INTRODUCTION AU DOMAINE DE RECHERCHE
ÉTUDE EN TEMPS LONG D'ÉQUATIONS DE TYPE VLASOV : ASPECTS THÉORIQUES ET NUMÉRIQUES

HORSIN ROMAIN

Sous la direction de Frédéric Rousset (Paris 11) et Erwan Faou (Inria/Ens)

Introduction

On s'intéresse à l'équation de Vlasov-Poisson, qui décrit le comportement de la fonction de distribution f des électrons dans un plasma. Le modèle est le suivant :

$$\begin{cases} \partial_t f + v.\nabla_x f + F(t,x).\nabla_v f = 0, \\ F(t,x) = -\nabla_x W *_x \left(\rho_f(t,x) - L^{-d} \int_y \rho_f(t,y) dy \right), \\ \rho_f(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t,x,v) dv, \\ f(t=0,x,v) = f_{in}(x,v), \\ \widehat{W}(k) = (2\pi)^{-2} e L^2 |k|^{-2}, \end{cases}$$

avec $f(t,x,v) : \mathbb{R} \times \mathbb{T}_L^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$, $\mathbb{T}_L^d = [-L,L]^d$.

On considère des solutions qui sont des petites perturbations d'une solution stationnaire homogène en espace :

$$f(t,x,v) = f^0(v) + h(t,x,v),$$

avec f^0 homogène en espace, et h petit (dans un cadre fonctionnel à préciser).

On s'intéresse alors au comportement en temps long de ces solutions. Plus précisément, on peut observer le phénomène d'"amortissement Landau" : sous des hypothèses convenables, et dans un cadre fonctionnel adapté, $f(t,x,v)$ va converger faiblement vers un état final homogène en espace lorsque $t \to +\infty$.

Ce phénomène fut prédit en 1946 par L. Landau dans [6], avant d'être démontré en 2009 dans [4] par C.Villani et C.Mouhot. Après avoir décrit le contexte physique relatif à l'équation de Vlasov-Poisson, je reconstituerai un bref historique de l'étude de l'amortissement Landau, en partant de l'article originel [6] de 1946 pour arriver au résultat obtenu dans [4]. Je m'efforcerai de faire le lien entre les points de vue mathématiques et physiques, et d'introduire petit à petit les difficultés mathématiques rencontrées.

Dans un second temps, je m'intéresserai plus particulièrement à la preuve de l'amortissement Landau pour les fonctions analytiques donnée par C.Villani et C.Mouhot, ainsi qu'à une simplification de celle-ci donnée récemment dans [3], qui étend également le résultat aux fonctions de régularité Gevrey. Je présenterai des éléments généraux de ces preuves.

Je résumerai ensuite l'article [1], dans lequel F.Rousset et E.Faou prouvent un résultat d'amortissement Landau pour le modèle Vlasov-HMF dans le cadre des espaces de Sobolev à poids. L'idée générale de preuve sera la même que pour la régularité analytique, mais la structure plus simple du modèle Vlasov-HMF me permettra de rentrer plus en détail dans les outils mathématiques de la preuve. Je parlerai également de mon sujet de stage de M2, qui consistait à prouver la convergence en temps d'un schéma de splitting de Strang pour Vlasov-HMF. Enfin, je terminerai par quelques considérations sur le modèle de Vlasov-HMF lorsque l'on considère des petites perturbations d'une solution stationnaire cette fois-ci non homogène en espace, problème ouvert qui fera le lien avec mon sujet de thèse.

Sommaire

I. L'amortissement Landau : aspects historiques, physiques et mathématiques

I.1. **Le contexte : physique des plasmas.**

Un plasma est un gaz dont les atomes sont délestés de leurs électrons. Il s'agit donc d'un ensemble d'électrons, chargés négativement, dans lequel baignent des ions, les noyaux, chargés positivement. On s'intéresse à l'évolution au cours du temps de la fonction de distribution f des électrons. En supposant l'absence de collisions, l'absence de champ magnétique, et l'absence d'effets relativistes, le comportement de f est décrit par l'équation de Vlasov-Poisson, donnée par :

$$\partial_t f(t,x,v) + v.\nabla_x f(t,x,v) + \frac{F(t,x)}{m}.\nabla_v f(t,x,v) = 0. \tag{I.1}$$

f dépend du temps $t \in \mathbb{R}$, de la variable d'espace $x \in \mathbb{T}^3$, et de la variable de vitesse $v \in \mathbb{R}^3$. m représente la masse d'un électron.
Le terme de transport libre $v.\nabla_x f(t,x,v)$ décrit l'évolution des particules sans l'action de forces extérieures.
Le terme $\frac{F(t,x)}{m}.\nabla_v f(t,x,v)$ décrit le phénomène suivant : les électrons créent un champ électrique qui agit sur le plasma, donc le modifie, donc modifie le champ électrique, et ainsi de suite. Plus précisément, $F(t,x)$ dépend du champ électrique $E(t,x)$ de la manière suivante :

$$F(t,x) = -eE(t,x),$$

$e > 0$ étant la charge (absolue) d'un électron.
Le champ électrique dépend de la densité de charge $\rho(t,x)$:

$$E(t,x) = \nabla_x \Delta_x^{-1} \left(4\pi\rho(t,x)\right),$$

avec

$$\rho(t,x) = \rho_i - e\int f(t,x,v)dv.$$

ρ_i représente la densité de charge relative aux ions.

Lorsque l'on s'intéresse à des solutions de (I.1) qui sont des petites perturbations d'un état stationnaire homogène en x, on observe le phénomène d'amortissement Landau. Physiquement, ce phénomène consiste en l'amortissement exponentiel des oscillations de la charge dans le plasma au cours du temps, causé par les effets combinés du champ électrique et de la dispersion selon la vitesse des particules. Autrement dit, après une petite perturbation, les oscillations de la charge disparaissent et le plasma revient à un état d'équilibre.

