Déterminer la valeur du tick

Valentin Devriès*

Introduction au domaine de recherche

* valentin.devries@mines.org

Table des matières

Introduction **5**

1 La théorie de la microstructure **5**

2 Le régime petit tick : modèle de Madhavan *et al.* **6**

2.1 Description du modèle . . . 7

2.2 Spread et volatilité par trade . . . 7

2.3 Effets d'un changement de tick . . . 9

3 Le régime grand tick : modèle à zones d'incertitude **10**

3.1 Description du modèle . . . 10

3.2 Spread implicite et volatilité par trade . . . 12

3.3 Effets d'un changement de tick . . . 13

Conclusion **14**

Lexique **14**

Références **15**

Introduction

Sur un marché organisé, il n'est pas possible d'effectuer un ordre (d'achat ou de vente) à n'importe quel prix. Ce prix doit être multiple du tick qui est donc le plus petit écart possible entre deux prix. Il s'agit d'un des paramètres clés d'un marché et sa détermination a des impacts importants. Si le tick est trop faible, les ordres se répartissent sur beaucoup de limites de prix différentes et le marché est instable. Si le tick est trop grand, les mouvements de prix sont très contraints et les échanges se font moins facilement.

À l'instar de l'ensemble des activités financières, les pouvoirs politiques ont montré la volonté de renforcer son encadrement ces dernières années. Néanmoins, l'intérêt de la recherche pour cette question est encore limité. La détermination du tick est une problématique liée à la microstructure de maché qui est elle un domaine de recherche très actif.

Nous commencerons par présenter brièvement la théorie de la microstructure. Dans un deuxième temps, nous nous intéresserons plus particulièrement à des modèles de microstrucuture permettant une approche théorique du tick (parties 2 et 3).

1 La théorie de la microstructure

Mathématiques financières classiques :

Louis Bachelier publie en 1900 sa thèse *Théorie de la spéculation* qui est considérée comme le fondement des mathématiques financières de marché. Une des idées essentielles de cet ouvrage est de considérer que le prix d'un produit financier sur un marché est un objet aléatoire dont l'évolution est un mouvement brownien. Il développe alors le premier modèle mathématique de mouvement brownien qui avait été décrit pour la première fois par Brown en 1827. La construction mathématique actuelle du mouvement brownien sera faite par Wiener dans les années 1920. Le mouvement brownien comme modélisation de l'évolution d'un prix a été fréquemment repris au cours de la construction des mathématiques financières en particulier par Black et Scholes. Le modèle du même nom datant de 1973 postule que le prix d'un actif financier est un mouvement brownien géométrique. Le modèle de Black et Scholes est aujourd'hui la base théorique de l'enseignement et de l'utilisation des mathématiques financières.

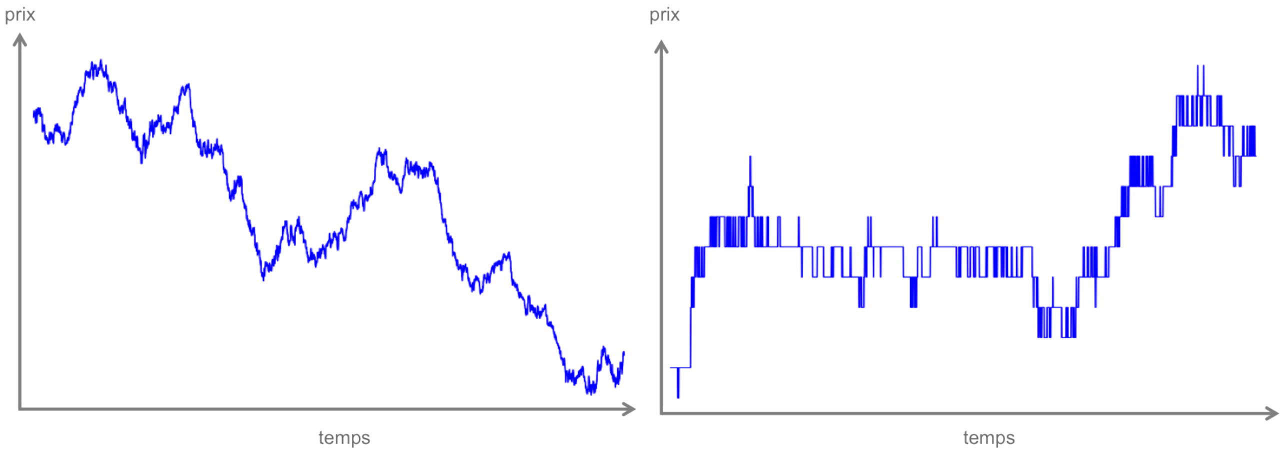

FIGURE 1: Évolution du prix d'un actif pendant 17 mois (à gauche) et 1 heure (à droite)

