Introduction au domaine de recherche : Chaos Quantique Ouvert

Maxime Ingremeau
sous la direction de Stephane Nonnenmacher

8 novembre 2013

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Résonances **2**
2.1 Résolvante sans potentiel sur l'espace euclidien 2
2.2 Résolvante avec potentiel et résonances 3

3 Analyse semi-classique **5**
3.1 La quantification de Weyl 5
3.2 Evolutions classiques et quantiques 6

4 Dynamique classique et spectre quantique **7**
4.1 Hypothèses dynamiques 8
4.2 La loi de Weyl fractale 9
4.3 Opérateurs de monodromie quantique 9

5 Quelques outils **10**
5.1 Sections de Poincaré 10
5.2 Quantification de symplectomorphismes 10
5.3 Problèmes de Grushin 11

1 Introduction

Afin d'avoir une idée de ce qu'est le "chaos quantique ouvert", nous suggérons au lecteur de réaliser l'expérience suivante dans son garage :

- Trouver un laser, des lunettes de protection, et un certain nombre (au moins 3) d'obstacles convexes réfléchissant bien la lumière. Des boules de pétanque lisses font l'affaire.

- Poser les obstacles sur une table, envoyer la lumière du laser parallèlement à la table, vers l'un des obstacles. Observer ce qui se passe.

Pour les lecteurs n'ayant ni laser, ni boules de pétanque, ni garage, nous allons essayer de comprendre les mathématiques décrivant cette expérience.

Un rayon lumineux est une solution de l'équation des ondes s'annulant au bord des obstacles. Autrement dit, si les obstacles sont représentés par des ouverts bornés strictement convexes $\mathcal{O}_1, ...\mathcal{O}_n \subset \mathbb{R}^d$ et que l'on note $\mathcal{O} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{O}_i$, on s'intéresse aux solutions de l'équation

$$\partial_t^2 u = \Delta u, \tag{1}$$

avec $u \in H^2(\mathbb{R}^d \backslash \mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathbb{R}^d \backslash \mathcal{O})$.

Cette expérience est un exemple de phénomène de dispersion, ou "scattering" : on s'intéresse à une "variante" de l'équation des ondes sur l'espace euclidien, dans laquelle on place des obstacles pouvant dévier les solutions. Ici, la variante consiste à mettre des obstacles rigides, c'est à dire à changer le domaine de définition des solutions. On impose en général une condition de "non-eclipse", qui dit que l'enveloppe convexe de deux obstacles ne peut pas intersecter un troisième obstacle.

On peut aussi considérer l'équation des ondes sur $\mathbb{R}^d$ entier, mais en ajoutant un potentiel à support compact $V \in L_c^\infty(\mathbb{R}^d)$:

$$\partial_t^2 u = \Delta u + V u. \tag{2}$$

Il est également possible de perturber la métrique sur une partie bornée de $\mathbb{R}^d$. Il faut alors comprendre Δ comme l'opérateur de Laplace-Beltrami, ou encore un mélange d'obstacles, de potentiels et de perturbations métriques. L'important est que toutes ces perturbations se produisent sur un compact.

Enfin, on peut aussi étudier l'équation de Schrödinger à la place de l'équation des ondes dans tous les cas précédents, cette équation étant très similaire à l'équation des ondes.

Pour fixer les idées et simplifier notre présentation, nous travaillerons dans toute la suite sur l'équation des ondes ou de Schrödinger sur $\mathbb{R}^d$ avec un potentiel $V \in C_c^\infty(B(0, R_0), \mathbb{R})$.

$B(0, R_0)$ est la *zone d'interactions.*

Quelles informations peut-on espérer obtenir sur l'équation des ondes ? Si on travaillait sur un domaine borné, avec des conditions de Dirichlet, il serait naturel de s'intéresser aux valeurs propres et aux fonctions propres du laplacien, données par le théorème suivant.

Théorème 1. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. Il existe une suite croissante de réels positifs $(\lambda_n)_n$ tendant vers l'infini, et une suite $(u_n)_n \in H_0^1(\Omega)$ formant une base orthonormale de $L^2(\Omega)$ telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, -\Delta u_n = \lambda_n u_n.$$

En projetant l'équation des ondes ou de Schrödinger sur chaque vecteur de cette base propre, on obtient un système d'équations différentielles ordinaires, simple à résoudre.

Les résonances, que nous allons maintenant introduire, sont un analogue des valeurs propres dans le cas d'un domaine non borné.

