Conjecture de Mordell-Lang relative

Rémi Jaoui,
sous la direction de Jean Benoît Bost et de Martin Hils.

18 décembre 2013

1 Présentation du problème

Dans ce texte, on travaillera uniquement en caractéristique nulle. On fixe $\mathbb{U}$ un domaine universel pour la géométrie algébrique en caractéristique 0 : les corps K considérés seront toujours de caractéristique 0 et munis d'un plongement dans $\mathbb{U}$ et on identifie une variété algébrique à ses $\mathbb{U}$-points. Si K est un corps alors $X(K)$ désigne l'ensemble des points K-rationnels de X.

Un groupe algébrique défini sur un corps K est une variété algébrique définie sur K munie d'une structure de groupe dont les opérations de multiplication, d'inversion et d'élement neutre sont des morphismes algébriques définis sur K.

Définition. Soient G un groupe algébrique défini sur un corps K et $\Gamma \subset G$ un sous-groupe abstrait. On dit que la paire (G, Γ) est *mordellique* si pour toute sous-variété algébrique $X \subset G$, il existe des élements $a_i \in \Gamma$ et des sous-groupes algébriques connexes $G_i \subset G$ tels que :

$$X \cap \Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} a_i + G_i \cap \Gamma.$$

La propriété "être mordellique" est une propriété formelle qui décrit la topologie induite sur Γ par la topologie de Zariski sur G.

Pour montrer cette propriété, on utilisera toujours la réduction suivante : La paire (G, Γ) est mordellique si et seulement si pour toute sous-variété algébrique irréductible X de G telle que $X \cap \Gamma$ soit Zariski-dense dans X alors X est un translaté d'un sous-groupe algébrique connexe de G.

Définition. On appelle *variété abélienne* définie sur un corps K, tout groupe algébrique A connexe et complet défini sur K i.e. tout groupe algébrique connexe A tel que pour toute variété algébrique V, la projection :

$$A \times V \longrightarrow V \text{ soit fermée.}$$

Les variétés abéliennes de dimension 1 définies sur un corps K sont les courbes elliptiques sur K (qui sont, on le rappelle, les courbes algébriques projectives lisses de genre 1 munies d'un point distingué). Les variétés abéliennes constituent donc une généralisation des courbes elliptiques en dimension supérieure.

Les variétés abéliennes possèdent des propriétés géométriques très particulières. On ne donne que deux d'entre elles et on renvoie à [1] pour une présentation plus complète des variétés abéliennes au dessus d'un corps K.

– Une variété abélienne est en particulier un groupe commutatif.
– Si C est une courbe projective et lisse de genre ≥ 1 définie sur un corps K alors il existe une variété abélienne $\mathrm{Jac}(C)$ appelée jacobienne de C et une application $\phi : C \longrightarrow \mathrm{Jac}(C)$ qui réalise un isomorphisme entre C et son image $\phi(C)$. De plus, si C possède un point K-rationnel alors $\mathrm{Jac}(C)$ est définie sur K.

On peut maintenant donner un premier exemple de couple (G, Γ) mordellique.

Théorème 1.1 (Mordell-Lang absolu). *Soit A une variété abélienne définie sur un corps de nombres K et $\Gamma \subset A$ un sous-groupe finiment engendré alors (A, Γ) est mordellique.*

Ce théorème a été montré par G. Faltings en 1986 en même temps que la conjecture de Mordell. Vérifions que ce dernier implique directement la conjecture de Mordell : *Si C est une courbe projective et lisse définie sur un corps de nombre K de genre $g \geq 2$ alors $C(K)$ est fini.*

En effet, si C est une telle courbe, on peut plonger C dans sa jacobienne A qui est une variété abélienne. La courbe C ne possède peut être pas de points K-rationnels mais elle possède des points L-rationnels pour L un corps réalisant une extension finie de K. La variété abélienne A est donc définie sur L, un corps de nombres.

D'après le théorème de Mordell-Weil, le groupe $A(L)$ est finiment engendré. D'après le théorème précédent, $(A, A(L))$ est mordellique.

Si $C(K)$ était infini alors $C(L)$ aussi et donc la clôture de Zariski de $C(L) = C \cap A(L)$ dans A serait égale à C. Comme $(A, A(L))$ est mordellique, on obtient alors que C est un translaté d'une sous-variété abélienne de A de dimension 1, i.e. une courbe elliptique. Comme $g \geq 2$, c'est absurde et donc $C(K)$ est fini.

