Introduction à la théorie des jeux, et des jeux stochastiques

Gaspard Fougea

October 24, 2014

1 Introduction

La théorie des jeux est le domaine des mathématiques qui permet la modélisation de ce qu'on appelle les "intéractions stratégiques". Le principe est le suivant : plusieurs agents, des "joueurs", ont des intérêts liés, et ont un certain panel d'actions à leur dispositions, des "stratégies". Chaque agent voulant naturellement maximiser son intérêt, la modélisation mathématique proposée tentera d'envisager les différentes issues possibles, de déterminer les éventuels équilibres et les stratégies optimales de chaque joueur, tout en se demandant si les stratégies optimales et les équilibres sont liés. C'est souvent autour du concept d'information que se jouent les subtilités de la théorie des jeux : chaque joueur utilise naturellement la connaissance qu'il a des autres joueurs, de leur stratégies, et de leur propre information. On retrouve ici ce fameux problème d'information qui parait si anodin : je sais que tu sais, mais sais-tu que je sais que tu sais ? etc...
Ce domaine des mathématiques, certes jeune, se confronte rapidement à des problèmes d'une grande complexité, et ce sont des questions élémentaires qui sont aujourd'hui irrésolues. Je conseille fortement l'exploration de ce domaine, très passionnant, pour tout mathématicien curieux. Les outils utilisés sont très variés, de l'algèbre à l'analyse en passant par les systèmes dynamiques, les raisonnements sont beaux et abstraits, alors que les résultats ont une signification concrète. Les applications sont très diverses, la théorie des jeux étant

Figure 1: John Von Neumann

Figure 2: John Nash

Figure 3: Lloyd Shapley

utilisée en biologie, en sciences politiques, ou encore en philosophie. Mais les jeux ont surtout pris une place très importante en économie. En effet, le marché économique se modélise immédiatement comme un jeu : chaque entreprise est un joueur, qui cherche à maximiser son profit, tout en essayant d'anticiper les stratégies de ses adversaires. Par ailleurs, plusieurs des récents prix nobels d'économies sont des théoriciens des jeux.
Il faut savoir que modéliser le comportement avec la théorie des jeux a ses limites. En effet, un jeu suppose que chaque individu veut maximiser son profit, ce qui suppose que cet individu est rationnel. Ors, les études montrent que l'être humain ne l'est pas. Il est par exemple impossible de définir une relation d'ordre transitive sur les préférences d'un consommateur...

Les fondements de la théorie des jeux furent introduits par John Von Neumann et Oskar Morgenster en 1944, dans leur article *Theory of Games and Economic Behavior*, dans lequel ils proposent une première méthode de résolution des jeux à somme nulle. Le concept d'équilibre de Nash, central dans l'étude des jeux, fut développé par John Nash en 1950. C'est en 1953 que Lloyd Shapley pose le concept de jeux stochastique.

Après avoir posé les concepts de base de la théorie des jeux, je vais développer le paradigme des jeux à deux joueurs et à somme nulle. Et enfin, afin de développer une branche de la théorie des jeux qui est actuellement un sujet de recherche, je donnerai les concepts et théorèmes principaux des jeux stochastiques à somme nulle.

2 Concepts centraux de la théorie des jeux

Définition 2.1 *Un jeu stratégique sous forme normale G est défini par:*

- *Un ensemble I de joueurs. (de cardinal n)*
- *Un ensemble de stratégie $S = S^i$ pour chaque jour i*
- *Une fonction de gain $g : \Pi_i S^i \to R^n$*

Pour chaque joueur i, le gain associé au profil de stratégies $(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n)$ est $g_i(s_1, \ldots, s_n)$.

Cette modélisation est la modélisation la plus récente des jeux stratégiques. Il en existe une autre, connue sous le nom de *jeux sous forme extensive.* Nous resterons sur celle-ci pour la suite.
Nous allons maintenant introduire le concept de stratégie mixte.
Supposez que vous êtes un joueur, et que vous tenez à ce que les autres joueurs ne puissent avoir d'information exacte sur votre stratégie. Il existe un moyen très simple de faire cela : rendez vos stratégies aléatoires !

