# INTRODUCTION AU DOMAINE DE RECHERCHE: THEORIES COHOMOLOGIQUES DES CHAMPS ET ESPACES DE MODULES
## Encadrant: Dimitri Zvonkine (UPMC)

Simone Melchiorre Chiarello

Juin 2015

## Contents



# 1 Introduction

Cette introduction au domaine de recherche veut illustrer quelque aspect de la théorie des espaces de modules, qui sont des objets très importants dans la géométrie algébrique moderne. Étant donnée une catégorie $\mathcal{C}$ d'objets géométriques (comme les surfaces de Riemann, les fibrés sur une courbe algébrique, etc.) un espace de modules de $\mathcal{C}$ est, grosso modo, un objet géométrique $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ qui paramètre les objets de $\mathcal{C}$; ça veut dire que les objets de $\mathcal{C}$ correspondent de façon naturelle aux points de $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$.

Le "problème des modules" consiste en donner les conditions pour qu'un espace de modules existe, et en étudier les caractéristiques fondamentales. On a une bonne solution à ce problème lorsque $\mathcal{C}$ est la catégorie des courbes complexes modulo isomorphisme: la prémière section est consacrée à illustrer en façon naïve son espace de modules et des structures algébriques sur son anneau de cohomologie, c'est-à-dire les *théories cohomologiques des champs*.

La deuxième section décrit autres cas où le problème des modules peut être resolu, c'est-à-dire quand $\mathcal{C}$ est respectivement l'ensemble des sous-schémas de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n$, l'ensemble des fibrés vectoriels stables sur une certaine courbe projective lisse, et l'ensemble des quotients d'un faisceau cohérent sur une courbe projective.

Résoudre le problème des modules, quand possible, est en général très difficile. Aussi, les espaces de modules qui ont été decouverts ont souvent une structure géométrique riche et compliquée, sur laquelle beaucoup de recherches sont addressées actuellement. La conclusion de cette introduction cite des cas où on a encore beaucoup à découvrir.

# 2 Théories cohomologiques des champs

## 2.1 Les espaces $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$

Les espaces de modules, depuis les prémiers théorèmes de construction de Grothendieck en [9], sont des objets devenus désormais fondamentaux dans la géométrie algébrique. Il s'agit toujours d'essayer à représenter certains foncteurs, qui décrivent des familles d'objets sur une variété fixé.

Un cas parmi les plus importants est l'*espace de modules des courbes stables*, qui on va introduire en suivant les notes [20]. Pour un traitement général du problème des modules, ainsi que de la signification du terme "stable", voir [16].

**Définition 1.** Soient $g$ et $n$ deux entiers. Une *surface de Riemann stable de genre $g$ avec $n$ points marqués* est une surface de Riemann compacte $C$ de genre $g$ avec un choix de $n$ points distincts $x_1, \ldots, x_n \in C$, telle qu'on n'a qu'un nombre fini d'automorphismes de $C$ qui laissent les points $x_i$ fixés. Deux surfaces de Riemann stables $(C, x_1, \ldots, x_n)$ et $(D, y_1, \ldots y_n)$ sont dites *équivalentes* si il existe un isomorphisme de surfaces de Riemann $f : C \to D$ tel que $f(x_i) = y_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

À chaque surface de Riemann stable $C$ est associé son groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(C)$, qui est fini par définition.

**Définition 2.** Soit $2g - 2 + n > 0$. On appelle $\mathcal{M}_{g,n}$ l'ensemble des classes d'équivalence de surfaces de Riemann stables de genre $g$ avec $n$ points marqués.

On peut montrer que $\mathcal{M}_{g,n}$ est un *orbifold*, c'est-à dire un ensemble qui, localement, est un quotient d'une variété complexe pour une action d'un groupe fini. Le sens précis de cette notion est bien au-delà de cette exposition; pour un traitement plus complet, voir [20]. La *dimension* de $\mathcal{M}_{g,n}$ est, par définition, la dimension complexe de la variété complexe dont il est quotient, et on peut montrer que on a $\dim \mathcal{M}_{g,n} = 3g - 3 + n$, qui est donc positive par définition.

**Exemple 1.** On considère le cas $g = 0$. Un théorème bien connu de géométrie algébrique dit qu'une courbe projective lisse de genre 0 est isomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Pour que $(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), x_1, \ldots, x_n)$ soit stable, il faut qu'il n'existe qu'un nombre fini d'automorphismes de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, c'est-à dire de transformations projectives qui laissent les points $x_i$ fixés. Un théorème de géométrie projective assure que c'est le cas si et seulement si $n \geq 3$.

Si $n = 3$, on sait que choisir 3 points distincts sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ équivaut à choisir ses coordonnées projectives, et qu'il existe toujours une transformation projective qui envoit trois points distincts dans trois autres points distincts. En regardant la Définition 2, on découvre que $\mathcal{M}_{0,3}$ consiste d'un seul point.

