

GÉOMÉTRIE GLOBALE DES MODULES DES COURBES, UNE QUESTION GRANDE OUVERTE

MATTIA GALEOTTI

Introduction au domaine de recherche
Encadrant : Alessandro Chiodo, IMJ - Paris 6
16 octobre 2014

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Singularités de $\overline{\mathcal{M}}_g$	3
2.1. Structure locale de l'espace	3
2.2. Notion d'âge et singularités	5
3. Structure de $\mathcal{R}_{g,\ell,k}$ et de une compactification	6
3.1. Compactifier $\overline{\mathcal{R}}_{g,\ell,k}$	6
3.2. Graphe dual	7
4. Développements du projet	8
4.1. Points lisses de $\overline{\mathcal{R}}_{g,\ell,k}$	8
4.2. Singularités non canoniques de $\overline{\mathcal{R}}_{g,\ell,k}$	9
Références	10

“Everyone knows what a curve is, until he has studied enough mathematics to become confused”.
Felix Klein

1. INTRODUCTION

L'objet central de ce mémoire est l'espace de modules \mathcal{M}_g des courbes lisses de genre g . Une courbe lisse C est un schéma propre de dimension 1 sur \mathbb{C} , son genre est défini algébriquement comme la dimension de l'espace des sections du fibré canonique $g(C) := h^0(C, \omega_C)$. Une famille de courbes lisses de genre g , sur un \mathbb{C} -schéma S , est un morphisme plat et propre $\mathcal{C} \rightarrow S$ tel que pour tout point x de S la fibre \mathcal{C}_x est une courbe lisse de genre g .

L'espace \mathcal{M}_g a la propriété que ses points géométriques sont en correspondance bi-univoque avec les classes d'isomorphie des courbes lisses de genre g , et que pour toute famille $\mathcal{C} \rightarrow S$ de courbes lisses de genre g , le morphisme naturel $\varphi_S: S \rightarrow \mathcal{M}_g$ est continu.

L'espace \mathcal{M}_g pose d'abord le problème de ne pas être un espace compact. En 1969, dans [DM69], Deligne et Mumford définissent une compactification de l'espace de modules \mathcal{M}_g . Cette compactification, qu'on note $\overline{\mathcal{M}}_g$, est à son tour l'espace de modules d'une classe plus large de courbes de genre g . Les courbes considérées par Deligne et Mumford peuvent présenter des singularités de type nœud (points doubles ordinaires) et satisfont une condition de stabilité : leur groupe d'automorphismes est fini. On appelle courbes nodales les courbes n'ayant comme singularités que des nœuds. On appelle courbes nodales stables, ou simplement courbes stables, les courbes nodales qui vérifient la condition de stabilité de $\overline{\mathcal{M}}_g$. Clairement on suppose $g \geq 2$ car toute courbe de genre 0 ou 1 a une infinité d'automorphismes. L'espace $\overline{\mathcal{M}}_g$ est une variété projective de dimension $3g - 3$, comme on le verra par la suite, et toutes ses singularités sont de type quotient, c'est-à-dire de la forme \mathbb{C}^{3g-3}/G où G est un sous-groupe fini de $GL(\mathbb{C}^{3g-3})$.

Pour analyser la géométrie birationnelle des schémas, on dispose d'un invariant très important, la dimension de Kodaira. Si X est une variété projective lisse et \tilde{X} une compactification, on peut distinguer deux cas. Soit l'espace des formes m -canoniques $H^0(\tilde{X}; \omega_{\tilde{X}}^{\otimes m})$ est nul pour tout m , alors la dimension de Kodaira de X est $\kappa(X) = \infty$. Autrement $h^0(\tilde{X}; \omega_{\tilde{X}}^{\otimes m})$ est limité supérieurement par $c \cdot m^{\kappa(X)}$, où c et $\kappa(X)$ sont deux constantes. Le minimum des $\kappa(X)$ possibles, est appelé dimension de Kodaira de X . Si la variété X est singulière on peut encore définir la dimension de Kodaira de la variété : soit X' une désingularisation de X , alors $\kappa(X) := \kappa(X')$.

Toute variété vérifie une (et une seule) des trois conditions suivantes :

- $\kappa(X) < 0$;
- $0 \leq \kappa(X) < \dim(X)$;
- $\kappa(X) = \dim(X)$, dans ce cas la variété est dite *de type général*.