Dans ce texte, on s'intéresse au cas des variétés abéliennes définies sur un corps de fonctions au dessus d'un corps algébriquement clos.

Définition. Soit $k \subset K$ une extension de corps avec k algébriquement clos. On dit que *K est un corps de fonctions sur k* s'il existe une variété algébrique irréductible S telle que $K = k(S)$. On dit alors que S est un *modèle* pour K.

Remarquons que si S' est une variété birationnellement équivalente à S (obtenue par exemple en retirant à S un fermé de Zariski propre) et si S est un modèle pour K alors S' est un modèle pour K.

On fixe désormais k un corps algébriquement clos et $k \subset K$ un corps de fonctions.

Proposition 1.1. *Si V est une variété définie sur K alors il existe un modèle S de K et une variété algébrique $\mathcal{V}$ au dessus de S telle que :*

– *Le morphisme $\pi : \mathcal{V} \longrightarrow S$ soit une submersion surjective ;*
– *V s'identifie à la fibre générique du morphisme π.*

Dans ce cas, on dit que $\pi : \mathcal{V} \longrightarrow S$ est un modèle pour V/K. De plus , si G est un groupe algébrique sur K alors il existe un modèle $\mathcal{G} \longrightarrow S$ qui est un objet en groupes dans la catégorie des variétés au dessus de S.

La proposition précédente s'applique en particulier au cas où $V = A$ est une variété abélienne définie sur K. Remarquons que les variétés abéliennes définies sur k sont en particulier définies sur K. Dans ce cas, $A \times S \longrightarrow S$ est un modèle pour A/K.

Dans ce texte, on veut exclure de tels exemples et considérer des variétés abéliennes qui sont définies sur K mais non sur k. Pour cela, nous travaillerons avec l'hypothèse plus forte de la définition suivante.

Définition. On dit qu'une variété abélienne A définie sur K vérifie $tr_{K/k}(A) = 0$ si pour toute variété abélienne B définie sur k, tout morphisme $\lambda : B \longrightarrow A$ est trivial.

Proposition 1.2. *Soit A est une variété définie sur K. Si A vérifie $tr_{K/k}(A) = 0$ alors pour toutes sous variétés abéliennes $C \subset B \subset A$, la variété abélienne B/C vérifie $tr_{K/k}(B/C) = 0$. Autrement dit, la propriété "être de trace nulle" est stable par sous-quotient.*

Il s'agit de montrer que cette condition n'est pas trop restrictive et qu'il existe des variétés abeliennes vérifiant $tr_{K/k}(A) = 0$. C'est le but de l'exemple suivant.

Exemple 1.1. Soit E la courbe elliptique définie sur $K = k(t)$ par :

$$Y^2 = X(X-1)(X-t)$$

On vérifie facilement que E n'est isomorphe à une courbe elliptique définie sur k. Comme E est une variété abelienne simple, on obtient que $tr_{K/k}E = 0$.

On peut maintenant énoncer le théorème dont la démonstration est l'objet de ce texte.

Théorème 1.2 (Mordell-Lang relatif)**.** *Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique 0 et A une variété abélienne définie sur un corps de fonctions $K = k(S)$ où S est une variété algébrique définie sur k. Supposons de plus que $tr_{K/k}A = 0$. Considérons un sous-groupe $\Gamma \subset A$ de rang fini (i.e. tel que $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est de $\mathbb{Q}$-dimension finie). Alors la paire (A, Γ) est mordellique.*

Ce théorème a été démontré en partie dans les années 60 par Y. Manin dans [2] et la première preuve complète fut donnée par A. Buium en 1992 dans [3].

Dans la preuve de Y. Manin, les équations différentielles jouaient déjà un rôle important. Dans la deuxième partie de ce texte, on explique comment interviennent les équations différentielles algébriques dans la résolution de ce problème, en suivant des arguments de A. Buium. On ramène le théorème 1.2 à la compréhension de certaines équations différentielles algébriques décrites par le théorème 2.1. Pour cela, nous aurons besoin du lemme formel suivant qui nous permet de "modifier" la paire (G, Γ).

