

Introduction au Domaine de Recherche : Marches aléatoires renforcées par arêtes orientées et marches aléatoires en environnement de Dirichlet

Alexis PRÉVOST

5 novembre 2015

Introduction

Le domaine de recherche présenté ici sont les marches aléatoires renforcées par arêtes orientées, c'est à dire des marches aléatoires sur \mathbb{Z}^d pondérées par les arêtes, dont les poids changent au cours de la marche. Elles seront souvent étudiées sous l'angle des marches aléatoires en milieu aléatoire, c'est à dire les marches aléatoires pondérées dont les poids initiaux sont tirés aléatoirement au préalable. Nous nous intéresserons dans un premier temps au lien entre ces deux points de vue. Puis nous verrons le cas particulier de la dimension 1 ainsi que les questions de récurrence/transience de ces marches en dimension supérieure. Nous nous intéresserons par la suite à la marche aléatoire décentrée, c'est à dire la marche pour laquelle toutes les directions ne sont pas équivalentes. Pour cette marche, nous verrons qu'il y a une direction privilégiée et qu'on a bien transience dans cette direction. Pour finir, nous nous poserons la question de la balisticité, c'est à dire de la vitesse de drift de la marche aléatoire décentrée dans la direction privilégiée.

Table des matières

1	Historique	2
2	Présentation des modèles	2
2.1	Les marches aléatoires renforcées par arêtes orientées	2
2.2	Les marches aléatoires en milieu aléatoire	3
2.3	Lien entre ces deux modèles	4
3	Résultats généraux en dimension 1	5
4	Transience en dimension ≥ 3	6
4.1	Preuve de la transience	6
4.2	Étude de la vitesse de Transience	8
5	Existence d'une direction asymptotique en dimension ≥ 2	9
5.1	Étude du cas général	9
5.2	Application au cas particulier de l'environnement de Dirichlet	10
6	Balisticité et sous-balisticité en dimension ≥ 3	10

1 Historique

Les premiers travaux sur les marches aléatoires renforcées ont été fait par Diaconis et Coppersmith dans un manuscrit non publié en 1986 (cf [5]) et par Pemantle dans sa thèse [12]. Il existe trois différents types de marches aléatoires renforcées sur \mathbb{Z}^d : les marches aléatoires renforcées par arêtes non orientées, par arêtes orientées et par sommet. Pour le moment, aucun lien n'a été établi entre ces trois modèles et ils ont donc été étudiés séparément, et nous nous contenterons de l'étude du cas arêtes orientées ici. De nombreux progrès ont été enregistrés dans l'étude de celles-ci depuis le début des années 2000 sous l'impulsion de Christophe Sabot. Dans un premier temps, celui-ci a généralisé avec Enriquez le lien entre ce modèle et celui des marches aléatoires en milieu aléatoire dans [7], puis il a découvert un lemme fondamental dans [15] qui lui a permis de prouver la transience en dimension ≥ 3 . Ce lemme lui a de plus permis de trouver d'autres résultats, comme la balisticité sous certaines conditions dans [14], et a permis à également à Tournier d'étudier la transience directionnelle dans [17] et [22] grâce aux travaux de Bouchet dans [2].

En réalité, tous ces développements récents ont été obtenus grâce à l'équivalence avec les marches aléatoires en milieu aléatoire, puisque dès le début Pemantle avait remarqué le lien avec les urnes de Pólya qui montre que ce modèle n'est autre qu'une marche aléatoire en environnement de Dirichlet. Les marches aléatoires en milieu aléatoire ont été en premier lieu introduites par Chernov dans [4] en 1967 pour l'étude des phénomènes de duplication des brins d'ADN, et reprises par la communauté mathématique. Elles ont été longuement étudiées depuis les années 1970, et un historique pourra être trouvé dans [9] par exemple. De nombreux travaux à ce sujet sont encore en cours, notamment sur des questions de balisticité en environnement elliptique ou uniformément elliptique. Certains de ces travaux s'appliquent au cas de l'environnement de Dirichlet qui nous intéresse ici comme ceux de Campos et Ramirez dans [3] qui généralisent, mais avec des méthodes différentes, le résultat de Sabot dans [14]. Le cas de la dimension 1 a été particulièrement étudié avec notamment les travaux de Solomon [19], Kesten, Kozlov et Spitzer [11] ou plus récemment Enriquez, Sabot et Zindy dans [8].

2 Présentation des modèles

2.1 Les marches aléatoires renforcées par arêtes orientées

Le premier modèle à introduire est celui de la marche aléatoire renforcée linéairement par arêtes orientées. On se place sur \mathbb{Z}^d et on note E l'ensemble des arêtes orientées de \mathbb{Z}^d . Rappelons dans un premier temps le modèle de la marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d pondérée par arêtes orientées. On donne à chaque arête orientée e de \mathbb{Z}^d un poids noté $\alpha_e \neq 0$. On fait alors partir une marche aléatoire de l'origine, avec la probabilité de traverser une arête proportionnelle au poids de celle-ci, c'est à dire que si x et y sont voisins

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x) = \frac{\alpha_{(x,y)}}{\sum_{i=1}^{2d} \alpha_{(x,x+e_i)}}$$

et 0 sinon. On a noté (x,y) l'arête orientée reliant x à y et (e_1, \dots, e_{2d}) l'ensemble des arêtes partant de l'origine avec la convention $e_{i+d} = -e_i$. L'exemple canonique de ce type de marche est celui de la marche aléatoire simple, c'est à dire quand tous les poids sont égaux.

L'idée du renforcement est le suivant : on part d'une marche aléatoire pondérée par arêtes orientées et à chaque fois qu'on traverse une arête orientée, on augmente de 1 son poids, c'est à

dire que les arêtes déjà traversées ont plus de chances d'être parcourues une deuxième fois que la première. Plus précisément, on a la définition suivante

Définition 2.1. La loi de la marche aléatoire renforcée linéairement par arêtes orientées de poids initial $\alpha = \{\alpha_e \in \mathbb{R}_+^*, e \in E\}$ partant de x_0 est donnée récursivement par

$$\hat{P}_{x_0}(X_0 = x_0) = 1$$

et $\forall x \in \mathbb{Z}^d, \forall i \in \{1, \dots, 2d\}$,

$$\hat{P}_{x_0}(X_{n+1} = x + e_i | X_n = x, \mathcal{F}_n) = \frac{\alpha_{(x, x+e_i)} + N_{(x, x+e_i)}}{\sum_{j=1}^{2d} \alpha_{(x, x+e_j)} + N_{(x, x+e_j)}} \quad (2.1)$$

où \mathcal{F}_n est la tribu engendrée par (X_1, \dots, X_n) , c'est à dire tout le passé, et N_e est le nombre de fois où l'arête e a été traversée avant l'instant n .