I.2. **L'article de L.Landau.**

Le phénomène d'amortissement Landau est prédit en 1946 par L.Landau dans [6]. Celui-ci considère l'équation de Vlasov-Poisson linéarisée autour de la distribution de Maxwell. Plus précisément, on pose :

$$f_0(v) = n\sqrt{\frac{m}{2\pi x T}}e^{-\frac{mv^2}{2xT}}.$$

x est la constante de Boltzman, T la température et n le nombre d'équilibre des électrons par unité de volume de plasma.
On considère ensuite des solutions de la forme :

$$f_0(v) + f(t,x,v),$$

avec f "petit" devant f_0.

L'équation considérée par L.Landau est alors :

$$\begin{cases} \partial_t f(t,x,v) = v.\nabla_x f(t,x,v) - \dfrac{e}{m}\nabla_x \phi(t,x)\partial_v f_0(v) \\ \Delta_x \phi(t,x) = -4\pi \displaystyle\int f(t,x,v)dv. \end{cases} \tag{I.2}$$

C'est un système linéaire fermé, et on peut donc prendre la transformée de Fourier de (I.2) sur $\mathbb{T}^3$ et considérer l'équation sur les coefficients de Fourier. Cela revient à chercher des solutions sous la forme $f_k(t,v)e^{ikx}$. Pour simplifier, on notera $f(t,v) = f_k(t,v)e^{ikx}$. On note $g(v)$ la transformée de Fourier de la donnée initiale $f(0,x,v)$. L.Landau résoud formellement (I.2) en prenant la transformée de Fourier de l'équation, puis en lui appliquant l'opérateur :

$$\mathcal{F}(f) : f(t,v) \to f_p(v) = \int_0^\infty f(t,v)e^{-tp}dt,$$

p étant un nombre complexe appartenant à la droite $\sigma + i\mathbb{R}$, avec $\sigma > 0$ donné. Notant $v = (v_1, v_2, v_3)$ et $u = v_1$, Landau obtient les formules :

$$\begin{cases} f(t,u) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f_p(u)e^{pt}dt \\ f_p(u) = \dfrac{1}{p+iku}\left(g(u) + \dfrac{ike}{m}\phi_p(u)\partial_u f_0(u)\right) \\ \phi_p(u) = \dfrac{4\pi e}{k^2}\dfrac{\int \frac{g(v)}{p+iku}dv}{1 - \frac{4i\pi e^2}{km}\int \frac{\partial f_0(v)}{\partial u}\frac{dv}{p+iku}}. \end{cases} \tag{I.3}$$

La manipulation de L.Landau est en fait la suivante : il prend la transformée de Fourier-Laplace (la combinaison de la transformée de Fourier et de l'opérateur $\mathcal{F}$) de l'équation linéarisée, ce qui donne les formules ci-dessus. Pour pouvoir obtenir la solution de l'équation linéarisée, il faut ensuite prendre la transformée de Fourier-Laplace inverse de (I.3). Pour pouvoir le faire, L.Landau étudie les singularités $p = -iku$, et cette étude lui donne la décroissance du champ électrique vers 0.

I.3. **Interprétations.**

Nous discutons ici des concepts qui sont mis en jeu par la découverte de Landau. On pourra se référer à la section I de [4] pour plus de détails.
L'article de Landau est une étude mathématique, qui ne donne pas d'explication physique à l'amortissement Landau. Néanmoins, des interprétations physiques du phénomène ont été avancées par la suite.

- **Première interprétation possible (années 1970/1980) :**

  Le phénomène serait du à l'interaction entre une onde dans le plasma et les particules qui ont la même vitesse que cette onde. Ces particules sont piégées dans l'onde, et ce sont entre elles qu'ont lieu les échanges d'énergie dominants. Si f_0 est une fonction décroissante de $|v|$, cela implique que parmi ces particules, une majorité sont accélérées. L'onde perd alors de l'énergie et est amortie.

- **Seconde interprétation (années 1950) :**

  La seconde interprétation est un phénomène appelé "phase mixing" : les pertutbations s'homogénéisent en oscillant rapidement en espace. Ces oscillations sont dues au fait que les particules suivent des orbites différentes à des vitesses différentes. Dans l'article de Landau, les singularités dans le plan complexe donnent ces oscillations en espace.

A la lumière de l'article de Landau, l'interprétation "phase-mixing" soulève une interrogation. Dans [6], la théorie des fonctions analytiques est un outil fondamental, puisqu'il faut pouvoir prolonger analytiquement des fonctions pour utiliser la transformée de Fourier-Laplace inverse. Or, les oscillations en espace impliquent une déterioration de l'analyticité. Par exemple, oublions le champ électrique et considérons seulement l'équation de transport :

$$\partial_t f(t,x,v) + v.\nabla_x f(t,x,v) = 0.$$

La solution est $f(t,x,v) = f(0,x-vt,v)$, ce qui implique une croissance exponentielle en temps de la norme analytique. De manière générale, on observera ce genre de phénomène pour toute norme qui tient compre de la régulatité en vitesse. Par exemple, la norme de Sobolev $\mathbb{H}^s$ explosera comme t^s.
A partir de ces constats, les auteurs de [4] affirment qu'une preuve rigoureuse ne peut pas être basée sur la propagation d'un phénomène au cours du temps, puisqu'il est inévitable que l'on perde de la régularité.

On peut également soulever une seconde intérogation : l'équation de Vlasov-Poisson est réversible, mais Landau prédit un phénomène irréversible. En outre, la valeur de l'entropie de change pas au cours du temps, ce qui signifie physiquement qu'il n'y pas de perte d'information. Ce phénomène est appelé "plasma-echo" : le plasma revenu à l'équilibre après une première perturbation va réagir à une seconde perturbation en se souvenant de la première. Il faut donc pouvoir concilier ces deux aspects réversibles et irréversibles.
Le point de vue de cette dernère analyse est essentiellement physique. Mais ce phénomène de "plasma-echo" peut aussi être constaté mathématiquement. Nous verrons que, lorsque l'on considère l'équation de Vlasov-Poisson en variable de Fourier, certains coefficients de Fourier du passé ont une grand influence sur le coefficient de Fourier à l'instant présent, en augmentant en particulier les hautes fréquences (ce qui implique une perte de régularité). Nous verrons cela plus en détails par la suite (voir équations (II.4) et (II.5)).
Dans [4], la réponse au problème "réversibilité/irréversibilité" est la notion de convergence faible : physiquement, celle-ci correspond à la convergence des observables, qui ne contiennent pas forcément autant d'information que f. Celles-ci peuvent donc perdre de manière irréversible de l'information au cours du temps, car l'information reste conservée dans f, ce qui est cohérent avec le caractère réversible de l'équation.

