Introduction à un domaine de recherche : Percolation sur des graphes non moyennables

Raphael Ducatez

2/10/2014

Introduction

La théorie de la percolation a pour but d'étudier des caractéristiques de graphes aléatoires. Historiquement les graphes $\mathbb{Z}^2$ et $\mathcal{Z}^3$ avec une loi de Bernoulli indépendante ont été les premiers modèles étudiés et intéressent encore beaucoup les physiciens qui travaillent en physique statistique ou en physique des matériaux. Mais la théorie de la percolation est un domaine beaucoup plus vaste.

Certains graphes ont la propriété d'être moyennable, à savoir que l'on peut choisir des volumes finis tels que le bord de volume ait un nombre d'arêtes négligeable par rapport au volume total ($\mathbb{Z}^d$ par exemple). Il apparait que dans la théorie de la percolation, les graphes moyennables et les graphes non moyennables se comportent de manières singulièrement différente. Le but de cette introduction est de présenter quelques unes de ces propriétés. On abordera en particulier les questions classiques de la théorie qui concernent les composantes connexes et plus particulièrement les composantes connexes infinies.

1 Premières propriétés sur la percolation de Bernoulli sur des graphes de Cayley

Soit $(G, E))$ un graphe (avec G qui désigne l'ensemble des sommets et E qui désigne l'ensemble des arêtes). L'espace étudié est l'espace mesurable $2^G \times 2^E$ où la tribu de notre espace est la σ-algèbre engendrée par les ensembles $[\omega \subset (G, E) : e \in \omega]$ avec e une arête ou un sommet du graphe. La percolation est la donné d'une loi aléatoire sur cet ensemble.

Parmi les autres graphes étudiés on choisira souvent ceux ayant une certaine symétrie. les graphes de Cayley seront notre exemple type sur lequel nous travaillerons. On rappelle que les groupes dénombrables engendrés par un nombre fini d'éléments peuvent être représenté par des graphes appelés graphes de Cayley de la manière suivante : les sommets sont les éléments du groupe, les arêtes sont les $[x, xs]$ où x sont les éléments du groupe et s sont des éléments d'un ensemble de générateurs S fixé). Remarquez que pour ces graphes, aucun sommet ne joue de rôle particulier par rapport aux autres (par exemple, ils ont tous le même nombre de voisins).

1.1 Nombre de composantes connexes infinies

On rappelle tout d'abord un résultat très utile en théorie de la mesure

Rappel : approximation ouvert-fermé Soit $(X, \mathbb{B}, \mu)$ un espace de probabilité et soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un ensemble de parties qui engendre la tribu $\mathbb{B}$. Alors pour tout $B \in \mathbb{B}$ et tout $\epsilon > 0$, il existe B' union finie d'intersections finies d'éléments de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\mu(B\Delta B') < \epsilon$. (notation : $B\Delta B' = B \cup B' - B \cap B'$.)

Cette propriété nous est très utile car comme la tribu de notre espace mesurable est engendrée par les $[e \in \omega]$ où e est une arête (ou un sommet) du graphe. Alors quel que soit l'évènement mesurable considéré, il est possible de l'approximer en ne considérant qu'un nombre fini d'arêtes (ou de sommets).

En utilisant ceci et en remarquant que deux évènements qui prennent en compte des arêtes différentes sont indépendants pour la percolation de Bernoulli indépendante, il est facile d'en déduire la propriété suivante qui est valable pour tout graphe G admettant un groupe $\mathcal{G} \subset Aut(G)$ des automorphismes de graphes qui soit **transitif** (ie $\forall x, y \in G\ \exists g \in (G)\ g(x) = y$) :

1.1.1 Mélangeante

L'action de $\mathcal{G}$ (transitive) est mélangeante pour la percolation de Bernoulli indépendante. (ie : $\forall A, B\ \forall \gamma_n \in \mathcal{G}$ tel que $\forall x : d(\gamma_n(x), x) \to \infty$ alors $\mu(A \cap \gamma_n^{-1}B) \to \mu(A)\mu(B)$)

En particulier elle est ergodique (ie Les évènements invariants ont une probabilité soit 0 soit 1). En principe tout évènement où on ne nomme pas explicitement un sommet ou une arête est $\mathcal{G}$ invariant.
Par exemple "l'ensemble des graphes n'ayant pas de composante connexe infinie". D'où le corollaire suivant :
(Corollaire) *Les évènements "il y a n composantes connexes infinies dans le graphe" (avec $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) sont de probabilité soit 0 soit 1.* En fait, il n'est pas possible d'avoir un nombre fini de composantes connexes infinies strictement supérieur à 1.