2.2 Les marches aléatoires en milieu aléatoire

Le deuxième modèle à introduire est celui de la marche aléatoire en milieu aléatoire, qui correspond à un cas simple de mouvement en environnement aléatoire. L'idée est ici d'étendre la définition classique de marche aléatoire pondérée que nous venons de voir au cas où l'environnement, c'est à dire l'ensemble des poids, dans lequel elle évolue n'est pas fixé. Pour cela, on va fixer aléatoirement un environnement ω , c'est à dire que pour chaque arête orientée e ω_e est un poids, selon une probabilité μ , puis on va lancer une marche aléatoire pondérée dans cet environnement. Il faut faire attention ici au fait qu'il y a deux niveaux d'aléatoire : dans un premier temps on tire au hasard l'environnement ω selon μ , puis on tire au hasard la marche aléatoire pondérée dans cet environnement.

Plus précisément, on se donne pour tout x sommet de \mathbb{Z}^d μ_x une probabilité sur $T_d = \{(\omega_1, \dots, \omega_{2d}), \omega_1 + \dots + \omega_{2d} = 1\}$ muni de la tribu borélienne. On tire alors indépendamment $\omega(x, \cdot) \in T_d$ selon μ_x pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, et on note μ la loi produit correspondante. On appelle ω l'environnement qui appartient à la famille $\Omega = \prod_{x \in \mathbb{Z}^d} T_d$, muni de la tribu produit \mathcal{F} et de la probabilité μ . Un environnement est donc un ensemble de poids sur les arêtes orientées de \mathbb{Z}^d , renormalisé pour être directement une probabilité en chaque sommet. On dit de plus que l'environnement est i.i.d. si les probabilités $\{\mu_x\}_{x \in \mathbb{Z}^d}$ sont toutes égales, ce qu'on supposera vrai par la suite. L'environnement ω étant fixé, le processus suit alors une marche aléatoire pondérée par ω , $(X_n)_{n \geq 0}$, à savoir le processus qui est défini récursivement par :

$$P_{x, \omega}(X_0 = x) = 1$$

et,

$$P_{x, \omega}(X_{n+1} = x + e_i | X_n = x) = \omega_{(x, x+e_i)} \quad (2.2)$$

pour tout $x \in \mathbb{Z}^d, i \in \{1, \dots, 2d\}$. La loi $P_{x, \omega}$ est communément appelée *loi quenched* et correspond exactement à la marche aléatoire pondérée dans l'environnement ω .

Définition 2.2. Soit μ une probabilité sur Ω , et $x \in \mathbb{Z}^d$. On définit la *loi annealed* ou *loi moyennée* partant de x par :

$$P_x(\cdot) = \int_{\Omega} P_{x, \omega}(\cdot) \mu(d\omega). \quad (2.3)$$

Sous P_x , $(X_n)_{n \geq 0}$ est appelée la marche aléatoire en milieu aléatoire définie par la loi μ , et correspond à la description faite ci-dessus. La loi annealed a en général le désavantage de perdre le caractère markovien de la marche aléatoire à environnement fixé. En effet (intuitivement), si on connaît $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$, les variables aléatoires (X_1, \dots, X_{n-1}) sont importantes pour connaître X_{n+1} puisqu'elles donnent de l'information sur l'environnement qui a été tiré selon μ . On peut donner un exemple de marche aléatoire en milieu aléatoire en prenant pour μ_x une loi de Dirichlet. Rappelons la définition de celle-ci : la loi de Dirichlet de paramètre $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$ est la probabilité sur T_d de densité

$$K \prod_{i=1}^{2d} p_i^{\alpha_i - 1} \mathbb{1}_{\sum_{i=1}^{2d} p_i = 1} dp_1 \dots dp_{d-1}$$

où K est une constante de normalisation qui vaut

$$\frac{\Gamma(\sum_{i=1}^{2d} \alpha_i)}{\prod_{i=1}^{2d} \Gamma(\alpha_i)}.$$

Γ est la fonction gamma d'Euler, $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$. Le modèle de marche aléatoire en milieu aléatoire correspondant à cette loi est le suivant :

Définition 2.3. La marche aléatoire en environnement de Dirichlet de paramètre $\alpha = \{\alpha_e \in \mathbb{R}_+^*, e \in E\}$ est la marche aléatoire en milieu aléatoire définie par la loi μ , où μ_x suit une loi de Dirichlet de paramètre $(\alpha_{(x, x+e_i)} \in \mathbb{R}_+^*, /i \in \{1, \dots, 2d\})$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$. On notera par la suite $P^{(\alpha)}$ la loi de Dirichlet de paramètre α , $\mathbb{E}^{(\alpha)}[\]$ l'espérance correspondante et $P_x^{(\alpha)}$ la loi annealed correspondante.

Une description de la marche aléatoire en environnement de Dirichlet serait de dire qu'en chaque sommet on tire les poids des arêtes partant de ce sommet selon une loi de Dirichlet de paramètre α , puis qu'on fait parcourir \mathbb{Z}^d par la marche aléatoire pondérée par ces poids.

2.3 Lien entre ces deux modèles

Afin de comprendre la correspondance entre marche aléatoire renforcée par arêtes orientées et marche aléatoire en milieu de Dirichlet, il faut d'abord introduire les urnes de Pólya, un modèle introduit par Pólya dans [13]. Une urne contient initialement R boules rouges et B boules noires. On tire au hasard une de ces boules, et on rajoute alors une boule de cette couleur dans l'urne après avoir replacé la boule tirée. Notons R_n le nombre de boules rouges après n tirages, et B_n le nombre de boules noires après n tirages. Ce modèle est le modèle le plus simple de processus renforcé pouvant être représenté comme un processus en milieu aléatoire, car on a le théorème suivant :

Théorème 2.4. Soit $(\xi_n)_{n \geq 0} \in \{R, B\}^{\mathbb{N}}$ la suite des couleurs tirées pour une urne de Pólya de répartition initiale $\{R_0, B_0\}$. (ξ_1, \dots, ξ_N) a la même loi qu'un mélange de tirage i.i.d. de processus de Bernoulli de mesure de mélange Bêta(R_0, B_0), c'est à dire qu'on tire aléatoirement une variable p selon cette loi bêta, puis que la couleur de la n -ième boule est rouge (resp. noire) avec probabilité p (resp. $1-p$), et où les tirages sont faits de façon indépendante.