II. Amortissement Landau pour la régularité analytique ou Gevrey

Nous allons maintenant parler plus en détails des aspects mathématiques de l'amortissement Landau, dont certains ont été aperçus dans la partie précédente. Le but est de présenter les idées générales des preuves données dans [3] et [4].

II.1. **Le résultat.**

On s'intéresse donc à l'équation de Vlasov-Poisson (en dimension d) :

$$\begin{cases} \partial_t f + v.\nabla_x f + F(t,x).\nabla_v f = 0, \\ F(t,x) = -\nabla_x W *_x \left(\rho_f(t,x) - L^{-d}\displaystyle\int_y \rho_f(t,y)dy\right), \\ \rho_f(t,x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f(t,x,v)dv, \\ f(t=0,x,v) = f_{in}(x,v), \end{cases} \tag{II.1}$$

avec $f(t,x,v) : \mathbb{R} \times \mathbb{T}_L^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$, $\mathbb{T}_L^d = [-L,L]^d$.

On suppose qu'il existe $C_W < +\infty$ et $\gamma \geq 1$ tel que

$$\left|\widehat{W}(k)\right| \leq C_W \left|k\right|^{-1-\gamma}.$$

Ce cas général couvre le cas d'un plasma.

On regarde des solutions de la forme $g(t,x,v) = f^0(v) + h(t,x,v)$, avec f^0 homogène en espace. On effectue également le changement de variable $z = x - vt$ pour se débarasser du terme de transport libre, qui, comme on l'a vu, fait perdre de la régularité analytique. Cette manipulation est commune avec [4]. Elle répond au problème de perte de régularité due au phénomène de "phase-mixing" décrit précédemment. On obtient ainsi l'équation :

$$\begin{cases} \partial_t f + F(t, z+vt).(\nabla_v - t\nabla_z)f + F(t, z+vt).\nabla_v f^0 = 0, \\ f(t,z,v) = h(t,x,v) \\ f(t=0,z,v) = h_{in}(z,v). \end{cases} \tag{II.2}$$

On définit un nouvelle densité ρ, celle de la perturbation h, par

$$\rho(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} h(t,x,v)dv,$$

qui vérifie $\hat{\rho}_k(t) = \hat{f}_k(kt)$.
Cette formule a du sens par injection de Sobolev, lorsque $\sum_{\alpha \leq M} \|v^\alpha f\|_{L^2} < \infty$, pour $M > d/2$.

On se place dans le cadre des normes de Gevrey, qui mesure la régularité d'une fonction en terme de transformée de Fourier sur $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d$.

Pour $\nu \in]0,1]$, et $\sigma \in \mathbb{R}$, les normes de Gevrey sont données par :

$$\begin{aligned} \|h\|^2_{\mathcal{G}^{\lambda,\sigma,\nu}} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \int_\eta \left|\hat{h}_k(\eta)\right|^2 \langle k,\eta\rangle^\sigma e^{2\lambda\langle k,\eta\rangle^\nu} d\eta \\ \|\rho\|^2_{\mathcal{F}^{\lambda,\sigma,\nu}} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \left|\hat{\rho}_k(t)\right|^2 \langle k,kt\rangle^\sigma e^{2\lambda\langle k,kt\rangle^\nu}. \end{aligned} \tag{II.3}$$

(Pour $\sigma = 0$, on a la norme analytique).

Notre intéret principal n'est pas l'existence de solutions pour ces normes. Néanmoins, on pourra se référer au paragraphe 2.3 de [3] où il est expliqué que, pour la régularité Gevrey, le problème de Cauchy associée à (II.2) est localement bien posé. On y trouvera également un lemme de propagation de la régularité. Nous ne détaillerons pas plus cet aspect là.

Un aspect important dans [4] comme dans [3] est de bien comprendre l'amortissement Landau linéaire. Par ceci, on entend contrôler la partie linéaire de l'équation par la partie non linéaire. Il faut pour cela supposer que f^0 vérifie l'hypothèse de stabilité suivante :

Définition.
*On dit que f^0 vérifie le critère de stabilité **(L)** s'il existe des constante $C_0, \overline{\lambda}, c > 0$ et un entier $M > d/2$ tel que*

$$\sum_{|\alpha| \leq M} \left\|v^\alpha f^0\right\|^2_{\mathcal{G}^{\overline{\lambda},1}} \leq C_0,$$

et si pour tout $\xi \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(\xi) < \overline{\lambda}$,

$$\inf_{k \in \mathbb{Z}^d} \left|\mathcal{L}(\xi,k) - 1\right| \geq c,$$

avec

$$\mathcal{L}(\xi,k) = -\int_0^\infty e^{\bar{\xi}|k|t}\widehat{f^0}(kt)\widehat{W}(k)|k|^2 t dt.$$

Le résultat d'amortissement Landau prouvé dans [3] est le

Théorème II.1.1.
Soit $\frac{1}{2+\gamma} < s \leq 1$, *et* $\lambda_0 > \lambda' > 0$ *quelconques* ($\lambda_0 < \overline{\lambda}$ *si* $s = 1$). *Si* f^0 *vérifie* **(L)**, *alors il existe* $\epsilon_0 = \epsilon_0(d, M, \overline{\lambda}, C_0, c, \lambda_0, \lambda', s)$ *tel que si* h_{in} *est de moyenne nulle et*

$$\sum_{|\alpha| \leq M} \|v^\alpha h_{in}\|^2_{\mathcal{G}^{\lambda_0,s}} < \epsilon^2 \leq \epsilon_0^2,$$

alors il existe $C > 0$ $h_\infty \in \mathcal{G}^{\lambda',s}$ *de moyenne nulle tel que pour tout* $t \geq 0$,

$$\|h(t, x + vt, v, v) - h_\infty(x, v)\|_{\mathcal{G}^{\lambda',s}} \leq C\epsilon e^{-\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda')t^s},$$
$$\|\rho(t)\|_{\mathcal{F}^{\lambda',s}} \leq C\epsilon e^{-\frac{1}{2}(\lambda_0-\lambda')t^s}.$$

Une conséquence simple de ce résultat est que la solution dans le référentiel initial $f(t, x, v) = f^0(v) + h(t, x, v)$ converge faiblement vers $f^\infty(v) = f^0(v) + (2\pi)^{-d} \int h_\infty(x, v)dx$ quand $t \to \infty$. On obtient également la convergence exponentielle vers 0 du champ électrique F.