Si $n > 3$ on peut, par le raisonnement précédent, supposer que les positions des trois premiers points marqués sont fixées. Comme une transformation projective qui fixe trois points distincts sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ doit être l'identité, on est libre de choisir les autres points, et pour choix differents on obtient des courbes qui ne sont pas isomorphes. Donc on a $\mathcal{M}_{0,n} \simeq (\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus S)^{n-3} \setminus D$ où $S$ est un ensemble quelconque de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ qui consiste de trois points distincts, et $D$ est la "grande diagonale" , c'est-à dire l'ensemble des $(n-3)$-uples de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus S$ qui ont au moins deux coordonnées égales.

Ainsi la dimension de $\mathcal{M}_{0,n}$ vaut bien $n - 3$.

**Exemple 2.** On peut montrer, en utilisant la théorie des courbes élliptiques, que $\mathcal{M}_{1,1}$ est isomorphe à $H/\mathrm{SL}(\mathbb{Z}, 2)$, où $H$ est le demi-plan supérieur du plan complexe $\mathbb{C}$. Il a donc dimension complexe 1 et ça verifie une autre fois la formule donnée tout à l'heure.

Un problème des espaces $\mathcal{M}_{g,n}$ c'est, comme on peut constater depuis les exemples, qu'ils ne sont pas, en général, compacts. Pour régler ce problème, il faut sortir du domaine des courbes lisses et considérer les courbes nodales aussi.

**Définition 3.** Une *courbe nodale de genre $g$ avec $n$ points marqués* est une courbe complexe projective de genre arithmétique $g$, qui a seulement des nœuds simples comme singularités, avec $n$ points marqués $x_1, \dots x_n \in C$ distincts entre eux et des nœuds de $C$. Sa *normalisation* est la courbe $C'$ obtenue en normalisant la courbe $C$ et en prenant comme points marqués les pre-images des points marqués et des nœuds de $C$. La courbe $C$ est dite *stable* si sa normalisation $C'$ est une union disjointe de surfaces de Riemann stables dans le sens de la Définition 1.

**Théorème 1.** *Soit $2g - 2 + n > 0$. Il existe un orbifold compact $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, qui contient $\mathcal{M}_{g,n}$ comme sous-orbifold ouvert dense, formé par les classes d'équivalence des courbes stables de genre $g$ avec $n$ points marqués.*

**Définition 4.** L'espace $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ du théorème 1 est appelé la *compactification de Deligne-Mumford* de $\mathcal{M}_{g,n}$.

**Remarque 1.** Ces espaces ont des importantes propriétés géométriques. En recollant, topologiquement, deux courbes stables $C_1 \in \overline{\mathcal{M}}_{g_1,n_1+1}$ et $C_2 \in \overline{\mathcal{M}}_{g_2,n_2+1}$ par les points marqués $n_1 + 1$ et $n_2 + 1$, on obtient une nouvelle courbe stable (jamais lisse) $s(C_1, C_2) \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ où $g = g_1 + g_2$ et $n = n_1 + n_2$. On peut montrer que cette procédure définit un plongement

$$s : \overline{\mathcal{M}}_{g_1,n_1+1} \times \overline{\mathcal{M}}_{g_2,n_2+1} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$$

sur les espaces topologiques sous-jacents, nommé *morphisme de recollement séparant.*

Dans la même façon, on recolle une courbe de $\overline{\mathcal{M}}_{g-1,n+2}$ par les points marqués respectivement $n + 1$ et $n + 2$ pour obtenir un morphisme

$$q : \overline{\mathcal{M}}_{g-1,n+2} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$$

nommé *morphisme de recollement non-séparant.*

Si une courbe nodale $C$ (pas nécessairement stable) est donnée, sa *stabilisation* est la courbe obtenue de $C$ en contractant à un point ses composantes irreductibles qui ne sont pas stables. En oubliant le point marqué $n+1$ sur chaque courbe, et en stabilisant si nécessaire, on obtient un morphisme

$$p : \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$$

nommé *morphisme d'oubli.*

On a aussi une action de $S_n$ sur $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ qui permute les points marqués.

Nous allons décrire dans cette exposition des théories qui ont la cohomologie de l'espace $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ comme objet central. La définition générale de cohomologie, pour les orbifolds, doit contenir en quelque façon l'information de l'action du groupe des automorphismes des objets paramétrés (dans le cas de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, chaque point $C$ est une courbe stable avec un groupe fini $\mathrm{Aut}(C)$ qui agit sur elle). Cette définition est le sujet de plusieurs articles récents et ne sera pas traitée ici. Pourtant, dans le cas où l'anneau des coefficients est un corps de caractéristique zéro, on peut montrer que la cohomologie d'un orbifold est simplement la cohomologie singulière de l'espace topologique sous-jacent. Comme on ne considérera que la cohomologie sur $\mathbb{C}$, on notera $H^\bullet(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ l'anneau de cohomologie, a coefficients complexes, de l'espace topologique sous-jacent à l'orbifold $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$.

On est alors prêt à définir les théories cohomologiques des champs.