Il faut faire attention qu'ici, à l'instar des marches aléatoires en milieu aléatoire, il y a deux niveaux d'aléatoire : d'abord on tire p selon la loi bêta, puis on tire une boule rouge ou noire avec une loi de Bernoulli de paramètre p . On peut de plus facilement généraliser ces résultats au cas

où on a $2d$ couleurs (C_1, \dots, C_{2d}) initialement présentes en quantité $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$ et dans ce cas là le tirage des couleurs d'une urne de Pólya suit est un mélange de tirage i.i.d. de processus de Bernoulli de mesure de mélange la loi de Dirichlet de paramètre $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d})$, c'est à dire qu'on tire $(\omega_1, \dots, \omega_{2d})$ selon cette loi de Dirichlet, puis la couleur est C_i avec probabilité ω_i . Le fait que la loi de Dirichlet intervienne ici est dû au fait que la loi Bêta (α_1, α_2) est la projection sur la première coordonnée d'une loi de Dirichlet de paramètre (α_1, α_2) .

Revenons maintenant aux marches aléatoires renforcées linéairement par arêtes orientées (Définition 2.1) : on peut considérer en chaque sommet x l'ensemble des arêtes qui partent de x comme une urne de Pólya à $2d$ couleurs de condition initiale $(\alpha_{(x, x+e_1)}, \dots, \alpha_{(x, x+e_{2d})})$ puisqu'à chaque fois qu'on revient en x , on regarde uniquement les poids des arêtes partant de x indépendamment de tous les tirages en dehors de x , et qu'on ajoute 1 quand on choisit une arête (vue ici comme une couleur). On peut donc voir le choix d'une arête partant de x comme un mélange de tirage i.i.d. de processus de Bernoulli de mesure de mélange la loi de Dirichlet de paramètres $(\alpha_{(x, x+e_1)}, \dots, \alpha_{(x, x+e_d)})$, ce qui correspond exactement au modèle de marche aléatoire en environnement de Dirichlet défini en 2.3. On en déduit le théorème suivant

Théorème 2.5. *La marche aléatoire renforcée linéairement par arête orientée de poids initial α a la même loi que la marche aléatoire en environnement de Dirichlet de paramètre α .*

En réalité, Enriquez et Sabot ont montré dans [7] une généralisation de ce théorème : si on se donne une marche aléatoire en milieu aléatoire, on peut lui faire correspondre une marche aléatoire renforcée par arêtes orientées, mais où le renforcement ne sera plus linéaire. La réciproque est également vraie, sous quelques conditions sur la loi de renforcement. Dans toute la suite, sauf indication contraire, on supposera désormais que $\alpha_{(x, x+e_i)} = \alpha_i$ ne dépend pas du choix de x (attention par contre $\omega_{(x, x+e_i)}$ dépend toujours du choix de x).

3 Résultats généraux en dimension 1

Dans cette section, on va s'intéresser au cas général des marches aléatoires en milieu aléatoire sur \mathbb{Z} . Les questions de récurrence/transience et de balisticité qui nous intéressent dans le cas des environnements de Dirichlet sont en effet bien comprises dans le cas général, et il n'est donc pas nécessaire de les traiter en particulier. La question de la récurrence a été résolue par Solomon en 1975 [19], et fait intervenir l'espérance du log de la quantité $\rho_x(\omega) = \frac{\omega(x, -1)}{\omega(x, 1)}$ qui est déterminante ici, où on a noté $\omega(x, 1) = \omega_{(x, x+e_1)}$ et $\omega(x, -1) = \omega_{(x, x-e_1)}$.

Théorème 3.1 (Solomon). *Soit X_n une marche aléatoire en milieu aléatoire i.i.d. définie par la loi μ sur \mathbb{Z} , on a la caractérisation suivante si $\mathbb{E}_\mu[\log(\rho_0)]$ est bien définie :*

- Si $\mathbb{E}_\mu[\log(\rho_0)] > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = -\infty$ P_0 p.s.
- Si $\mathbb{E}_\mu[\log(\rho_0)] < 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = +\infty$ P_0 p.s.
- Si $\mathbb{E}_\mu[\log(\rho_0)] = 0$, alors $\limsup_{n \rightarrow +\infty} X_n = +\infty$ P_0 p.s. et $\liminf_{n \rightarrow +\infty} X_n = -\infty$ P_0 p.s.

Instinctivement ce résultat est assez intuitif : si $\mathbb{E}_\mu[\log(\rho_0)] > 0$, alors on a en moyenne plus de chance d'aller à gauche qu'à droite, donc X_n va tendre vers $-\infty$. La démonstration de ce résultat consiste à exhiber une bonne martingale dont on peut prouver la convergence sous l'hypothèse $\mathbb{E}_\mu[\log(\rho_0)] > 0$ grâce au théorème de convergence des martingales de Doob, et en déduire la convergence de X_n . Ce théorème permet bien de résoudre la question de la récurrence et de la transience des marches aléatoires en milieu aléatoire sur \mathbb{Z} . On rappelle qu'on dit qu'une chaîne de Markov est transiente si $P_0(H_0^+ < \infty) < 1$ et récurrente sinon, où H_0^+ est le premier temps de

retour en 0. Ici si $\mathbb{E}_\mu[\log(\rho_0)]=0$ la marche aléatoire est récurrente, c'est à dire que la chaîne de Markov pour la loi quenched est récurrente pour μ presque tout ω , et sinon elle est transiente.

Dans le cas particulier de la marche aléatoire en environnement de Dirichlet sur \mathbb{Z} de paramètre α , et donc dans le cas de la marche aléatoire renforcée linéairement par arêtes orientées sur \mathbb{Z} , on peut réécrire ce résultat de la façon suivante : si $\alpha_1 > \alpha_{-1}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = +\infty$ P_0 p.s. et si $\alpha_1 < \alpha_{-1}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = -\infty$ P_0 p.s. Si $\alpha_1 = \alpha_{-1}$, la marche aléatoire est récurrente.