II.2. **Éléments de preuve.**

La stratégie de la preuve de [3] est identique à celle de [4] : obtenir une borne uniforme en temps sur la régularité de h. Ceci consititue le point essentiel. En écrivant que :

$$f(T, z, v) = h_{in} - \int_0^T F(t, z + vt).(\nabla_v - t\nabla_z)(f^0 + f)(t)dt,$$

et en utilisant cette borne uniforme, on peut définir

$$f^\infty(z, v) = h_{in} - \int_0^\infty F(t, z + vt).(\nabla_v - t\nabla_z)(f^0 + f)(t)dt,$$

et le théorème II.1.1 se prouve en évaluant le reste d'une intégrale convergente.

Le but est donc d'obtenir une borne uniforme en temps sur la régularité de h. Dans [4], les auteurs obtiennent cette borne en utilisant un schéma de Newton global en temps, et en invoquant le résultat d'amortissement linéaire à chaque étape. Dans [3], cette borne est obtenue par un bootstrap. Cette technique consiste à supposer que l'on dispose sur un intervalle de temps $I = [0, T]$ d'une borne M_1 uniforme en temps sur la régularité de h (il est aisé de constater que I est nécessairement relativement fermé dans $\mathbb{R}$). En utilisant cette borne, on en obtient une nouvelle $M_2 < M_1$, ce qui implique que I est relativement ouvert, et donc que $T = \infty$.

Dans tous les cas, il est nécessaire de bien comprendre les pertes de régularité propres à l'équation de Vlasov-Poisson. Nous ne détaillerons pas outre mesure la preuve du théorème II.1.1. Insistons simplement sur les pertes de régularité possibles, et sur la manière dont on les prend en charge. On adopte le point de vue de [3], avant de comparer avec [4].

En prenant la transformée de Fourier, (II.2) donne les équations :

$$\partial_t \hat{f}_k(t, \eta) + \hat{\rho}_k(t)\widehat{W}(k)k.(\eta - tk)\hat{f}^0(\eta - kt) + \sum_{l \in \mathbb{Z}^d_*} \hat{\rho}_l(t)\widehat{W}(l)l.(\eta - kt)\hat{f}_{k-l}(t, \eta - tl) = 0, \tag{II.4}$$

et

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_k(t) = \hat{h}_{in}(k,kt) - \int_0^t \hat{\rho}_k(\tau)\widehat{W}(k)k.k(t-\tau)\hat{f}^0(k(t-\tau))d\tau \\ - \int_0^t \sum_{l\in\mathbb{Z}^d_*} \hat{\rho}_l(\tau)\widehat{W}(l)l.k(t-\tau)\hat{f}_{k-l}(\tau,kt-l\tau)d\tau.\end{aligned} \tag{II.5}$$

(II.4) possède une structure d'équation de transport, et on peut donc s'attendre à ce que cela occasionne une perte de régularité. Mais via un commutateur, on peut tirer profit des annulations propres à la structure de transport. Essentiellement, on a affaire à une structure qui préserve la norme L^2. L'équation (II.5) fait aussi apparaître une dérivée de f, et donc une perte de régularité possible. Pour traiter cela, on inclut dans le bootstrap une norme de régularité plus haute (que l'on autorise à croitre en temps).

La seconde perte de régularité possible est la "réaction". Par ceci, on désigne l'effet important qu'a $\hat{\rho}_l(\tau)$ sur $\hat{\rho}_k(t)$ dans (II.5), lorsque $kt \sim l\tau$. C'est le "plasma-echo" dont on parlait précédemment. Cela peut, à certains temps, faire perdre de la régularité en amplifiant les hautes fréquences. On a le même genre de soucis dans (II.4) lorsque ρ rencontre les basses fréquences de f. La réaction est traitée en utilisant le critère de stabilité (**L**), qui permet de contrôler la partie linéaire de l'équation par la partie non linéaire. La réaction est ensuite analysée dans le teme non linéaire.

Dans [3], on utilise un décomposition en paraproduits. Plus précisément, il s'agit de décomposer un produit en fréquence sous la forme suivante :

$$FG = F_{hautes}G_{basses} + F_{basses}G_{hautes} + reste.$$

Cela permet de séparer les effets de transport et de réaction.
Dans [4], le schéma de Newton permet de séparer les deux effets, en faisant aussi apparaitre un reste.

Dans les deux cas, les pertes de régularité sont similaires, et on retrouve les mêmes outils (amortissement linéaire, structure de transport) pour les gérer. Seul le point de vue général varie, entre schéma de Newton et bootstrap. La principale différence est la suivante :
Le schéma de Newton fait apparaitre une perte de régularité à chaque étape, à cause de la dérivée de f présente dans (II.5), qu'il faut donc gérer à chaque itération. L'avantage du bootstrap est qu'il suffit comme on l'a dit d'introduire une norme de régularité plus haute, qui compense cette perte de régularité.

III. Le modèle Vlasov-HMF dans les espaces de Sobolev

Nous nous intéressons maintenant au modèle Vlasov-HMF, qui est donné par :

$$\partial_t f(t,x,v) + v\partial_x f(t,x,v) = \partial_x \left(\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} P(x-y)f(t,y,u)dudy\right)\partial_v f(t,x,v), \tag{III.1}$$

avec $P(x) = \cos(x), (t,x,v) \in \mathbb{R}\times\mathbb{T}\times\mathbb{R}$, et $f(0,x,v) = f^0(x,v)$.