Théorie de la microstructure :

Comme on peut le voir sur la figure 1, la modélisation d'un prix par un processus brownien ne peut pas se faire à toutes les échelles de temps. Par exemple, si l'on observe l'évolution d'un cours sur une heure, la trajectoire ne ressemble pas à celle d'un processus brownien, et ce pour deux raisons principales. D'une part, le cours est constant sur certains intervalles (ceux pendant lesquels aucune transaction n'a lieu). D'autre part, le prix a des discontinuités et ne prend des valeurs que sur une certaine grille dont le tick est le pas. L'étude des marchés financiers sur des périodes courtes, par exemple inférieures à une heure, nécessite des méthodes différentes de celles des mathématiques financières classiques. C'est l'objet de la théorie de la microstructure qui s'intéresse dans le détail au fonctionnement d'un marché, notamment l'évolution du carnet d'ordres [1].

2 Le régime petit tick : modèle de Madhavan *et al.*

Le ratio spread sur tick étant un bon indicateur de la taille du tick [2], les théories de formation du spread sont centrales dans les approches théoriques de la détermination du tick. Dans [2], Madhavan *et al.* présentent un modèle simple permettant de comprendre

1. Certains termes liés à la finance sont définis dans le lexique.

2. Si ce ratio est faible (proche de 1, cela siginifie que le tick est important. À l'inverse lorsque le spread est beaucoup plus grand que le tick, cela signifie que ce dernier est faible.

la formation du spread par équilibre du marché. Ce modèle est valable lorsque le spread peut s'ajuster librement, c'est-à-dire dans le régime où le tick est petit.

2.1 Description du modèle

— Il existe un prix sous-jacent p, donnant à chaque instant le consensus du marché sur la valeur de l'actif. Nous notons p_i la valeur de ce prix au moment du i-ème trade.

— Nous notons ϵ_i le signe du i-ème trade. Si le trade est un achat d'un "market taker", alors $\epsilon_i = 1$, sinon $\epsilon_i = -1$.

— Nous notons $\mathcal{F}_i = \sigma(\epsilon_1, ..., \epsilon_i)$.

— (ϵ_i) est un processus de Markov de corrélation ρ : $\mathbb{E}(\epsilon_i|\mathcal{F}_{i-1}) = \rho\epsilon_{i-1}$

— Le prix p varie à cause de l'impact de chaque trade. La surprise du i-ème trade est $\epsilon_i - \mathbb{E}(\epsilon_i|\mathcal{F}_{i-1}) = \epsilon_i - \rho\epsilon_{i-1}$ donc : $p_{i+1} - p_i = \theta(\epsilon_i - \rho\epsilon_{i-1})$ où θ est une constante positive mesurant l'intensité de l'impact des trades.

— Les "market makers" ne pouvant prévoir la surprise des trades, ils fixent le bid et l'ask de cette manière :

$$a_i = p_i + \theta(1 - \rho\epsilon_{i-1}) + \phi \qquad \text{et} \qquad b_i = p_i + \theta(-1 - \rho\epsilon_{i-1}) - \phi$$

où ϕ est une constante positive représentant le coût que font payer les "market makers" pour couvrir leurs coûts et le risque.

2.2 Spread et volatilité par trade

À partir de ce modèle, il est possible de montrer une relation entre le spread et la volatilité par trade de deux manières.

Approche originale de Madhavan *et al.* [2] :

La volatilité par trade est définie par : $\sigma_{tr}^2 = \mathbb{E}((p_{i+1} - p_i)^2)$

Par un rapide calcul : $\sigma_{tr}^2 = \theta^2(1-\rho)^2$

Et le spread est :

$$\begin{aligned} S &= a_i - b_i \\ &= 2(\theta + \phi) \end{aligned}$$

L'équilibre du marché et la compétition entre les "market makers" conduisant à $\phi = 0$, on obtient :

$$\sigma_{tr} = \text{constante} * S \tag{1}$$

Approche de Wyart *et al.* [4] :

À partir du modèle de Madhavan *et al.*, Wyart *et al.* proposent dans [4] le calcul du gain d'un ordre limite permettant de retrouver la relation (1).

