

# Introduction au domaine de recherche

## Théorie des matrices aléatoires

Guillaume DUBACH  
sous la direction de  
Philippe BIANE

### 1 Histoire de la théorie

L'étude des matrices aléatoires a aujourd'hui plus de quatre-vingts ans. Son histoire commence à la fin des années vingt : le statisticien John Wishart étudie alors des matrices de covariance empirique dont la taille est fixe, et les coefficients gaussiens. Son premier article à ce sujet paraît dans *Biometrika* en 1928 <sup>1</sup>.

Dans les années cinquante, ce sont des physiciens qui s'intéresseront à certaines matrices aléatoires, afin de mieux comprendre la spectroscopie des atomes lourds : en effet, les niveaux d'énergie atomique correspondent aux valeurs propres (ou aux écarts entre les valeurs propres) de *grands* opérateurs hermitiens, comme le hamiltonien. Eugène Wigner introduit les matrices aléatoires hermitiennes (GUE) pour étudier les propriétés statistiques de ces opérateurs, lorsque la taille de la matrice tend vers l'infini. C'est alors qu'il prouve le théorème qui porte son nom, et qui fera l'objet de notre troisième partie.



**John Wishart (1898-1956)**



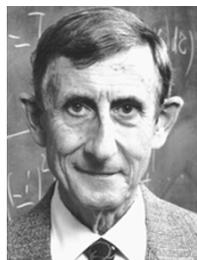
**Eugène Wigner (1902-1995)**

Dans les années soixante se développe une nouvelle approche : Freeman Dyson, Madan Lal Mehta et Michel Gaudin introduisent les processus *déterminantaux*; c'est à dire ceux dont les fonctions de corrélations sont données par un certain déterminant. C'est le cas de plusieurs processus liés aux matrices aléatoires. Le caractère déterminantal de ces processus est

---

<sup>1</sup> *The generalized product moment distribution in sample from a multivariate population.*

à l'origine de la *répulsion* observée entre les valeurs propres.



**Freeman Dyson (né en 1923)      Madan Lal Mehta (1932-2006)**

Le cadre des *probabilités libres*, introduit dans les années 80 par Dan-Virgil Voiculescu, met en perspective les résultats connus auparavant : un nouveau théorème-limite central est énoncé, dont la loi-limite est la loi de Wigner.

Dans les années quatre-vingt-dix, c'est la loi de la plus grande valeur propre qui est étudiée par Craig Tracy et Harold Widom (1993, puis 1994). Cette loi de Tracy-Widom apparaît naturellement dans d'autres contextes, comme le célèbre problème d'Ulam (loi de la taille de la plus grande sous-suite croissante dans une permutation aléatoire).

Nous proposons d'introduire ici quelques objets et résultats primordiaux de la théorie des matrices aléatoires : les processus déterminantaux en premier lieu, puis la loi du demi-cercle et le théorème de Wigner pour des matrices hermitiennes. Nous parlerons enfin de matrices unitaires, pour donner une élégante décomposition de la mesure de Haar sur  $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ . Cette décomposition nous permettra en dernière partie d'établir un théorème-limite central pour le polynôme caractéristique d'une matrice unitaire.

## 2 Les processus ponctuels déterminantaux

### 2.1 Processus ponctuels et fonctions de corrélation

Un processus ponctuel est une variable aléatoire concernant un certain nombre de *points* (dont le nombre n'est pas nécessairement fixé). Par exemple, la liste des dates des catastrophes aériennes sur une année. Voici comment on formalise cette idée : on se place sur un espace métrique  $(E, d)$  séparable et complet (on dit de cet espace qu'il est *polonais*) et l'on considère une variable aléatoire  $\mu : \Omega \times \mathfrak{B}(E) \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $\forall \omega \in \Omega$ ,  $\mu_\omega(\cdot) = \mu(\omega, \cdot)$  soit une mesure sur  $E$ , à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On pourra noter, d'une manière équivalente :

$$\mu_\omega = \sum_{i=1}^{n(\omega)} \delta_{X_i(\omega)},$$

où  $n : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  et les  $X_i : \Omega \rightarrow E$  sont des variables aléatoires.