Lemme 1.1. *Soient G et H deux groupes algébriques et $\Gamma_G \subset G$ et $\Gamma_H \subset H$ des sous-groupes respectifs de G et de H. Si $f : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupes algébriques vérifiant $\Gamma_H \subset f(\Gamma_G)$ alors :*

$$(G, \Gamma_G) \textit{ mordellique } \Longrightarrow (H, \Gamma_H) \textit{ mordellique .}$$

La troisième partie est consacrée à un résultat d'algébrisation sur les équations différentielles algébriques dû à Pillay et Ziegler en 2003 dans [4]. Cette propriété est appelée "propriété de la base canonique" en théorie des modèles. Son développement dans diverses théories du premier ordre constitue un des sujets actifs de la théorie des modèles en ce moment. Dans la troisième partie de ce texte, on se contente de montrer qu'elle est suffisante pour en déduire le théorème 1.2.

2 De la conjecture de Mordell-Lang relative à la géométrie des équations différentielles algébriques

On définit d'abord les notions de corps différentiel et de système d'équations différentielles algébriques.

Définition. On appelle *corps différentiel* la donnée d'une paire (K, δ) où K est un corps de caractéristique nulle et $\delta : K \longrightarrow K$ une dérivation, i.e. un morphisme de groupes additifs vérifiant la règle de Leibnitz :

$$\forall (x, y) \in K^2 \ , \ \delta(x.y) = \delta(x).y + x.\delta(y).$$

Si (K, δ) est un corps différentiel alors l'ensemble $\{x \in K \mid \delta(x) = 0\}$ est un sous-corps de K appelé *corps des constantes* de K.

Exemple 2.1. Si $K = k(S)$ est un corps de fonctions, tout champ de vecteurs X sur S induit une dérivation sur K définie par :

$$\delta_X : f \mapsto X(f).$$

La dérivation δ_X définit une structure de corps différentiel sur K. Dorénavant, quand S sera muni d'un champ de vecteurs X alors $K = k(S)$ sera toujours muni de cette dérivation.

Définition. Soit (K, δ) un corps différentiel. On appelle *système d'équations différentielles algébriques* défini sur (K, δ), tout système d'équations de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} P_1(x_1, \cdots, x_n, & \delta(x_1) \ , \cdots, \delta(x_n), \cdots) \\ & \vdots \\ P_k(x_1, \cdots, x_n, & \delta(x_1) \ , \cdots, \delta(x_n), \cdots) \end{array} \right.$$

où $P_1, \cdots P_k$ sont des polynômes à coefficients dans K.

On explique maintenant comment construire des systèmes d'équations différentielles algébriques à partir de champs de vecteurs sur des variétés algébriques. Jusqu'à la fin de cette partie, on se place dans le cadre suivant :

Cadre : On fixe k un corps algébriquement clos et K un corps de fonctions au dessus de k. On fixe V une variété algébrique sur K qu'on suppose lisse pour simplifier. On choisit alors $\pi : \mathcal{V} \longrightarrow S$ un modèle pour V donné par la proposition 1.1 de sorte que :
- $\mathcal{V}$ et S sont des variétés algébriques lisses,
- le morphisme $\pi : \mathcal{V} \longrightarrow S$ est une submersion surjective.

De plus, la variété algébrique S est munie d'un champs de vecteurs X et le corps des fonctions $K = k(S)$ est muni de la dérivation associée δ_X.

Construction de l'espace tangent à une submersion tordu par rapport un champ de vecteurs.

Le morphisme π induit un morphisme de fibrés vectoriels de rang constant au dessus de $\mathcal{V}$:

$$d\pi : T_{\mathcal{V}/k} \longrightarrow \pi^* T_{S/k}$$

Son noyau est donc un fibré vectoriel au dessus de $\mathcal{V}$, noté $T_{\mathcal{V}/S}$ et appelé *espace tangent relatif de $\mathcal{V}$ par rapport à S*. Pour tout point $x \in \mathcal{V}$, la fibre $T_{\mathcal{V}/S,x}$ en x de ce fibré vectoriel coïncide avec l'espace tangent à la sous-variété fermée $\pi^{-1}(\pi(x))$. Pour cette raison, on dit aussi que $T_{V/S}$ est *l'espace tangent aux fibres de π*.