**Définition 5.** Soit $A$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathbf{1} \in A$ un vecteur non nul, et $\eta = \eta_{\mu\nu} e^\mu \otimes e^\nu$ une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur $A$ avec bi-vecteur inverse $\eta^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu$. Une *théorie cohomologique des champs* (CohFT pour "Cohomological Field Theory " en anglais) avec base $(A, \eta, \mathbf{1})$ est une famille d'homomorphismes linéaires

$$\overline{\Omega}_{g,n} : A^{\otimes n} \to H^\bullet(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$$

pour tous les nombres entiers $n$, $g$ tels que $3g-3+n \geq 0$, qui vérifient les conditions suivantes:

1. $\overline{\Omega}_{g,n}$ est $S_n$-équivariant pour tout $g$, $n$;
2. $\overline{\Omega}_{0,3}(\mathbf{1} \otimes u \otimes v) = \eta(u, v)$, pour tout $u, v \in A$;
3. $q^* \overline{\Omega}_{g,n}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = \eta^{\mu\nu} \overline{\Omega}_{g-1,n+2}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \otimes e_\mu \otimes e_\nu)$, pour tout $v_1, \ldots, v_n \in A$;
4. $s^* \overline{\Omega}_{g,n}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = \eta^{\mu\nu} \overline{\Omega}_{g_1,n_1+1}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_{n_1} \otimes e_\mu) \times \overline{\Omega}_{g_2,n_2+1}(v_{n_1+1} \otimes \ldots \otimes v_n \otimes e_\nu)$, pour tout $v_1, \ldots, v_n \in A$;
5. $p^* \overline{\Omega}_{g,n}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = \overline{\Omega}_{g,n+1}(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \otimes \mathbf{1})$, pour tout $v_1, \ldots, v_n \in A$.

La somme sur $\mu$ et $\nu$ est toujours sous-entendue, et les morphismes $s$, $q$ et $p$ ainsi que l'action de $S_n$ sur $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ sont définies dans la Remarque 1. Voir [18] pour un excellent traitement de cette définition, ainsi que [19] pour une définition differente mais équivalente.

## 2.2 La cohomologie de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$

Les théories cohomologiques des champs s'avèrent très utiles dans l'étude de l'anneau de cohomologie de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, d'une grande importance en géométrie algérique, en particulier dans la théorie de Gromov-Witten. Commençons pas définir plusieurs classes de cohomologie naturelles.

En assignant à chaque courbe $(C, x_1, \ldots, x_n) \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ la droite complexe cotangente à $C$ au point $x_i$, on obtient un fibré en droites $L_i \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. La *i-ème classe $\psi$* est par définition la première classe de Chern de ce fibré

$$\psi_i := \mathrm{c}_1(L_i) \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}).$$

En prenant le push-forward des puissances de $\psi_{n+1}$ par le morphisme oubli $p : \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \to \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, on obtient les classes $\kappa$:

$$\kappa_m := p_*(\psi_{n+1}^{m+1}) \in H^{2m}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}).$$

En effet, au moins dans le cas semi-simple, les théories cohomologiques des champs ne peuvent avoir que les classes $\psi$ et les classes $\kappa$ dans leur image.

Les théories cohomologiques des champs sont une généralisation de plusieurs constructions typiques en géométrie algébrique. Un exemple est fourni par les invariants de Gromov-Witten.

Les invariants de Gromov-Witten sont liés à la géométrie énumérative des variétés complexes. Plus précisement, si une variété complexe projective $X$ est donnée, on peut se demander combien de courbes projectives $C \to X$ de genre $g$ existent, qui passent par $n$ points $p_1, \ldots, p_n \in X$ donnés. Encore plus généralement, on peut remplacer les points $p_i$ par des cycles $\gamma_i \in Z^{k_i}(X)$; dans ce cas là, on peut montrer que la réponse ne depend que des classes de cohomologie de $\gamma_i$. Le nombre de ces courbes est l'invariant de Gromov-Witten de $X$ de genre $g$, calculé en $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Voir [7] ou [14] pour un traitement des invariants de Gromov-Witten. On peut montrer (voir [14]) que ces invariants peuvent être dérivés d'une particulière théorie cohomologique des champs.

Mais les théories cohomologiques des champs jouent aussi un rôle clef dans l'étude de la théorie de l'intersection des espaces des modules. Par exemple, dans [18], on obtient un ensemble de rélations linéaires entre classes de cohomologie de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, à partir de l'action du groupe de Givental sur les théories cohomologiques des champs. C'est une conjecture que l'ensemble trouvé est tout à fait complet.