Nous considérons le gain unitaire par rapport au mid d'un ordre limite d'achat (au bid) fait à un temps aléatoire entre les trades i et $i+1$. Nous supposons qu'avec une probabilité 1/2 le prochain ordre au marché est à la vente et l'ordre limite est exécuté. Le gain est alors d'un demi-spread. Avec une probabilité 1/2, le prochain ordre au marché est à l'achat et l'ordre limite n'est pas exécuté immédiatement. Dans ce cas, le gain moyen est le gain moyen sachant que le dernier trade est un achat d'un "marker taker" (nous le notons G^a) auquel on retire la variation du mid.

Le gain moyen par rapport au mid de l'ordre limite est donc :

$$G = \frac{1}{2}\frac{S}{2} + \frac{1}{2}(-\mathbb{E}(m_{i+1} - m_i | \epsilon_i = 1) + G^a) \tag{2}$$

avec $m = \dfrac{a+b}{2}$ le mid.

Par le même raisonnement on trouve :

$$G^a = \frac{1-\rho}{2}\frac{S}{2} + \frac{1+\rho}{2}(-\mathbb{E}(m_{i+2} - m_{i+1} | \epsilon_{i+1} = 1) + G^{a,a}) \tag{3}$$

où $G^{a,a}$ est le gain moyen sachant que les deux derniers trades sont des achats de "market takers". Du fait de la structure markovienne, $\mathbb{E}(m_{i+2} - m_{i+1}|\epsilon_{i+1} = 1) = \mathbb{E}(m_{i+1} - m_i|\epsilon_i = 1)$ et $G^{a,a} = G^a$. Donc (3) donne :

$$G^a = \frac{S}{2} - \frac{1+\rho}{1-\rho}\mathbb{E}(m_{i+1} - m_i|\epsilon_i = 1) \tag{4}$$

En reportant (4) dans (2), on trouve :

$$G = \frac{S}{2} - \frac{2}{1-\rho}\sigma_{tr} \tag{5}$$

Cette formule met en évidence deux aspects du gain d'un "market maker". Lorsque le prix est stable, un "market maker" gagne un spread en deux trades : par exemple, il achète à un prix p puis vend à un prix $p + S$. L'instabilité du prix (représentée par σ_{tr}) réduit ce bénéfice. Dans l'exemple précédent, si après avoir acheté à p en espérant revendre au prix $p + S$, le cours baisse, le "market maker" devra revendre son titre à un prix inférieur et sera perdant.

L'équilibre du marché et la compétition entre "market makers" entraînant $G = 0$ [3] , on retrouve la relation :

$$\sigma_{tr} = \text{constante} * S \tag{1}$$

2.3 Effets d'un changement de tick

Les mécanismes d'équilibre décrits dans les parties précédentes sont indépendants du tick, tant que celui-ci est suffisamment petit pour que le spread puisse s'ajuster librement. Le spread reste constant lors d'un changement de tick. Il est alors simple de prévoir l'évolution du ratio spread sur tick en fonction du tick.

Il est possible de parvenir à la conclusion que le spread ne dépend pas du tick de manière plus formelle grâce à la relation (1). Pour cela nous faisons quelques hypothèses :

— La volatilité, le volume total échangé et la constante de la relation (1) ne dépendent pas du tick.

3. Considérer le gain des "markets makers" nul comme équilibre de marché est une approximation. On observe tout de même que la source principale de gain des "market makers" est des réductions faites par les plateformes pour favoriser les activités de "market making" qui apportent de la liquidité.

— Il existe un paramètre β tel que la liquidité disponible dans l'intervalle de prix $[\ \mathrm{mid} - x\ ;\ \mathrm{mid} + x\ ]$ soit donnée par $2x^{\beta}$.

— Un trade représente en moyenne une part de la liquidité disponible aux meilleures limites indépendante du tick.

Nous notons M le nombre de trades par jour. La première hyptohèse implique : $S\sqrt{M} =$ constante [4]. Les deux dernières donnent : $S^{\beta}M =$ constante. On obtient donc : $S =$ constante.

3 Le régime grand tick : modèle à zones d'incertitude

Le modèle présenté dans la partie précédente n'est valable que dans le cas où le tick ne contraint pas le spread. Le modèle à zones d'incertitude introduit par [3] permet d'étudier un actif à grand tick.

3.1 Description du modèle

Il s'agit d'un modèle pour les changements de prix. Autrement dit, sont modélisés les temps et les prix des transactions menant à un changement de prix ; si plusieurs transactions se font au même prix, seule la première est prise en compte par le modèle. Nous considérons un produit donné et nous faisons les hypothèses suivantes.