Définition 2.2 (Stratégies mixtes) *Dans le cas où les espaces de stratégies S^i sont mesurables, l'extension mixte du jeu G se définit en prenant comme espace de stratégie l'ensemble des probabilités sur S^i, $\Delta(S^i)$, et en définissant la fonction de paiement comme l'espérance des gains selon les différentes probabilités :*

$$g_i(t) = \int_S g_i(s) t_1(ds_1) \otimes \ldots \otimes t_n(ds_n)$$

Dans le cas où l'ensemble des stratégies est fini, l'ensemble des stratégies mixtes est... Un simplexe ! On voit déja apparaitre les outils d'analyse convexe au loin...

La notion d'équilibre de Nash est apparue en 1950. Elle correspond à l'idée intuitive que l'on se fait d'un équilibre. En physique, il y a équilibre si le systême ne bouge pas. Un équilibre de Nash est une situation dans laquelle aucun des joueurs n'a intérêt à modifier sa stratégie de façon unilatérale. Regardons la définition mathématique.

Définition 2.3 *Soit BR l'opérateur de meilleure réponse.* $\forall i \in I, BR^i(s^{-i}) = \{s \in S^i, \forall t \in S^i, g_i(s, s^{-i}) \geq g_i(t, s^{-i})\}$
Alors un équilibre de Nash est un profil de stratégie s tel que $s \in BR(s)$

Remarque 2.4 *Ici la notation $-i$ signifie l'ensemble des coordonnées différentes de i*

Enonçons alors les théorèmes principaux d'existence des équilibres de Nash.

Théorème 2.5 *Tout jeu G fini admet un équilibre mixte.*
Tout jeu G compact et continu admet un équilibre mixte.

La preuve se fait en appliquant le théorème du point fixe de Kakutani, qui est une généralisation du théorème du point fixe de Brower aux fonctions à valeurs ensemblistes. Ce théorème est utilisé sur une fonction appelée fonction de Nash. Une proposition qui je suis sûr plaira à tous les algébristes :

Proposition 2.6 *l'ensemble des équilibres en stratégies mixtes d'un jeu fini est une réunion finie d'ensembles connexes semi-algébriques fermés.*

Il suffit d'observer que un équilibre en stratégies mixtes est défini par un ensemble d'inégalités polynomiales larges, et de savoir que tout ensemble semi-algébrique fermé d'un espace euclidien possède un nombre fini de composantes connexes.

3 Jeux à deux joueurs et à somme nulle

3.1 La valeur d'un jeu à somme nulle

Le paradigme des jeux à deux joueurs et à somme nulle a été beaucoup étudié, et représente aujourd'hui un domaine de recherche important. En effet, la simplification des hypothèses de départ permet d'aller plus loin dans la compréhension du jeux.

Définition 3.1 *Un jeu G à deux joueurs est à somme nulle si $g_1 + g_2 = 0$. Toute perte pour l'un des joueur est un gain pour l'autre.*
On définit alors un jeu à somme nulle par un triplet (I, J, g), où I représente l'ensemble des actions du joueur 1, J représente l'ensemble des actions du joueur 2, et $g : I \times J \to R$ est la fonction de gain du joueur 1.

Remarque 3.2 *Lorsque I et J sont finis, le jeu est entièrement représenté par une matrice. Réciproquement, toute matrice représente un jeu à somme nulle fini. On parle de jeu matriciel.*

Lorsqu'on joue à un jeu, il est légitime de se demander quel gain on peut assurer. Il est clair pour tout i dans I, le joueur 1 est en mesure d'assurer $inf_{j\in J}g(i,j)$, et que pour tout j dans J, le joueur 2 est en mesure d'assurer $sup_{i\in I}g(i,j)$. Cette remarque nous pousse à considérer les définitions suivantes :

Definition-Proposition 3.3 *Le maxmin de G, noté $\underline{v}$ est la quantité $sup_{i\in I}inf_{j\in J}g(i,j)$*
Le minmax de G, noté $\overline{v}$ est la quantité $inf_{j\in J}sup_{i\in I}g(i,j)$
Alors, on a $\underline{v} \leq \overline{v}$. L'écart $\overline{v} - \underline{v}$ est appelé le saut de dualité de G
On dit que le jeu G a une valeur v si $\overline{v} = \underline{v} = v$

Le fait que $\underline{v} \leq \overline{v}$ vient du fait que $\underline{v}$ correspond à la situation où le joueur 2 joue avant le joueur 1 (joueur 1 désavantagé). Alors que $\overline{v}$ correspond à celle où le joueur 1 joue avant le joueur 2 (joueur 2 désavantagé).