C'est un modèle plus simple que l'équation de Vlasov-Poisson. Il est en particulier plus agréable pour effectuer des calculs. On pourra se référer à [2] pour plus de détails sur ce modèle.
Le calcul du champ électrique est nettement simplifié, puisque le noyau $P(x)$ vaut $\cos(x)$, alors que pour Vlasov-Poisson, il s'agit du noyau associé au Laplacien en x. En particulier, ce nouveau noyau présente l'avantage de n'avoir que deux coefficients de Fourier non nuls, ce qui permet de simplifier le traitement de la perte de régularité par l'effet de "réaction" décrit précédemment.

Un différence majeure avec ce que nous avons pu voir jusqu'ici est que la théorie des fonctions analytiques n'est quasiment plus présente. On travaille dorénavant dans les espaces de Sobolev à poids, donnés par la norme :

$$\|f\|_{\mathcal{H}^s}^2 = \sum_{|p|+|q|\leq s} \int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}} (1+|v|^2)^{m_0} |\partial_x^p \partial_v^q f|^2 dxdv.$$

Un avantage de ces espaces est le contrôle ponctuel de la transformée de Fourier sur $\mathbb{T}\times\mathbb{R}$, donnée par

$$\hat{f}_k(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}} f(x,v) e^{-ikx} e^{-i\xi v} dxdv.$$

On dispose en effet du :

Lemme III.0.1. *Pour tout α, β, $s \in \mathbb{N}$ tels que $\alpha + \beta = s$, on a l'inégalité :*

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \forall \xi \in \mathbb{R}, \left|\hat{f}_k(\xi)\right| \leq 2^{s/2} C(m_0) \langle k\rangle^{-\alpha} \langle \xi\rangle^{-\beta} \|f\|_{\mathcal{H}^s}.$$

Dans ce contexte, il est possible de prouver un résultat d'amortissement Landau pour Vlasov-HMF. C'est l'objet de [1], article que nous allons maintenant résumer. Nous retrouverons le idées générales de la partie précédente, mais la structure plus simple de Vlasov-HMF va nous permettre de présenter plus en détails les outils mathématiques mis en jeu.

III.1. **Amortissement Landau.**

On considère des petites perturbations d'une solution stationnaire η :

$$f(t,x,v) = \eta(v) + \epsilon r(t,x,v),$$

avec

$$f^0(x,v) = \eta(v) + \epsilon r^0(x,v),$$

$\epsilon > 0$.

A nouveau, on considère plutôt $g(t,x,v) = r(t, x+tv, v)$, solution de l'équation :

$$\partial_t g = \{\phi(t,g), \eta\} + \epsilon\{\phi(t,g), g\}, \tag{III.2}$$

avec

$$\phi(t,g)(x,v) = \left(\int_{\mathbb{T}\times\mathbb{R}} P(x-y+t(v-u)) g(t,y,u) dudy\right),$$

et

$$\{f,g\} = \partial_x f \partial_v g - \partial_v f \partial_x g.$$

Il s'agit encore d'éviter une explosion en temps de la norme de Sobolev à cause du phénomène de "phase-mixing".

La stratégie de la preuve est analogue à ce que l'on a vu précédemment : il s'agit d'obtenir via un bootstrap une borne uniforme en temps sur la régularité de g. Les pertes de régularité sont les mêmes que pour le cas de Vlasov-Poisson, à savoir les effets de transport et de réaction. Cependant, la structure de Vlasov-HMF simplifie le traitement de ces pertes. Tout d'abord, les deux effets peuvent être traités séparément, et la décomposition en paraproduits n'est plus nécessaire. En outre, comme on a pu le dire, la réaction est plus simple à traiter, car P n'a que deux coefficients de Fourier non nuls. Il est cependant toujours nécessaire de disposer d'un résultat d'amortissement linéaire, *ie* un contrôle de la partie linéaire de l'équation par sa non linéarité. On a donc à nouveau besoin d'une hypothèse de stabilité sur η. L'hypothèse est la suivante :

Définition (Critère de Penrose).
On pose

$$K(k,t) = -kp_k kt\hat{\eta}_0(kt)\mathbb{1}_{t\geq 0},$$

$t \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}$.
Les p_k désignent les coefficients de Fourier de $P(x)$.
On note $\hat{K}(k,\omega)$ la transformée de Fourier de $K(n,\cdot)$. L'hypothèse de stabilité vérifiée par η est alors la suivante :

$$(1+v^2)\eta(v) \in \mathcal{H}^5 \text{ et } \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \inf_{\Im(\omega)\leq 0} |1-\hat{K}(k,\omega)| \geq \alpha, \quad k = \pm 1, \tag{$\mathbf{H}$}$$

$\Im$ désignant la partie imaginaire.

Pour suivre l'évolution de la régularité de g, on pose

$$Q_{T,s}(g) = \sup_{t\in[0,T]} \frac{\|g(t)\|_{\mathcal{H}^s}}{\langle t\rangle^3} + \sup_{t\in[0,T]} \sup_{k\in\{\pm 1\}} \langle t\rangle^{s-1} |\zeta_k(t)| + \sup_{t\in[0,T]} \|g(t)\|_{\mathcal{H}^{s-4}},$$

avec

$$\zeta_k(t) = \hat{g}_k(kt).$$

Le résultat de bootstrap de [1] est le

Théorème III.1.1.
Soit $s \geq 7$ et $R_0 > 0$ tel que $Q_{0,s}(g) \leq R_0$. Si $\eta \in \mathcal{H}^{s+4}$ vérifie ($\mathbf{H}$), alors il existe $R > 0$ et $\epsilon_0 > 0$ tels que, pour tout $\epsilon \in]0,\epsilon_0]$ et pour tout $T \geq 0$,

$$Q_{T,s}(g) \leq R.$$

Intéressons nous à la gestion des pertes de régularité. Comme on a pu le voir, un des aspects du transport est d'inclure dans le bootstrap une norme de régularité plus élevée. C'est pourquoi, pour une borne sur $\|g(t)\|_{\mathcal{H}^{s-4}}$, on en cherche aussi une sur $\frac{\|g(t)\|_{\mathcal{H}^s}}{\langle t\rangle^3}$.
Le second aspect du transport est la structure d'équation de transport elle-même, qui occasionne une perte de régularité, mais dont on peut tirer avantage. Cet effet apparaît lorsque l'on traite les normes $\|g(t)\|_{\mathcal{H}^{s-4}}$ et $\|g(t)\|_{\mathcal{H}^s}$.
Plus précisément, on note $\mathcal{L}_t[g]$ l'opérateur donné par