Observons que dans le cas d'une courbe X , la trichotomie induite par la dimension de Kodaira suit la classification classique : la seule courbe avec $\kappa(X) = -\infty$ est la droite projective \mathbb{P}^1 ($g = 0$) ; si $\kappa(X) = 0$ la courbe X est elliptique c'est-à-dire de genre 1 ; toute courbe de type général, $\kappa(X) = 1$, est une courbe hyperbolique, *i.e.* de genre plus grand ou égal à 2.

Il a été prouvé par Harris-Mumford-Eisenbud-Farkas que \mathcal{M}_g est de type général pour $g \geq 24$ et $g = 22$. En particulier, dans [HM82], Harris et Mumford ont développé une étude des singularités de $\overline{\mathcal{M}}_g$, en prouvant que les formes pluri-canoniques sur une désingularisation de $\overline{\mathcal{M}}_g$ coïncident avec les formes pluri-canoniques sur l'espace des points réguliers, ce qui est très important pour le calcul de la dimension de Kodaira. Formellement, si $\tilde{\mathcal{M}}_g \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_g$ est une désingularisation de $\overline{\mathcal{M}}_g$, en suivant l'article cité on montre que toute forme pluri-canonique sur l'espace $\overline{\mathcal{M}}_g^0$ des points réguliers de $\overline{\mathcal{M}}_g$ s'étend à l'espace $\tilde{\mathcal{M}}_g$ tout entier.

Théorème 1.1 (Harris-Mumford, 1982). *Pour m suffisamment grand et divisible,*

$$H^0\left(\overline{\mathcal{M}}_g^0; mK_{\overline{\mathcal{M}}_g^0}\right) = H^0\left(\tilde{\mathcal{M}}_g; mK_{\tilde{\mathcal{M}}_g}\right).$$

Dans les dernières années, Chiodo, Farkas, Eisenbud, Ludwig, Schreyer et Verra ont étudié des revêtements de \mathcal{M}_g , notamment les espaces de modules de courbes munies d'un fibré en droites, comme les fibrés racines du fibré trivial ("courbes *de niveau*"), ou racines du fibré canonique ("courbes *spin*"). La principale raison pour cela est que le comportement des espaces de modules est bien plus accessible. Comme on observe dans le tableau ci-dessous, ces espaces deviennent de type général pour un genre inférieur.

Une racine ℓ -ième de la puissance $\omega^{\otimes k}$ du fibré canonique est un triplet (C, L, ϕ) où C est une courbe lisse, L un fibré en droites sur C et $\phi: L^{\otimes \ell} \rightarrow \omega_C^{\otimes k}$ un isomorphisme. L'espace $\mathcal{R}_{g,\ell,k}$ est l'espace de modules des racines ℓ -ième de $\omega^{\otimes k}$ telles que la courbe de base C est lisse de genre g . On résume dans le tableau ci-dessous les résultats connus sur la dimension de Kodaira des espaces $\mathcal{R}_{g,\ell,k}$.

Espace des courbes lisses $\mathcal{M}_g = \mathcal{R}_{g,1,0}$.		
$g > 23$ et $g = 22$	Type général	Harris-Mumford [HM82], Eisenbud-Harris [EH87], Farkas [Far08]
$g = 23$	$\kappa(\mathcal{M}_{23}) \geq 2$	Farkas [Far00]
Espace des courbes de niveau $\mathcal{R}_{g,\ell,0}$.		
$\ell = 2$, courbes Prym	Type général pour $g \geq 14$	Farkas-Ludwig [FL10]
$\ell = 3$	Type général pour $g \geq 12$	Chiodo-Eisenbud-Farkas-Schreyer [CEFS13]
Espace des courbes 2-spin $\mathcal{R}_{g,2,1}$. Il a deux composantes connexes \mathcal{S}_g^+ et \mathcal{S}_g^- .		
\mathcal{S}_g^-	Type général pour $g \geq 12$	Farkas-Verra [FV10]
\mathcal{S}_g^+	Type général pour $g \geq 9$	Farkas [Far10]

Le but de notre analyse est le développement d'une caractérisation des points singuliers de $\mathcal{R}_{g,\ell,k}$, et d'une classification de ses singularités. Une telle classification nous permettra après d'aborder le problème de la dimension de Kodaira de $\overline{\mathcal{R}}_{g,\ell,k}$ pour des plus grandes valeurs de ℓ que celles déjà étudiées.

Par rapport à la caractérisation des points singuliers on a déjà un résultat qu'on résumera à la fin du mémoire. Du côté de la classification des singularités, notamment entre singularités canoniques et non canoniques, on a des résultats partiels qui donnent une description très satisfaisante pour les cas ℓ petit, mais doivent être raffinés pour les cas ℓ grand.