## 2.3 Stratégie de la preuve

### 2.3.1 Semi-semplicité

Soit $\Omega_{g,n}$ une théorie cohomologique des champs. Elle définit un produit sur l'espace vectoriel $A$ par la formule

$$\eta(v_1, v_2 \cdot v_3) = \Omega_{0,3}(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3)$$

et on peut montrer que ce produit définit une structure de *algèbre de Frobenius* sur $A$. Cette algèbre est dite *semi-simple* s'il existe une base $(e_\mu)_\mu$ de $A$, orthonormale par rapport à $\eta$, telle que

$$e_\mu \cdot e_\nu = \delta_{\mu\nu} \theta_\mu^{-1} e_\mu$$

pour des nombres complexes non-nuls $\theta_i$. Une CohFT est dite semi-simple si l'algèbre de Frobenius qu'elle définit est semi-simple.

**But 1.** Classifier toutes les théories cohomologiques des champs semi-simples.

Pour faire ça, on suivra l'article de Teleman [19]. Dans la preuve, il faudra agrandir la classe des théories cohomologiques des champs, en considérant aussi des théories sur la partie lisse $\mathcal{M}_{g,n}$ de l'espace de modules, c'est-à dire des homomorphismes $\Omega_{g,n} : A^{\otimes n} \to H^{\bullet}(\mathcal{M}_{g,n})$ qui vérifient des axiomes similaires à ceux donnés dessus. La définition de ces axiomes et la vérification qu'ils sont compatibles avec les axiomes classiques demandent assez d'efforts et peuvent être vues comme un but parallèle.

**But 2.** Définir les théories cohomologiques des champs lisses semi-simples, de telle manière qu'elles soient les restrictions des théories classiques à $\mathcal{M}_{g,n}$, et les classifier.

Pour faire ça, il faut agrandir encore plus la classe des théories cohomologiques des champs. Plus précisement, on considère un fibré en tores

$$\pi : \widetilde{\mathcal{M}}_{g,n} \to \mathcal{M}_{g,n}$$

qui correspond à associer une direction tangente à chaque point marqué sur $\mathcal{M}_{g,n}$. On veut donc des théories cohomologiques des champs sur $\widetilde{\mathcal{M}}_{g,n}$, c'est-à dire des homomorphismes $\widetilde{\Omega}_{g,n} : A^{\otimes n} \to H^{\bullet}(\widetilde{\mathcal{M}}_{g,n})$ qui vérifient des axiomes analogues aux classiques: on les appellera *théories à bords fixés*, et on le distinguera des *théories à bords libres* sur $\mathcal{M}_{g,n}$. On a donc un troisième but.

**But 3.** Définir les théories à bords fixés semi-simples, de telle manière qu'elles soient les pull-back des théories lisses à $\widetilde{\mathcal{M}}_{g,n}$, et les classifier.

On atteindra ces buts en ordre inverse. Le troisième peut être atteint indépendamment des autres, car le fibré $\widetilde{\mathcal{M}}_{g,n}$ a une anneau de cohomologie significativement plus simple que celui de $\mathcal{M}_{g,n}$: toute classe $\psi$ est annulée. Pourtant, on ne peut pas utiliser les axiomes de recollement 3 et 4 de la définition 5 pour définir les théories à bords fixés: le recollement de deux courbes lisses est une courbe nodale. Par ailleurs, on montrera que on peut déformer, de façon continue, le morphisme de recollement $s$ pour obtenir un morphisme de "recollement-lissification " $\sigma$ dont l'image est bien lisse.

**Proposition 1.** *Soit $\widetilde{S}$ l'image de $\tilde{s} : \widetilde{\mathcal{M}}_{g_1,n_1+1} \times \widetilde{\mathcal{M}}_{g_1,n_1+1} \to \widetilde{\overline{\mathcal{M}}}_{g,n}$.*
*Il existe un morphisme de recollement-lissification*

$$\sigma : \widetilde{\mathcal{M}}_{g_1,n_1+1} \times \widetilde{\mathcal{M}}_{g_2,n_2+1} \to \widetilde{\mathcal{M}}_{g,n}$$

*et un voisinage circulaire $\nu : \widetilde{\partial N} \to \widetilde{S}$ tel que*

1. $\mathrm{Im}(\sigma) \subseteq \widetilde{\partial N}$,
2. $\nu \circ \sigma = \tilde{s}$.

*En plus, deux morphismes $\sigma_1$ et $\sigma_2$ qui vérifient les propriétés 1 et 2 pour des voisinages circulaires $(\widetilde{\partial N}_1, \nu_1)$ et $(\widetilde{\partial N}_2, \nu_2)$ respectivement, sont homotopes.*

Un résultat-clef dans la classification des théories à bords fixés sera le théorème de stabilité de Harer.

**Théorème 2** (Stabilité de Harer, 1985)**.** *Soit* $s_0 : \widetilde{\mathcal{M}}_{g,n} \to \widetilde{\mathcal{M}}_{g,n+1}$ *le morphisme de la proposition précédente appliqué à* $\widetilde{\mathcal{M}}_{g,n} \times \{\widetilde{C}\} \simeq \widetilde{\mathcal{M}}_{g,n}$ *où* $\widetilde{C}$ *est une courbe quelconque en* $\widetilde{\mathcal{M}}_{0,3}$*. Soit* $p : \widetilde{\mathcal{M}}_{g,n+1} \to \widetilde{\mathcal{M}}_{g,n}$ *le morphisme oubli. Alors, si* $k \leq g/3$*, le morphisme induit en cohomologie*

$$s_0^* : H^k(\widetilde{\mathcal{M}}_{g,n+1}) \to H^k(\widetilde{\mathcal{M}}_{g,n})$$

*est un isomorphisme, avec inverse* $p^*$*.*

Voir [10] pour la preuve.