2 Résonances

2.1 Résolvante sans potentiel sur l'espace euclidien

Intéressons-nous maintenant non pas au cas d'un ouvert borné, mais à celui de $\mathbb{R}^d$ tout entier.

Pour étudier l'équation des ondes ou l'équation de Schrödinger sans potentiel, on peut utiliser la transformée de Fourier, qui est d'une certaine manière un analogue du théorème 1. En effet, le passage en transformée de Fourier "diagonalise" le laplacien, c'est à dire qu'elle le transforme en la multiplication par la fonction $|\xi|^2$. On en déduit que le spectre de $-\Delta$ est $[0,\infty[$. Par conséquent, l'opérateur $(-\Delta - \lambda^2)$ est inversible dès que $Im\lambda > 0$. On a même une formule nous donnant explicitement la résolvante.

En effet, on peut montrer que $R_0(\lambda) = (-\Delta - \lambda^2)^{-1}$ est un opérateur de convolution, avec un noyau noté $R_0(\lambda, x)$:

$$((-\Delta - \lambda^2)^{-1}\psi)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(y) R_0(\lambda, x-y) dy.$$

On a pour $R_0(\lambda, x)$ une expression en terme de fonctions de Hankel. Par exemple, en dimension $d = 3$

$$R_0(\lambda, x) = \frac{e^{i|x|\lambda}}{4\pi|x|}.$$

On en déduit que l'application $\lambda \mapsto R_0(\lambda)$ est holomorphe pour $Im\lambda > 0$.

La question à se poser est alors : que se passe t'il pour $\lambda < 0$? La fonction $R_0(\lambda, x)$ est toujours définie, mais n'est plus bornée. Cependant, la convolution avec $R_0(\lambda, x)$ définit bien un opérateur de $L^2_{comp}(\mathbb{R}^3) \longrightarrow H^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$, borné pour toutes les semi-normes. L'application $\lambda \in \mathbb{C} \mapsto R_0(\lambda, x)$ est encore bien holomorphe. On dit alors que $\lambda \mapsto R_0(\lambda)$ est holomorphe, au sens où, $\forall u, v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3), \lambda \mapsto \langle u, R_0(\lambda), v\rangle$ est holomorphe.

Pour d quelconque, on a encore une expression de $R_0(\lambda, x)$, qui permet de prolonger $R_0(\lambda)$ vu comme un opérateur de $L^2_{comp}(\mathbb{R}^3)$ dans $H^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ aux λ de partie imaginaire négative. Plus précisément, $R_0(\lambda)$ se prolonge :

- de manière holomorphe sur tout $\mathbb{C}$ quand n est impair et $n > 1$.
- de manière méromorphe à $\mathbb{C}/\{0\}$ avec un pôle simple en 0 pour $n = 1$.
- de manière holomorphe au recouvrement logarithmique de $\mathbb{C}$ si n est pair.

Evidemment, le cas du laplacien sans potentiel sur l'espace tout entier est très particulier, et c'est l'homogénéité et l'isotropie de l'espace qui permettent d'utiliser la transformée de Fourier. Passons maintenant au cas plus général du laplacien avec un potentiel à support compact sur l'espace euclidien.

2.2 Résolvante avec potentiel et résonances

Plaçons nous dans le cas où d est impair pour simplifier.

On définit, pour $Im\lambda > 0$ la résolvante $R_V := (-\Delta + V - \lambda^2)^{-1} : L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ quand celle-ci existe.

Théorème 2. *(i) $\lambda \mapsto R_V(\lambda)$ est méromorphe, et il existe $C_V > 0$ telle que toutes ses singularités sont sur $i[0, C_V]$.*

(ii) On peut étendre la résolvante en une famille méromorphe d'opérateurs $R_V : L^2_c \longrightarrow L^2_{loc}$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$.

Définition 1. *Les pôles de $R_V(\lambda)$ s'appellent les résonances. Si λ est une résonance, on définit sa multiplicité par*

$$m_R(\lambda) := rang \oint R_V(\zeta) d\zeta,$$

où l'intégration se fait sur un petit cercle ne contenant pas d'autres pôles de R_V.

Quelques éléments de preuve. Le point (i) est une conséquence du théorème spectral : les pôles de R_V pour $Im\lambda > 0$ sont exactement les $i\sqrt{-E_j}$, où les E_j sont les valeurs propres négatives de $-\Delta + V$.