Exemple 3.4 (Matching Pennies) *Considérons le jeu représenté par la matrice suivante :*

1	-1
-1	1

Alors, on a $\underline{v} = -1$ et $\overline{v} = 1$. Le jeu n'a pas de valeur. On verra grace au théorème du minmax que le jeu possède bien une valeur en stratégies mixtes.

L'étude des jeux à somme nulle commence donc toujours par l'étude de la valeur. En existe-t-il une ? En effet, s'il c'est le cas, il est simple de voir que dans le cas fini ou le cas compact, chaque joueur possède une stratégie qui assure cette valeur. En combinant deux de ces stratégies, on obtient un équilibre de Nash : aucun des joueur ne peut augmenter son gain en déviant unilatéralement.

3.2 Cas fini

Nous allons voir le Théorème du minmax. Ce théorème stipule qu'un jeu à somme nulle fini a une valeur en stratégies mixtes.

Théorème 3.5 (Théorème du minmax) *Soit A une matrice réelle $I \times J$. Il existe un triplet $(x^*, y^*, v) \in \Delta(I) \times \Delta(J) \times R$ tel que :*

$$\forall y \in \Delta(J), {}^t x^* A y \geq v$$

$$\forall x \in \Delta(I), {}^t x A y^* \leq v$$

Il existe plusieurs preuves de ce théorème, la plus célèbre consistant à trouver deux programme linéaire duaux qui ressemblent aux inégalités qu'on cherche. Le grand théorème de la programmation linéaire disant que l'un est réalisable si et seulement si l'autre l'est permettra de conclure.

3.3 Cas général

Nous allons ici énoncer le théorème de Sion

Théorème 3.6 (Théorème de Sion) *Soit $G = (S, T, g)$ tel que*

1. *S et T sont convexes*

2. *S ou T est compact*

3. *Pour tout t dans T, $g(.,t)$ est quasi-concave s.c.s. en s, et pour tout s dans S, $g(s,.)$ est quasi-convexe s.c.i. en t.*

Alors le jeu possède une valeur

$$\sup_{s \in S} \inf_{t \in T} g(s,t) = \inf_{t \in T} \sup_{s \in S} g(s,t)$$

De plus, chaque joueur ayant un ensemble de stratégies compact possède une stratégie optimale.

Ce théorème se démontre en appliquant judicieusement le lemme de l'intersection à des ensembles bien choisis.

Citons un autre théorème d'existence de valeurs pour le cas général.

Théorème 3.7 *Soit un jeu à somme nulle $G = (S, T, g)$ tel que*

1. *S et T sont compacts*

2. *Pour tout t dans T, $g(.,t)$ est s.c.s. en s, et pour tout s dans S, $g(s,.)$ est s.c.i. en t.*

3. *g est bornée et mesurable par rapport à la tribu borélienne $\mathcal{B}_S \otimes \mathcal{B}_T$*

Alors l'extension mixte de G a une valeur, chaque joueur possède une stratégie optimale mixte, et pour tout $\epsilon > 0$, chaque joueur a une stratégie ϵ-optimale a support fini.

Il convient dans ce mémoire d'introduire à un domaine de recherche. J'ai décidé d'introduire le lecteur aux jeux stochastiques. Au-delà l'élégance des mathématiques qui permettent de résoudre les jeux stochastiques, c'est un réel sujet de recherche, une sous-branche des jeux répétés à somme nulle.

4 Jeux Stochastiques à somme nulle

Les jeux stochastiques sont une bonne modélisation permettant de comprendre l'évolution des intéractions stratégiques entre deux joueurs ayant des intérêts complètement opposés, lorsqu'ils sont amenés à jouer longtemps entre eux. Ici, un nouvel espace entre en jeux, l'espace d'états. Le paiement est défini en fonction de l'état dans lequel on se trouve, et une fonction de transition dépendant de l'état actuel et des stratégies jouées par chaque joueur. Ici, les joueurs doivent à la fois garder un bon paiement pour le jour même, et avoir une bonne espérance concernant le paiement des jours suivants. Ils ont été introduits par Shapley en 1953, et depuis, la littérature sur le sujet n'a cessé de croitre.