Il faut tout de même faire attention aux raccourcis : il est possible que $\mathbb{E}_\mu[\omega(x, 1)] > \mathbb{E}_\mu[\omega(x, -1)]$ tout en ayant quand même $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = -\infty$ P_0 p.s. Par exemple, on peut prendre μ_0 tel que $\omega(x, 1)$ vaille $\frac{5}{6}$ avec proba $\frac{3}{4}$ et ε avec proba $\frac{1}{4}$, et vérifier que $\mathbb{E}_\mu[\omega(x, 1)] > \mathbb{E}_\mu[\omega(x, -1)]$ et $\mathbb{E}_\mu[\log(\rho_0)] > 0$ pour ε assez petit. On peut le comprendre en voyant les points où $\omega(x, 1)$ vaut ε comme des barrières difficiles à franchir. Néanmoins, cela est impossible dans le cas des environnements de Dirichlet d'après ce qu'on vient de voir.

D'autres résultats sur la vitesse de convergence de X_n ont également été obtenus par Solomon dans [19].

Théorème 3.2 (Solomon). *Soit X_n une marche aléatoire en milieu aléatoire i.i.d. définie par la loi μ sur \mathbb{Z} . On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_n}{n} = v$ P_0 p.s., avec*

- $v = \frac{1 - \mathbb{E}_\mu[\rho_0]}{1 + \mathbb{E}_\mu[\rho_0]}$ si $\mathbb{E}_\mu[\rho_0] < 1$
- $v = \frac{\mathbb{E}_\mu[(\rho_0)^{-1}] - 1}{1 + \mathbb{E}_\mu[(\rho_0)^{-1}]}$ si $\mathbb{E}_\mu[(\rho_0)^{-1}] < 1$
- $v = 0$ sinon.

La démonstration de ce théorème, qui ne sera pas faite en détail ici mais qui peut par exemple être trouvée dans [20], repose sur l'idée de l'environnement vu du point de vue de la particule, qui sera développée plus en détail dans la section 6. On peut encore appliquer ce résultat aux environnements de Dirichlet, avec $\mathbb{E}^{(\alpha)}[\rho_0] = \frac{\alpha-1}{\alpha_1-1}$ et $\mathbb{E}^{(\alpha)}[(\rho_0)^{-1}] = \frac{\alpha_1}{\alpha-1}$.

4 Transience en dimension ≥ 3

4.1 Preuve de la transience

Dans cette partie nous allons démontrer que les marches aléatoires en environnement de Dirichlet sur \mathbb{Z}^d sont transientes en dimension ≥ 3 , comme c'est le cas pour la marche aléatoire simple. Plusieurs résultats plus généraux ont été trouvés sur la récurrence et la transience des marches aléatoires en milieu aléatoire sur \mathbb{Z}^d , mais aucun ne permet de conclure sur l'environnement de Dirichlet, notamment car celui-ci est non uniformément elliptique, c'est à dire que les ω_e peuvent être aussi petits que l'on veut. Pour étudier la transience, on va s'intéresser à la fonction de Green $G_\omega(x, y) = \mathbb{E}_{x, \omega} [\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{X_k=y}]$ qui est le nombre moyen de passages par $y \in \mathbb{Z}^d$ quand on part de x sous la loi quenched et au temps de premier retour en x_0 $H_{x_0}^+ = \inf\{n > 0, X_n = x_0\}$. Une autre caractérisation de la transience pour la loi quenched est que $G_\omega(0, 0) < \infty$, et on dit que la marche aléatoire en environnement de Dirichlet est transiente si elle l'est pour $P^{(\alpha)}$ presque tout environnement ω .

Théorème 4.1 (Sabot). *Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ la marche aléatoire en environnement de Dirichlet sur \mathbb{Z}^d , $d \geq 3$, de paramètre α . On a*

$$\forall x_0 \in V, P_{x_0}^{(\alpha)}(H_{x_0}^+ = \infty) > 0.$$

En particulier, pour $P^{(\alpha)}$ p.s. tout environnement ω , la chaîne de Markov sous la loi quenched $P_{x_0, \omega}$ est transiente.

La preuve de ce théorème se fait en deux parties : dans un premier temps, on va essayer de trouver un bon minorant pour la probabilité du temps de premier retour en x_0 dans le cas d'un sous graphe fini G_N de \mathbb{Z}^d , puis on va prouver que ce minorant converge bien quand G_N croit vers \mathbb{Z}^d tout entier. Dans la suite, on note $G_N = (B(x_0, N) \cup \partial, E_N)$ le sous-graphe de \mathbb{Z}^d où les arêtes sont les mêmes que celles de \mathbb{Z}^d quand on reste dans $B_N := B(x_0, N)$, où on ne tient pas compte des arêtes qui rentrent dans B_N dans \mathbb{Z}^d , et où les arêtes qui sortent de B_N dans \mathbb{Z}^d pointent toutes vers ∂ , qui est appelé point cimetièrre de G_N car il n'a aucune arête sortante. L'idée pour majorer la fonction de Green va d'être utiliser un lemme appelé lemme fondamental par la suite, qui resservira pour d'autres preuves :

Lemme 4.2. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une marche aléatoire en environnement de Dirichlet sur un graphe $G=(V, E)$ fini et fortement connexe de paramètre $\alpha = (\alpha_e)_{e \in E}$ vérifiant

$$\forall x \in V, \operatorname{div}(\alpha)(x) := \sum_{e | \underline{e}=x} \alpha_e - \sum_{e | \bar{e}=x} \alpha_e = 0$$

où \underline{e} est le sommet duquel part e et \bar{e} le sommet auquel arrive. Si l'environnement ω est fixé, on définit de plus $\pi^\omega = (\pi_x^\omega)_{x \in V}$ la probabilité invariante sous la loi quenched de la chaîne de Markov pondérée par ω , qui existe car G est fini, et

$$\check{\omega}_{\check{e}} = \frac{\pi_{\underline{e}}^\omega}{\pi_{\bar{e}}^\omega} \omega_e$$

avec la notation $\check{e} = (y, x)$ si $e = (x, y)$ est l'arête inversée. On peut vérifier que $\check{\omega}_{(x, \cdot)}$ est bien une probabilité sur les arêtes partant de x dans le graphe inversé \check{G} , c'est à dire le graphe avec les mêmes sommets que G mais les arêtes inversées. On peut donc définir une marche aléatoire sur ce nouveau graphe pondéré, qu'on notera $(\check{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Cette marche aléatoire est une marche aléatoire en environnement de Dirichlet sur \check{G} de paramètre $\check{\alpha} = (\alpha_{\check{e}})_{\check{e} \in \check{E}}$.