Rappelons qu'un opérateur de Fredholm, est un opérateur continu entre espaces de Banach, dont le noyau de le conoyau sont de dimensions finies. On a le lemme suivant, dont la preuve se trouve dans l'appendice D de [10] :

Lemme 1. *Soit $U \subset \mathbb{C}$ connexe, et $\{A(z)\}_{z\in\mathbb{U}}$ une famille d'opérateurs de Fredholm dépendant holomorphiquement de z. Supposons qu'il existe $z_0 \in U$ tel que $A(z_0)$ soit inversible. Alors l'application $z \mapsto A^{-1}(z)$ est une famille d'opérateurs méromorphe sur U.*

La preuve de ce lemme est basée sur les problèmes de Grushin, que nous présenterons dans le paragraphe 5.3.

Ce résultat ne peut pas être directement appliqué pour prouver (ii), car les opérateurs que l'on considère n'agissent pas sur des espaces de Banach. Cependant, en mettant des fonctions de troncature, on se ramène à des opérateurs $L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$, et on peut utiliser le lemme.

Une preuve plus complète peut être trouvée dans [9] ou dans [7].

□

Etats métastables Si λ est un pôle simple, on peut lui associer une solution $u_\lambda(x)$ de l'équation

$$(-\Delta + V + \lambda^2)u_\lambda(x) = 0.$$

Cette fonction n'est pas normalisée dans L^2, car elle croit exponentiellement à l'infini. Elle n'est donc physiquement intéressante que si elle est restreinte à un voisinage compact de la zone d'interactions.

La fonction $\tilde{u}_\lambda(x,t) := u_\lambda(x)e^{-i\lambda t}$ est alors une solution de l'équation 2. Elle forme un état dit métastable, car la fonction décroit exponentiellement en temps, avec un temps de demi-vie

$$\tau_\lambda = \frac{1}{2|Im\lambda_j|}.$$

La partie imaginaire d'une résonance est donc liée au temps de demi-vie de l'état métastable associé.

On pourrait alors espérer décomposer localement toute solution de l'équation des ondes comme une somme d'états métastables, de manière analogue à ce qui se passe dans le théorème 1.

En fait, la situation est plus compliquée que dans le cas d'un ouvert borné. Des résultats permettent d'écrire un développement asymptotique en temps d'une solution de l'équation des ondes en terme d'états métastables, mais ils nécessitent le plus souvent de savoir qu'il n'existe qu'un nombre fini de résonances dans une partie du plan complexe. Nous renvoyons le lecteur intéressé par de tels résultats à [1], et aux références qui s'y trouvent.

Le problème de la localisation des résonances est donc central dans des problèmes de "scattering".

Comment trouver des résonances ? Les résonances sont des objets assez abstraits. Pour les compter, on préfère souvent se ramener à compter les valeurs propres d'un opérateur non auto-adjoint. C'est ce que permet de faire la méthode dite de "complex scaling".

On considère une déformation complexe de $\mathbb{R}^d$ de la forme :

$$\Gamma_\theta \subset \mathbb{C}^d,$$

avec

$$\Gamma_\theta \cap \{|z| \leq R_0\} = \mathbb{R}^d \cap \{|z| \leq R_0\},$$

$$\Gamma_\theta \cap \{|z| \geq 2R_0\} = \{e^{i\theta} x, x \in \mathbb{R}^d, |x| \geq 2R_0\}.$$

Quitte à faire sur Γ_θ quelques hypothèses qui sont détaillées dans [5], on peut alors étendre $P(h)$ de manière analytique à Γ_θ. On obtient un opérateur $P_\theta(h)$ que l'on peut voir comme agissant sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. En dehors de $B(0, 2R_0)$, cet opérateur est simplement $-e^{-2i\theta} \frac{h^2\Delta}{2}$, et n'est donc pas auto-adjoint.

Théorème 3. *L'opérateur P_θ a un spectre discret dans le cône $\{-2\theta < arg(z) < 0\}$, et ses valeurs propres sont exactement les résonances de l'opérateur $P(h)$ dans ce cône. Les fonctions propres de P_θ associées à ces valeurs propres sont égales aux états métastables correspondants à l'intérieur de $B(0, R_0)$, mais sont dans L^2.*

Armés de cette méthode, on peut espérer obtenir des résultats asymptotiques sur la distribution des résonances. Typiquement, on aimerait répondre à la question :

Etant donnés $a, \gamma > 0$, quel est le nombre asymptotique de résonances dans le rectangle $[k, k + a] - i[0, \gamma]$?