De ce processus ponctuel sur  $E$  découle naturellement un processus ponctuel sur  $E^k$ .  $\forall k > 0$  on pose :

$$\mu^{(k)} = \sum_{i_1, \dots, i_k \text{ distincts} \in \{1, \dots, n\}} \delta_{(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})}.$$

On note  $M^{(k)}(\cdot) = \mathbb{E}[\mu^{(k)}(\cdot)]$  la mesure sur  $E^k$  associée à ce processus. Pour  $k = 2$ , par exemple, il s'agit de considérer la densité des *couples* de catastrophe aériennes. Dans ce cas précis, comme les événements considérés sont supposés indépendants, cette mesure sera triviale. D'une manière générale, elle nous indique dans quelle mesure les *points* du processus ponctuel sont *corrélés*. D'où la définition suivante :

**Définition 2.1** *S'il existe une mesure naturelle  $\lambda$  sur  $E$ , et si la mesure  $M^{(k)}$  est absolument continue par rapport à  $\lambda^{(k)}$ , on appelle fonction de corrélation d'ordre  $k$  la densité de  $M^{(k)}$ , donc la fonction  $\rho_k : E^k \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :*

$$\forall B_1, \dots, B_k \in \mathfrak{B}(E), M^k(B_1 \times \dots \times B_k) = \int_{B_1 \times \dots \times B_k} \rho_k(x_1, \dots, x_k) d\lambda(x_1) \dots d\lambda(x_k).$$

On peut imaginer qu'il s'agit de la probabilité asymptotique (et normalisée) d'avoir exactement un point au voisinage de chaque  $x_k$ . En revanche, il est bien évident que  $\rho_k$  n'est pas une densité de probabilité : son intégrale sur  $E^k$  est égale au nombre de  $k$ -uplets  $(i_1, \dots, i_k)$  que l'on peut choisir. Par exemple, si  $n$  est égale à  $N$  p.s., le poids total de la mesure  $M^k$  est  $\frac{N!}{(N-k)!}$ . C'est le cas des processus ponctuels qui nous intéresseront ici, puisque le nombre de valeurs propres d'une matrice aléatoire est connu.

**Fait 2.2** *Lorsque le processus  $\mu$  a un nombre total de points constant à  $N$ , on a la relation suivante entre  $\rho_k$  et  $\rho_{k+1}$  :*

$$(N - k)\rho_k(x_1, \dots, x_k) = \int_E \rho_{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1}) d\lambda(x_{k+1}).$$

Cette propriété des fonctions de corrélations, pour un nombre de points fixe, nous permet de toutes les connaître en ne calculant que  $\rho_N$ . Les processus ponctuels qui nous intéressent ici présentent de plus une structure *déterminantale* qui facilite grandement leur étude.

## 2.2 Répulsion déterminantale

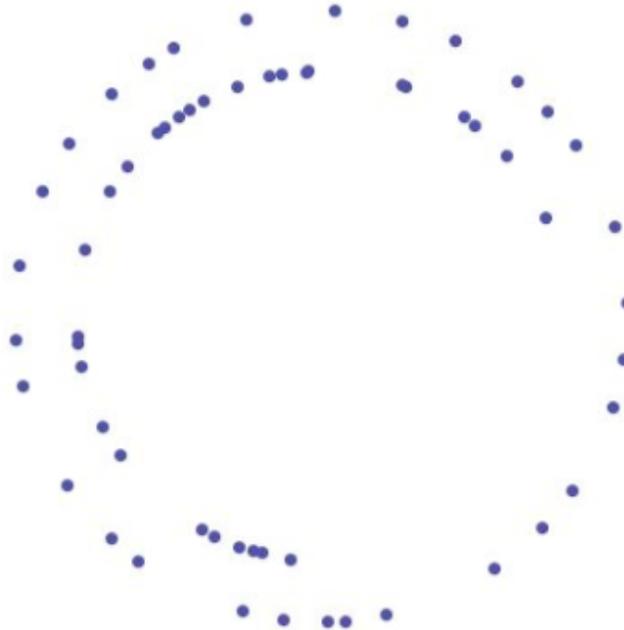
**Définition 2.3** *Supposons qu'il existe une fonction  $K : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :*

$$\rho_k(z_1, \dots, z_k) = \det [K(z_i, z_j)_{i,j=1,\dots,k}]$$

*On dit alors que le processus ponctuel  $\mu$  est un processus déterminantal de noyau  $K$ .*

