



ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE PARIS

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET  
APPLICATIONS

---

**Introduction au Domaine de recherche**

Jean-Luc CORON

---

Problématiques liées aux mathématiques financières

6 novembre 2013



## Table des matières

0.1	Modèle de Black Scholes . . . . .	5
0.2	Modèles à Volatilité Locale . . . . .	7
0.2.1	Volatilité de Dupire . . . . .	8
0.2.2	Modèle CEV . . . . .	10
0.3	Modèles à Volatilité Stochastique . . . . .	11
0.3.1	Modèle de Heston . . . . .	11
0.3.2	Modèle SABR . . . . .	12
0.4	Mise en évidence de l'importance du modèle . . . . .	12



Nous allons présenter différentes générations de modèle qui ont jalonné les mathématiques financières. Nous montrerons les utilisations de ces modèles et les raisons de leurs évolutions. Finalement, nous motiverons l'introduction d'un nouveau modèle que nous étudierons plus en détail dans les chapitres suivants : le modèle de Bergomi.

Il existe en finance différents types d'actif financier : actions, obligations, inflation ou crédit. On peut créer, à partir de ces actifs de "base", de nouveaux produits, les produits dérivés. Un produit dérivé est défini par son pay-off, fonction qui détermine les flux futurs en fonction de la valeur d'actifs sous-jacents choisis. Le prix de ces nouveaux produits financiers dépend du modèle de diffusion des sous-jacents que l'on choisit.

Certains produits financiers finissent par devenir suffisamment utilisés pour être cotés dans le marché. Ils deviennent à leur tour des actifs financiers de base et aussi des instruments de couverture pour des produits encore plus complexes. Il est essentiel que les modèles se calibrent sur les prix de ces produits. Cela peut nécessiter d'améliorer ou de changer le modèle que l'on utilise.

Chaque évolution de modèle répond à des besoins à la fois d'amélioration de la calibration aux instruments de marchés et aussi une meilleure représentation de la dynamique des sous-jacents. Ces évolutions sont contraintes par une exigence de performances en temps de calcul des méthodes de pricing. Nous pouvons distinguer 3 grands types d'évolution :

- Rendre les paramètres dépendant du temps et/ou du sous-jacent (exemple : vol locale). La calibration est alors exacte au prix d'une mauvaise dynamique.
- Rendre les paramètres stochastiques. La motivation est d'améliorer la qualité de la dynamique des sous-jacents. Cela permet aussi d'améliorer la calibration
- Changer la modélisation du marché. Notamment en identifiant et modélisant de nouveaux sous-jacents. Comme HJM où le taux court  $r_t$  a été modifié en  $f$  courbe des taux forward.

En plus de permettre un pricing pour un ensemble de nouveaux produits, un modèle doit répondre à plusieurs autres exigences : permettre une bonne calibration, un pricing et un calcul de sensibilité et de risque rapide. En effet les réglementations et les calculs de risque rendent nécessaire pour un organisme financier de recalculer plusieurs fois le prix de certains de ses produits suivant divers scénarios. Ceci nécessite d'avoir des procédures de pricing et

de calibration rapides.

Pour comprendre l'utilité du modèle que nous allons étudier, le modèle de Bergomi, nous devons tout d'abord faire un état des lieux de l'historique des modèles précédents en essayant d'explorer leurs forces et leurs faiblesses, ainsi que les raisons de les étendre ou de les changer.

## 0.1 Modèle de Black Scholes

Le modèle de base en finance reste le modèle de Black Scholes. Ce modèle est introduit dans [8] et [2]. Nous allons introduire ce modèle en détail.

Le choix de ce modèle est naturel au sens où il s'agit du modèle le plus simple de martingale positive. L'idée est de modéliser les actifs par des log-normales. On introduit ainsi la dynamique du cours d'un actif  $S_t$ ,

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma_t dW_t$$

avec les processus de volatilité  $\sigma_t$  et de taux  $r_t$  déterministes et  $W_t$  un mouvement Brownien standard.

**Pricing Call/Put** On s'intéresse ensuite au calcul de prix de Call et de Put. Les Call sont des options qui permettent à l'acheteur d'acheter ou non un actif à un prix déterminé à l'avance, appelé Strike et souvent noté  $K$ , à une date donnée, appelée maturité et souvent noté  $T$ . Le pay-off d'un Call est donc  $(S_T - K)_+$ .