2. SINGULARITÉS DE $\overline{\mathcal{M}}_g$

2.1. Structure locale de l'espace. Afin de rentrer dans l'étude locale de l'espace $\overline{\mathcal{M}}_g$, pour chaque courbe stable C de genre $g \geq 2$, on va introduire une déformation

particulière de C , c'est-à-dire une famille de courbes $\mathcal{C} \rightarrow S$ avec une fibre isomorphe à C , notée $\text{Def}(C)$. Après l'introduction de cette déformation, on montrera qu'il existe une action naturelle de $\text{Aut}(C)$ sur $\text{Def}(C)$. Le quotient $\text{Def}(C)/\text{Aut}(C)$ sera isomorphe à un voisinage du point $[C]$ sur $\overline{\mathcal{M}}_g$. Après cela on passera à la caractérisation des points lisses/singuliers de $\overline{\mathcal{M}}_g$ et à l'analyse des singularités.

Définition 2.1. Une déformation de la courbe stable C de genre g , est la donnée d'une famille $\mathcal{C} \rightarrow (S, s)$ de courbes stables de genre g sur le schéma de base pointé (S, s) , et d'un isomorphisme $\tau: C \rightarrow \mathcal{C}_s$ entre C et la fibre spéciale.

Proposition 2.2 (voir [ACG11, Chap.11]). *Pour toute courbe stable C de genre g , il existe une déformation $\mathcal{C} \rightarrow (\text{Def}(C), 0)$ telle que pour toute déformation $\mathcal{C}' \rightarrow (S, s)$ de C , quitte à se restreindre à un voisinage U de s connexe et suffisamment petit, il existe unique $F: \mathcal{C}'_U \rightarrow \mathcal{C}$ morphisme, et $f: (U, s) \rightarrow (\text{Def}(C), 0)$ morphisme pointé (donc $f(s) = 0$), tels que le diagramme suivant est cartésien*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}'_U & \xrightarrow{F} & \mathcal{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (U, s_0) & \xrightarrow{f} & (\text{Def}(C), 0). \end{array}$$

Voyons comment l'action d'un automorphisme de C se prolonge sur $\text{Def}(C)$. Considérons la famille $\mathcal{C} \rightarrow (\text{Def}(C), 0)$ avec l'identification $\tau: C \rightarrow \mathcal{C}_0$. Si Φ est un automorphisme de C , considérons la déformation $\mathcal{C}' \rightarrow (\text{Def}(C), 0)$ telle que $\mathcal{C} \cong \mathcal{C}'$ et la nouvelle identification entre C et la fibre spéciale est $\tau' = \tau \circ \Phi: C \rightarrow \mathcal{C}'_0$. D'après la Proposition 2.2, il existe, à restriction sur un voisinage de 0 près, un couple de morphismes ($F_\Phi: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$, $f_\Phi: \text{Def}(C) \rightarrow \text{Def}(C)$) tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{C} \\ \tau' \downarrow & & \downarrow \tau \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{F_\Phi} & \mathcal{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\text{Def}(C), 0) & \xrightarrow{f_\Phi} & (\text{Def}(C), 0). \end{array}$$

Grâce aux propriétés de $\mathcal{C} \rightarrow (\text{Def}(C), 0)$, si $\Phi, \Phi' \in \text{Aut}(C)$, on a $f_\Phi \circ f_{\Phi'} = f_{\Phi\Phi'}$ sur les intersections des ensembles de définition. En plus, $f_{\text{id}} = \text{id}$. Donc il existe un morphisme $\text{Aut}(C) \rightarrow \text{Aut}(\text{Def}(C), 0)$, et dans les cas qu'on traitera ce morphisme est fidèle.

D'après l'article [DM69], pour chaque $[C] \in \overline{\mathcal{M}}_g$, il y a un voisinage de $[C]$ isomorphe à $\text{Def}(C)/\text{Aut}(C)$ et, comme $\text{Def}(C)$ est une variété lisse de dimension $3g - 3$, ce voisinage est de la forme

$$\mathbb{C}^{3g-3}/\text{Aut}(C).$$

2.2. Notion d'âge et singularités. Observons que, comme $\text{Aut}(C)$ a ordre fini, tout Φ dans $\text{Aut}(C)$ s'écrit sous forme diagonale, pour un choix opportun de coordonnées,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \zeta^{a_1} & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & \zeta^{a_m} \end{pmatrix}$$

où n est l'ordre de Φ , ζ est une racine primitive n -ième de l'unité et $0 \leq a_i < n$ pour tout i . Dorénavant on fixe un choix ζ de racine n -ième de l'unité.