Il existe deux façons de prouver ce lemme : une façon probabiliste qu'on peut trouver dans [17] ou une preuve plus analytique qu'on peut trouver dans [15]. Notons $\Sigma = \{\sigma \text{ chemin sur } E_N \text{ tel que } \exists n \in \mathbb{N} \underline{\sigma}_0 = x_0, \bar{\sigma}_n = \partial, \text{ et } \forall k \in \{1, \dots, n\}, \bar{\sigma}_{k-1} = \underline{\sigma}_k \text{ et } \underline{\sigma}_k \notin \{x_0, \partial\}\}$, l'ensemble des chemins reliant x_0 à ∂ sans repasser par x_0 , et pour $\sigma \in \Sigma$, on note $\forall \omega \in \Omega, \omega_\sigma = \prod_{i=0}^n \omega_{\sigma_i}$. On note $H_\partial = \inf\{n \geq 0, X_n = \partial\}$ et on a alors

$$P_{x_0, \omega}(H_\partial < H_{x_0}^+) = \sum_{\sigma \in \Sigma} \omega_\sigma.$$

On voudrait utiliser le lemme fondamental mais on ne peut le faire directement sur G_N puisque celui-ci ne vérifie pas la propriété $\operatorname{div}(\alpha)(x) = 0$, par exemple en ∂ qui n'a que des arêtes entrantes. On modifie G_N de la façon suivante : on va supposer par la suite que $\operatorname{div}(\alpha)(x_0) > 0$ et $\operatorname{div}(\alpha)(x) = 0$ pour tout x dans B_N , et on ne verra pas ici pourquoi on peut faire ces hypothèses. On identifie alors x_0 et ∂ en un nouveau point δ de sorte que la propriété $\operatorname{div}(\alpha)(x) = 0$ pour tout x soit bien vérifiée. On peut alors sur ce dernier graphe appliquer le lemme fondamental.

On note E_δ l'ensemble des arêtes arrivant en δ qui correspondent aux arêtes qui arrivent sur ∂ dans G_N , et on note E_{x_0} l'ensemble des arêtes arrivant en δ qui correspondent aux arêtes qui arrivent sur x_0 dans G_N . Comme σ est maintenant un cycle, on a $\omega_\sigma = \omega_{\bar{\sigma}} = \check{\omega}_{\check{\sigma}}$ pour tout σ dans Σ . Comme il n'y a pas d'arêtes arrivant en δ qui étaient des arêtes arrivant en ∂ sur \check{G}_N ,

$\tilde{\Sigma}$ est l'ensemble des chemins partant de δ par \check{E}_δ et arrivant en δ . Par le lemme fondamental, la loi de $P_{x_0, \omega}(H_\delta < H_{x_0}^+)$ sous $P^{(\alpha)}$ est la même sous $P^{(\check{\alpha})}$ sur \check{G}_N que

$$\sum_{\sigma \in \tilde{\Sigma}} \omega_\sigma = \sum_{e \in \check{E}_\delta} \omega_e$$

qui a pour loi Bêta($\sum_{e \in E_\delta} \alpha_e, \sum_{e \in E_{x_0}} \alpha_e$).

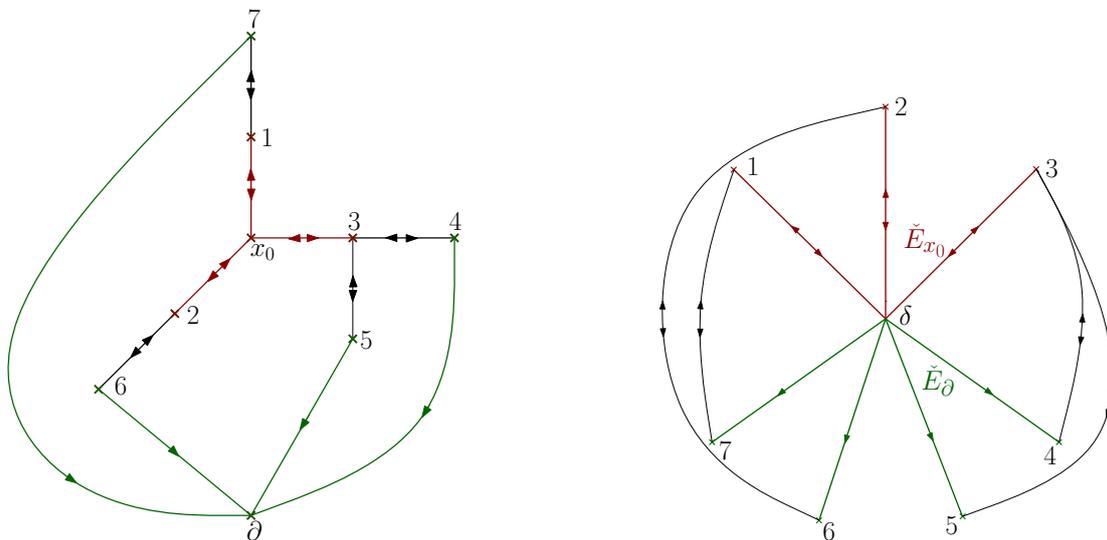


FIGURE 1 – Un exemple du changement de graphe effectué

Pour conclure, il faut utiliser des techniques de type flot de carré intégrable sur \mathbb{Z}^d pour montrer qu'une telle loi bêta est bien intégrable même quand N tend vers l'infini, ce qui n'est possible qu'en dimension ≥ 3 .