Comme les résonances sont l'analogue des valeurs propres pour les problèmes sur des domaines non bornés, rappelons un résultat similaire bien connu de localisation des valeurs propres du laplacien.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. Nous reprenons les notations du théorème 1, et nous notons $N(x) := \#\{n; \lambda_n \leq x\}$.

Théorème 4 (Loi de Weyl)**.** *On a, quand $x \to \infty$:*

$$N(x) \sim (2\pi)^{-n} \omega_n Vol(\Omega) x^{n/2},$$

où ω_n est le volume de la boule unité en dimension n.

Le comportement individuel de chaque valeur propre du laplacien dépend de manière très compliquée de l'ouvert Ω. L'un des aspects remarquables de ce résultat de 1911, c'est que le comportement asymptotique des valeurs propres ne dépendent que du volume de Ω.

Faisons la remarque suivante. Plutôt que d'étudier l'équation $-\Delta u = \lambda u$ lorsque $\lambda \longrightarrow \infty$, on peut étudier l'équation

$$-h^2 \Delta u = u,$$

dans le régime asymptotique où $h \longrightarrow 0$. Il existe une théorie générale pour étudier les familles de fonctions et d'opérateurs dépendant d'un paramètre h, le formalisme semi-classique, que nous allons maintenant présenter.

3 Analyse semi-classique

3.1 La quantification de Weyl

L'un des outils de base de l'analyse semi-classique est la quantification de Weyl, qui associe à toute fonction $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2 d)$ une famille indexée par h d'opérateurs agissant sur un espace de fonctions sur $\mathbb{R}$.

Définition 2. *Pour $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2d}, \mathbb{C})$, $a = a(x, \xi)$, on définit la famille d'opérateurs $Op_h(a)$, indexée par $h \in]0,1]$, agissant sur $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ par*

$$Op_h(a)u(x) := \frac{1}{(2\pi h)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{i}{h}(x-y)\cdot\xi} a\Big(\frac{x+y}{2}, \xi\Big) u(y) dy d\xi. \tag{3}$$

On dit alors que $Op_h(a)$ est la quantification de Weyl de a, et que a est le symbole de $Op_h(a)$.

Remarque 1. *On peut étendre par densité la définition de la quantification de Weyl, afin qu'elle agisse sur des fonctions a et u plus générales.*

Formellement, si a ne dépend que de la variable x, alors $Op_h(a)$ est la multiplication par a. Si $a(x, \xi) = \xi_j$, alors $Op_h(a) = \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$.

Théorème 5 (Calderón-Vaillancourt.)**.** *Si $a \in C_c^\infty(T^*\mathbb{R}^d)$, alors, $\forall h \in]0,1]$, $Op_h(a)$ se prolonge en un opérateur continu de L^2 dans L^2, toujours noté $Op_h(a)$, ayant une norme d'opérateur bornée indépendamment de h.*

Remarque 2. *La variable x doit être vue comme une variable de position sur l'espace physique $\mathbb{R}^d$, tandis que la variable ξ doit être vue comme une variable d'impulsion, appartenant donc à un espace cotangent à $\mathbb{R}^d$. Une fonction $a(x, \xi)$ est donc une quantité dépendant de la position et de l'impulsion du système. On appelle une telle fonction une observable classique, car on considère en mécanique classique que l'on peut mesurer la position et l'impulsion d'une particule, et donc n'importe quelle fonction en dépendant.*

Rappelons qu'en mécanique quantique, un état d'un système est vu comme un vecteur ψ d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et les observables sont des opérateurs auto-adjoints, mais non nécessairement bornés, agissant sur $\mathcal{H}$. Si A est une observable, la valeur moyenne de l'observable dans l'état ψ est donnée par $\langle \psi, A\psi \rangle$.

La quantification de Weyl peut être vue comme une manière d'associer à chaque observable classique une observable quantique. En particulier, elle associe à l'énergie classique $p(x, \xi) = |\xi|^2 + V(x)$ l'opérateur associé Hamiltonien quantique $P(h) = -h^2\Delta + V(x)$, qui apparait dans le membre de droite de l'équation de Schrödinger.