Définition 2.3. L'automorphisme Φ est une quasi-réflexion si l'espace propre de 1 a dimension $m - 1$. C'est équivalent de demander qu'un et un seul des a_i est différent de 0.

D'après cette définition on peut énoncer un résultat important qui permet de caractériser les points lisses de $\overline{\mathcal{M}}_g$.

Théorème 2.4 (voir [Pri67]). *Si G est un sous-groupe fini de $GL(\mathbb{C}^m)$, l'espace \mathbb{C}^m/G est lisse si et seulement si G est engendré par des quasi-réflexions.*

On rappelle qu'une singularité est dite canonique si pour tout voisinage U du point singulier, toute forme n -canonique sur les points lisses se prolonge sur une désingularisation $\tilde{U} \rightarrow U$ pour n suffisamment grand. Le critère de Reid–Shepherd-Barron–Tai, ou critère de l'âge permet de déterminer facilement si une singularité de type quotient \mathbb{C}^m/G , est canonique.

Définition 2.5. Si Φ est l'automorphisme de \mathbb{C}^m qu'on a considéré avant, l'âge de Φ est la somme $\frac{1}{m} \sum_i a_i$.

Définition 2.6. Un sous-groupe fini de $GL(\mathbb{C}^m)$ qui ne contient pas de quasi-réflexions est dit *junior* s'il contient un élément d'âge strictement inférieur à 1. Il est dit *senior* dans le cas contraire.

Observons que la définition d'âge d'un automorphisme dépend du choix de la racine primitive, mais la définition de groupe junior ou senior ne dépend pas de ce choix.

Théorème 2.7 (Critère de l'âge, voir [Rei80]). *Soit G un sous-groupe fini non trivial de $GL(\mathbb{C}^m)$ qui ne contient pas de quasi-réflexions. Le quotient \mathbb{C}^m/G est une singularité canonique si et seulement si G est senior.*

On introduit la notion de queue elliptique d'une courbe stable : il s'agit d'une composante irréductible de genre 1 qui rencontre le reste de la courbe en un seul point. Les courbes qui ont une queue elliptique forment un sous-espace de codimension 1 nommé Δ_1 .

Si on a une curve stable C avec une queue elliptique E , on appelle *automorphisme de queue elliptique* un $\Phi \in \text{Aut}(C)$ tel que la restriction de Φ à $\overline{C \setminus E}$ est l'identité. Maintenant on a tous les outils pour décrire le lieu singulier de $\overline{\mathcal{M}}_g$ et le lieu des singularités non canoniques.

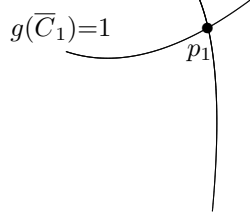


FIGURE 1. Figure d'une queue elliptique

Théorème 2.8. *Le point $[C] \in \overline{\mathcal{M}}_g$ est lisse si $\text{Aut}(C)$ est engendré par des automorphismes de queues elliptiques d'ordre 2. Le point $[C]$ est une singularité non canonique si la courbe C a une queue elliptique E qui admet un automorphisme d'ordre 6.*

$$\text{Sing } \overline{\mathcal{M}}_g = \{[C] \mid \exists \Phi \in \text{Aut}(C) \text{ non-engendré par des aut. de queues ell. d'ordre 2}\}$$

$$\text{Sing}^{\text{nc}} \overline{\mathcal{M}}_g = \{[C] \mid C \text{ a une queue elliptique } E \text{ telle que } j(E) = 0\}.$$

Le résultat fondamental autour de $\overline{\mathcal{M}}_g$ est qu'il existe une résolution *ad hoc* pour les singularités non canoniques. Toute forme pluri-canonique s'étend sur $\text{Sing}^{\text{nc}} \overline{\mathcal{M}}_g$ (un lieu de codimension 2) grâce au théorème suivant.