Déroulement du jeu
On considère un espace d'états Ω, I et J les ensembles de stratégies des deux joueurs, $g : I \times J \times \Omega \to R$ la fonction de paiement, et $q : I \times J \times \Omega \to \Omega$ la fonction de transition. On considère Ω fini, de cardinal d, et I et J compacts,

et les fonctions de paiement et de transition sont continues.
Un état initial ω_0 est donné et connu par les joueurs. C'est un jeu à information complète : chaque joueur connait les stratégies jouées dans le passé de son adversaire, et l'état dans lequel il se trouve, ainsi que la fonction de paiement.
Ainsi, à l'étape n, connaissant l'histoire $h_{n-1} = (\omega_0, i_1, j_1, \omega_1, \dots, i_{n-1}, j_{n-1}, w_{n-1}) \in H_n$, les deux joueurs choisissent simultanément une action, un nouvel état ω_n, qui dépend dont de i_n, j_n, et de la fonction de transition. On obtient ainsi une suite de gains $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Une stratégie pour le joueur 1 est alors une fonction de $H = \cup_{n=1}^{+\infty} H_n$ dans $\Delta(I)$, et une stratégie pour le joueur 2 est une fonction de H dans $\Delta(J)$.
Une question légitime se pose : comment évaluer les gains sur une longue période ? Il y a essentiellement deux méthodes.

Le jeu en n coups

On considère le jeu où n coups on été joués. La fonction de gain est alors :

$$G_n(h_n) = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} \frac{g_i}{n}]$$

Le jeu λ-escompté

On considère ici le jeu infini, mais le paiement est défini comme tel :

$$G_\lambda(h_\infty) = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda(1-\lambda)^{i-1} g_i]$$

Le théorème de Sion couplé avec le théorème de Tychonov nous assurent que ces jeux ont une valeur. On note $v_n(\omega_1)$ la valeur du jeu en n coups, et $v_\lambda(\omega_1)$ la valeur du jeu λ-escompté. Ces fonctions de paiement sont extrêments classiques et définies pour tous les jeux répétés. Dans les jeux répétés à somme nulle, les premières questions que l'on se pose sont celles-ci : A-ton les limites suivantes, et sont-elles égales ?

$$lim_{n\to\infty} v_n \stackrel{?}{=} lim_{\lambda\to 0, \lambda>0} v_\lambda$$

En effet, λ tendant vers 0 représente ce qu'il se passe lorsque l'on prend en compte les gains les plus lointains, ce qui correspond à $n \to +\infty$. Cette question est ouverte dans le cas général. Nous allons démontrer pourquoi ces questions ont une réponse positive dans le cas fini (I et J sont finis). Dès à présent, nous ferons ces hypothèses.

Opérateur de Shapley

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$. (assimilable à $\mathbb{R}^d$). L'opérateur de shapley est l'application $\Psi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, tel que pour tout f dans $\mathcal{F}$, et tout ω dans Ω, $\Psi(f)(\omega)$ est la valeur en stratégies mixtes du jeu en un coup dont la fonction de paiement est :

$$\tilde{g}(\omega)(x,y) \to g(x,y,\omega) + \sum_{i=1}^{d} Q(\omega_i|x,y,\omega) f(\omega_i)$$

Alors on a le théorème suivant :

Théorème 4.1 (Shapley, 1953) *1. v_λ est l'unique élément de $\mathcal{F}$ qui vérifie*

$$v_\lambda = \lambda \Psi(\frac{1-\lambda}{\lambda} v_\lambda)$$

2. La suite (v_n) est l'unique suite dans $\mathcal{F}$ solution de

$$v_{n+1} = \frac{1}{n+1} \Psi(n v_n)$$

$$v_0 = 0$$

Il est très aisé de voir que l'opérateur de Shapley est contractant. Il admet donc un unique point fixe. On va ici pouvoir montrer que v_λ a bien une limite quand $\lambda \to 0$, et en particulier, que v_λ est) variations bornées.

Proposition 4.2 *Lorsque le jeu est fini, l'ensemble des $(\lambda, v_\lambda, x_\lambda, y_\lambda)$, où x_λ est une stratégie optimale stationnaire du joueur 1, et y_λ du joueur 2, pour λ dans $]0,1]$, est semi-algébrique.*

Ceci est une conséquence du fait que v_λ est le point fixe d'un certain opérateur qui est lui-même semi-algébrique.

Théorème 4.3 (Decomposition en série de puiseux) *Il existe $\lambda_0 > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $r_n : \Omega \to \mathbb{R}$, pour $n = 0, \cdots$, tel que $\forall \omega \in \Omega$,*

$$v_\lambda(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n(\omega) \lambda^{\frac{n}{k}}$$

pour tout $\lambda \in]0, \lambda_0[$ et $\omega \in \Omega$.