Définition. Pour tout $x \in \mathcal{V}$, on définit le sous-espace affine de $T_{\mathcal{V}/k,x}$ par :

$$T_X(\mathcal{V})_x = d\pi^{-1}(X(\pi(x))).$$

Les cartes sur $T_{\mathcal{V}/k}$ définissent une structure de variété algébrique sur :

$$T_X(\mathcal{V}) := \coprod_{x \in \mathcal{V}} T_X(\mathcal{V})_x.$$

L'application évidente $\pi : T_X(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{V}$ est alors un morphisme de variétés algébriques. L'espace $T_X(\mathcal{V})$ est appelé *espace tangent de $\mathcal{V}$ tordu par X*.

Remarquons qu'on a une action principale fibre à fibre de $T_{\mathcal{V}/S}$ sur $T_X(\mathcal{V})$ induite par l'action par translation de $T_{\mathcal{V}/S}$ sur $T_{\mathcal{V}/k}$. Cette action se relève en une action algébrique :

$$T_{\mathcal{V}/S} \times_S T_X(\mathcal{V}) \longrightarrow T_X(\mathcal{V}),$$

appelée structure de $T_{\mathcal{V}/S}$*-torseur sur* $T_X(\mathcal{V})$.

Lemme 2.1. *Si $\mathcal{G} \longrightarrow S$ est un objet en groupe au dessus de S , alors il existe une structure naturelle d'objet en groupe au dessus de S sur $T_X(\mathcal{G})$ qui fait du morphisme $\pi : T_X(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de groupes.*

Equation différentielle associée à une section de $T_X(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{V}$.

Supposons de plus que V est une variété affine. Cette hypothèse n'est pas nécessaire mais facilite l'exposition. Dans ce cas, il existe des polynômes $P_1, \cdots P_k \in K[X_1, \cdots, X_n]$ tels que :

$$V = V(P_1, \cdots, P_k) = \{x \in \mathbb{U}^n \ , \ P_1(x) = \cdots = P_k(x) = 0\}.$$

Définition. Soit Y une section du morphisme $\pi : T_X(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{V}$. On appelle *système d'équations différentielles algébriques associé à Y*, le système suivant noté (V, Y) :

$$\begin{cases} P_1(y_1, \cdots y_n) = 0, \cdots, P_k(y_1, \cdots y_n) = 0 \\ \delta_X(y_1, \cdots, y_n) = Y(y_1, \cdots, y_n). \end{cases}$$

A tout système d'équations différentielles défini sur (K, δ), on peut associer ses solutions dans tout corps différentiel (L, δ_L) contenant (K, δ). Commençons par étudier les solutions du système (V, Y) dans le corps différentiel (K, δ).

Dans ce cas, les équations de la première ligne décrivent l'ensemble $V(K)$ qui s'identifie avec les sections rationnelles du morphisme $\mathcal{V} \longrightarrow S$. L'ensemble des solutions dans K du système (V, Y) s'identifie donc avec l'ensemble des sections rationnelles $f : S \longrightarrow \mathcal{V}$ de π vérifiant :

$$\forall x \in U \subset S \ , \ df(X(x)) = Y(f(x))$$

où $U \subset S$ est un ouvert de Zariski de S.

Remarque. En géométrie algébrique classique, on sait que pour comprendre un système (réduit) d'équations polynômiales défini sur un corps K, il n'est pas suffisant d'étudier ses K-points mais il faut étudier ses L-points pour L un corps algébriquemet clos contenant K. Ceci motive la définition suivante dans le cadre différentiel.

Définition. Soit (L, δ) un corps différentiel. On dit que (L, δ) est *un corps différentiellement clos* si tout système d'équations différentielles algébriques qui admet une solution dans une extension différentielle de (L, δ) admet une solution dans L.

La théorie des corps différentiellement clos s'écrit au premier ordre dans le langage $\mathcal{L} = \{0, 1, +, -, \times, \delta\}$. On montre que tout corps différentiel est contenu dans un corps différentiellement clos et cette théorie est complète.

On peut alors comme en géométrie algébrique, considérer un domaine universel $(\mathbb{U}, \delta)$ pour les corps différentiels, i.e un corps différentiel $(\mathbb{U}_\kappa, \delta)$ contenant tous les corps différentiels de cardinal borné par κ. On peut de plus supposer que $\mathbb{U}$ est un domaine universel pour la géométrie algébrique. En particulier, on identifiera une variété à ses $\mathbb{U}$-points.