Théorème 2.9 ([HM82, Théorème 1]). *Si $\widetilde{\mathcal{M}}_g \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_g$ est une désingularisation de $\overline{\mathcal{M}}_g$ et $\overline{\mathcal{M}}_g^0$ est le lieu des points réguliers, pour n suffisamment grand et divisible on a*

$$\Gamma(\overline{\mathcal{M}}_g^0; nK_{\overline{\mathcal{M}}_g^0}) = \Gamma(\widetilde{\mathcal{M}}_g; nK_{\widetilde{\mathcal{M}}_g}).$$

3. STRUCTURE DE $\mathcal{R}_{g,\ell,k}$ ET DE UNE COMPACTIFICATION

Comme déjà dit dans l'introduction, chaque point de l'espace de modules $\mathcal{R}_{g,\ell,k}$ correspond à un triplet (C, L, ϕ) , racine ℓ -ième du fibré $\omega^{\otimes k}$. L'espace $\mathcal{R}_{g,\ell,k}$ est donc muni d'un morphisme d'oubli $\pi: \mathcal{R}_{g,\ell,k} \rightarrow \mathcal{M}_g$ qui envoie le point $[C, L, \phi]$ sur le point correspondant à sa base $[C]$.

C'est un fait connu que si $F \rightarrow C$ est un fibré en droite sur la courbe lisse C , F a une racine ℓ -ième si et seulement si ℓ divise le degré de F , et dans ce cas les racines sont exactement ℓ^{2g} où g est le genre de C . Donc si g, ℓ, k sont tels que ℓ divise $\deg(\omega^{\otimes k})$, c'est-à-dire que ℓ divise $k(2g-2)$, l'espace $\mathcal{R}_{g,\ell,k}$ est bien défini et le morphisme $\pi: \mathcal{R}_{g,\ell,k} \rightarrow \mathcal{M}_g$ est un revêtement non ramifié de degré ℓ^{2g} .

3.1. Compactifier $\overline{\mathcal{R}}_{g,\ell,k}$. Malheureusement une courbe stable singulière n'a pas toujours le "bon" nombre de racines : par exemple dans le cas d'une courbe irréductible de genre arithmétique g avec un point d'autointersection, les racines, s'il y en a, sont toujours en nombre de ℓ^{2g-1} .

Donc la notion de racine introduite ne permet pas de compactifier $\mathcal{R}_{g,\ell,k}$ tout en conservant un revêtement non ramifié vers $\overline{\mathcal{M}}_g$. Pour résoudre ce genre d'irrégularité, on introduit la notion de diviseur fractionnaire. Cela est possible avec la notion de courbe *tordue*, notamment développée par Abramovich [Abr08], Abramovich-Vistoli [AV02] et Abramovich-Jarvis [AJ03].

Définition 3.1 (courbe tordue). Une courbe tordue est un champ de Deligne-Mumford dont l'espace grossier est une courbe stable, dont le lieu non singulier est un schéma, et dont les singularités sont des nœuds localement isomorphes à $[\{xy = 0\}/\mu_r]$ tels que l'action d'une racine r -ième de l'unité $\xi_r \in \mu_r$ sur $\{xy = 0\}$ est

$$\xi_r \cdot (x, y) \mapsto (\xi_r x, \xi_r^{-1} y).$$

Dans un nœud comme ci-dessus on dit que μ_r est le stabilisateur du nœud.

La notion de racine l -ième s'étend naturellement au cas des courbes tordues. Une racine l -ième de $\omega^{\otimes k}$ est un triplet (C, L, ϕ) où C est une courbe tordue d'espace grossier C , avec stabilisateurs d'ordre divisible par l dans ses nœuds. En plus L est un fibré en droites sur C , tel que $\phi: L^{\otimes \ell} \rightarrow \omega_C^{\otimes k}$ est un isomorphisme. Ce nouvel outil permet d'éliminer les obstructions locales à l'existence des racines. En fait, si l divise $k \cdot (2g - 2)$, on revient à avoir l^{2g} racines l -ièmes de $\omega^{\otimes k}$ au-dessus de C . On arrive à montrer que l'espace de modules des racines l -ièmes de $\omega^{\otimes k}$ sur des courbes tordues est une compactification de $\mathcal{R}_{g,\ell,k}$ qui possède un morphisme non ramifié vers $\overline{\mathcal{M}}_g$. On le note $\overline{\mathcal{R}}_{g,\ell,k}$.