3.2 Evolutions classiques et quantiques

Un peu de dynamique classique Comme tout espace cotangent, $T^*\mathbb{R}^d \simeq \mathbb{R}^{2d}$ est naturellement muni d'une forme symplectique, que nous noterons σ. Celle-ci est donnée par :

$$\sigma\big((x, \xi), (x', \xi')\big) = \langle \xi, x' \rangle - \langle \xi', x \rangle.$$

Rappelons que nous notons $p : \mathbb{R}^{2d} \longrightarrow \mathbb{R}$ le hamiltonien classique du système, que nous supposons de la forme $p(x, \xi) = \frac{|\xi|^2}{2m} + V(x)$.

Ce hamiltonien engendre un champ de vecteurs H_p, appelé champ de vecteur hamiltonien, tel que, pour tout champ de vecteurs Y sur $\mathbb{R}^{2d}$, on ait :

$$\sigma(Y, H_p) = dp(Y).$$

On note $\kappa_t = \exp(tH_p)$ le flot engendré par H_p.

Théorème 6. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $(x, \xi), (x', \xi') \in \mathbb{R}^{2d}$, on a*

$$\sigma(\kappa_t(x, \xi), \kappa_t(x', \xi')) = \sigma((x, \xi), (x', \xi')).$$

On dit que κ_t est une *application canonique*, ou encore un *symplectomorphisme*.

On peut voir κ_t comme l'application qui, à des conditions initiales (x, ξ), associe la solution des équations du mouvement après un temps t.

Tout ceci est une manière un peu savante de dire que la trajectoire d'une particule dans l'espace des phases, $(x(t), \xi(t))$, est déterminée par les équations dites de Hamilton :

$$\begin{cases} \dot{x} = \partial_\xi p(x, \xi) \\ \dot{\xi} = -\partial_x p(x, \xi), \end{cases}$$

ce qui, pour le hamiltonien p que nous avons choisi, correspond bien aux équations de Newton pour une force dérivant du potentiel V.

Un peu de dynamique quantique Nous avons vu qu'en mécanique quantique, si A est un opérateur représentant une observable, et si $\psi(t)$ est une solution de l'équation de Schrödinger, alors la valeur moyenne de A à l'instant t est $\langle \psi(t), A\psi(t) \rangle$.

On peut voir, à partir de l'équation de Schrödinger, que

$$A(t) = F_h(t)^{-1} A F_h(t),$$

où F est un opérateur de $L^2(\mathbb{R}^d)$ vérifiant l'équation :

$$\begin{cases} \frac{h}{i} F_h'(t) + F_h(t) H(t) = 0 \\ F_h(0) = I \end{cases} \tag{4}$$

Dans le cas où H est indépendant de t, on a $F_h(t) = e^{\frac{itH}{h}}$.

Le théorème d'Egorov

Théorème 7. *Soit $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, et soit $T > 0$. On a, pour tout $t \in [-T, T]$,*

$$F_h(t)^* Op_h(a) F_h(t) = Op_h(b^t), \tag{5}$$

où $b^t = \kappa_t^* a + O_{C_c^\infty}(h)$.

Ce théorème nous dit que les évolutions classiques et quantiques commutent dans la limite où $h \longrightarrow 0$.

4 Dynamique classique et spectre quantique

Puisqu'il existe des liens entre la dynamique classique et la dynamique quantique quand $h \longrightarrow 0$, on aimerait avoir des résultats du genre "Si on fait telle hypothèse sur la dynamique classique, alors on a telle information sur le comportement asymptotique des éléments spectraux".

Le plus célèbre des résultats de ce genre est peut être le théorème suivant, énoncé par Shnirelman en 1974 ([6]), et prouvé dans un cadre général par Colin de Verdière en 1985 ([2]).

Théorème 8 (Ergodicité quantique)**.** *Soit M une variété riemannienne compacte dont le flot géodésique est ergodique. Notons u_n une base orthonormale de fonctions propres du laplacien avec conditions de Dirichlet sur M.*

Alors il existe une suite d'entiers $j_k \longrightarrow \infty$ de densité un, au sens où

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\#\{k; j_k \leq m\}}{m} = 1,$$

telle que, pour tout $f \in C(M)$, on a :

$$\int_M |u_{j_k}|^2 f dx \longrightarrow \int_M f dx.$$

Il semble naturel de se demander si ce résultat est vrai pour toute la suite des valeurs propres, et pas seulement pour une suite de densité un. Ce résultat fait l'objet de la *conjecture d'unique ergodicité quantique*, qui dépasse de loin les objectifs de cette thèse.