Les autres propriétés modèle-théoriques de cette théorie n'apparaitront pas de façon explicite dans ce texte. On renvoie à [5] pour une présentation de ces dernières.

Définition. Si Y est une section du morphisme $T_X(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{V}$, on note $(V, Y)^\delta$ l'ensemble des solutions dans $\mathbb{U}$ du système d'équations différentielles algébriques (V, Y). Les sous-ensembles de $\mathbb{U}^n$ de cette forme sont appelés *fermés de Kolchin en présentation directe.*

Par définition de la première ligne du système (V, Y), on a toujours $(V, Y)^\delta \subset V$.

Lemme 2.2. *Si $\mathcal{G} \longrightarrow S$ est un objet en groupes au dessus de S et si la section $Y : \mathcal{G} \longrightarrow T_X(\mathcal{G})$ est un morphisme de groupes algébriques alors $(G, Y)^\delta$ est un sous-groupe de G.*

Les sous-ensembles de $\mathbb{U}^n$ de la forme $(G, Y)^\delta$ sont appelés *fermés de Kolchin en groupe et en présentation directe.* On peut maintenant énoncer le résultat principal de cette partie.

Théorème 2.1 (A. Buium, [3]). *Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique 0, (K, δ_X) un corps de fonctions sur k muni d'une structure différentielle, A une variété abélienne définie sur K et $\Gamma \subset A$ un sous-groupe d'ordre fini. Il existe alors un groupe algébrique connexe commutatif G défini sur K et un morphisme de groupes $f : G \longrightarrow A$ vérifiant*

(i) $ker(f)$ est un espace vectoriel,

(ii) Γ est contenu dans l'image de $(G, Y)^\delta$ par f,

(iii) la restriction de f à $(G, Y)^\delta$ est injective.

En appliquant le lemme 1.1, on voit que pour montrer que (A, Γ) est mordellique, il suffit de vérifier que $(G, (G, Y)^\delta)$ est mordellique pour tout système (G, Y) vérifiant les conditions (i) et (iii).

L'intérêt principal de cette réduction est de remplacer l'étude du groupe abstrait Γ par celle du groupe $(G, Y)^\delta$ qu'on peut munir d'une structure géometrique. Dans la partie suivante, on décrit cette structure géométrique.

3 Un résultat d'algébrisation

On fixe comme précédemment $(\mathbb{U}, \delta)$, un domaine universel universel pour les équations différentielles algébriques. On note k son corps des constantes. On développe des notions géométriques sur les ensembles de solutions de systèmes d'équations différentielles algébriques, à la manière de la géométrie algébrique classique.

On obtient ainsi une notion de dimension et une structure d'espace annelé sur ces derniers dont on fait émerger une notion de morphisme.

Géométrie dans $\mathbb{U}^n$.

Les solutions d'équations différentielles algébriques à coefficients dans $\mathbb{U}$ forment les fermés d'une topologie sur chacun des $\mathbb{U}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Cette topologie est appelée *topologie de Kolchin*. Un des résultats fondateurs de l'algèbre différentielle est le théorème de Ritt, qui énonce que *cette topologie est noetherienne*. En particulier, tout fermé de Kolchin F se décompose de façon essentiellement unique en :

$$F = F_1 \cup \cdots \cup F_n$$

où les F_i sont des fermés de Kolchin irréductibles et $F_i \not\subseteq F_j$ pour $i \neq j$. Les F_i sont appelés *les composantes irréductibles de F*.

Définition. Soit $X \subset \mathbb{U}^n$ un fermé de Kolchin. On appelle *dimension de Krull* de X et on note $dim(X)$ la longueur maximale d'une chaîne de fermés irréductibles contenue dans X.

Même si la topologie de Kolchin est noetherienne, cette dimension peut être infinie. On vérifie facilement que l'espace affine de dimension 1 et donc l'espace affine de dimension quelconque est de dimension infinie.