Après avoir classifié les théories à bords fixés, on procèdera au deuxième but: définir et classifier les théories à bords libres. Ici la définition sera moins problématique que dans le cas des théories à bords fixés, mais la classification devra tenir compte de la présence des classes $\psi$. Ici on utilisera un important théorème qui a été appelé longtemp la "conjecture de Mumford", avant sa demonstration par Madsen et Weiss en [15].

**Théorème 3** (Madsen-Weiss, 2005)**.** *Soit* $g \geq 2$ *et* $\mathcal{M}_g = \mathcal{M}_{g,0}$*. Alors si* $d \leq g/3$ *on a*

$$H^d(\mathcal{M}_g) \cong (\mathbb{C}[\kappa_j]_{j\geq 1})_d$$

*où l'indice d à droite représente la partie de degré d de l'anneau.*

Le prémier but sera traité à la fin, et représente le vrai résultat de Teleman. En particulier, un fait particulierment surprenant est déduit:

**Théorème 4.** *La théorie* $\overline{\Omega}$ *est determinée de manière unique par sa restriction aux parties lisses* $\mathcal{M}_{g,n}$ *pour tous* $g$ *et* $n$ *avec* $3g - 3 + n \geq 0$*.*

Ce fait est absolument non trivial, et il devient faux si on élimine l'axiome 5 dans la Definition 5. Il sera nécessaire un théorème qui découle directement de la stabilité de Harer.

**Théorème 5** (Looijenga)**.** *Soit* $g \geq 2$ *et* $\mathcal{M}_g = \mathcal{M}_{g,0}$*. Alors si* $d \leq g/3$ *on a*

$$H^d(\mathcal{M}_{g,n}) \cong (H^\bullet(\mathcal{M}_g)[\psi_1, \ldots, \psi_n])_d$$

*où l'indice d à droite représente la partie de degré d de l'anneau.*

Une preuve peut être trouvée en [19].

## 2.4 Conséquences

On a dit que les invariants de Gromov-Witten provenaient d'une théorie cohomologique des champs particulière. Dans ce cas là, l'espace vectoriel $A$ est la partie de degré paire $H^{ev}(X)$ de la cohomologie de la variété $X$ en considération.

La classification prouvée implique la conjecture de Givental (voir [8]), qu'on peut donc énoncer comme un théorème.

**Théorème 6.** *Soit $X$ une variété algébrique dont $H^{ev}(X)$ est semi-simple (dans ce cas la, on dira que $X$ est semi-simple). Alors les invariants de Gromov-Witten de $X$ en tout genre sont determinés par ceux de genre* $0$.

Ça veut dire que pour connaître le nombre d'applications $\overline{\mathcal{M}}_{g,n} \to X$, il suffit de connaître le nombre d'applications $\overline{\mathcal{M}}_{0,k} \to X$ pour tout $k$.

Malheurheusement, c'est assez rare que $H^{ev}(X)$ soit semi-simple, et il est souvent difficile de vérifier qu'une variété $X$ donnée est semi-simple ou pas. Pourtant, on a le théorème suivant:

**Théorème 7.** *L'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n$, pour tout $n \geq 1$, est semi-simple.*

On peut donc dire que la géométrie énumérative de $\mathbb{P}^n$ est connue. En général, on sait pas dire si une variété est semi-simple ou pas. Dans [5], Dubrovin propose sa fameuse conjecture qui pourrait donner un critère de semi-simplicité.

# 3 Autres espaces de modules

Jusqu'à maintenant, on s'est concentré sur les espaces de modules des courbes complexes. Pourtant, le problème de la construction des espaces de modules n'est pas limité à ce cas.

## 3.1 Le schéma de Hilbert

Historiquement, le premier espace de modules dont l'existence a été prouvé est le *schéma de Hilbert*. Ce schéma résout le problème de paramétrer les sous-schémas projectifs de $\mathbb{P}^n$.