Le fait qu'un processus ponctuel soit déterminantal traduit une certaine répulsion entre les points. En effet, un tel déterminant s'annule sur les droites d'équations  $z_i = z_j$  ( $i \neq j$ ). Par conséquent  $\rho_k$  prend des valeurs faibles au voisinage de ces droites, et il est peu probable que des points soient très rapprochés. Cette répulsion est parfois qualifiée de *fermionique*, dans la mesure où les fermions (electrons, muons, neutrinos...) ne peuvent pas se trouver dans le même état au même endroit, selon le principe d'exclusion de Pauli.

## 2.3 Loi des séries : un malentendu ?



**Cercle extérieur : valeurs propres du CUE, pour  $n = 30$ .**

**Cercle intérieur : trente points indépendamment distribués.**

Il arrive, en milieu probabiliste, d'évoquer avec dédain ce que le commun des mortels appelle *loi des séries*. Il s'agit, comme chacun sait, d'une superstition populaire que l'on pourrait résumer par la formule : *jamais deux sans trois* — qui par un principe de récurrence à deux termes devient souvent :  $\forall n \geq 2$ , *jamais  $n$  sans  $n + 1$* .

Émile Borel, dans un livre à destination d'un public assez large<sup>2</sup>, réfutait déjà ce type de paradoxes : une série rapprochée de catastrophes aériennes n'en annonce pas une autre ; elle n'est pas non plus la conséquence d'une corrélation entre ces catastrophes, mais au contraire elle est, en un sens, le signe éclatant que ces événements sont bien indépendants, et c'est le contraire qui serait inquiétant : des catastrophes se produisant à intervalles réguliers...

C'est aussi ce que nous montre une rapide comparaison des processus déterminantaux avec d'autres processus ponctuels : les points d'un processus sont *d'autant mieux* répartis qu'ils sont *plus* corrélés ; et réciproquement, des valeurs indépendantes auront tendance à s'agglutiner, à former des petits groupes. Cette remarque, ainsi formulée, ne heurte pas le sens commun, et donne une explication satisfaisante à ce paradoxe quotidien de la *loi des séries*.

---

<sup>2</sup> *Valeur pratique et philosophie des probabilités*, 1939.

### 3 La loi de Wigner

Le premier modèle que nous étudions est celui des matrices hermitiennes aléatoires, qui composent ce que l'on appelle *l'ensemble unitaire gaussien*, ou GUE.

**Définition 3.1** *Les matrices du GUE sont des matrices aléatoires hermitiennes de taille  $n \times n$  (on fera tendre  $n$  vers  $+\infty$ ) et dont les entrées sont :*

$$M = (m_{i,j})_{i,j=1}^n \in \text{GUE} \quad \Leftrightarrow \quad m_{i,j} = \overline{m_{j,i}} = X_{i,j} + iY_{i,j},$$

où les  $X_{i,j}, Y_{i,j}$  sont i.i.d. de loi normale, centrée, réduite.

On appelle cet ensemble GUE car sa loi est invariante par l'action des matrices unitaires. Grâce est ici faite au lecteur des calculs de densités suivants, dont il trouvera une exposition rigoureuse en l'ouvrage de référence [4].