1.1.2 Théorème 0,1,∞

Selon la valeur du paramètre p de la percolation de Bernoulli indépendante (avec μ_p la loi de probabilité) :
soit μ_p presque sûr il n'y a pas de composante connexe infinie.
soit μ_p presque sûr il y a une unique composante connexe infinie.
soit μ_p presque sûr il y a un infinité de composantes connexes infinies.

Démonstration Supposons qu'il y ait un entier n supérieur ou égal à 2 tels que presque sûrement le nombre de composantes connexes infinies est n. Alors il existe x et y des sommets du graphe tel que avec une probabilité non nulle x et y appartiennent à deux composantes connexes infinies différentes. Appelons C cet évènement. Soit un chemin $l = e_1, e_2, ..., e_k$ du graphe reliant x à y. Alors $\Pi_l(C) = [\omega \cup e_1, e_2..., e_n : \omega \in C)$ est aussi de mesure non nulle (on dit que la loi de Bernoulli indépendante est "tolérance à l'insertion d'un chemin"). Or conditionnellement à $\Pi_l(C)$ il y a au plus $n-1$ composantes connexes infinies ce qui est absurde.
$\square$

Il est souvent possible d'adapter cette démonstration pour généraliser à d'autres lois de percolation du moment qu'elles sont tolérantes à l'insertion d'une arête ($\mu(A) > 0 \Rightarrow \mu(\Pi_e(A)) > 0$,($e$ une arête).

Mieux encore, on a le théorème suivant (ADMIS) :

1.1.3 Théorème : Transition de phases

Soit p tel que μ_p presque sûr il y une unique composante connexe infinie. alors pour tout $p' > p$, $\mu_{p'}$ presque sûr il y une unique composante connexe infinie. Aussi on peut définir $p_c \leq p_u$ tel que
$\forall p \in [0, p_c[$, μ_p presque sûr il n'y a pas de composante connexe infinie.
$\forall p \in]p_c, p_u[$, μ_p presque sûr il y a une infinité de composantes connexes infinies.
$\forall p \in]p_u, 1]$, μ_p presque sûr il y a une unique composante connexe infinie.

Ce théorème est la base de toute une branche de la théorie des percolations. Étudier le modèle aux valeurs critiques p_u et p_c en particulier se révèle très difficile.
remarquez tout de même que p_c est bien défini, en effet si p est fixé de tel sorte qu'il y ait aucune composante connexe infinie μ_p presque sûr, alors quelque soit $p' < p$ il n'y a aucune composante connexe infinie $\mu_{p'}$ presque sûr.

Pour fixer les idées voici un exemple simple ($\{0,1\}^{2*F_2}, \mu_p$) le graphe de Cayley du groupe libre engendré par deux éléments. La percolation produits des arbres de Galton Watson avec une espérance du nombre d'enfants par génération $m = 3p$. L'existence d'arbre infini et équivalente à la survis de l'espèce et on sait grâce à la théorie des chaînes de Markov que c'est équivalente à $m > 1$. conclusion :
Si $p = 1$ alors presque surement il y une unique composante connexe infinie (trivial).
Si $1 > p > \frac{1}{3}$ il y a presque surement une infinité de composantes connexes infinies.
Si $p \leq \frac{1}{3}$ il y a presque surement aucune composante connexe infinie.

2 Notion de graphes non moyennable

2.1 La condition de Folner et le rayon spectral

2.1.1 Définition : Condition de Folner

Soit (G, E) un graphe, on peut définir une constante i :

$$i((G,E)) =_{def} inf[\frac{|\partial A|}{|A|} : A \subset G fini] \tag{1}$$

Où $\partial A =_{def} [x \in (G - A) : \exists y \in A\ ,\ (x, y) \in E] \subset G$ est la frontière de A, et $|A|$ est le cardinal de A.

On dira que (G, E) vérifie la **condition de Folner** si $i((G, E)) = 0$. On dira aussi que le graphe est **moyennable**.