Soit $S$ un schéma noethérien de type fini sur un corps $k$, et $X \subseteq \mathbb{P}^n_k \times S$ un sous-schéma propre tel que la projection $p : X \to S$ soit plate. $X$ est alors appelé une *famille* de sous-schémas de $\mathbb{P}^n_k$, paramétrée par $S$. On peut alors montrer que chaque fibre $X_s = p^{-1}(s)$ pour $s \in S$ est un sous-schéma de $\mathbb{P}^n$, et son polynôme de Hilbert $h_{X_s}(t)$ ne depend que de la composante connexe de $S$ à laquelle $s$ appartient. Si en particulier l'application $s \mapsto h_{X_s}(t)$ est constante, on peut appeler l'unique polynôme de Hilbert atteint le *polynôme de Hilbert de la famille* $p : X \to S$. Soit $h(t)$ un polynôme fixé et soit $\underline{\mathrm{Fam}}_n^{h(t)}$ le foncteur qui associe à chaque schéma $S$ (noethérien de type fini) la classe des familles de sous-schémas de $\mathbb{P}^n_k$ paramétrées par $S$ et ayant $h(t)$ comme polynôme de Hilbert de chaque fibre. Le schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}_n^{h(t)}$ est un schéma tel que

$$\underline{\mathrm{Fam}}_n^{h(t)} \simeq \mathrm{Mor}(\cdot, \mathrm{Hilb}_n^{h(t)}).$$

L'existence d'un tel schéma a été prouvé par Grothendieck en [9]. On voit tout de suite que l'identité $\mathrm{Hilb}_n^{h(t)} \to \mathrm{Hilb}_n^{h(t)}$ correspond à une famille $p_u : \mathcal{H}_n^{h(t)} \to \mathrm{Hilb}_n^{h(t)}$; on l'appelera la *famille universelle*. Ces définitions impliquent que pour toute famille $X \to S$, il existe un *unique* morphisme $f : S \to \mathrm{Hilb}_n^{h(t)}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathcal{H}_n^{h(t)} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_u} \\ S & \xrightarrow[f]{} & \mathrm{Hilb}_n^{h(t)} \end{array}$$

On peut montrer aisement que $\mathrm{Hilb}_n^{h(t)}$ est en fait un schéma projectif; il est beaucoup plus difficile montrer qu'il est connexe (voir [11]). Pourtant, il peut arriver qu'il ne soit pas lisse, et en fait il peut aussi ne pas être réduit, même à aucun point.

Bien sûr on peut se poser les mêmes questions pour les sous-variétés d'une variété projective fixé: ça ammene à l'étude du schéma de Hilbert $\mathrm{Hilb}_X^{h(t)}$ de la variété en considération. Ce sujet est très étendu et beaucoup de recherche s'addresse aujourd'hui aux schémas de Hilbert de types particuliers de variétés, comme les variétés de Fano ou les surfaces $K3$. Voir [6] pour un traitement plus précis du schéma de Hilbert, ainsi que pour une bibliographie bien fournie.

## 3.2 Fibrés stables sur une courbe projective

On rappelle que si $F$ est un fibré vectoriel sur une courbe projective complexe $X$, son *rang* est la dimension, en tant qu'espace vectoriel, d'une fibre (quelconque) de $F$; il est noté $\mathrm{rk}(F)$. Le *degré* de $F$ est sa première classe de Chern

$$\deg(F) = \mathrm{c}_1(F) \in H^2(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$$

**Définition 6.** Soit $X$ une courbe projective, et $F$ un fibré vectoriel sur $X$. Le fibré $F$ est dit *semi-stable* si pour chaque sous-fibré $E \subseteq F$ on a

$$\frac{\deg(E)}{\mathrm{rk}(E)} \leq \frac{\deg(F)}{\mathrm{rk}(F)}.$$

Il est dit *stable* si l'inégalité stricte est satisfaite lorsque $E$ est un sous-fibré propre de $F$.

Il y a une version de cette définition qui est valable dans le cas plus général d'une variété projective: voir [16]. On peut prouver que les fibrés stables sur une courbe correspondent aux points d'une variété quasi-projective non-singulière. Donc le problème des modules, dans ce cas, est resolu dans la façon la meilleure possible. En effet, beaucoup plus est connu: Atiyah et Bott, en [3], ont donné une description complète de la cohomologie de cet espace de modules, dans le cas où la courbe $X$ est lisse.

**Remarque 2.** On peut prouver que si $\mathrm{rk}(F)$ et $\deg(F)$ sont premiers entre eux, alors $F$ est automatiquement semistable.

## 3.3 Le schéma $\mathrm{Quot}_{\mathcal{F}/C}^{P}$

Le schéma $\mathrm{Quot}_{\mathcal{F}/X}^{(r,d)}$ peut être vu comme une généralisation du schéma de Hilbert.

**Définition 7.** Soit $X$ une variété projective lisse, $\mathcal{F}$ un faisceau coherent localement libre sur $X$, et $P$ un polynôme. Le schéma $\mathrm{Quot}^{P}_{\mathcal{F}/X}$ est l'espace de modules des quotients

$$0 \to \mathrm{Ker}(q) \to \mathcal{F} \xrightarrow{q} \mathcal{E} \to 0$$

de $\mathcal{F}$ tels que $\mathcal{E}$ a polynôme de Hilbert $P$; ici on considère deux quotients $q$ et $q'$ équivalents si et seulement si $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}(q')$.

L'existence du schéma $\mathrm{Quot}^{(r,d)}_{\mathcal{F}/X}$ a été prouvé par Grothendieck en [9]. C'est évident que $\mathrm{Quot}^{(r,d)}_{\mathcal{F}/X}$ peut être vu aussi comme un schéma paramétrant les sous-faisceaux de $\mathcal{F}$.