**Fait 3.2** *La loi du GUE est à absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , avec pour densité :*

$$(2\pi)^{-n^2} e^{-\frac{1}{2}\text{tr}M^2} dM.$$

**Fait 3.3** *Les valeurs propres des matrices du GUE sont distribuées sur  $\mathbb{R}^n$  selon la densité :*

$$d_{\text{GUE}}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = Z_n^{-1} e^{-\frac{n}{2}\sum_{i=1}^n \lambda_i^2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |\lambda_i - \lambda_j|^2 d\lambda_1 \dots d\lambda_n.$$

**Fait 3.4** *Le processus ponctuel des valeurs propres du GUE est un processus déterminantal.*

**Explication.** Il s'agit d'un processus ponctuel dont le nombre de points est constant ( $n$  valeurs propres, où  $n$  est la taille des matrices considérées). La fonction de corrélation d'ordre  $n$  est proportionnelle à la densité de la mesure précédente :  $\rho_n = n! d_{\text{GUE}}$ , et les autres se déduisent d'elle par intégration. Pour faire apparaître un déterminant, on commence par reconnaître dans la formule ci-dessus le carré d'un déterminant de Vandermonde, que l'on transforme ensuite à l'aide des polynômes et des fonctions de Hermite pour obtenir le noyau  $K_n(x, y)$  du GUE. Les résultats obtenus quand  $n \rightarrow \infty$  concernent donc l'asymptotique de ce noyau, et celle des polynômes orthogonaux.

**Définition 3.5** *On appelle **loi de Wigner**, ou **loi du demi-cercle** sur l'intervalle  $[-a; a]$  la loi dont la densité, notée  $\mu_W$ , forme une demi-ellipse au-dessus de cet intervalle :*

$$\mu_W(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi a^2} \sqrt{a^2 - x^2} & \text{si } x \in [-a; a] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est la loi du demi-cercle pour  $a = 2$  qui va apparaître naturellement ici, après renormalisation. Les moments de cette loi ont une forme remarquable :

**Fait 3.6** *Les moments pairs de la loi de Wigner sur  $[-2; 2]$  sont donnés par les nombres de Catalan. Un calcul méchamment taupinal nous donne en effet :*

$$\forall k \geq 0 \quad \begin{cases} m_{2k} & = C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \\ m_{2k+1} & = 0. \end{cases}$$

Quand  $n$  tend vers l'infini, la taille des valeurs propres évolue en  $\sqrt{n}$ . On s'intéresse donc au processus ponctuel des valeurs propres de la matrice  $\frac{M}{\sqrt{n}}$ , qui s'écrit ainsi :

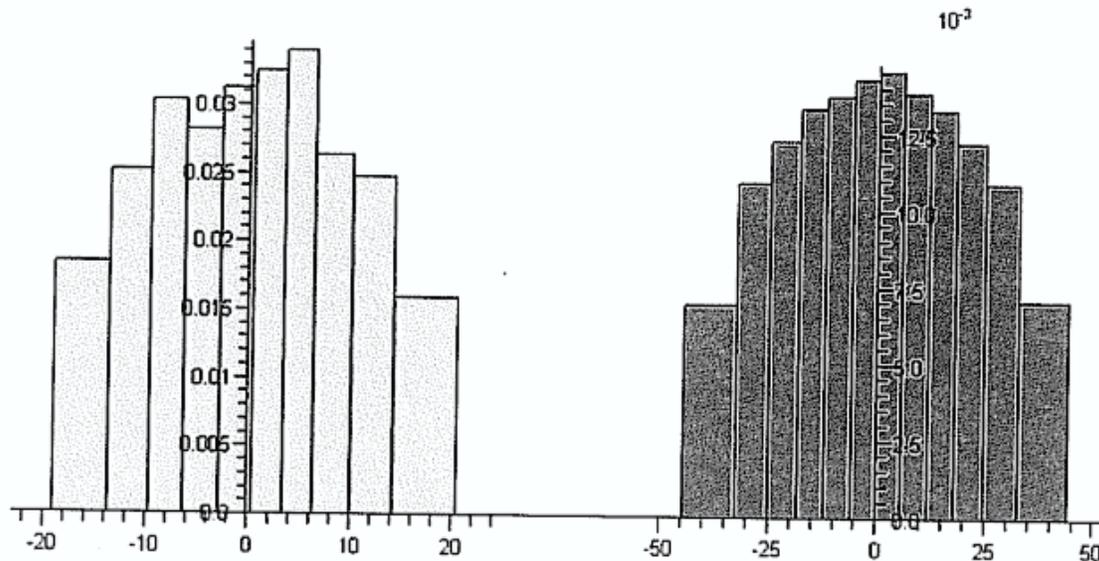
$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{\frac{\lambda_k}{\sqrt{n}}}$$