4.2 Étude de la vitesse de Transience

On sait désormais que la marche aléatoire en environnement de Dirichlet est transiente en dimension ≥ 3 . Pour s'interroger sur la vitesse de transience, on va chercher à calculer les moments de la fonction de Green, ce que Sabot a fait dans [15]

Théorème 4.3 (Sabot). *Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ la marche aléatoire en environnement de Dirichlet sur \mathbb{Z}^d , $d \geq 3$, de paramètre $\alpha = (\alpha_i)_{i=1, \dots, 2d}$, on a alors*

$$\forall x_0 \in \mathbb{Z}^d, \forall s < \kappa, \mathbb{E}^{(\alpha)}[G_\omega(x_0, x_0)^s] < \infty \text{ et } \forall s \geq \kappa, \mathbb{E}^{(\alpha)}[G_\omega(x_0, x_0)^s] = \infty$$

où

$$\kappa = 2 \sum_{j=1}^d (\alpha_j + \alpha_{-j}) - \max_{i \in \{1, \dots, d\}} (\alpha_i + \alpha_{i+d})$$

Ce résultat est principalement tiré de techniques d'optimisation sur les flots à l'aide du théorème max-flow min-cut. La partie étonnante est qu'en réalité il n'existe que des pièges finis (et même de taille 2), c'est à dire des ensembles sur lesquels la marche reste longtemps. En effet on a le théorème suivant dû à Tournier dans [23].

Théorème 4.4 (Tournier). *Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une marche aléatoire en environnement de Dirichlet de paramètre $\alpha = (\alpha_i)_{i=1, \dots, 2d}$ sur \mathbb{Z}^d et soit j qui réalise le maximum de $\max_{i \in \{1, \dots, d\}} (\alpha_i + \alpha_{i+d})$. Soit $K = \{x_0, x_0 + e_j\}$, on note $G_\omega^K(x_0, x_0)$ le nombre moyen de retours en x_0 avant de quitter K sous la loi quenched, et on a alors*

$$s \geq \kappa \Rightarrow \mathbb{E}^{(\alpha)}[G_\omega^K(x_0, x_0)^s] = \infty.$$

Par conséquent, quand les moments de la fonction de Green sont infinis, cela est uniquement dû au fait qu'elle reste longtemps dans un piège de taille 2, et il semblerait donc qu'il n'y ait pas de pièges infinis. Ce κ est donc bien une quantité pertinente à considérer pour les marches aléatoires en environnement aléatoire, d'autant plus qu'on verra qu'il intervient également dans les questions de balisticité.

5 Existence d'une direction asymptotique en dimension ≥ 2

5.1 Étude du cas général

Nous allons ici nous intéresser à un résultat prouvé par Simenhaus dans [18] et amélioré par la suite par Drewitz et Ramirez dans [6]. Celui-ci stipule que sur \mathbb{Z}^d , sous condition de l'existence de directions dans lesquels la marche aléatoire est transiente, on a des directions asymptotiques, c'est à dire que $\frac{X_n}{\|X_n\|}$ converge, et donne de plus une caractérisation de ces directions asymptotiques. Dans la suite, on dit que la marche aléatoire en milieu aléatoire $(X_n)_{n \geq 0}$ est transiente dans la direction l avec probabilité 1 si l'évènement

$$A_l = \{X_n \cdot l \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty\}$$

arrive presque sûrement. Si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une marche aléatoire en milieu aléatoire i.i.d. définie par la loi μ , on dit que μ est elliptique (resp. strictement elliptique) si elle vérifie

$$\mu_x(\omega_e = 0) = 0 \text{ (resp. } \exists \kappa > 0 \text{ tel que } \mu_x(\omega_e < \kappa) = 0)$$

pour toute arête e partant de $x \in \mathbb{Z}^d$.

Théorème 5.1. *Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une marche aléatoire en milieu aléatoire i.i.d. définie par une loi μ elliptique sur \mathbb{Z}^d , $d \geq 2$ telle qu'il existe un ouvert O de \mathbb{Z}^d tel que pour tout $l \in O$, A_l soit de probabilité 1. Alors, $\exists v \in S^{d-1}$ tel que P_0 p.s.*

$$\frac{X_n}{\|X_n\|} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} v.$$

De plus, pour $l \in \mathbb{Z}^d$, si $l \cdot v > 0$, $P_0(A_l) > 0$.

On peut désormais s'interroger sur l'existence de conditions pour que A_l ait une probabilité strictement positive. Les travaux de Kalikow dans [10] puis de Sznitman et Zerner dans [21] et de Merkle et Zerner dans [25] ont montré que sous la condition d'ellipticité l'évènement $A_l \cup A_{-l}$ arrivait avec probabilité 0 ou 1. L'existence ou non d'une loi du 0-1 pour l'évènement A_l seul est encore inconnu, même si Merkle et Zerner ont montré dans [25] que cela était vrai en dimension 2.

Théorème 5.2 (Kalikow, Merkle, Sznitman, Zerner). *Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une marche aléatoire en milieu aléatoire i.i.d. définie par une loi μ elliptique sur \mathbb{Z}^d , $d \geq 2$ et soit $l \in \mathbb{R}^d$. On a alors*

$$P_0(A_l \cup A_{-l}) \in \{0, 1\}.$$

De plus, si $d=2$, on a $P_0(A_l) \in \{0, 1\}$.

5.2 Application au cas particulier de l'environnement de Dirichlet

Ici on va essayer d'appliquer le théorème 5.1 au cas des environnements de Dirichlet. Pour cela il faut essayer de trouver des directions dans lesquels la marche aléatoire en environnement de Dirichlet est transiente, ce qui a d'abord été fait par Sabot et Tournier dans [17] dans le cas des directions qui sont des vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^d , puis par Tournier dans [22] dans le cas des directions générales.