Si $X$ est une courbe $C$, le polynôme de Hilbert de $\mathcal{E}$ est determiné par le rang et le degré de $\mathrm{Ker}(q)$, donc on peut écrire dans ce cas $\mathrm{Quot}^{(r,d)}_{\mathcal{F}/C}$, où $r$ est le rang et $d$ est le degré. Un cas particulierment simple est celui avec $r = \mathrm{rk}(\mathcal{F})$. Dans ce cas là, le quotient $\mathcal{E}$ doit être un faisceau de torsion, donc il doit être supporté en un nombre fini de points. Comme on est en train de considérer une courbe projective, on peut supposer d'avoir choisi des coordonnées projectives de telle façon que les points du support de $\mathcal{E}$ soient dans une carte affine. Alors les points $p_1, \ldots, p_n$ du support sont des nombres complexes, et $\mathcal{E}$ est une somme directe de faisceaux gratte ciel $\mathbb{C}^{d_i}$ sur les $p_i$, avec $\sum_i d_i = d$. Soit $\mathcal{F} = Ru_1 \oplus \ldots \oplus Ru_k$ avec $R = \mathbb{C}[x]$ et $u_i$ sections globales; soient $\alpha_i$ les images de $u_i$ dans $\mathcal{E}$, et $M \in M(d, \mathbb{C})$ la matrice représentante l'endomorphisme induit au quotient par la multiplication $\cdot x : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$. Alors on peut montrer directement que si $X \subseteq M(d, \mathbb{C}) \times (\mathbb{C}^d)^k$ est defini par

$$X = \{(M, \alpha_1, \ldots, \alpha_d) \mid \text{les } \alpha_i \text{ et leurs images itérées par } M \text{ engendrent } \mathbb{C}^d\}$$

alors

$$\mathrm{Quot}^{(r,d)}_{\mathcal{F}/C} = X/(GL(d, \mathbb{C})).$$

On peut montrer, indépendantement de ce calcul, que $\mathrm{Quot}^{(r,d)}_{\mathcal{F}/C}$ est lisse dans le cas $r = \mathrm{rk}(\mathcal{F})$. En effet on a la proposition suivante (voir [13]):

**Proposition 2.** *Soit $X$ un schéma projectif sur $k$, et soit $\mathcal{H}$ un faisceau cohérent sur $X$ et $r, d$ des entiers. Soit $[q : \mathcal{H} \to F] \in \mathrm{Quot}^{(r,d)}_{\mathcal{H}/X/k}$ un point $k$-rationnel, et $K = \mathrm{Ker}(q)$. Si $\mathrm{ext}^1(K, F) = 0$, alors $\mathrm{Quot}^{P}_{\mathcal{H}/X/k}$ est lisse en $[q]$.*

Donc il devient évident que le schéma $\mathrm{Quot}^{(r,d)}_{\mathcal{F}/C}$ est lisse, car un faisceau supporté dans un ensemble de dimension zéro ne peut pas avoir de cohomologie en dimension 1.

### 3.3.1 Lien avec les fibrés

Il y a une stricte rélation entre le schéma $\mathrm{Quot}^{(r,d)}_{\mathcal{F}/C}$ et les fibrés vectoriels sur $C$, si $C$ est une courbe projective lisse. En fait, si on prend un quotient $q : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ d'un faisceau localement libre $\mathcal{F}$, le noyeau $\mathrm{Ker}(q)$ est encore un faisceau localement libre ($C$ est une courbe lisse donc les anneaux locaux à chaque point sont des anneaux de valuation discrète). Donc il y a un fibré vectoriel de rang $r$ et degré $d$ associé au faisceau $\mathrm{Ker}(q)$. On a donc un foncteur naturel

$$J : \mathrm{Quot}^{(r,d)}_{\mathcal{F}/C} \to \mathrm{Bun}^{(r,d)}_{C}$$

où $\mathrm{Bun}_C^{(r,d)}$ est l'espace des fibrés vectoriels sur $C$ de rang $r$ et degré $d$. La Remarque 2 a comme conséquence le fait que, si $r$ et $d$ sont premiers entre eux, $\mathrm{Bun}_C^{(r,d)}$ est une variété quasi-projective, donc $J$ devient un morphisme de variétés projectives. On a alors le théorème suivant (voir [4]):

**Théorème 8.** *Dans le cas où $r$ et $n$ sont premiers entre eux, les fibres de $J$ sont des variétés quasi-projectives.*

En particulier, la cohomologie de $\mathrm{Bun}_C^{(r,d)}$ est connue si $C$ est une courbe lisse et $r$ et $d$ sont premiers entre eux.