On peut dès à présent énoncer le théorème de Wigner, sorte de théorème-limite central pour les valeurs propres des matrices aléatoires, dont la loi-limite n'est pas la loi gaussienne, mais la loi du demi-cercle.

**Théorème 3.7** *Quand  $n$  tend vers  $\infty$ , le processus ponctuel des valeurs propres normalisées converge (en loi) vers la loi de Wigner sur l'intervalle  $[-2; 2]$ .*

La preuve de ce résultat se fait par la *méthode des moments* : en effet, les moments de la mesure empirique associée aux valeurs propres convergent vers ceux de la loi du demi-cercle. L'une des démonstrations de ce résultat fait intervenir la théorie des graphes d'une manière élégante et naturelle.

**Vérification expérimentale :** on peut se convaincre de ce résultat en regardant la répartition statistique des valeurs propres<sup>3</sup>, pour  $n = 100$  et  $n = 500$ .



**Remarque :** dans le premier cas,  $\sqrt{100} = 10$ , d'où un cercle de rayon 20; dans le second cas,  $\sqrt{500} \simeq 22,4$ ; d'où un cercle de rayon 44,8!

## 4 Matrices unitaires aléatoires

Nous introduisons dans cette partie les matrices unitaires.  $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$  étant un groupe compact, la manière de choisir ces matrices n'est plus gaussienne sur les coefficients; il existe une manière

<sup>3</sup>Source : application numérique d'Anisa Caja.

uniforme, plus naturelle, de choisir  $U \in \mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ .

## 4.1 La mesure de Haar et sa décomposition naturelle

**Définition 4.1** *La mesure de Haar, notée  $\mu_{\mathbb{U}_n}$  est l'unique mesure de probabilité invariante sur  $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ ; c'est-à-dire que si  $U$  est choisie selon cette mesure, et si  $A \in \mathbb{U}_n(\mathbb{C})$  est une matrice fixée, on a l'égalité en loi :*

$$U \underset{\text{loi}}{=} A.U \underset{\text{loi}}{=} U.A$$

On appelle CUE (Circular Unitary Ensemble) l'ensemble des matrices aléatoires unitaires choisies selon la mesure de Haar.

Une première intuition de la mesure de Haar est celle-ci : pour choisir une matrice  $U$  au hasard, on applique le procédé de Gram-Schmidt à une matrice de l'ensemble de Ginibre (i.e. une matrice complexe aléatoire dont les coefficients sont i.i.d. et gaussien).

Nous donnons ici une factorisation utile de la mesure de Haar, exposée dans [1]. Cette factorisation n'utilise que la définition ci-dessus ; il en découle un algorithme concret pour choisir une matrice du CUE.

**Proposition 4.2** *Soit  $M \in \mathbb{U}_{n+1}(\mathbb{C})$  une réflexion aléatoire telle que la première colonne  $M_1 = M.e_1$  soit choisie de manière uniforme sur  $\mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{C})$  (les autres colonnes en découlent, puisque  $M$  est une réflexion), et soit  $U_n \in \mathbb{U}_n(\mathbb{C})$  une matrice choisie selon  $\mu_{\mathbb{U}_n}$  indépendamment de  $M$ . Alors la matrice*

$$U_{n+1} := M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_n \end{pmatrix}$$

*est distribuée selon la mesure  $\mu_{\mathbb{U}_{n+1}}$ .*

Cette proposition se démontre par une méthode directe, en utilisant les propriétés d'invariance et d'unicité de la mesure de Haar.