$$\mathcal{L}_t[g]f = \{\phi(t,g), f\},$$

de sorte que

$$\partial_t g = \mathcal{L}_t[g](\eta + \epsilon g).$$

On note $D = D^{m,p,q}$ l'opérateur défini par le multiplicateur de Fourier $k^p\xi^q\partial_\xi^m$, avec $p+q \leq s-4$ (resp s) et $m \leq m_0$. Pour borner $\|g(t)\|_{\mathcal{H}^{s-4}}$ ($= \|Dg(t)\|_{L^2}$, essentiellement), on effectue l'estimation d'énergie suivante

$$\begin{aligned}\left\|\frac{d}{dt}Dg(t)\right\|_{L^2}^2 &= 2\epsilon\langle Dg(t), D\left(\mathcal{L}_t[g]g(t)\right)\rangle_{L^2} + 2\langle Dg(t), D\left(\mathcal{L}_t[g](\eta)\right)\rangle_{L^2}\\ &= 2\epsilon\langle Dg(t), \mathcal{L}_t[g]Dg(t)\rangle_{L^2} + 2\epsilon\langle Dg(t), [D,\mathcal{L}_t[g]]g(t)\rangle_{L^2} + 2\langle Dg(t), D\left(\mathcal{L}_t[g](\eta)\right)\rangle_{L^2}.\end{aligned}$$

La structure d'équation de transport préserve la norme L^2, et le premier terme est donc nul. Pour les deux autre termes, il n'y a pas de perte de régularité, comme le montre le

Lemme III.1.1.
Pour $p+q \leq \gamma$ et $m \leq m_0$, on a pour deux fonctions $h(t)$ et $g(t)$:

$$\|[D^{m,p,q}, \mathcal{L}_\sigma[g]]\, h(\sigma)\|_{L^2} \leq C(\gamma)\left(m_{\sigma,\gamma+1}(\zeta)\, \|h(\sigma)\|_{\mathcal{H}^1} + m_{\sigma,2}(\zeta)\, \|h(\sigma)\|_{\mathcal{H}^\gamma}\right), \tag{III.3}$$

$$\|D^{m,p,q}\left(\mathcal{L}_\sigma[g]\right) h(\sigma)\|_{L^2} \leq C(\gamma)\left(m_{\sigma,\gamma+1}(\zeta)\, \|h(\sigma)\|_{\mathcal{H}^1} + m_{\sigma,2}(\zeta)\, \|h(\sigma)\|_{\mathcal{H}^{\gamma+1}}\right), \tag{III.4}$$

pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$, où ζ est toujours donné par $\zeta_k(t) = \hat{g}_k(t, kt)$, $k = \pm 1$, et où

$$m_{\sigma,\gamma}(\zeta) = \langle \sigma \rangle^{\gamma} \left(\sup_{k=\pm 1} |\zeta_k(\sigma)| \right).$$

Autrement dit, les annulations propres à la structure de transport permettent déviter les pertes de régularité.

Pour traiter l'effet de réaction, qui intervient lorsque l'on traite la quantité

$$M_{T,s}(g) = \sup_{t\in[0,T]} \sup_{k\in\{\pm 1\}} \langle t \rangle^{s-1} |\zeta_k(t)|,$$

on écrit l'équation sous la forme d'une équation linéaire avec un terme source :

$$\zeta_k(t) = \int_0^t K(k, t-\sigma)\zeta_k(\sigma)d\sigma + F_k(t), \quad k = \pm 1,$$

avec

$$F_k(t) = \hat{g}_k(0, kt) - \epsilon \sum_{l=\pm 1} p_l \int_0^t \zeta_l(\sigma)\hat{g}_{k-l}(\sigma, kt - l\sigma)kl(t-\sigma)d\sigma.$$

Autrement dit, en on a une équation de la forme :

$$y(t) = K * y(t) + F(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

pour laquelle on veut contrôler y par f.

L'inégalité de Young montre que

$$\|y\|_{L^\infty} \leq \|K\|_{L^1} \|y\|_{L^\infty} + \|F\|_{L^\infty}.$$

On voudrait absorber le membre de droite $\|K\|_{L^1} \|y\|_{L^\infty}$ dans le membre de gauche, ce qui nécéssite donc de regarder plus en détail K. Pour cela, on effectue un découpage en fréquence, avant d'utiliser l'inégalité de Young.

La première partie de (**H**), $(1+v^2)\eta(v) \in \mathcal{H}^5$, donne de la décroissance sur les dérivées de K, et donc sur celles de $\hat{K}$. Cette décroissance permet de montrer que $\|K\|_{L^1} \leq 1/2$ pour les hautes fréquences (celles en dehors d'un compact suffisament grand).

Pour les basses fréquences , en prenant la transformée de Fourier (en temps) de l'équation

$$y(t) = K * y(t) + F(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

et en utilisant la seconde partie de (**H**), on obtient :

$$\hat{y}(\omega) = \frac{1}{1-\hat{K}(\omega)}\hat{F}(\omega),$$

ce qui, via les propriétés usuelles de la tranformée de Fourier, donne

$$\|y\|_{L^\infty} \leq C \|F\|_{L^\infty}$$

pour les basses fréquences.

L'hypothèse de stabilité ramène ainsi l'étude de la réaction dans le terme non linéaire, où la structure de ce dernier évite les pertes de régularité.

Un fois ces pertes de régularité gérées, on obtient la borne uniforme un temps sur Q. L'amortissement Landau en est une conséquence directe.

On commence par définir l'état final par la formule

$$g^\infty(x, v) = g^0(x, v) + \int_0^\infty \{\phi(\sigma, g(\sigma)), \eta + \epsilon g(\sigma)\}(x, v)d\sigma.$$

la borne sur Q permet de prouver que :

$$\|\{\phi(\sigma, g(\sigma)), \eta + \epsilon g(\sigma)\}\|_{\mathcal{H}^{s-4}} \leq C(R)\left(\frac{1}{\langle\sigma\rangle^2} + \frac{\langle\sigma\rangle^{3/4}}{\langle\sigma\rangle^{s-3}}\right),$$

donc g^∞ est bien définie.