Ceci est une conséquence directe de la semi-algébricité de l'opérateur. Ceci implique que l'opérateur est à variation bornées. On en déduit assez rapidement le corollaire :

Corollaire 4.4 *Dans le cas d'un jeu stochastique fini, on a*

$$lim_{n\to\infty} v_n = lim_{\lambda\to 0, \lambda>0} v_\lambda$$

L'approche uniforme

Regardons le jeu suivant, il permet de mettre en valeur la nécessité de définir le concept d'une valeur uniforme. (Jeu du Big Match)

	0	1
0	0	1
1	0*	1*

dans lequel une étoile signifie un état absorbant : l'état ne change plus jusqu'à la fin de la partie. La formule du théorème 4.1. nous donne que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_{n+1} = \frac{1}{n+1} valeur(\gamma(n, v_n))$$

Où $\gamma(n, v_n)$ est le jeu en un coup de matrice

$1 + nv_n$	nv_n
1	0

Par récurrence, on trouve que $\forall n, v_n = \frac{1}{2}$, la stratégie optimale du joueur 1 consistant à jouer 1 avec probabilité $x_n = \frac{1}{n+1}$. On calcule facilement, pour le jeu λ-escompté, que la seule stratégie optimale du joueur 1 est de jouer 1 avec probabilité $x_\lambda = \frac{\lambda}{1+\lambda}$, et que $v_\lambda = \frac{1}{2}$. En revanche la stratégie optimale du joueur 1, quand $\lambda \to 0$ ou $n \to \infty$ converge vers le fait de jouer 0 à chaque coup, ce qui lui permet d'assurer 0... C'est donc une mauvaise stratégie. Il est possible de montrer qu'il est possible d'assurer uniformément pour le joueur 1 toute valeur strictement inférieure à $\frac{1}{2}$.
Ici nous avons mis en évidence le fait que les stratégies optimales pour les jeux en n coups ou λ-escomptés ne permettent pas d'avoir des stratégies uniformément bonnes. D'où le concept de valeur uniforme.

Définition 4.5 *Dans un jeu à somme nulle, on dit que la valeur uniforme $v(\omega_0)$ existe si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un profil de stratégies (σ, τ), et il existe $N(\epsilon)$, tel que pour tout $n \geq N(\epsilon)$, pour tout profil de stratégie $\tilde{\tau}$ du joueur 2*

$$\mathbb{E}_{\sigma,\tilde{\tau},\omega_0}[\sum_{i=1}^{n} \frac{g_i}{n}] \geq v(\omega_0) - \epsilon$$

et pour tout profil de stratégie $\tilde{\sigma}$ du joueur 1,

$$\mathbb{E}_{\tilde{\sigma},\tau,\omega_0}[\sum_{i=1}^{n} \frac{g_i}{n}] \leq v(\omega_0) + \epsilon$$

On peut alors montrer que si un jeu stochastique admet une valeur uniforme, elle vaut nécessairement $lim_{\lambda \to 0} v_\lambda$. Nous allons citer le théorème de Mertens et Neymann en 1981. C'est surement un des théorèmes dont la preuve est la plus mystérieuse, car personne ne comprend comment leur sont venues les idées...

Théorème 4.6 *Tout jeu stochastique à deux joueurs et à somme nulle fini admet une valeur uniforme.*

L'existence dans le cas général n'est pas démontrée...

5 Conclusions

Nous avons montré les résultats de base sur les jeux stochastiques. Et on voit bien que même dans ce cadre restreint des jeux à deux joueurs et à somme nulle, certaines questions primaires sont encore ouvertes. Imaginons alors que nous commençons à prendre compte les manques d'information d'un coté, où des deux, que nous augmentons le nombre de joueurs. Ce sont des problèmes extrêmement complexes qui se posent alors...

Bibliographie

J.F. Mertens et A. Neyman, *Stochastic games*, International journal of game theory, numero 10, pp. 53-66 (1981) John Nash, *Equilibrium points in n-person games*, PNAS vol. 36 numéro 1 (1950)

Oskar Morgenstern et John von Neumann, *Theory of Games and Economic Behavior* (1944), Editions 1, 2 et 3
Shapley (L.S.) (1953) Stochastic games, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 39 (1953), p. 1095–1100