Dans le modèle de Black Scholes, on obtient une formule explicite pour le prix de cette option :

$$\mathbb{E}[(S_T - K)_+] = S_t \mathcal{N}(d_+) - K e^{-rT} \mathcal{N}(d_-)$$

$$\begin{aligned} d_{\pm} &= \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \left( \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + rT \right) \pm \frac{1}{2} \sigma \sqrt{T} \\ r &= \frac{1}{T} \int_0^T r_t dt \\ \sigma &= \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_t dt \end{aligned}$$

L'existence d'une formule explicite permet donc un pricing et une calibration très rapide. Mais la vraie force du modèle est de fournir une stratégie

de couverture explicite.

L'inconvénient majeur du modèle de Black Scholes est que la volatilité implicite  $\sigma$  ainsi obtenue en inversant la formule de Black Scholes sur les prix du marché n'est pas constante et est fonction de la maturité et du Strike. Cette courbe de volatilité ainsi formée porte le nom de smile dû à sa forme convexe. On peut voir ce smile sur le graphique 1.

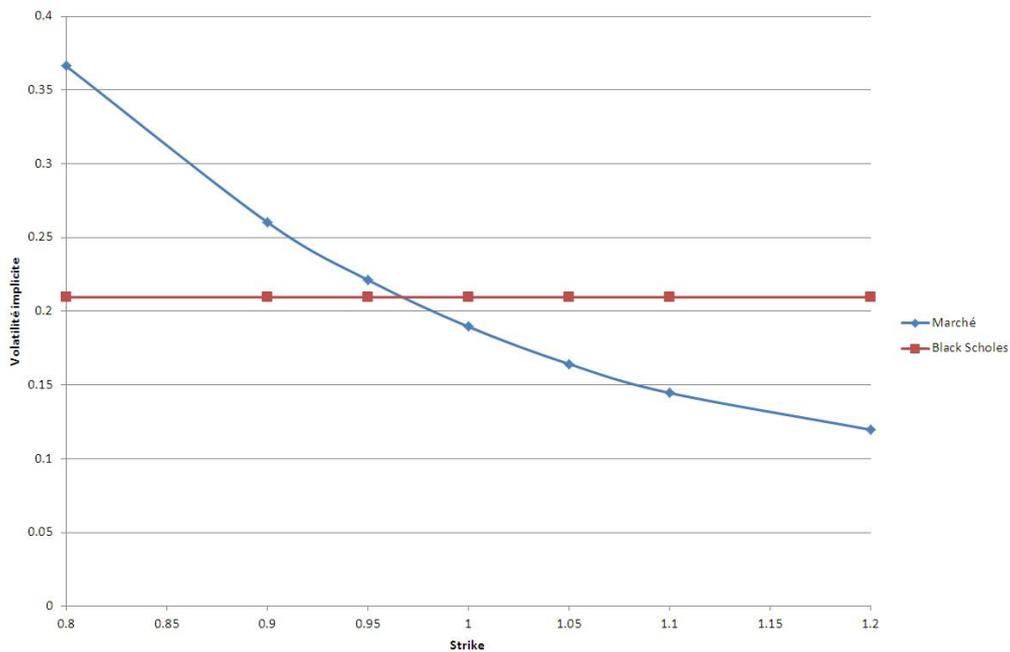


FIGURE 1 – Smile présent dans la volatilité implicite du marché par rapport à ce que le modèle de Black Scholes devrait observer

Le modèle à volatilité constante ou déterministe n'est donc pas un modèle conforme à ce qui se passe dans le marché. En effet, le marché présente une volatilité implicite non constante. Ce phénomène peut avoir différentes explications.

- La volatilité pourrait avoir une dynamique stochastique propre.
- Les rendements pourraient ne pas suivre une densité gaussienne. Ceci serait dû à la présence de queues de distribution plus épaisses liées à des événements extrêmes tels que des krachs ou des défauts.

Cet inconvénient devient très problématique lorsqu'il s'agit de pricer des options plus exotiques comme des options à barrière, parisienne et digitales.

**Extension du Modèle de Black Scholes** Pour pallier cela, beaucoup de modèles, comme les modèles de volatilité locale ou de volatilité stochastique, ont eu pour objectif d'inclure un comportement spécifique de la volatilité. La plupart du temps on cherche à garder la structure du modèle Black Scholes en lui incorporant des termes correctifs.