Dans les cas plus généraux, on ne sait pas grand chose: si $X$ a dimension plus grande que 1, les résultats sont pratiquement inconnus. Aussi, beaucoup de questions et de difficultés apparaissent si on abandonne l'hypothèse de lissité sur la base. Étudier la topologie (ou au moins la cohomologie) des espaces de modules des fibrés stables, comme aussi des courbes stables, est un domaine de recherche très actif actuellement, où peu est connu et où de nouvelles correlations avec autres parties des mathématiques (et même de la physique) sont découvertes régulièrement.

Un autre direction de la recherche c'est étudier des objets differents de ceux qu'on a brièvement introduit dans cette exposition. Par exemple, on peut considérer les espaces de modules des *connexions plates* sur une variété, qui sont directement liés, grâce aux résultats de Narasimhan et Seshandri en [17], aux fibrés stables qu'on a introduit. On peut aussi considérer les espaces des modules des *fibrés de Higgs* sur une variété, qui sont simplement des fibrés vectoriels holomorphes $E$ avec une 1-forme holomorphe $\varphi$, à valeurs dans $\mathrm{End}(E)$, telle que $\varphi \wedge \varphi = 0$. Regarder [12] pour un traitement.

La considération de ces objets prend inspiration des questions de la physique théorique moderne, de la théorie quantique des champs et de la physique des particules. Les questions physiques donnent motivation et de nouvelles directions à l'investigation géométrique, pendant que les théorèmes mathématiques donnent de nouveaux résultats à la physique: un marveilleux échange parmi les deux sujets est donc en train de s'enrichir dans ces décennies. Donc, une bonne conclusion pour cette exposition peut être cette phrase de T. Hausel, écrite sur sa thèse de doctorat [12] en 1998, sur le nouveau lien parmi les deux sujets qui allait commencer dans ces années là:

"By now links of this new kind are so numerous that one is tempted to hope that a new subject is emerging with mixed mathematical and physical motivations, that may be called Quantum Geometry".

# References


[1] Abrams, L. *Two-dimensional topological quantum field theories and Frobenius algebras.* J. Knot Theory Ramifications 5, 569-587 (1996)

[2] Arbarello, E.; Cornalba, M.; Griffiths, P. A.; Harris, J. D. *Geometry of algebraic curves*, vol. I et II. Springer "A Series of Comprehensive Studies in Mathematics", vol. 268 (1985-2011).

[3] Atiyah, M. F.; Bott, R. *The Yang-Mills equations over Riemann Surfaces.* Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 308, 523-615 (1982)

[4] Bifet, E.; Ghione, F.; Letizia, M. *On the Abel-Jacobi map for divisors of higher rank on a curve.* Math. Ann. 299, 641-672 (1994)

[5] Dubrovin, B. *Geometry and analytic theory of Frobenius manifolds.* arXiv:math/9807034 (1998)

[6] Fantechi, B. et al. *Fundamental Algebraic Geometry.* Mathematical Surveys and Monographs, 123 (2006)

[7] Fulton, W.; Pandharipande, R. *Notes on stable maps and quantum cohomology.* arXiv:alg-geom/9608011v2 (1997)

[8] Givental, A. *Semi-simple Frobenius structures in higher genus.* Internat. Math. Res. Notices 23, 1265-1286 (2001)

[9] Grothendieck, A. *Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV: les schémas de Hilbert.* Séminaire Bourbaki 6, 249-276 (1960-1961)

[10] Harer, J. L. *Stability of the homology of the mapping class groups of orientable surfaces.* Ann. of Math. (2) 121, 215-249 (1985)

[11] Hartshorne, R. *Connectedness of the Hilbert scheme.* Publications mathématiques de l'IHÉS, 29 (1966)

[12] Hausel, T. *Geometry of the moduli space of Higgs bundles.* Thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy in the University of Cambridge (1998)

[13] Huybrechts, D.; Lehn, M. *The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves*, 2nd ed. Cambridge Mathematical Library (2010)

[14] Kontsevich, M.; Manin, Y. *Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry.* Comm.Math.Phys.,164:3 (1994), 525-562, et Mirror Symmetry II, B.Greene and S.-T.Yau (editors), (1997). AMS and International Press, 607-654.

[15] Madsen, I.; Weiss, M. *The stable mapping class group and stable homotopy theory.* European Congress of Mathematics, 283-307, Eur. Math. Soc., Zürich (2005)

[16] Mumford, D.; Fogarty, J.; Kirwan, F. *Geometric invariant theory*, 3rd edition. Springer "A Series of Modern Surveys in Mathematics", vol. 34 (1994)

[17] Narasimhan, M. S.; Seshadri, C. S. *Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface* . The Annals of Mathematics, 82 (3) 540-567 (1965)

[18] Pandharipande, R.; Pixton, A.; Zvonkine, D. *Relations on $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ via 3-spin structures.* arXiv:1303.1043v2 (2013)

[19] Teleman, C. *The Structure of 2D Semi-simple Field Theories.* arXiv:0712.0160v3 (2011)

[20] Zvonkine, D. *An introduction to moduli spaces of curves and their intersection theory*. Leçons des journées mathématiques de Glanon (2014)