Prix sous-jacent : nous supposons qu'il existe un prix sous-jacent, donnant à chaque instant le consensus du marché sur la valeur de l'actif. Comme il est courant dans les modèles de microstructure, nous supposons que ce prix est une semi-martingale continue de la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_u \,\mathrm{d}u + \int_0^t \sigma_{u-} \,\mathrm{d}W_u$$

où a est un processus progressivement mesurable et localement borné par rapport à une filtration $\mathcal{F}$, σ_u un processus adapté et càdlàg par rapport à $\mathcal{F}$ et W un $\mathcal{F}$-mouvement brownien. L'intérêt d'une telle forme pour le prix sous-jacent est d'être en accord en basse fréquence avec la théorie financière classique.

4. Car $\sigma_{tr} = \sigma/\sqrt{M}$.

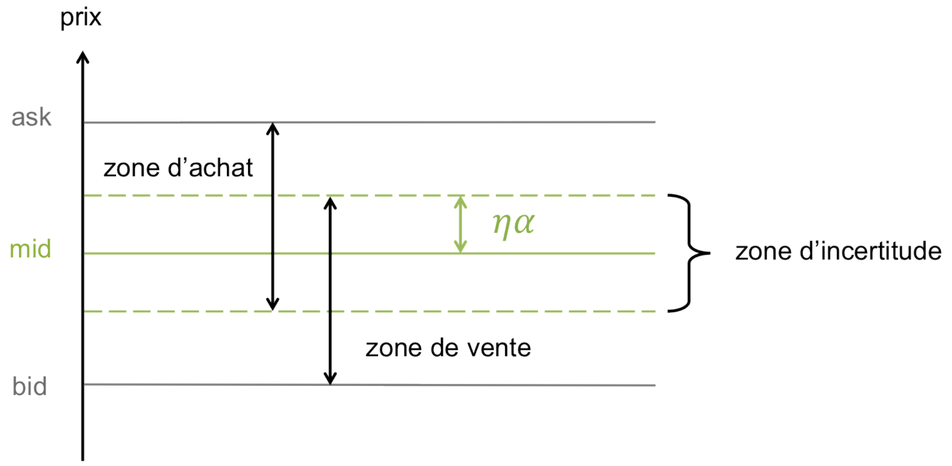

Figure 2: Zone d'incertitude

Spread : Le spread est toujours d'un tick et contient le prix sous-jacent X.

Zones d'incertitude : ce sont des zones autour des demi-ticks (milieux entre deux ticks consécutifs) de largeur $2\eta\alpha$ (voir figure 2), α étant le tick et η un paramètre du modèle. Lorsque le prix sous-jacent est dans une zone d'incertitude, il peut y avoir des transactions aussi bien au tick supérieur (qui correspond à l'ask) qu'au tick inférieur (le bid). C'est pourquoi elles sont appelées zones d'incertitude. En revanche, si X_t est en dessous d'une zone d'incertitude et au-dessus du tick inférieur, il ne peut y avoir de transaction qu'au tick inférieur. De même, si X_t est au-dessus d'une zone d'incertitude et en dessous du tick supérieur, il ne peut y avoir de transaction qu'au tick supérieur. On peut donc distinguer une zone d'achat et un zone de vente (dans lesquelles un "market taker" peut effectuer un achat/une vente).

Formulation mathématique de la dynamique du prix : nous notons P_t le prix de la dernière transaction au temps t. Soit $t_0 \geq 0$. Soit $\tau_{t_0}^{up}$ le premier temps après t_0 où X_t passe au-dessus de la zone d'incertitude au-dessus de P_{t_0} [5]. De même nous définissons $t_0 \geq 0$, $\tau_{t_0}^{down}$ le premier temps après t_0 où X_t passe en dessous de la zone d'incertitude en dessous de P_{t_0} [6]. L'évolution du prix est la suivante : il n'y a pas de transaction à un temps $t \in [t_0; \tau_{t_0}^{up}[$ (respectivement $t \in [t_0; \tau_{t_0}^{down}[$) à un prix strictement plus élevé (respectivement plus faible) que P_{t_0} et si $\tau_{t_0}^{up} < \tau_{t_0}^{down}$ (respectivement $\tau_{t_0}^{up} > \tau_{t_0}^{down}$), alors