Une matrice du CUE a des valeurs propres de module 1, que l'on note  $e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}$  avec  $0 \leq \theta_1 < \dots < \theta_n < 2\pi$ . C'est la répartition de ces  $\theta_i$  dans l'intervalle  $[0, 2\pi[$  qui nous intéresse.

**Fait 4.3** *Les arguments des valeurs propres des matrices du CUE sont distribuées sur  $[0, 2\pi[$  selon la densité :*

$$d_{\text{CUE}}(\theta_1, \dots, \theta_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{1 \leq j < k \leq n} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2$$

**Fait 4.4** *Le processus ponctuel des valeurs propres du CUE est un processus déterminantal.*

En effet, les mêmes techniques que dans le cas du GUE permettent de mettre les fonctions de corrélation sous la forme :

$$\rho_k^{\mathbb{U}_n(\mathbb{C})}(\theta_1, \dots, \theta_k) = \det_{k \times k} (K^{\mathbb{U}_n(\mathbb{C})}(\theta_i - \theta_j)),$$

où le noyau prend une expression très simple :

$$K^{\mathbb{U}_n(\mathbb{C})}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}, \text{ prolongé en } 0 \text{ par } \frac{n}{2\pi}.$$

## 4.2 Loi du polynôme caractéristique

**Définition 4.5** *Le polynôme caractéristique d'une matrice du CUE est défini ainsi :*

$$Z_n(U, \phi) = \det(I - e^{-i\phi}U) = \prod_{k=1}^n (1 - e^{i(\theta_k - \phi)}),$$

où  $U$  est choisie selon  $\mu_{\mathbb{U}_n}$ . Comme  $\phi$  n'a aucune influence sur la distribution de ces valeurs, on peut se restreindre à  $\phi = 0$  et noter simplement  $Z_n$ .

**Théorème 4.6** *On a l'égalité en loi :*

$$Z_n \stackrel{\text{loi}}{=} \prod_{k=1}^n (1 - e^{i\omega_k} \sqrt{\beta_{1,k-1}}),$$

où les variables  $\omega_1, \dots, \omega_n, \beta_{1,0}, \dots, \beta_{1,n-1}$  sont indépendantes, les  $\omega_k$  distribués uniformément sur  $[0, 2\pi[$  et les  $\beta_{1,k-1}$  ( $k \neq 1$ ) distribués sur  $[0, 1]$  selon la densité :

$$(k-1)(1-x)^{k-2} dx.$$

Par convention,  $\beta_{1,0} := \delta_1$ .

**Preuve.** Le théorème est vraie pour  $n = 1$  : d'une part le déterminant d'une matrice du CUE de taille  $1 \times 1$  est de même loi que  $(1 - e^{\omega_1})$ ; et c'est bien ce que donne la formule puisque  $\beta_{1,0}$  est le Dirac en 1.

On suppose l'égalité au rang  $n$  et l'on utilise la factorisation 4.6 pour démontrer le résultat par récurrence.

$$Z_{n+1} = \det(I - U_{n+1}) \stackrel{\text{loi}}{=} \det \left[ I - M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_n \end{pmatrix} \right].$$

Pour utiliser l'hypothèse de récurrence, il nous faut faire apparaître  $\det(I - U_n)$  grâce au lemme taupinal suivant :

**Lemme 4.7** *Si  $M$  est une réflexion de  $\mathbb{U}_{n+1}(\mathbb{C})$  et  $U \in \mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ , on a :*

$$\det_{(n+1) \times (n+1)} \left[ I - M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \right] = (1 - M_{1,1}) \det_{n \times n} (I - U).$$