La structure locale de $\overline{\mathcal{R}}_{g,\ell,k}$ est analogue à celle de $\overline{\mathcal{M}}_g$: pour tout point $[C, L, \phi] \in \overline{\mathcal{R}}_{g,\ell,k}$ il existe un voisinage isomorphe à $\mathbb{C}^{3g-3} / \text{Aut}(C, L, \phi)$, où on a

$$\text{Aut}(C, L, \phi) = \{s \in \text{Aut}(C) \mid s^*L = L\}.$$

On introduit le groupe des automorphismes *fantôme*

$$\text{Aut}_C(C, L, \phi) := \{s \in \text{Aut}(C, L, \phi) \text{ qui fixent l'espace grossier } C\},$$

et le groupe $\text{Aut}'(C)$ qui est l'image de la projection naturelle $\text{Aut}(C, L, \phi) \rightarrow \text{Aut}(C)$. Le groupe des automorphismes se trouve alors dans la suite exacte suivante,

$$0 \rightarrow \text{Aut}_C(C, L, \phi) \rightarrow \text{Aut}(C, L, \phi) \rightarrow \text{Aut}'(C) \rightarrow 0.$$

L'analyse de $\text{Aut}'(C)$ est similaire à celle de $\text{Aut}(C)$ dans le cas de $\overline{\mathcal{M}}_g$, mais la caractérisation plus importante des singularités de $\overline{\mathcal{R}}_{g,\ell,k}$ provient du groupe des fantômes $\text{Aut}_C(C, L, \phi)$.

3.2. Graphe dual. Pour traiter la structure de $\mathcal{R}_{g,\ell,k}$ on utilise aussi l'outil du graphe dual. Les sommets de ce graphe correspondent aux composantes irréductibles de C , et les arêtes correspondent aux nœuds, une arête reliant deux sommets si le nœud associé se trouve à l'intersection des composantes correspondantes. En plus chaque sommet est décoré par le genre de la composante correspondant.

Le graphe dual $\Gamma(C)$ de C encode des données fondamentales pour comprendre la structure locale de $\overline{\mathcal{R}}_{g,\ell,k}$ autour du point $[C, L, \phi]$. Le fibré L a un ordre de multiplicité $M \in \mathbb{Z}/\ell$ au-dessus de chaque nœud de la courbe C . La donnée de ces ordres de multiplicité est équivalent à décorer les arêtes orientées de $\Gamma(C)$, de façon que renverser l'orientation d'une arête est équivalent à renverser l'ordre de multiplicité dans \mathbb{Z}/ℓ . Si \mathbb{E} est l'ensemble des arêtes orientées de $\Gamma(C)$, l'ordre de multiplicité est donc une fonction $f: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{Z}/\ell$ tel que $f(\bar{e}) = -f(e)$, où \bar{e} est le même arête que e avec orientation renversée. Les automorphismes fantômes ont maintenant une description très claire.



FIGURE 2. Une courbe nodale de genre 6 et son graphe dual

Proposition 3.2. Soit E l'ensemble des arêtes (non orientées) de $\Gamma(\mathbb{C})$. Chaque automorphisme fantôme $a \in \text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{L}, \phi)$ est associé à une fonction, qu'on appellera également $a: E \rightarrow \mathbb{Z}/\ell$, telle que pour chaque cycle fermé e_1, \dots, e_k d'arêtes orientées de $\Gamma(\mathbb{C})$, on a

$$\sum_{i=1}^k a(e_i) \cdot M(e_i) = 0.$$

Cette proposition permet donc de relier l'analyse locale de $\overline{\mathcal{R}}_{g,\ell,k}$ à l'analyse combinatoire du graphe dual $\Gamma(\mathbb{C})$. En effet, comme on le verra dans la prochaine section, cette analyse combinatoire est la clé de notre projet.

4. DÉVELOPPEMENTS DU PROJET

Comme déjà abordé dans l'introduction, il y a principalement deux lignes de développement de notre travail jusqu'à maintenant. D'un côté la caractérisation des points singuliers de $\overline{\mathcal{R}}_{g,\ell,k}$, et de l'autre, la caractérisation des singularités non canoniques. Le but plus générale est de prouver un résultat sur l'extension des formes pluri-canoniques à $\overline{\mathcal{R}}_{g,\ell,k}$ tout entier, de manière analogue au cas de $\overline{\mathcal{M}}_g$.

4.1. Points lisses de $\overline{\mathcal{R}}_{g,\ell,k}$. Considérons une racine ℓ -ième de $\omega^{\otimes k}$, $(\mathbb{C}, \mathbb{L}, \phi)$. Après la notion d'ordre de multiplicité M , introduite au §3.2, soit $\prod_{p \in \mathfrak{P}} p^{e_p} = \ell$ la factorisation de ℓ , alors un nœud e de \mathbb{C} (et l'arête de $\Gamma(\mathbb{C})$ associée) est dit p -nœud (p -arête respectivement) si p^{e_p} divise $M(e)$.