5. $\tau_{t_0}^{up} = \inf\{t > t_0 / X_t = P_{t_0} + \alpha/2 + \eta\alpha\}$
6. $\tau_{t_0}^{down} = \inf\{t > t_0 / X_t = P_{t_0} - \alpha/2 - \eta\alpha\}$

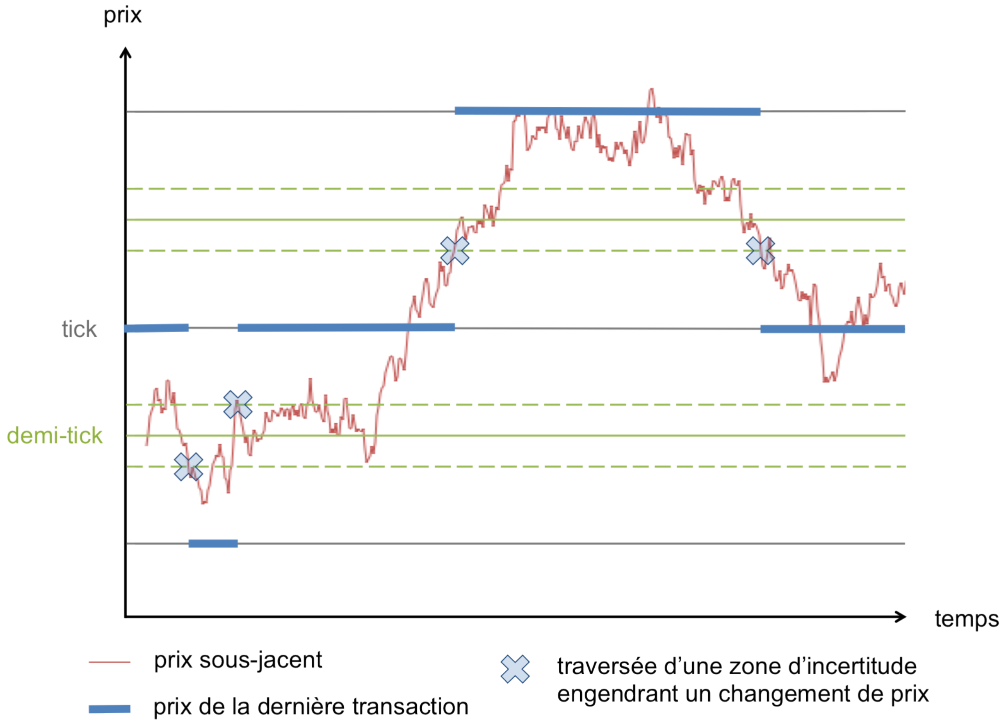

FIGURE 3: Dynamique du prix dans le modèle à zones d'incertitude

il y a une transaction au nouveau prix $P_{t_0} + \alpha$ (respectivement $P_{t_0} - \alpha$) au temps $\tau_{t_0}^{up}$ (respectivement $\tau_{t_0}^{down}$). Cette dynamique est illustrée en figure 3.

3.2 Spread implicite et volatilité par trade

Pour un actif qui n'est pas à grand tick et pour lequel on suppose aussi l'existence d'un prix sous-jacent, un "market taker" peut effectuer une vente ou un achat tant que ce prix sous-jacent est dans le spread. Ici, la zone d'achat et de vente est la zone d'incertitude, nous appelons donc spread implicite la largeur de cette zone, $2\eta\alpha$. Cette analogie entre $2\eta\alpha$ et le spread pousse à se demander si notre spread implicite est lié à la volatilité par trade comme c'est le cas pour le spread d'un actif à petit tick (relation (1) de la partie 2) par une relation du type :

$$\sigma_{tr} \approx 2\eta\alpha \tag{6}$$

[1] propose une justification théorique de cette relation. Nous considérons une transaction ayant augmenté le prix à un temps t. Le prix sous-jacent est :

$$X_t = P_t - (1/2 - \eta)\alpha$$

P_t est le premier prix possible supérieur à X_t. Le spread est d'un tick et contient X_t (voir 3.1), P_t est donc la valeur de l'ask et la transaction est un achat d'un "market taker". Le coût de l'ordre au marché associé est donc :

$$P_t - X_t = \alpha/2 - \eta\alpha$$

Dans la théorie classique, le coût d'un ordre au marché est nul par équilibre du marché. Dans le cas d'un actif à grand tick, ce coût est positif ce qui signifie que les "market takers" sont prêts à payer $\alpha/2 - \eta\alpha$ pour obtenir de la liquidité. Comme nous l'avons vu dans la partie 2.2, d'après [4], le gain unitaire d'un "market maker" est $S/2 -$ constante $* \sigma_{tr}$. Comme $S = \alpha$ et le gain des "market makers" est la perte des "market takers", on a bien :

$$\sigma_{tr} \approx \eta\alpha \tag{6}$$

Une conséquence de ce raisonnement est que η est au plus égal à 1/2. En effet le gain des "market makers" est $\alpha/2 - \eta\alpha$. Si $\eta > 1/2$, les "market makers" sont perdants et ils n'ont qu'à augmenter le spread pour ne plus l'être.