On peut distinguer deux types de modèles : les modèles à volatilité locale et les modèles à volatilité stochastique.

Les modèles à volatilité locale ont l'avantage de conserver l'aspect de marché complet car ceux-ci n'introduisent pas, à la différence des modèles à volatilité stochastique, de dynamique supplémentaire dans la modélisation. L'inconvénient vient du fait que les dynamiques des volatilités implicites observés dans le marché ne sont pas en adéquation avec les dynamiques prévues dans le modèle.

C'est pour cela qu'ont été introduits les modèles à volatilité stochastique conçus pour que la dynamique du modèle corresponde mieux à la dynamique du marché. Ils ont néanmoins l'inconvénient, en introduisant une dynamique supplémentaire, de ne plus conserver la propriété de complétude de marché. La complétude du marché signifie qu'on peut identifier chaque source d'aléa par un portefeuille de produit. Autrement dit on peut se couvrir ou isoler chaque source de risque. Cette complétude des marchés ne peut être conservée qu'en introduisant des produits comme le VIX ou les variances forward qui apportent une méthode supplémentaire de couverture.

Chacun de ces modèles menant à des prix et des grecques différents pour des options très exotiques. Le choix du modèle ainsi que la stratégie de couverture est donc une problématique très importante.

## 0.2 Modèles à Volatilité Locale

Le modèle qui montre le plus cette volonté d'introduire des termes correctifs est le modèle de volatilité locale. Le modèle de Black scholes, en l'état, impose une volatilité différente selon le strike et la maturité que l'on étudie. Ceci impose donc une modélisation spécifique pour chaque option que l'on souhaite étudier. Le but est, au lieu d'avoir un modèle pour chaque option, d'unifier l'ensemble du smile afin de créer un unique modèle qui le reproduit. On veut donc modifier le modèle de Black Scholes afin d'en garder la cohérence.

Dans le modèle de volatilité locale, on ne prend plus simplement une

volatilité constante ou déterministe fonction du temps  $t$ , mais une volatilité déterministe fonction du temps et du spot  $S_t$ . On passe de  $\sigma_t$  à  $\sigma(t, S_t)$ . Suivant le choix de la fonction  $\sigma(t, S_t)$ , on obtient différentes formules d'inversion, comme la formule de Dupire, afin de calibrer cette fonction de volatilité. Le problème s'écrit sous la forme

$$dS_t = \mu S_t + \sigma(t, S_t) dW_t$$

où  $\sigma(t, S_t)$  est une fonction du spot et du temps qui peut être explicite, comme dans le cadre CEV, ou non, comme dans le cas de la volatilité de Dupire. Dans le modèle de Black Scholes, on a  $\sigma(t, S_t) = \sigma_t S_t$ . Il faut faire attention à l'homogénéité des termes qu'on emploie. En effet, dans le modèle CEV, la volatilité  $\sigma(t, S_t)$  peut dépendre de  $S_t$  en une puissance différente de 1. On a donc une dimension de  $\sigma_t$  dans  $\sigma(t, S_t)$  qui varie en fonction de la puissance en  $S_t$  choisie.

### 0.2.1 Volatilité de Dupire

**Formule de Dupire** Le modèle de Dupire a été créé afin de calibrer parfaitement le smile. On reprend le modèle comme présenté dans [4]. On suppose souvent que les taux sont nuls pour simplifier les calculs. On obtient comme dynamique

$$dS_t = \sigma(t, S_t) dW_t$$

$\sigma(t, S_t)$  est obtenu comme un résultat de la projection markovienne de la dynamique

$$\sigma(t, S) = \sqrt{\mathbb{E} \left[ \frac{d \langle S_t \rangle}{dt} \middle| S_t = S \right]}$$

on introduit ensuite la valeur d'un call,  $C(T, K) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [(S_T - K)_+]$ . On écrit ceci sous forme intégrale  $C(T, K) = \int_K^{\infty} (x - K) \nu_T(dx)$  où  $\nu_T$  est la densité de probabilité de  $S_T$ . Pour l'instant, il ne s'agit que d'une réécriture sous forme intégrale. On va maintenant dériver par rapport à la maturité.

$$\frac{\partial C(T, K)}{\partial T} = \int_K^{\infty} (x - K) \frac{\partial \nu_T(dx)}{\partial T}$$

