. Whitney – *Geometric Integration Theory*, Pinceton University Press, 1957.