La différence entre g et sa limite est donc le reste d'une intégrale convergente, et on a :

$$\|g(t) - g^\infty\|_{\mathcal{H}^r} \leq \frac{C}{\langle t\rangle^{s-r-3}},$$

pour $1 \leq r \leq s-4$.

Ceci (et le lemme III.0.1) permet de voir que la solution $f(t,x,v) = \eta(v) + \epsilon r(t,x,v)$ converge faiblement vers

$$\eta^\infty(v) = \eta(v) + \frac{\epsilon}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g^\infty(x,v)dx,$$

soit l'amortissement Landau.

III.2. **Applications numériques.**

Le but de mon mémoire de M2 était de bien comprendre l'article [1] que je viens de résumer, puis de m'en inspirer pour prouver la convergence d'un schéma de splitting de strang pour Vlasov-HMF. Je vais maintenant présenter brièvement cet aspect numérique.

Le but est de construire une solution approchée de l'équation (III.2). Pour cela, on se donne un pas de temps $\tau \in [0,1]$. On procède ensuite de la manière suivante :

- Pendant un temps $\frac{\tau}{2}$, on simule l'équation :
$$\partial_t r(t,x,v) + v\partial_x r(t,x,v) = 0, \tag{III.5}$$
avec la donnée initiale r^0. On note $r^{\frac{1}{3}}$ le résultat.
- Pendant un temps τ on simule l'équation :
$$\partial_t r(t,x,v) = \partial_x\left(\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} P(x-y)r(t,y,u)dydu\right)\partial_v\left(\eta(v) + \epsilon r(t,x,v)\right), \tag{III.6}$$
avec la donnée initiale $r^{\frac{1}{3}}$. On note $r^{\frac{2}{3}}$ le résultat.
- Enfin, pendant un temps $\frac{\tau}{2}$, on simule à nouveau l'équation (III.5).
- On répète l'opération pour obtenir successivement $r^{1+\frac{1}{3}}, r^{1+\frac{2}{3}}, r^2, \ldots, r^{n-1}, r^{n-1+\frac{1}{3}}, r^{n-1+\frac{2}{3}}, r^n$.

$r^n(x,v)$ est une approximation de $r(n\tau,x,v)$. On note alors $g^i(x,v) = r^i(x+i\tau v, v)$, pour tout $0 \leq i \leq n$. $g^n(x,v)$ est donc une approximation de $g(n\tau,x,v)$, la solution de (III.2).

Il est en fait possible de prolonger chaque g^i en une fonction $g^i(t)$ définie sur l'intervalle de temps $[(i-1)\tau, i\tau]$, avec $g^i((i-1)\tau,x,v) = g^{i-1}(x,v)$ et $g^i(i\tau,x,v) = g^i(x,v)$. Comme les équations (III.5) et (III.6) se résolvent de manière explicite, on peut montrer que :

$$g^n(x,v) = g^0(x,v) + \sum_{i=0}^{n-1}\int_{i\tau}^{(i+1)\tau}\left\{\phi_i(g^{i+1}(t)), \eta + \epsilon g^{i+1}(t)\right\}(x,v)dt. \tag{III.7}$$

avec

$$\phi_n(f)(x,v) = \left(\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} P\left(x-y+\frac{\tau}{2}(2n+1)(v-u)\right) f(y,u)dudy\right).$$

On obtient donc une discrétisation de la formulation intégrale de Vlasov-HMF.

En adaptant [1], on peut prouver que $Q\left(g^n\right)$ est bornée uniformément en n, si ϵ est assez petit. Il s'agit essentiellement d'une version discrète de [1], où le bootstrap est remplacé par une récurrence. On ne détaillera pas cette partie, puisque les difficultés (les pertes de régularité notamment) sont analogues à ce dont on vient de parler dans la partie précédente.

Une technique usuelle pour prouver la convergence d'un schéma numérique est de prouver sa consistance et sa stabilité. Ici, nous n'adoptons pas tout à fait cette démarche, mais les bornes sur Q obtenues pour g^n et pour la solution exacte g sont interprétables comme des résultats de stabilité. Ensuite, l'écart entre g^n et $g(n\tau)$ est finalement l'écart entre une intégrale et sa discrétisation (qui est semblable à une méthode du point milieu). En utilisant les résultats de stabilité, on prouve alors la :

Proposition III.2.1.
Pour tout $T>0$ et $s\geq 7$, il existe $\epsilon_0>0$ et $C>0$ (indépendants de T) tels que, pour tout $\epsilon\in]0,\epsilon_0]$,

$$\sup_{n\tau\leq T}\|g^n-g(n\tau)\|_{\mathcal{H}^{s-4}}\leq C\tau^2.$$

En conséquence, le splitting converge :

$$\lim_{\tau\to 0}\sup_{n\tau\leq T}\|g^n-g(n\tau)\|_{\mathcal{H}^{s-4}}=0.$$

Par ailleurs, en utilisant les quantités bornées, on peut définir

$$g^f(x,v)=g^0(x,v)+\sum_{i=0}^{\infty}\int_{i\tau}^{(i+1)\tau}\left\{\phi_i(g^{i+1}(t)),\eta+\epsilon g^{i+1}(t)\right\}(x,v)dt$$

et prouver un résultat d'amortissement Landau discret, ainsi qu'une estimation de l'écart entre les états finaux discret et continu :

Proposition III.2.2.
On fixe $T=n\tau$. Pour tout $s\geq 7$, il existe une fonction $g^f(x,v)\in\mathcal{H}^{s-4}$ et $\epsilon_0>0$ tels que, pour tout $\epsilon\in]0,\epsilon_0]$ et $1\leq r\leq s-4$, on a l'inégalité

$$\left\|g^n-g^f\right\|_{\mathcal{H}^r}\leq\frac{C}{\langle T\rangle^{s-r-3}}.$$