4.1 Hypothèses dynamiques

Le mot *chaos* dans le titre de cette thèse n'est pas bien défini. Il y a plutôt un ensemble d'hypothèses plus ou moins fortes d'ergodicité, d'hyperbolicité, de complexité, correspondant à plusieurs définitions de "chaos".

Les hypothèses que nous ferons sur la dynamique concernent l'ensemble "capté", ou "piégé". La première de ces hypothèses concerne la dynamique sur l'ensemble capté : c'est une hypothèse d'hyperbolicité. La seconde hypothèse concerne la dimension de Minkowski de l'ensemble capté, c'est à dire sa "taille".

Pour $E \in \mathbb{R}$, on appelle ensemble capté à énergie E l'ensemble :

$$K_E := \{(x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^d; H_{cl}(x,\xi) = E,\ \kappa_t(x,\xi) \text{ reste borné pour tout } t \in \mathbb{R}\}.$$

Hyperbolicité On fera toujours l'hypothèse que $dp \neq 0$ sur la couche d'énergie $p = E$.

Définition 3. *On dit que le flot κ_t est hyperbolique sur l'ensemble capté K_E si, pour tout $\rho = (x,\xi) \in K_E$, l'espace tangent à la couche d'énergie $p = E$ se décompose comme :*

$$T_\rho H_{cl}^{-1}(E) = \mathbb{R}H_p(\rho) \oplus E_\rho^- \oplus E_\rho^+,$$

où cette décomposition est préservée par le flot, et est caractérisée par :

$$\exists C > 0, \exists \lambda > 0, \|d \exp tH_p(\rho) v\| \leq Ce^{-\lambda|t|}\|v\|, \forall v \in E_\rho^{\mp}, \pm t > 0.$$

On appelle E_ρ^- le sous-espace stable, E_ρ^+ le sous-espace instable, et $\mathbb{R}H_p(\rho)$ la direction neutre.

Dimension de Minkowski

Définition 4. *Soit K un ensemble borné de $\mathbb{R}^d$. On appelle dimension de Minkowski de K la quantité :*

$$\overline{dim}(K) := \limsup_{\epsilon\to 0} \Big(n - \frac{\log Vol(K_\epsilon)}{\log \epsilon}\Big),$$

où K_ϵ est l'ϵ-voisinage de K, c'est à dire $K_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^d; \exists y \in K, |x-y| < \epsilon\}$. On dit la dimension de Minkowski de K est pure si $\frac{Vol(K_\epsilon)}{\epsilon^{d-\overline{dim}(K)}}$ est uniformément bornée quand $\epsilon \to 0$.

4.2 La loi de Weyl fractale

Dans toute la suite, nous fixons une énergie $E > 0$, et nous supposons que κ_t est hyperbolique sur K_E. Nous supposons également que K_E est de dimension de Minkowski pure égale à $1 + 2\nu$.

Commençons par donner une borne supérieure sur le nombre de résonances dans un disque, prouvée dans [8].

Théorème 9 (Borne supérieure fractale)**.** *Pour tout $C > 0$, le nombre de résonances de $P(h)$ comptées avec leur multiplicité dans le disque $D(E, Ch)$ est borné de la manière suivante.*

Il existe $\tilde{C}, \tilde{h} > 0$ tels que :

$$\forall h < \tilde{h} \quad \#\{ResP(h) \cap D(E, Ch)\} \leq \tilde{C} h^{-\nu}.$$

Dans le cas des valeurs propres du laplacien sur un ouvert borné, la loi de Weyl ne nous donne pas seulement une borne supérieure, mais un comportement asymptotique précis. On peut donc se demander si la borne supérieure du théorème 9 est optimale. C'est là une conjecture, appelée *conjecture de la loi de Weyl fractale*. Il en existe en fait au moins deux versions :

Conjecture de la loi de Weyl fractale, version faible Pour tout $C, \gamma > 0$ suffisamment grands, il existe $C_\gamma > 0, h_{C,\gamma} > 0$ tels que

$$\forall h < h_{C,\epsilon} \quad \#\{\mathrm{Res}P(h) \cap \big([E - Ch, E + Ch] - i[0, \gamma h]\big)\} \geq C C_\gamma h^{-\nu}.$$

Conjecture de la loi de Weyl fractale, version forte Il existe une fonction $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ croissante, non identiquement nulle, telle que, pour tout $C, \gamma > 0$

$$\#\{\mathrm{Res}P(h) \cap \big([E - Ch, E + Ch] - i[0, \gamma h]\big)\} = CF(\gamma) h^{-\nu} + o(h^{-\nu}).$$

Pour plus d'informations sur les résultats théoriques, numériques et expérimentaux relatifs à ces conjectures, nous renvoyons le lecteur à [3].