Il s'agit donc de quantifier le terme  $\frac{\partial \nu_T(dx)}{\partial T}$ . Posons la fonction, qui pour une fonction pay-off quelconque  $h(S_T)$  associe son prix ( $r_t = 0$ )

$$f(x, t) = \mathbb{E} [h(S_T) | S_t = x]$$

On peut ainsi obtenir des liens entre la dérivée par rapport à la maturité et par rapport au spot :

$$\mathbb{E} [h(S_T)] = \mathbb{E} [\mathbb{E} [h(S_T) | S_t = x]] = \int f(x, t) \nu_t(x) dx$$

Le terme de gauche n'étant pas fonction de  $t$  puisqu'il peut être vu depuis un instant arbitraire et non plus seulement d'une espérance conditionnellement à  $t$ , on obtient en dérivant par rapport à  $t$

$$0 = \int \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \nu_t(x) dx + \int f(x, t) \frac{\partial \nu_t(x)}{\partial t} dx$$

On établit l'équation de pricing, via une formule d'Itô,

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) x^2 \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

On fait une intégration par partie, on peut se référer à l'annexe pour les détails du calcul, afin que  $f$  apparaisse mais pas avec des dérivées spatiales. On a donc quelque soit la fonction  $f$  obtenue par une fonction pay-off  $h$

$$0 = \int \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2 x^2 \nu) - \frac{\partial \nu_t(x)}{\partial t} \right) f(x, t) dx$$

Cette relation nous permet donc de prouver l'égalité car les fonction  $f$  sont déterminées par un noyau de convolution que forme le processus  $S_t$ . Ce noyau de convolution a un effet régularisant sur les fonction pay-off mais on peut obtenir une base de fonction représentative  $f$  à l'aide une bonne famille de fonction pay-off  $h$ . On peut donc conclure que

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma^2 x^2 \nu) = \frac{\partial \nu_t(x)}{\partial t}$$

Qu'on réintroduit dans l'équation précédente afin d'obtenir la formule de Dupire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(T, K)}{\partial T} &= \int_k^\infty (x - K) \frac{\partial \nu_T(dx)}{\partial T} \\ &= \int_k^\infty (x - K) \frac{1}{2} (\sigma^2 x^2 \nu)'' dx \\ &= \frac{1}{2} \sigma^2(T, K) K^2 \nu_T(K) \\ &= \frac{1}{2} \sigma^2(T, K) K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(T, K) \end{aligned}$$

Pour passer de la deuxième à la troisième ligne on suppose qu'à l'infini de  $\sigma^2 x \nu$  admet au moins une asymptote, au mieux tende vers 0. On obtient ainsi la formule de Dupire.

**Dynamique de la Formule de Dupire** La formule de Dupire a l'avantage de permettre de coller de manière parfaite avec le smile que l'on peut observer dans le marché. Par contre celui-ci possède l'inconvénient de ne pas avoir la même dynamique du smile que celui que l'on observe dans le marché en terme de corrélation. En effet, reprenons la formule de Dupire en une forme plus pratique pour l'analyse :

$$\begin{aligned}\sigma^2(T, K) &= \frac{2 \frac{\partial C(T, K)}{\partial T}}{K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(T, K)} \\ &= \frac{2 \frac{\partial \mathbb{E}[(S_T - K)^+]}{\partial T}}{K^2 \frac{\partial^2 \mathbb{E}[(S_T - K)^+]}{\partial K^2}}\end{aligned}$$

On peut étudier chacun des termes :

$$\frac{\partial^2 \mathbb{E}[(S_T - K)^+]}{\partial K^2}$$

Ce terme, lorsque l'on effectue un baisse brutale du spot, ou choc négatif sur le spot, a tendance à voire sa courbe se translater vers la gauche, i.e à partir sur la gauche. En effet, la densité de  $S_T$  va avoir le même type de choc que le spot. Ce qui fait que l'inverse de la fonction va partir sur la droite.

$$\frac{\partial \mathbb{E}[(S_T - K)^+]}{\partial T}$$

Ce terme a le même comportement, il part à droite.

Or, on peut constater que dans le marché, lorsque le spot baisse, le smile va vers la gauche. Ceci signifie que l'on n'a pas la bonne corrélation entre le spot et la volatilité. Nous verrons dans le cadre de la volatilité stochastique qu'il faut introduire une corrélation négative entre le spot et la volatilité.