L'étymologie de "moyennable" pour les graphes vient de la notion de groupe moyennable qui avait été introduite par Von Neumann pour analyser le paradoxe de Banach Tarski. Sur certain groupes il est possible de construire une application positive et finement additive appelée "moyenne" qui soit invariante par action du groupe. Et il se trouve que l'on a l'équivalence suivante

$$\textit{Le groupe est moyennable} \Leftrightarrow \textit{le graphe de Cayley vérifie la condition de Folner.} \tag{2}$$

Exemples :
-$\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{Z}^n$ est moyennable.
-Le groupe libre engendré par 2 éléments n'est pas moyennable.

La notion de moyennable peut également être reliée à l'opérateur Laplacien qui apparaît naturellement dans les processus de diffusion et les marches aléatoires. Ci-dessous, la définition est donnée pour un graphe de Cayley d'un groupe Γ ayant un ensemble de générateur S. Mais il est possible de généraliser aux autres graphes en faisant la somme sur les plus proches voisins.

2.1.2 Définition : rayon spectrale

On peut définir l'opérateur laplacien : $L_S|\ell^2(\Gamma) \to \ell^2(\Gamma)$.

$$\begin{aligned} \forall \gamma \in \Gamma\ L_S(f)(\gamma) &=_{def} \frac{1}{|S|}\sum_{s\in S} f(\gamma s) - f(\gamma) && (3) \\ &=_{def} P_S - I && (4) \end{aligned}$$

On appelle rayon spectrale ρ la borne supérieur du spectre de l'opérateur P_S. On peut encore donner une auter définition de "moyennable".

$$\rho = 1 \Leftrightarrow \textit{le graphe vérifie la condition de Folner.} \tag{5}$$

Pour illustrer la pertinence de cette notion voici deux petites propriétés techniques :

2.2 Deux petits lemmes techniques

(voir [2])

2.2.1 Lemme : une condition pour l'existence de composantes connexes infinies

Soit (G, E) un graphe non moyennable (avec $degr(x) = N$). Si

$$p > \frac{1}{1 + Ni(G, E)} \tag{6}$$

Alors pour la percolation de Bernoulli de paramètre p, il existe une composante connexe infinie presque sûrement.

Démonstration On cherche à construire une composante connexe issue de o par récurrence. On définira :
A_n un ensemble de sommets connecté à "o".
H_n un ensemble d'arêtes de E_S qui ne sont pas dans la percolation et sont à la frontière de A_n
- $A_0 = \{o\}$, $H_0 = \emptyset$.
- Supposons A_n et H_n construit alors si $\forall y \in \partial A_n \forall x \in A_n, (x, y) \in E_S \Rightarrow (x, y) \in H_n$, on arrête la construction et l'ensemble H_n isole la composante connexe issu de o.
Sinon soit $y \in \partial A_n, x \in A_n, (x, y) \in E_S : (x, y) \in \neg H_n$. Par indépendance de la percolation de Bernoulli de paramètre p, $\mu_p([\omega : (x, y) \in \omega \mid A_n, H_n]) = p$. Si $(x, y) \in \omega$ alors $A_{n+1} := A_n \cup \{y\}$, $H_{n+1} = H_n$. sinon $A_{n+1} := A_n$, $H_{n+1} = H_n \cup (x, y)$.
La suite $|A_n|$ est alors une somme de variable X_i iid : $P(X_i = 1) = p$ et $P(X_i = 0) = 1 - p$. L'arrêt de la construction ne peut se produire que si $|H_n| \geq i(\Gamma, E_S)N|A_n|$. Or par loi des grands nombres $\frac{1}{n}|H_n| \to (1 - p)$ et $\frac{1}{n}|A_n| \to p$ aussi si $1 - p < i(\Gamma, E_S)Np$ il y a avec probabilité non nul une construction qui ne s'arrête pas et donc une composante connexe infini.
□

Il existe aussi cette cette propriété utilisant le rayon spectrale (mais dont la démonstration est un peu longue).

2.2.2 Lemme : condition pour l'existence d'une infinité de composantes infinies

Soit p un paramètre tel que la percolation de Bernoulli admette presque sûrement des composantes connexes infinies et soit ρ le rayon spectral. Alors si

$$\rho N p < 1 \tag{7}$$

(où N est le nombre de générateurs du graphe de Cayley)
Alors il admet presque sûrement une infinité des composantes connexes infinies

3 Questions sur les valeurs critiques p_u, p_c

Le théorème sur les transitions de phases dans les percolations de Bernoulli avait fait apparaître deux valeurs critiques p_u et p_c. Une multitude de questions, théorèmes ou conjectures existent sur ces paramètres. Nous en présentons ici quelques unes.