4.3 Opérateurs de monodromie quantique

Dans [5] puis [4], les auteurs introduisent les *opérateurs de monodromie quantique*, qui permettent entre autre de donner une preuve de 9 alternative à celle de [8].

Nous nous intéressons ici aux résonances dans un domaine plus grand qu'un rectangle ou un disque. Soit $E \geq 0$. Pour $\delta, M_0 > 0$, on note :

$$\mathcal{R}(\delta, M_0, h) := [E - \delta, E + \delta] - i[M_0 h \log(1/h), M_0 h \log(1/h)].$$

Notons que, pour h assez petit, cet ensemble contient bien les rectangles ou les disques qui nous intéressaient précédemment.

Théorème 10. *Soit $E > 0$. Supposons que κ_t est hyperbolique sur K_E, et que K_E est totalement déconnecté transversalement au flot.*

Alors, pour tout $\delta > 0$ suffisamment petit, et pour tout $M_0 > 0$, il existe $h_0 > 0$ et $C_0 > 1$ tels qu'il existe une famille de matrices

$$\{M(z, h), z \in \mathcal{R}(\delta, M_0, h), 0 < h < h_0\},$$

holomorphe en z, telles que :

$$\frac{h^{-d+1}}{C_0} \leq rg(M(z,h)) \leq C_0 h^{-d+1},$$

et telles que, pour tout $0 < h < h_0$, les zéros de

$$\zeta(z,h) := det(I - M(z,h))$$

donnent les résonances de $P(h)$ dans $\mathcal{R}(\delta, M_0, h)$ avec la bonne multiplicité.

Les $M(z,h)$ s'appellent les *opérateurs de monodromie quantique*.

L'hypothèse que K_E est totalement déconnecté transversalement au flot ne semble pas très contraignante, et est sans doute générique.

Les opérateurs de monodromie quantique permettent de se ramener d'un problème linéaire en dimension infinie à un problème non linéaire en dimension finie. L'étude des opérateurs de monodromie quantique constituera probablement l'un des axes majeurs de ma thèse.

Les opérateurs de monodromie quantique sont définis de manière assez implicite, mais ne sortent pas de nulle part. Nous allons maintenant présenter quelques outils menant à leur construction.

5 Quelques outils

5.1 Sections de Poincaré

On appelle section de Poincaré une union finie $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{I} \Sigma_i$ d'hypersurfaces de $p^-1(E)$, telle que, pour tout point ρ suffisamment proche de K_E, $\kappa_t(\rho)$ intersecte Σ dans le futur et dans le passé. Remarquons que Σ est de dimension $2d-2$.

On note alors

$$\mathcal{K} := K_E \cap \Sigma$$

l'ensemble piégé réduit.

On peut alors définir une *application de retour* κ, qui à un point ρ de Σ associe le premier point où $\kappa_t(\rho)$ intersecte Σ. κ n'est bien définie que sur un voisinage V de l'ensemble piégé réduit : $\kappa : V \subset \Sigma \longrightarrow \kappa(V) \subset \Sigma$.

L'hypothèse du théorème 10 que l'ensemble capté soit totalement déconnecté transversalement au flot permet que les sections de Poincaré aient de "gentilles propriétés", et en particulier, qu'il soit intéressant d'étudier la restriction de l'ensemble capté aux hypersurfaces composant cette section.

5.2 Quantification de symplectomorphismes

Soit κ un symplectomorphisme. On dit qu'une famille d'opérateurs F_h *quantifie* κ si pour tout $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, on a

$$F_h^* Op_h(a) F_h = Op_h(b),$$

où $b = \kappa^* a + O_{C_c^\infty}(h)$.

Le théorème d'Egorov (théorème 7) nous dit donc que, pour tout $t \in [0,T]$, la solution de l'équation 4 quantifie le flot hamiltonien.

En fait, n'importe quel symplectomorphisme peut être vu localement comme un flot hamiltonien au temps 1, pour un hamiltonien bien choisi. On peut donc localement quantifier n'importe quel symplectomorphisme en prenant la solution de 4 au temps 1. Une manière intrinsèque de faire cela est de faire appel au formalisme des *opérateurs Fourier intégraux*, ou FIO.