On laisse la démonstration de ce lemme au lecteur, ou à son tapir. On a donc, par hypothèse de récurrence :

$$Z_{n+1} \stackrel{\text{loi}}{=} (1 - M_{1,1}) Z_n = (1 - M_{1,1}) \prod_{k=1}^n (1 - e^{i\omega_k} \sqrt{\beta_{1,k-1}}),$$

où  $M_{1,1}$  est une variable indépendante de  $Z_n$ , et distribuée comme la première coordonnée d'un vecteur aléatoire choisi uniformément sur  $\mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{C})$ . Il reste à montrer que sa loi est celle de  $e^{i\omega_{n+1}}\sqrt{\beta_{1,n}}$ . Voilà une manière de le voir : si les variables  $x_1, y_1, \dots, x_{n+1}, y_{n+1}$  sont des gaussiennes i.i.d., alors

$$M_{1,1} \stackrel{\text{loi}}{=} \frac{x_1 + iy_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2}}.$$

L'argument et le module de cette variable sont indépendants. Le premier est distribué uniformément sur  $[0, 2\pi[$  (d'où  $e^{i\omega_{n+1}}$ ), quant au second :

$$|M_{1,1}|^2 \stackrel{\text{loi}}{=} \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1^2 + y_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2}.$$

Cette distribution est celle de  $\beta_{1,n}$ ; propriété bien connue des lois  $\beta$ . □

### 4.3 Un théorème-limite central pour le polynôme caractéristique

**Théorème 4.8 (Théorème-limite central pour le CUE)** *Si  $Z_n$  est le polynôme caractéristique d'une matrice du CUE défini plus haut, on a la convergence en loi suivante :*

$$\frac{\ln Z_n}{\sqrt{\ln n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}_1(0, 1) + i\mathcal{N}_2(0, 1).$$

Où  $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$  sont des variables réelles gaussiennes indépendantes.

Nous proposons de ce théorème la preuve donnée par Bourgade, Hughes, Nikeghbali et Yor en 2008 ([1]).

**Preuve.** On commence par écrire, en suivant le théorème 4.6 :

$$\ln Z_n \stackrel{\text{loi}}{=} \sum_{k=1}^n \ln(1 + e^{i\omega_k} \sqrt{\beta_{1,k-1}}).$$

En toute rigueur, une petite vérification est nécessaire pour s'assurer que le logarithme est défini de manière cohérente. L'idée est alors de formaliser le raisonnement suivant : la variable  $\beta_{1,k-1}$  tend vers un Dirac en zéro quand  $k$  tend vers l'infini ; on a donc  $\ln(1 + e^{i\omega_k} \sqrt{\beta_{1,k-1}}) \simeq e^{i\omega_k} \sqrt{\beta_{1,k-1}}$  dont la distribution angulaire est uniforme ; enfin, on appliquerait un théorème-limite central classique pour  $\sum \cos(\omega_k) \sqrt{\beta_{1,k-1}}$ .

Plus rigoureusement, on écrit :

$$\ln Z_n = \sum_{k=1}^n e^{i\omega_k} \sqrt{\beta_{1,k-1}} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n e^{2i\omega_k} \beta_{1,k-1} + \sum_{m \geq 3} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{m+1}}{m} (e^{i\omega_k} \sqrt{\beta_{1,k-1}})^m.$$

La première somme est le terme dominant attendu, et les variables  $Y_k = \cos(\omega_k) \sqrt{\beta_{1,k-1}}$  font l'objet du théorème-limite central de Lyapounov.



Алекса́ндр Миха́йлович Ляпуно́в

### Théorème-limite central de Lyapounov :

Soient  $Y_1, Y_2, \dots$  des variables centrées indépendantes. Supposons qu'il existe  $\eta > 0$  tel que les moments d'ordre  $2 + \eta$  existent, et que la **condition de Lyapounov** soit vérifiée : si l'on note  $s_n^2 := \sum \sigma_k^2$ ,

$$\frac{1}{s_n^{2+\eta}} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[|Y_k|^{2+\eta}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Sous ces hypothèses, on a la convergence en loi :

$$\frac{\sum Y_k}{s_n} \xrightarrow[\text{loi}]{} \mathcal{N}(0, 1).$$

On peut vérifier ces conditions pour  $\eta = 2$ . Il suffit de calculer les moments d'ordre 2 et 4 en utilisant la formule des moments des lois  $\beta$  et les intégrales de Wallis :