3.1 $p_u > p_c$?

Une question naturelle à considérer est existe-t-il un paramètre p tel qu'il existe une infinité de composantes connexes infinies. La réponse est non pour les graphes de Cayley de groupes moyennables. On conjecture que la réponse est oui pour les groupes non moyennables mais le problème est encore ouvert.

3.1.1 Théorèmes

Un graphe de Cayley d'un groupe moyennable n'admet pas une infinité de composantes connexes infinies presque sûrement pour la percolation de Bernoulli indépendante (quel que soit le paramètre).

Démonstration On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe presque sûrement une infinité de composantes connexes infinies. Soit $x \in G$, on va d'abord montrer qu'avec probabilité non nulle x est le point de liaison de 3 composantes connexes infinies (x est dans une composante C infinie, C-{x} a trois composantes connexes infinies). En effet il existe $r \in N$ tel qu'avec probabilité non nulle il existe 3 composantes connexes infinies à une distance inférieur à r de x. On va considérer ces graphes qui respectent cette propriété et on va les modifier un peu : on supprime toutes les arêtes contenues dans la boule de centre x de rayon r et à la place on ajoute un arbre qui relie trois composantes connexes. Par tolérance à la suppression et à l'insertion des arêtes l'ensemble des graphes ainsi obtenu est de probabilité non nulle. Il existe alors un sommet dans cette boule (pas forcément x) qui est un point de branchement de cet arbre et donc est un point de liaison entre trois composantes connexes infinies. Donc l'évènement "être un point de liaison" est de probabilité non nulle (on rappelle que la loi est invariante et que la loi est la même pour tous les sommets).

Maintenant considérons un volume fini ainsi que les composantes connexes infinies qui intersectent ce volume. On peut remarquer que pour chaque point de liaison dans ce volume, la composante connexe de ce point doit intersecter la frontière du volume en un sommet supplémentaire (les composantes connexes infinies séparées par x doivent bien ressortir par des endroits différents). On a donc que quel que soit le volume, le nombre de points de liaison est majoré par la taille de la frontière de ce volume. Maintenant on remarque que l'espérance du nombre de points de liaison dans ce volume est proportionnelle à la taille de ce volume (de coefficient "probabilité d'être un point de liaison"). On obtient ainsi une contradiction avec l'hypothèse moyennable du graphe. □

Mais qu'en est il des graphes non moyennables ? On conjecture que c'est exactement le contraire.

3.1.2 Conjecture : $p_u > p_c$ pour les groupes non moyennables

Soit Γ un groupe non moyennable engendré par un nombre fini d'éléments $S = [s_1, .., s_N, s_1^{-1}, ..., s_N^{-1}]$. Existe t-il $p_u > p_c$ tel que pour tout $p \in]p_c, p_u[\subset [0,1]$, la percolation admette μ_p presque sûrement une infinité de composantes connexes infinies ?

Ce problème est aujourd'hui encore ouvert, mais nous avons le théorème suivant qui s'en approche.

3.1.3 Théorème : Existence d'un choix de générateur satisfaisant $p_u < p_c$

(voir [2])
Si Γ est un groupe non moyennable, il existe un ensemble de générateur S (avec $|S| = N$) de Γ tel que pour le graphe de Cayley, il existe $p_u > p_c$ tel que $\forall p \in]p_c, p_u[(\subset [0,1]$, la percolation admette presque sûrement une infinité de composantes infinies.

Démonstration J'énonce juste ici l'idée de la démonstration. On cherche à utiliser les deux lemmes techniques énoncé dans la partie précédente. Il se trouve que le rayon spectral est décroissant en la taille du générateur, d'une certaine manière plus il y a d'arêtes plus la diffusion est efficace. On peut même faire en sorte qu'il converge vers 0. Admettant ceci , il est possible de choisir N et p qui vérifient les conditions des 2 lemmes. $p > \frac{1}{1+Ni(\Gamma,E_S)}$ et $\rho N p < 1$.

3.2 Que se passe t il à p_c ?

Le théorème de transition de phase ne nous dit rien sur les comportements aux valeurs critiques p_u et p_c. Y a-t-il des composantes connexes infinies pour ces paramètres ? Comment varie la probabilité que deux sommets soient dans la même composante connexe ?... Nous avons quelques réponses pour les graphes non moyennables mais concernant les graphes moyennables malgré énormément d'efforts notamment sur $\mathbb{Z}^d$, $2 < d < 19$ ces questions sont encore ouvertes.