Une analyse plus précise de cette erreur de dynamique est abordée dans [5].

## 0.2.2 Modèle CEV

Le modèle CEV, introduit dans [3], est un cas particulier de modèle à volatilité locale. Il suppose l'existence d'une forme particulière de volatilité et donc de dynamique du sous-jacent. L'intérêt de ce modèle est l'existence

de formules approchées et de méthode de calibration qui en font un très bon modèle proxy. Un modèle proxy est un modèle de première approximation qu'on enrichit ensuite à l'aide de méthode de perturbation.

La dynamique dans ce modèle est

$$dS_t = \sigma S_t^\gamma dW_t$$

Ce modèle présente l'avantage de ne reposer que sur 2 paramètres : la volatilité initiale et le  $\gamma$ . En général,  $\gamma$  est pris entre 0 et 1. Il est important de noter que l'on ne peut garantir l'unicité de la solution pour  $\gamma$  compris strictement entre 0 et  $\frac{1}{2}$  dû au fait que le spot peut devenir négatif.

### 0.3 Modèles à Volatilité Stochastique

Le but du modèle de volatilité locale est de coller le plus possible au smile mais cela se fait au détriment des dynamiques corrélées du spot et de la volatilité. Or, de plus en plus de nouveaux produits dépendent spécifiquement de la dynamique volatilité/spot. Pour cela, des modèles à volatilité stochastique ont été introduits. Il existe différents modèles à volatilités stochastiques comme le modèle de Heston, le modèle de Bergomi ou le modèle SABR.

Les modèles à Volatilité locale intègrent une dynamique explicite pour la volatilité. De manière générale, on essaie d'éviter d'introduire une dépendance explicite de la volatilité au spot. On conserve par contre l'existence d'une corrélation entre les variations de la volatilité et du spot. On introduit aussi une force de rappel sur la dynamique de la volatilité, dû au fait qu'on peut observer une certaine stabilité de la volatilité au cours du temps. La présence d'une corrélation et d'une force de rappel fait qu'on conserve toujours une forme de dépendance qui correspond à ce qu'on l'on peut observer dans le marché tout en gardant une volatilité stable sur le long terme.

Dans un second temps, on peut parler des modèles volatilité locale/stochastique qui introduisent dans la volatilité une dépendance au spot comme le modèle SABR qui est une version à volatilité stochastique du modèle CEV.

#### 0.3.1 Modèle de Heston

L'écriture du modèle de Heston, introduit dans [7], s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^S \\ dV_t &= k(V_\infty - V_t) dt + \lambda \sqrt{V_t} dW_t^V \end{aligned}$$

On a donc dans la dynamique de  $V$ , un terme de rappel à une volatilité à l'infini et une corrélation entre les deux mouvements Brownien. On peut réécrire les équation suivantes en préférant travailler sur le logarithme du spot  $x_t = \ln(S_t)$ . On enlève aussi le taux quitte à faire les transformations usuelles.

$$\begin{aligned} dx_t &= -\frac{1}{2}V_t dt + \sqrt{V_t} dW_t^1 \\ dV_t &= k(V_\infty - V_t)dt + \lambda\sqrt{V_t}(\rho dW_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^2) \end{aligned}$$

### 0.3.2 Modèle SABR

Le modèle SABR, introduit dans [5], est une adaptation du modèle CEV mais avec une introduction de volatilité stochastique. Le modèle s'écrit

$$\begin{aligned} dS_t &= r_t S_t dt + \sigma_t S_t^\beta dB_t^1 \\ d\sigma_t &= \nu \sigma_t dB_t^2 \end{aligned}$$

Il existe différentes méthodes de résolution du prix des Call à l'aide de formule approchées qui permettent une calibration facile.

## 0.4 Mise en évidence de l'importance du modèle

Le choix de modèle est une donnée très importante pour le pricing de certaines options exotiques. Prenons par exemple un Napoléon qui paie tous les ans pendant 3ans un coupon du type

$$\max\left(0, C + \min_i r_i\right)$$

avec  $C$  de l'ordre de 8% avec  $r_i$  l'ensemble des rendements mensuels observés chaque année.

Pour que le coupon ne soit pas nul, il faut que le pire rendement mensuel sur l'année soit plus grand que  $-C$ . On voit qu'un modèle à volatilité stochastique où le rendement du stock est négativement corrélée avec la volatilité augmente la probabilité d'un coupon nul et ainsi diminue le prix.