Définition 4.1 (quasi-arbre). Un graphe connexe Γ est un quasi-arbre si tous ses circuits sont des *loops*, *i.e.* des arêtes dont les deux extrémités sont le même sommet.

Proposition 4.2. Soit $\Gamma_p(\mathbb{C})$ le graphe obtenu en contractant les p -arêtes de $\Gamma(\mathbb{C})$. Le groupe des automorphismes fantômes $\text{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{L}, \phi)$ est engendré par des quasi-réflexions si et seulement si $\Gamma_p(\mathbb{C})$ est un quasi-arbre pour tout $p \in \mathfrak{P}$.

Définition 4.3. Définissons le lieu suivant dans $\overline{\mathcal{R}}_{g,\ell,k}$:

$$U_{\ell,k} := \{[\mathbb{C}, \mathbb{L}, \phi] \mid \Gamma_p(\mathbb{C}) \text{ est un quasi-arbre } \forall p \in \mathfrak{P}\}.$$

Définition 4.4. De plus, si $\pi: \overline{\mathcal{R}}_{g,\ell,k} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_g$ est le morphisme naturel, introduisons le lieu

$$V_{\ell,k} := (\pi^{-1} \text{Sing } \overline{\mathcal{M}}_g) \cap \overline{\text{Sing}} \overline{\mathcal{R}}_{g,\ell,k}.$$

L'ensemble $V_{\ell,k}$ est le lieu des $[\mathbf{C}, \mathbf{L}, \phi] \in \overline{\mathcal{R}}_{g,\ell,k}$ tels que $\text{Aut}'(C)$ n'est pas engendré par des quasi-réflexions.

Donc d'après le Théorème 2.4, on peut décrire le lieu singulier.

$$\text{Sing } \overline{\mathcal{R}}_{g,\ell,k} = U_{\ell,k}^c \cup V_{\ell,k}.$$

4.2. Singularités non canoniques de $\overline{\mathcal{R}}_{g,\ell,k}$. Enfin on va lister quelques résultats partiels sur la caractérisation du lieu des singularités non canoniques. L'analyse de ce lieu est en général bien plus compliqué que celle de $\text{Sing } \overline{\mathcal{R}}_{g,\ell,k}$ car, pour ℓ suffisamment grand, il y a des “nouveaux” graphes, avec nombre de sommets arbitrairement grand, qui admettent des fantômes junior. L'identification d'une classification appropriée pour les graphes avec fantômes junior (pour n'importe quelle valeur de ℓ) est un des enjeux plus fascinants de notre étude.

On définit

$$J_{\ell,k} := (\pi^{-1} \text{Sing}^{\text{nc}} \overline{\mathcal{M}}_g) \cap \text{Sing}^{\text{nc}} \overline{\mathcal{R}}_{g,\ell,k}.$$

L'espace $J_{\ell,k}$ est donc le lieu des racine ℓ -ièmes $[\mathbf{C}, \mathbf{L}, \phi]$ telles que leur groupe associé $\text{Aut}'(C)$ contient un automorphisme de queue elliptique d'ordre 6. C'est le lieu des points qui héritent leur non-canonycité de $\overline{\mathcal{M}}_g$.

Le lieu des “nouvelles” singularités non canoniques, sur lequel se concentrera notre attention, est celui des racines $[\mathbf{C}, \mathbf{L}, \phi]$ pour lesquelles le groupe des fantômes $\text{Aut}_C(\mathbf{C}, \mathbf{L}, \phi)$ est junior :

$$T_{\ell,k} := \{[\mathbf{C}, \mathbf{L}, \phi] \mid \text{Aut}_C(\mathbf{C}, \mathbf{L}, \phi) \text{ (à quotient des quasi-réflexions près) est junior}\}.$$

Donc finalement

$$\text{Sing}^{\text{nc}} \overline{\mathcal{R}}_{g,\ell,k} = T_{\ell,k} \cup J_{\ell,k}.$$

Dans leur article [CF12], Chiodo et Farkas ont déjà montré que dans l'espace $\overline{\mathcal{R}}_{g,\ell,0}$ des courbes de niveau ℓ , le lieu $T_{\ell,0}$ est vide pour $\ell < 5$ et pour $\ell = 6$. Notre analyse a permis de montrer que pour $\ell = 5$, le lieu $T_{5,0}$ a deux composantes irréductibles, caractérisées par les deux graphes duaux décorés suivants.