De plus

$$\left\|g^f-g^\infty\right\|_{\mathcal{H}^r}\leq C\left(\tau^2+\frac{1}{\langle T\rangle^{s-r-3}}\right).$$

Par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty}\left\|g^n-g^f\right\|_{\mathcal{H}^r}=0,$$

et donc,

$$\lim_{\tau\to 0}\left\|g^n-g^f\right\|_{\mathcal{H}^r}=0.$$

III.3. **Cas de solutions stationnaires non homogènes.**

Nous nous intéressons maintenant au modèle de Vlasov-HMF pour des petites perturbations de solutions stationnaires non homogènes en espace.
On rappelle le modèle :

$$\begin{cases} \partial_t f(t,x,v) + v\partial_x f(t,x,v) - \partial_x \phi[f](t,x)\partial_v f(t,x,v) = 0, \\ \phi[f](x,v) = -\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} \cos(x-x') f(t,x',v')dx'dv', \\ (t,x,v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}. \end{cases} \tag{III.8}$$

On définit la magnétisation M :

$$Me^{i\psi} = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{T}} f(t,x,v)e^{ix}dxdv,$$

de sorte que :

$$\phi[f](x,v) = -M\cos(x-\psi).$$

M est définie à une phase près, et on peut donc choisir $\phi = 0$.

On peut associer à (III.8) le hamiltonien :

$$h[f](t,x,v) = \frac{v^2}{2} + \phi[f](t,x) = \frac{v^2}{2} - M\cos(x),$$

qui se trouve être le hamiltonien du pendule.
(III.8) s'écrit alors :

$$\partial_t f + \{f,h\} = 0,$$

avec

$$\{f,g\} = \partial_x f \partial_v g - \partial_v f \partial_x g.$$

On regarde maintenant des petites perturbations d'une solution stationnaire $\eta(x,v)$, *ie* des solutions de la forme $f(t,x,v) = \eta(x,v) + r(t,x,v)$ (avec r petit).
Dans le cas où $\eta(x,v) = \eta(v)$, traité précédemment, toute fonction d'énergie (de hamiltonien) $v^2/2$ est solution stationnaire. Dans le cas où η dépend de x et v, $\phi[\eta]$ doit satisfaire une équation.
En se donnant $\eta(x,v)$ qui dépend de (x,v) uniquement à travers $h[\eta]$, $\eta\left(h[\eta](x,v)\right)$ est une solution stationnaire de Vlasov-HMF.
L'équation est alors :

$$\partial_t r = \{\eta, h[\eta+r]\} + \{r, h[\eta+r]\}.$$

On obtient donc un modèle plus compliqué que (III.2). Cependant, on peut montrer qu'il existe un changement de variable $(\omega, J) = F(x,v)$ (les coordonnées angle-action du pendule) tel que, dans les nouvelles variables, on est ramené à une équation de la forme :

$$\partial_t f(t,\omega,J) + \Omega(J)\partial_\omega f(t,\omega,J) - \partial_\omega \phi(t,\omega)\partial_J f(t,\omega,J) = 0.$$

f est cette fois de la forme $f(t,\omega,J) = \eta(J) + r(t,\omega,J)$. ϕ désigne le potentiel du champ électrique dans les nouvelles coordonnées. On a également un hamiltonien $H(J)$ dans les nouvelles coordonnées, qui ne dépend que de J. La fonction $\Omega(J)$, qui est la fréquence du pendule, est donnée par :

$$\Omega(J) = \partial_J H(J).$$

(On pourra se référer à [9] pour le détail du changement de variable.)

Toujours est-il que l'on obtient une équation proche du modèle de Vlasov-HMF ($\Omega(J)$ remplace J). Dans les nouvelles coordonnées, la solution stationnaire ne dépend que de ω. On est donc presque ramené au cas précédent.

Ceci soulève le problème suivant : serait-il possible d'adapter le travail de F.Rousset et E.Faou dans [1] à ce nouveau contexte ? La convergence du splitting serait-elle encore valable ?

Mon sujet de thèse consiste à étudier les aspects théoriques et numériques de ces questions ouvertes. Mais déjà au niveau de l'équation linéarisée autour de η, des difficultés apparaissent. Dans [9], les auteurs effectuent des calculs semblables à ceux de Landau, dont on a précédemment parlé. Ils veulent résoudre l'équation linéarisée dans les nouvelles coordonnées en utilisant la transformée de Fourier-Laplace, puis en étudiant les singularités dans le plan complexe. Cependant, ce nouveau contexte apporte beaucoup de complications techniques, et, bien que les auteurs observent numériquement des phénomènes d'amortissement, il n'y a pas de résultat théorique à cause de la complexité de l'étude des singularités.

Références

[1] F.Rousset & E.Faou, *Landau Damping In Sobolev Spaces For The Vlasov-HMF Model*. hal-00956595, 2014.

[2] E.Barré, F.Bouchet, T.Dauxois, S.Ruffo & Y.Yamaguchi, *The Vlasov equation and the Hamiltonian Mean-Field model*. Pysica A365, 177, 1971.

[3] J.Bedrossian, N.Masmoudi & C.Mouhot, *Landau damping : paraproducts and Gevrey regularity*. arXiv :1311.2870, 2013.

[4] C.Villani & C.Mouhot, *On Landau damping*. Acta Math 207, no 1, 29-201, 2011.

[5] N.Crouseilles, E.Faou & M.Mehrenberger, *High order Runge-Kutta-Nyström splitting methods for the Vlasov-Poisson equation*. inria-00633934, 2011.

[6] L.Landau *On the vibration of the electronic plasma*. J. Phys USSR 10, 1946.

[7] E.Caglioti & C.Maffei, *Time asymptotics for solutions of Vlasov-Poisson equation in a circle*. J. Statist. Phys. 92, 1-2, 301-323, 1998.

[8] J-H. Hwang & J.Velázquez *On the existence of exponentially decreasing solutions for the Vlasov-Poisson system*. Work in progress, 2009.

[9] J. Barré, A. Olivetti & Y. Y. Yamaguchi *Dynamics of perturbations around inhomogeneous backgrounds in the HMF model*. J. Stat. Mech, 2010.