Contrairement à l'intuition, si on fait une étude de marché, on peut constater qu'on n'a que très peu de chance de dégager un bénéfice à la maturité. Il est en effet rare qu'une action n'ait pas une fois dans l'année sous-performé de 8%. Il s'agit donc d'options très peu chères. Ce genre d'option peut être utilisé dans le cadre de produit à capital garanti. On peut en effet, dans le cadre d'une stratégie acheter une obligation qui nous garantit

notre capital à la maturité de l'option, et avec ce qui reste acheter ce genre d'option peu chère dont les seules pertes possibles sont le prix de l'option.

On obtient, sur la figure 2, différentes courbes de prix lorsque l'on introduit, dans le modèle de Heston de la vol de vol. On note que le prix du produit est très sensible dans ce modèle à la volatilité de la volatilité (vol de vol). La vol de vol prend une part très importante du prix dans un Napoléon. De manière générale, on voit que le Napoléon est un produit très sensible à la gestion de la dynamique de la volatilité.

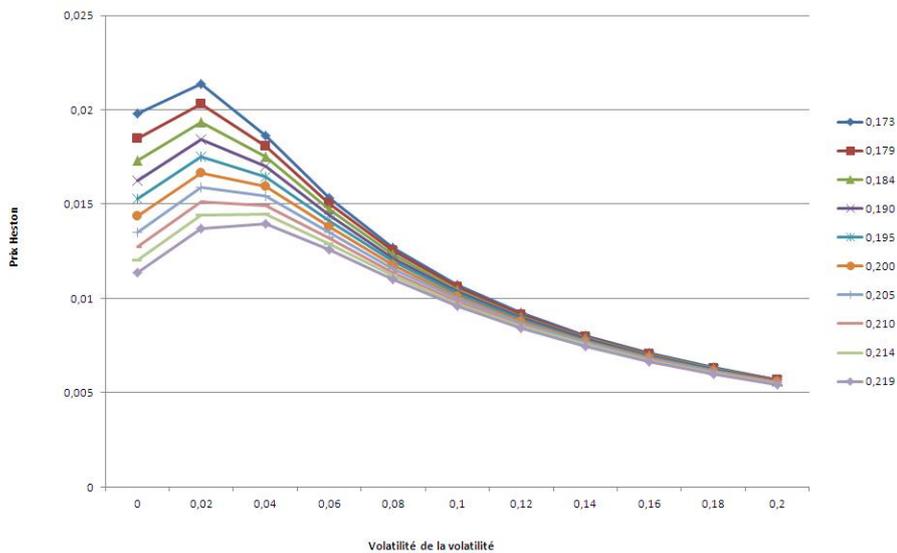


FIGURE 2 – Influence de la vol de vol du Prix d'un Napoléon en fonction de la volatilité ( $k=1$  an,  $\sigma_{rappel} = 20\%$ )

Ceci montre donc l'impact du choix du modèle dans le pricing. Ce choix de modèle n'est donc pas anodin. On doit aussi pouvoir clairement identifier les risques que l'on porte et comment les couvrir.



## Références

- [1] Sidi-Mohamed Ould Aly. *Modélisation de la courbe de variance et modèles à volatilité stochastique*. PhD thesis, Paris-Est, Juin 2011.
- [2] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 3 :637–654, 1973.
- [3] J. Cox. Notes on option pricing I : Constant elasticity of diffusions. *Unpublished draft, Stanford University*, 1975.
- [4] B. Dupire. Pricing with a smile. *Risk magazine*, 7 :18–20, 1993.
- [5] Patrick S. Hagan, Deep Kumar, Andrew S. Lesniewski, and Diana E. Woodward. Managing smile risk. *Willmott Magazine*, pages 84–108, 2002.
- [6] Pierre Henry-Labordère. *Analysis, Geometry, and Modeling in Finance : advanced methods in option pricing*. CRC Press, 2008.
- [7] Steven L. Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, 6(2) :327–343, 1993.
- [8] Robert C. Merton. Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science (The RAND Corporation)*, 4(1) :141–183, 1973.
- [9] Mohammed Miri. *Développement stochastique et formules fermées de prix pour les options européennes*. PhD thesis, Institut polytechnique de Grenoble, Décembre 2009.