Théorème 5.3 (Sabot, Tournier). *Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ la marche aléatoire en environnement de Dirichlet sur \mathbb{Z}^d , $d \geq 2$ de paramètre $\alpha = (\alpha_i)_{i \in 1, \dots, 2d}$, et soit $\Delta = \mathbb{E}^{(\alpha)}[X_1] = \sum_{i=1}^d (\alpha_i - \alpha_{-i})e_i$. Si $\Delta \neq 0$ alors pour tout $l \in \mathbb{R}^d$ tel que $l \cdot \Delta > 0$, $P_0(A_l) > 0$.*

La preuve de ce résultat repose à nouveau sur l'utilisation du lemme fondamental sur un sous-graphe fini bien choisi de \mathbb{Z}^d . De plus, en utilisant ce résultat, Bouchet a par la suite prouvé dans [2] qu'on avait en réalité $P_0(A_l) = 1$ pour $l \cdot \Delta > 0$ en utilisant une accélération de la marche aléatoire en environnement de Dirichlet en dimension $d \geq 3$, et le théorème 5.2 nous dit que cela reste vrai en dimension 2. Par conséquent, il est bien possible d'appliquer le théorème 5.1 au cas des environnements de Dirichlet :

Théorème 5.4 (Bouchet, Tournier). *Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ la marche aléatoire en environnement de Dirichlet sur \mathbb{Z}^d , $d \geq 2$ de paramètre $\alpha = (\alpha_i)_{i \in 1, \dots, 2d}$. Si $\Delta \neq 0$ alors $P_0^{(\alpha)}$ p.s.*

$$\frac{X_n}{\|X_n\|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta}{\|\Delta\|}.$$

6 Balisticité et sous-balisticité en dimension ≥ 3

On peut désormais se demander à quelle vitesse $\|X_n\|$ grandit, c'est à dire à quelle vitesse la marche aléatoire s'éloigne de l'origine dans le cas où $\Delta \neq 0$. On dira par la suite que la marche est balistique si $\frac{X_n}{n}$ converge vers un élément de \mathbb{Z}^d non nul, et sous balistique si elle converge vers 0. Le cas balistique a été résolu par Sabot dans [14] qui montre la balisticité sous certaines conditions

Théorème 6.1. *Si $\kappa > 1$ et $d \geq 3$, $\exists v \in]0; 1]$ tel que, $P_0^{(\alpha)}$ p.s,*

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v\Delta.$$

La preuve de ce théorème est principalement due à la notion de processus de l'environnement vu de la particule, comme pour le théorème 3.2. Celui-ci est défini par

$$\bar{\omega}_n = \tau_{X_n} \omega$$

où $\tau_z \omega_{(x,y)} = \omega_{(x+z,y+z)}$, $(x,y,z) \in (\mathbb{R}^d)^3$. Ici, on a translaté l'environnement ω pour qu'il apparaisse centré en X_n , d'où le nom "environnement vu de la particule". L'avantage de ce processus est qu'il s'agit d'un processus de Markov, c'est à dire que le futur ne dépend que du présent et non du passé, que ce soit par rapport à la loi quenched $P_{x,\omega}$ ou par rapport à la loi annealed $P_x^{(\alpha)}$. Instinctivement, cela se comprend car la connaissance du passé ne va pas nous donner plus d'information que le présent car on connaît déjà l'environnement choisi par la simple connaissance du présent. Le but va être de trouver une mesure invariante pour le processus vu du point de vue de la particule, de façon à pouvoir appliquer le théorème de Birkhoff.

Lemme 6.2. *Si $\kappa > 1$, il existe une unique probabilité invariante pour le processus de l'environnement vu de la particule qui est absolument continue par rapport à $P^{(\alpha)}$, π . De plus π et $P^{(\alpha)}$ sont en réalité équivalentes.*

On ne donnera pas la preuve de ce lemme ici, mais il est fortement similaire à celui du théorème 4.3 puisqu'on va encore appliquer le lemme fondamental à un sous-graphe fini avant de faire croître ce graphe vers \mathbb{Z}^d tout entier. Pour finir la preuve du théorème 6.1, il suffit d'appliquer le théorème de Birkhoff à $\Delta_i = X_{i+1} - X_i$ car le fait que π soit invariante implique que Δ_i est ergodique, ce qui nous dit que

$$P_{0,\omega} \left(\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}^\pi [\mathbb{E}_{0,\omega}[X_1]] \right) = 1$$

π p.s. Comme π et $P^{(\alpha)}$ sont équivalentes, ce résultat reste valable $P^{(\alpha)}$ p.s. En combinant ce résultat avec celui du théorème 5.4, on obtient bien le résultat attendu.

Le cas sous-balistique a été dans un premier temps étudié par Tournier dans [23], et il s'agit d'une simple conséquence de l'existence de pièges finis (cf théorème 4.4).

Proposition 6.3. *Si $\kappa \leq 1$ (cf théorème 4.3 pour la définition de κ),*

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

La question suivante est celle de la vitesse de convergence pour $\kappa \leq 1$. En utilisant la même technique d'accélération de la marche aléatoire en environnement de Dirichlet que pour montrer qu'on a transience directionnelle p.s., Bouchet a répondu à cette question dans [2]

Théorème 6.4. *Supposons que $\kappa \leq 1$, $d \geq 3$ et $\Delta \neq 0$. On a alors pour tout direction l telle que $l \cdot \Delta > 0$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(X_n \cdot l)}{\log(n)} = \kappa P_0^{(\alpha)} \text{ p.s.}$$

Conclusion

Ces dix dernières années ont permis de mieux comprendre les marches aléatoires renforcées linéairement par arêtes orientées, notamment les questions de transience, de direction asymptotique et de balisticité. Néanmoins, il existe plusieurs questions qui restent ouvertes. La première et la plus importante est celle de la dimension 2. En effet, on ignore encore si la récurrence de la marche aléatoire simple reste vraie pour la marche aléatoire renforcée, même si Tournier et Sabot ont montré dans [16] à l'aide des mêmes techniques que pour la dimension 3 qu'elle avait tendance à être plus transiente que la marche simple. On peut également se demander si les questions de balisticité restent vrai en dimension 2, et si le paramètre κ y joue un rôle important. Enfin, pour $\kappa \leq 1$, le résultat de Bouchet sur la sous-balisticité dans [2] n'est pas complet, et on peut se demander si $\|X_n\|$ évolue bien à la vitesse n^κ .

Il existe également de nombreuses questions non résolues pour les marches aléatoires en milieu aléatoire dans le cadre général. Par exemple, on ignore toujours si $P_0(A_l)$ vaut toujours 0 ou 1 en dimension ≥ 3 , notamment dans le cas uniformément elliptique. De plus, on ne sait pas toujours dans ce cadre si la transience directionnelle implique balisticité. Beaucoup de travaux ont été fait dans ce domaine, notamment par Snitzmann et Zerner (cf par exemple [21] ou [24]) ou plus récemment par Berger, Drewitz et Ramirez dans [1].