$$\mathbb{E}[\cos^2(\omega_k)\beta_{1,k-1}] = \mathbb{E}[\cos^2(\omega_k)] \frac{1}{k} = \frac{1}{2k} \quad \text{d'où } s_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{1}{2} \ln n},$$

$$\mathbb{E}[\cos^4(\omega_k)\beta_{1,k-1}^2] = \mathbb{E}[\cos^4(\omega_k)] \frac{2}{k(k-1)} = \frac{3}{2k(k-1)}.$$

D'où vient que dans la condition de Lyapounov, la série des moments d'ordre 4 converge, tandis que  $s_n$  diverge. On peut donc appliquer le théorème, qui nous donne :

$$\sum_{k=1}^n \frac{\cos(\omega_k) \sqrt{\beta_{1,k-1}}}{\sqrt{\frac{1}{2} \ln n}} \xrightarrow[\text{loi}]{} \mathcal{N}(0, 1).$$

Et enfin

$$\sum_{k=1}^n \frac{e^{i\omega_k} \sqrt{\beta_{1,k-1}}}{\sqrt{\frac{1}{2} \ln n}} \xrightarrow[\text{loi}]{} \mathcal{N}_1 + i\mathcal{N}_2.$$

Il faut encore montrer que les autres sommes sont négligeables dans l'expression de  $\ln Z_n$ . La deuxième somme est une martingale bornée dans  $L^2$  (cf. les moments d'ordre 4 ci-dessus) ; elle converge p.s. et :

$$\sum_{k=1}^n \frac{e^{2i\omega_k} \beta_{1,k-1}}{\sqrt{\frac{1}{2} \ln n}} \xrightarrow[\text{loi}]{} 0 \text{ p.s.}$$

Enfin, la troisième somme se majore naturellement par une variable bornée p.s. :

$$\left| \sum_{m \geq 3} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{m+1}}{m} (e^{i\omega_k} \sqrt{\beta_{1,k-1}})^m \right| < B := \sum_{m \geq 3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m} (\sqrt{\beta_{1,k-1}})^m.$$

On vérifie en effet que  $\mathbb{E}[B] < \infty$ , d'où  $B < \infty$  p.s., et de même que dans le cas  $m = 2$  le quotient par  $\sqrt{\frac{1}{2} \ln n}$  tendra vers 0 presque sûrement. Le premier terme est donc dominant, et la preuve est achevée.  $\square$

## 5 Conclusion

Les matrices aléatoires sont étudiées aujourd'hui en lien avec de nombreux autres domaines de la Science : la physique nucléaire, mais aussi la théorie du chaos, ou la théorie des nombres. Pour ne donner qu'un exemple, il semble que les zéros de la fonction  $\zeta$  de Riemann soient répartis comme les valeurs propres d'un opérateur unitaire ; et par ailleurs les valeurs prises par  $\zeta$  sur sa droite critique vérifient un théorème-limite central analogue à celui que nous venons d'énoncer pour le polynôme caractéristique du CUE<sup>4</sup>.



## Références

- [1] P. Bourgade, C.P. Hughes, A. Nikeghbali, M. Yor, *The characteristic polynomial of a random unitary matrix : a probabilistic approach*, Duke Mathematical Journal **145**, 1 (2008), 45-69
- [2] Y.V. Fyodorov, *Introduction to the Random Matrix Theory : Gaussian Unitary Ensemble and Beyond*, in Recent Perspectives in Random Matrix Theory and Number Theory, London Mathematical Society Lecture Note Series **322**
- [3] J.P. Keating, N.C. Snaith, *Random Matrix Theory and  $\zeta(1/2 + it)$* , Comm. Math. Phys. **214** (2000), 57-89.
- [4] M.L. Mehta, *Random Matrices*, Pure and Applied Mathematics Series **142**, Elsevier Ac. Press, 2004

---

<sup>4</sup>Résultat de Selberg.