FIGURE 3. Graphes duaux décorés de deux racine dans $\overline{\mathcal{R}}_{g,5,0}$ avec des fantômes junior

L'espace $T_{7,0}$ a déjà 7 composantes irréductibles, et le nombre de telles composantes devient de plus en plus grand quand ℓ croît.

On a aussi une description du lieu $T_{\ell,k}$ pour $k \neq 0$ et ℓ petit. Le cas $T_{2,1}$ est vide, le cas $T_{3,1}$ a une seule composante irréductible, formée par les (C, L, ϕ) avec le graphe dual décoré suivant.

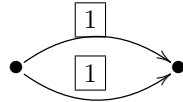


FIGURE 4. Graphe dual décoré d'une racine dans $\overline{\mathcal{R}}_{g,3,1}$ avec des fantômes junior

Observons que l'on a $\overline{\mathcal{R}}_{g,3,1} \cong \overline{\mathcal{R}}_{g,3,2}$ et $T_{3,1} \cong T_{3,2}$.

Pour $\ell = 4$ on a deux cas. Les espaces $\overline{\mathcal{R}}_{g,4,1}$ et $\overline{\mathcal{R}}_{g,4,3}$ sont isomorphes, et aussi $T_{4,1}$ et $T_{4,3}$, qui ont une seule composante irréductible. Le lieu $T_{4,2}$ au contraire est vide.

Pour $\ell = 5$ on a déjà 8 composantes irréductibles dans $T_{5,k}$ (n'importe quel $k \neq 0$) et tel nombre va "exploser" si ℓ croît.

RÉFÉRENCES

- [Abr08] Dan Abramovich, *Lectures on Gromov-Witten invariants of orbifolds*, Enumerative invariants in algebraic geometry and string theory, Lecture Notes in Math., vol. 1947, Springer, Berlin, 2008, pp. 1–48.
- [ACG11] Enrico Arbarello, Maurizio Cornalba, and Phillip A. Griffiths, *Geometry of algebraic curves. Volume II*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 268, Springer, Heidelberg, 2011, With a contribution by Joseph Daniel Harris.
- [AJ03] Dan Abramovich and Tyler J. Jarvis, *Moduli of twisted spin curves*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), no. 3, 685–699.
- [AV02] Dan Abramovich and Angelo Vistoli, *Compactifying the space of stable maps*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), no. 1, 27–75.
- [CEFS13] Alessandro Chiodo, David Eisenbud, Gavril Farkas, and Frank-Olaf Schreyer, *Syzygies of torsion bundles and the geometry of the level ℓ modular variety over $\overline{\mathcal{M}}_g$* , Invent. Math. **194** (2013), no. 1, 73–118.
- [CF12] Alessandro Chiodo and Gavril Farkas, *Singularities of the moduli space of level curves*, 2012, arXiv :1205.0201.
- [DM69] Pierre Deligne and David Mumford, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1969), no. 36, 75–109.
- [EH87] David Eisenbud and Joe Harris, *The Kodaira dimension of the moduli space of curves of genus ≥ 23* , Invent. Math. **90** (1987), no. 2, 359–387.
- [Far00] Gavril Farkas, *The geometry of the moduli space of curves of genus 23*, Math. Ann. **318** (2000), no. 1, 43–65.
- [Far08] ———, *Birational aspects of the geometry of $\overline{\mathcal{M}}_g$* , 2008, arXiv :0810.0702.

- [Far10] ———, *The birational type of the moduli space of even spin curves*, Adv. Math. **223** (2010), no. 2, 433–443.
- [FL10] Gavril Farkas and Katharina Ludwig, *The Kodaira dimension of the moduli space of Prym varieties*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **12** (2010), no. 3, 755–795.
- [FV10] Gavril Farkas and Alessandro Verra, *The geometry of the moduli space of odd spin curves*, 2010, arXiv :1004.0278.
- [HM82] Joe Harris and David Mumford, *On the Kodaira dimension of the moduli space of curves*, Invent. Math. **67** (1982), no. 1, 23–88, With an appendix by William Fulton.
- [Pri67] David Prill, *Local classification of quotients of complex manifolds by discontinuous groups*, Duke Math. J. **34** (1967), 375–386.
- [Rei80] Miles Reid, *Canonical 3-folds*, Journées de Géométrie Algébrique d’Angers, Juillet 1979/Algebraic Geometry, Angers, 1979, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980, pp. 273–310.