Applications quantiques ouvertes Les symplectomorphismes que nous avons considéré précédemment étaient supposés définis sur tout l'espace. Considérons maintenant des difféomorphismes symplectiques $\kappa : V \longrightarrow \kappa(V)$, où V est un ouvert de $\mathbb{R}^{2d}$, tel que $V \neq \kappa(V)$. Un point dans $\kappa(V)\backslash V$ n'a pas d'image par κ : on peut le voir comme étant "tombé dans un trou", ou "parti à l'infini". On dit que κ est une *application ouverte*.

On peut encore définir une "quantification", d'un tel symplectomorphisme. Une *application quantique ouverte* est une famille $(F_h)_h$ d'opérateurs agissant sur $L^2(\mathbb{R})$, tels qu'il existe une fonction $\alpha \in C_c^\infty(V)$ tels que

$$F_h^* Op_h(a) F_h = Op_h(b) + O_{L^2 \to L^2}(h^\infty), \tag{6}$$

où

$$b = |\alpha|^2 \kappa^* a + O_{C_c^\infty}(h),$$

et où on a écrit $... = O(h^\infty)$ pour $\forall n, ... = O(h^n)$.

On demande de plus que α dépende de h, de telle sorte que α se rapproche de plus en plus de la fonction caractéristique de V quand $h \longrightarrow 0$.

Les applications quantiques ouvertes peuvent servir à définir des "modèles jouets", sur lesquels il est possible de faire des calculs numériques poussés, afin de tester les conjectures de loi de Weyl fractales.

On a définir dans le paragraphe 5.1 la notion d'application de retour. On peut considérer la restriction de cette application de retour à un petit voisinage de l'ensemble capté. C'est une application symplectique ouverte. On peut alors considérer l'application quantique ouverte qui lui est associée. C'est la première étape menant à la construction des opérateurs de monodromie quantique. Il faut ensuite montrer qu'on peut se ramener à des opérateurs de dimension finie. Ceci se fait à l'aide de problèmes de Grushin.

5.3 Problèmes de Grushin

Rappelons un résultat classique d'algèbre linéaire, l'inversion de Schur.

Théorème 11. *Si l'on écrit une matrice inversible et son inverse par blocs comme :*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$$

alors A est inversible si et seulement si H est inversible, et on a

$$A^{-1} = E - FH^{-1}G, \qquad H^{-1} = D - CA^{-1}B.$$

On peut adapter ce résultat en dimension infinie. En particulier, on peut montrer que si A est un opérateur de Fredholm, on peut trouver des opérateurs B et C de rang fini tels que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

soit inversible. On dit alors que l'on a un problème de Grushin bien posé.

Ceci est la clef de la preuve du lemme 1, car cela permet de se ramener en dimension finie.

Les problèmes de Grushin permettent aussi de se ramener à des opérateurs de dimension finie pour prouver le théorème 10, mais c'est un peu plus technique que la simple utilisation du théorème 11.

Références

[1] N. Burq and M. Zworski. Resonance expansions in semiclassical propagation. *Commun. Math. Phys.*, 223 :1–12, 2001.

[2] Y. Colin de Verdière. Ergodicité et fonctions propres du laplacien. *Commun. Math. Phys.*, 102 :497–502, 1985.

[3] S. Nonnenmacher. Spectral problems in open quantum chaos. *Nonlinearity*, 24 :123–167, 2011.

[4] S. Nonnenmacher, J. Sjostrand, and M. Zworski. Fractal weyl law for open quantum chaotic maps. 2011. ArXiv 1105.3128.

[5] S. Nonnenmacher, J. Sjostrand, and M. Zworski. From open quantum systems to open quantum maps. *Commun. Math. Phys.*, 304 :1–48, 2011.

[6] A. I. Schnirelman. Ergodic properties of eigenfunctions. *Usp. Math. Nauk.*, 29 :181–182, 1974.

[7] J. Sjostrand. Lectures on resonances. 2002. http ://sjostrand.perso.math.cnrs.fr/Coursgbg.pdf.

[8] J. Sjostrand and M. Zworski. Fractal upper bounds on the density of semiclassical resonances. *Duke. Math. J.*, 137 :381–459, 2007.

[9] M. Zworski. Lectures on scattering resonances. 2012. http ://math.berkeley.edu/ zworski/res.pdf.

[10] Maciej Zworski. *Semiclassical Analysis.* AMS, 2012.