Références

- [1] Noam BERGER, Alexander DREWITZ et Alejandro F. RAMÍREZ. « Effective polynomial ballisticity conditions for random walk in random environment ». In : *Comm. Pure Appl. Math.* 67.12 (2014), p. 1947–1973. ISSN : 0010-3640. DOI : 10.1002/cpa.21500. URL : <http://dx.doi.org/10.1002/cpa.21500>.
- [2] Élodie BOUCHET. « Sub-ballistic random walk in Dirichlet environment ». In : *Electron. J. Probab.* 18 (2013), no. 58, 25. ISSN : 1083-6489. DOI : 10.1214/EJP.v18-2109.
- [3] David CAMPOS et Alejandro F. RAMÍREZ. « Ellipticity criteria for ballistic behavior of random walks in random environment ». In : *Probab. Theory Related Fields* 160.1-2 (2014), p. 189–251. ISSN : 0178-8051. DOI : 10.1007/s00440-013-0527-7.
- [4] A. A. CHERNOV. « Reduplication of a multicomponent chain by the mechanism of "lightning" ». In : *Biophysica* 12 (1967), p. 297–301.
- [5] P. DIACONIS. « Recent progress on de Finetti's notions of exchangeability ». In : *Bayesian statistics, 3 (Valencia, 1987)*. Oxford Sci. Publ. Oxford Univ. Press, New York, 1988, p. 111–125. URL : http://statweb.stanford.edu/~cgates/PERSI/papers/recent_progress.pdf.
- [6] Alexander DREWITZ et Alejandro F. RAMÍREZ. « Asymptotic direction in random walks in random environment revisited ». In : *Braz. J. Probab. Stat.* 24.2 (2010), p. 212–225. ISSN : 0103-0752. DOI : 10.1214/09-BJPS028.
- [7] Nathanaël ENRIQUEZ et Christophe SABOT. « Edge oriented reinforced random walks and RWRE ». In : *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 335.11 (2002), p. 941–946. ISSN : 1631-073X. DOI : 10.1016/S1631-073X(02)02580-3. URL : <http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/enriquez/PUB/CRAS.pdf>.
- [8] Nathanaël ENRIQUEZ, Christophe SABOT et Olivier ZINDY. « Limit laws for transient random walks in random environment on \mathbb{Z} ». In : *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 59.6 (2009), p. 2469–2508. ISSN : 0373-0956. DOI : 10.5802/aif.2497.
- [9] Barry D. HUGHES. *Random walks and random environments. Vol. 1*. Oxford Science Publications. Random walks. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995, p. xxii+631. ISBN : 0-19-853788-3.
- [10] Steven A. KALIKOW. « Generalized random walk in a random environment ». In : *Ann. Probab.* 9.5 (1981), p. 753–768. ISSN : 0091-1798. DOI : 10.1214/aop/1176994306.
- [11] H. KESTEN, M. V. KOZLOV et F. SPITZER. « A limit law for random walk in a random environment ». In : *Compositio Math.* 30 (1975), p. 145–168. ISSN : 0010-437X. URL : <https://eudml.org/doc/89251>.
- [12] Robin Alexander PEMANTLE. *Random processes with reinforcement*. Thesis (Ph.D.) – Massachusetts Institute of Technology. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1988, (no paging).
- [13] G. POLYA et F. EGGENBERGER. « Über die Statistik Verketter Vorgänge ». In : *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 3 (1923), p. 279–289.
- [14] Christophe SABOT. « Random Dirichlet environment viewed from the particle in dimension $d \geq 3$ ». In : *Ann. Probab.* 41.2 (2013), p. 722–743. ISSN : 0091-1798. DOI : 10.1214/11-AOP699. URL : <http://arxiv.org/abs/1007.2565v3>.
- [15] Christophe SABOT. « Random walks in random Dirichlet environment are transient in dimension $d \geq 3$ ». In : *Probab. Theory Related Fields* 151.1-2 (2011), p. 297–317. ISSN : 0178-8051. DOI : 10.1007/s00440-010-0300-0. URL : <http://arxiv.org/abs/0811.4285>.

- [16] Christophe SABOT et Laurent TOURNIER. « Random walks in Dirichlet Environment, an Overview ». In : *Unpublished* (2015).
- [17] Christophe SABOT et Laurent TOURNIER. « Reversed Dirichlet environment and directional transience of random walks in Dirichlet environment ». In : *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* 47.1 (2011), p. 1–8. ISSN : 0246-0203. DOI : 10.1214/09-AIHP344.
- [18] François SIMENHAUS. « Asymptotic direction for random walks in random environments ». In : *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* 43.6 (2007), p. 751–761. ISSN : 0246-0203. URL : <http://arxiv.org/abs/math/0512388>.
- [19] Fred SOLOMON. « Random walks in a random environment ». In : *Ann. Probability* 3 (1975), p. 1–31. DOI : 10.1214/aop/1176996444.
- [20] Alain-Sol SZNITMAN. « Topics in random walks in random environment ». In : *School and Conference on Probability Theory*. ICTP Lect. Notes, XVII. Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2004, 203–266 (electronic). URL : http://users.ictp.it/~pub_off/lectures/lns017/Sznitman/Sznitman.pdf.
- [21] Alain-Sol SZNITMAN et Martin ZERNER. « A law of large numbers for random walks in random environment ». In : *Ann. Probab.* 27.4 (1999), p. 1851–1869. ISSN : 0091-1798. DOI : 10.1214/aop/1022874818.
- [22] Laurent TOURNIER. « Asymptotic direction of random walks in Dirichlet environment ». 2012. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00701968>.
- [23] Laurent TOURNIER. « Integrability of exit times and ballisticity for random walks in Dirichlet environment ». In : *Electron. J. Probab.* 14 (2009), no. 16, 431–451. ISSN : 1083-6489. DOI : 10.1214/EJP.v14-609.
- [24] Martin P. W. ZERNER. « A non-ballistic law of large numbers for random walks in i.i.d. random environment ». In : *Electron. Comm. Probab.* 7 (2002), 191–197 (electronic). ISSN : 1083-589X. DOI : 10.1214/ECP.v7-1060. URL : <http://dx.doi.org/10.1214/ECP.v7-1060>.
- [25] Martin P. W. ZERNER et Franz MERKL. « A zero-one law for planar random walks in random environment ». In : *Ann. Probab.* 29.4 (2001), p. 1716–1732. ISSN : 0091-1798. DOI : 10.1214/aop/1015345769.