3.2.1 théorème

Si Γ n'est pas moyennable, il n'existe pas de composantes connexes infinies pour $p = p_c$

Sans entrer dans les détails, l'idée de la preuves de ce théorème fait intervenir d'autres lois de percolations, il s'agit de montrer que si il y a des composantes connexes infinies à un paramètre p, alors pour ϵ suffisamment petit, c'est aussi vrai pour $p - \epsilon$.

4 Autres lois de percolation

Le domaine des percolations sur les graphes ne s'arrête pas aux loi de Bernoulli indépendante, nous présentons ici quelques propriétés sur des lois aléatoires plus générales.

On supposera toujours une certaine symétrie sur les graphes (G, E) que nous étudierons. On pourra demander tout d'abord qu'il existe un groupe $\mathcal{G} \subset Aut(G)$ des automorphismes de graphes qui soit **transitif** (ie $\forall x, y \in G\ \exists g \in (G)\ g(x) = y$). On pourra également ajouter la condition d'être **unimodulaire** (ie :$\forall x, y \in G\ |[g(y) : g \in \mathcal{G}, g(x) = x]| = |[g(x) : g \in \mathcal{G}, g(y) = y]|$).

Les graphes de Cayley (d'un groupe Γ) sont les exemples types, Pour la symétrie :on choisit $\mathcal{G} = \Gamma$ où l'action de Γ est l'action canonique $\gamma(x) = \gamma x$ et $\gamma([x, xs]) = [\gamma x, \gamma xs]$.

On réclamera que la loi aléatoire de la percolation soit invariante par le groupe $\mathbb{G}$. (la loi indépendante de Bernoulli est bien sur invariante)

Parmi les autres conditions supplémentaires on pourra se demander si la loi est **tolérante à l'insertion** (ou à la suppression) d'une arête (ie Soit A mesurable, de mesure non nul alors $\Pi_e(A) =_{def} [\omega \cup \{e\} : \omega \in A]$ est de mesure non nulle).

4.1 Quelques propriétés

Il est parfois difficile de relier des propriétés sur les sommets avec des propriétés sur les composantes connexes. Pour cela on peut utiliser un lemme très pratique valable si l'invariance est unimodulaire. Avec $A = |[g(x) : g \in \mathcal{G}, g(y) = y]|$

4.1.1 Lemme : Principe de transport de masse

(voir [1])
Soit $f|(G,G) \rightarrow \mathbb{R}$ *, invariant par action diagonale de* $\mathcal{G}$ *(ie* $\forall \gamma \in \mathcal{G} : f(\gamma x, \gamma y) = f(x,y)$*). Alors*

$$\forall x \sum_{y \in G} f(x,y) = \sum_{y \in G} f(y,x) \tag{8}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\sum_{y \in G} f(x,y) &= \frac{1}{A} \sum_{y \in G} \sum_{\gamma \in \mathcal{G}, \gamma(y)=x} f(\gamma(x), \gamma(y)) &(9)\\
&= \frac{1}{A} \sum_{z \in G} \sum_{y \in G} \sum_{\gamma \in \mathcal{G}, \gamma(x)=z, \gamma(y)=x} f(z,x) &(10)\\
&= \sum_{z \in \Gamma} f(z,x) &(11)
\end{aligned}$$

□

Voici un exemple d'application de ce lemme, une fois encore on cherche s'il existe ou non des composantes connexes infinies. On définit ci-dessous une fonction dont l'espérance est $\mathcal{G}$ invariante et telle que $\sum_{y \in G} f_E(x,y) = deg_E(x)$.

Si x est dans une composante connexe infini. On pose $f_E(x,x) = deg_E(x)$, $f_E(x,y) = 0$ si $x \neq y$.
Si x est dans une composante connexe finie de cardinal k. On pose $f_E(x,y) = \frac{deg_E(x)}{k}$ si y est dans la même composante connexe que x. $f_E(x,y) = 0$ sinon.