3.3 Effets d'un changement de tick

Tant que l'actif reste dans le régime grand tick, le ratio spread sur tick moyen est très proche de 1. Nous nous intéressons plutôt à l'évolution de η lors d'un changement de tick. Il s'agit en effet du paramètre clé du système permettant de juger de la taille du tick. Plus η est petit, plus le tick est grand (comparé à la zone d'incertitude dont la largeur $2\eta\alpha$ ne dépend pas du tick). $\eta = 1/2$ correspond à la limite du régime grand tick. Pour les auteurs de [1], il s'agit de la situation idéale.

Grâce à la relation (6) et en faisant les mêmes hypothèses que dans la partie précédente (voir 2.3), il est possible de prévoir l'évolution de η. On a : $M\alpha^\beta =$ constante et $\eta\alpha\sqrt{M} =$ constante. Ceci entraîne :

$$\eta\alpha^{1-\beta/2} = \text{constante}$$

On peut donc prévoir l'évolution de η qui résume la taille du tick. Il est en particulier possible de déterminer le tick tel que $\eta = 1/2$.

Conclusion

L'influence du tick relève de la théorie de la microstructure qui a été abondamment étudiée ces dernières années. En particulier, il existe des modèles de formation du spread. Celui de Madhavan *et al.* permet de prédire que le spread ne dépend pas du tick mais il n'est valable que pour des actifs ayant de petits ticks. Grâce au modèle à zones d'incertitude, il est possible d'étudier les actifs à grand tick, notamment de prévoir l'effet d'un changement de tick sur un paramètre η donnant une bonne indication de la taille du tick.

Toutefois, ces deux approches ne permettent d'étudier les changements de tick à l'intérieur d'un régime (grand tick ou petit tick). Or, pour éviter les défauts inhérents à l'un et l'autre de ces régimes (voir Introduction), la situation idéale se situe entre ces régimes. Il serait donc particulièrement intéressant de bâtir un modèle valable quelle que soit la taille du tick. Le régulateur serait alors capable de choisir le tick menant à une situation intermédiaire évitant les défauts des deux régimes extrêmes.

Lexique

Ask : prix le plus bas d'un ordre limite de vente disponible. Correspond au meilleur prix auquel un "market taker" peut acheter à un instant donné.

Bid : prix le plus haut d'un ordre limite d'achat disponible. Correspond au meilleur prix auquel un "market taker" peut vendre à un instant donné.

Carnet d'ordres : inventaire de tous les ordres (de vente et d'achat) disponibles à un moment donné.

Market maker : participant de marché envoyant des ordres limites à la fois à la vente et à l'achat.

Market taker : participant de marché souhaitant vendre ou acheter rapidement et étant donc obligé d'accepter le prix disponible (le bid ou l'ask).

Mid : milieu du spread.

Ordre limite : ordre du type : "j'accepte de vendre/acheter X unités à un prix d'au plus/moins Y €".

Ordre au marché : ordre du type : "je souhaite vendre/acheter X unités au meilleur prix proposé".

Spread (ou bid-ask spread) : différence entre l'ask et le bid.

Références

[1] K. Dayri et M. Rosenbaum (2013). Large tick assets : implicit spread and optimal tick size

[2] A. Madhavan, M. Richardson et M. Roomans (1997), Why do security prices change ? A transaction-level analysis of NYSE stocks, *Review of Financial Studies*, 10, 1035-1064.

[3] C.Y. Robert et M. Rosenbaum (2011), A new approach for the dynamics of ultra-high-frequency data : The model with uncertainty zones, *Journal of Financial Econometrics*, 9, 344-366.

[4] M. Wyart, JP. Bouchaud, J. Kockelkoren et Y. Aït-Sahalia (2005), Relation between bid-ask spread, impact and volatility in double auction markets, *Quantitative Finance*, 8, 41-57.