Notation on définit une notion semblable à celle qui permet de définir la condition de Folner.

$$s(G,E) = sup[\frac{|(x,y) \in E : x \in A \; y \in A|}{|A|} : A \subseteq G \text{ fini}] \tag{12}$$

4.1.2 Théorème : condition suffisante pour l'existence d'une composante connexe infinie

(voir [1])

$$\mathbb{E}(deg_\omega(x)) - s(\Gamma, E_S) \leq N\mu([\omega : \text{x est dans une composante connexe infini}]) \tag{13}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(deg_\omega(x)) &= \mathbb{E}(\sum_{y\in G} f_\omega(x,y)) \\
&= \mathbb{E}(\sum_{y\in G} f_\omega(y,x)) \\
&= \mathbb{E}(\sum_{y\in G} f_\omega(y,x) 1_{x \text{ est dans une composante connexe finie}}) \\
&\quad +\mathbb{E}(\sum_{y\in G} f_\omega(y,x) 1_{x \text{ est dans une composante connexe infinie}}) \\
&\leq s(\Gamma, E_S) + N\mu[\omega : \text{x est dans une composante connexe infinie}]
\end{aligned}$$

Conclusion : Si l'espérance du degré est suffisamment grande, on est assuré qu'il existe avec probabilité non nulle une composante connexe infinie. Ce qui n'est pas le cas pour les graphes moyennables.

4.1.3 Théorème

(voir [1])
Si (G,E) est moyennable alors $\forall\epsilon > 0$, il existe une loi aléatoire μ $\mathcal{G}$ invariante telle que $\mathbb{E}_\mu(deg(x)) > N - \epsilon$, et telle que μ presque sûrement il n'y a pas de composantes infinies.

Si (G,E) est n'est pas moyennable alors $\exists a > 0$, quelque soit la loi aléatoire μ $\mathcal{G}$ invariante telle que $\mathbb{E}_\mu(deg(x)) > N - a$, alors il n'y a une composante infinie avec probabilité non nulle.

Démonstration Prenons par exemple $\mathbb{Z}^2$, (on généralise facilement aux graphes moyennables) soit $x \in G$ on définit la loi $P_n(x)$ qui retire toutes les arêtes qui se trouvent à une distance exactement égale à n de x avec une probabilité p_n. La loi aléatoire de percolation est en engendré par tous les $P_n(x), (n,x)$ (indépendantes). On peut choisir p_n de tel sorte que $\sum_n np_n < \infty$ et $\sum_n n^2 p_n = \infty$. Fixons un sommet du graphe x. Dans ce cas par Borel Cantelli, presque sûrement il existe un n et un sommet y à une distance inférieur à n de x tel que l'on ait $P_n(y)$, x est alors isolé de l'infini. Grâce à la condition $\sum_n np_n < \infty$, le nombre d'arêtes retirées autour de x est intégrable. Pour conclure, il suffit de considérer les loi P_n seulement pour un n suffisamment grand, l'espérance du nombre d'arêtes retirées autour de x tend vers 0, et x n'appartient pas à une composante connexe presque sûrement.

4.2 Composantes connexes infinies indistinguables

Je termine juste en énonçant ce théorème car c'est celui sur lequel j'ai travaillé pendant mon mémoire. Il s'applique lorsque qu'il y a une infinité de composantes connexes infinies dans la percolation. Concrètement, il affirme que toutes les propriétés mesurables que l'on peut énoncer sur des composantes connexes infinies (par exemple, "il y a une boucle", "la marche aléatoire est récurrente",...) est valable pour toutes les composantes connexes infinies et n'est valable pour aucune d'entre elles.

4.2.1 Théorème : Composantes connexes infinies indistinguables

(voir [3])
Si G est un graphe ayant un groupe d'automorphismes $\mathcal{G}$ unimodulaire et transitif, avec une loi de percolation $\mathcal{G}$ invariante et tolérante à l'insertion d'une arête. Si $\mathcal{A}$ est un ensemble de

sous graphes invariant par action de $\mathcal{G}$, alors presque sûrement toutes les composantes connexes infinies sont dans $\mathcal{A}$ ou toutes les composantes connexes infinies ne sont pas dans $\mathcal{A}$.

Références

[1] Y. Peres O Schramm I. Benjamini, R. Lyons. groupe invariante percolation on graphe. *Birkhauser-Verlag*, 1999.

[2] Smirnova-Nagnibeda T Pak, I. On non-uniqueness of percolation on nonamenable cayley graphs. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 2000.

[3] O. Schramm R. Lyons. Indistinguishability of percolation clusters. *Ann Prob*, 1999.