Définition. Soient F un fermé de Kolchin de $\mathbb{U}^n$ et $V \subset F$ un ouvert (pour la topologie de Kolchin) de F. On appelle *fonction δ-régulière* sur V toute fonction $f : V \longrightarrow \mathbb{U}$ telle que pour tout $x \in V$, il existe un voisinage ouvert $V_0 \subset V$ de x, un entier $k \in \mathbb{N}$ et $g, h \in K[X_1, \cdots X_{nk}]$ tels que

$$\forall x \in V_0 \ , \ h(x, \delta(x), \cdots) \neq 0 \text{ et } f(x) = g(x, \delta(x), \cdots)/h(x, \delta(x), \cdots).$$

Le préfaisceau sur F qui à un ouvert V associe les fonctions δ-régulières sur V est en fait un sous-faisceau d'anneaux du faisceau des fonctions $\mathbb{U}$-valuées. Cette structure sera notée $(F, \mathcal{O}_F^\delta)$.

Définition. Soient $F \subset \mathbb{U}^n$ et $G \subset \mathbb{U}^k$ deux fermés de Kolchin irréductibles. On appelle *application δ-rationnelle* de F vers G, tout morphisme d'espace annelé :

$$(U, \mathcal{O}_{|U}^\delta) \longrightarrow (V, \mathcal{O}_{|V}^\delta)$$

où $U \subset F$ et $V \subset G$ sont des ouverts respectifs de F et de G.

On dit que F et G sont *δ-rationnellement équivalents* s'il existe des applications δ-rationnelles $f : F \longrightarrow G$ et $g : G \longrightarrow F$ telles que :

$$f \circ g(x) = x \text{ et } g \circ f(y) = y$$

en tout point $x \in F$ et $y \in G$ où le membre de gauche des égalités précédentes est défini.

Exemple 3.1 (Géométrie algébrique sur k)**.** A toute variété algébrique affine $V = V(P_1, \cdots, P_k) \subset \mathbb{U}^n$ définie sur k, on peut associer le système d'équations différentielles suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1(y_1, \cdots y_n) = 0, \cdots, P_k(y_1, \cdots y_n) = 0 \\ \delta(y_1) = \cdots \delta(y_n) = 0 \end{array} \right.$$

dont l'ensemble des solutions est $V(k)$. Dans ce cas, on a la description suivante des notions définies précédemment :

- Tout sous-fermé de Kolchin $F \subset V(k)$ est de la forme $W(k)$ pour W une variété algébrique définie sur k. En particulier, la dimension de Krull de $V(k)$ coincide avec sa dimension algébrique.
- Le faisceau $\mathcal{O}^{\delta}_{W(k)}$ coincide avec le faisceau des fonctions algébriques sur $V(k)$ et $\mathbb{U}$-valuées. En particulier, si W est une autre variété algébrique définie sur k et $\phi : W(k) \longrightarrow V(k)$ un morphisme δ-régulier alors ϕ est un morphisme algébrique régulier défini sur $\mathbb{U}$.

Exemple 3.2 (Fermés de Kolchin en présentation directe)**.** Soit Z un fermé de Kolchin en présentation directe défini sur K. On écrit $Z = (V, Y)^{\delta}$ et on suppose que V est une variété affine. Dans ce cas, $Z \subset V \subset \mathbb{U}^n$ est un fermé de Kolchin. On a alors les résultats suivants :

- Le fermé de Kolchin Z est de dimension finie. Plus précisément, on a $\dim(Z) \leq \dim_{alg}(V)$
- Les sous-fermés de Kolchin de Z sont en bijection avec les sous-variétés W de V vérifiant :

$$W \cap Z \text{ est dense dans } W.$$

Proposition 3.1. *Soit Γ un fermé de Kolchin en groupe et en présentation directe. Par définition, il existe un groupe algébrique G tel que $\Gamma = (G, Y)^{\delta}$. On a équivalence entre :*

(i) Il existe une variété V défini sur k et une équivalence δ-rationnelle définie sur $\mathbb{U}$ entre $(G, Y)^{\delta}$ et $V(k)$.

(ii) Il existe un groupe algébrique H défini sur k et un isomorphisme de groupes algébriques $f : G \longrightarrow H$ tel que :

$$f((G, Y)^{\delta}) \subset H(k).$$

Propriété de la base canonique.

Le but de ce qui suit est de présenter un critère pour qu'un fermé de Kolchin de dimension finie sont δ-rationnellement équivalent à un fermé de Kolchin du type $V(k)$ pour V une variété algébrique sur k décrits dans l'exemple 3.1. Ce résultat est appelée propriété de la base canonique par les théoriciens des modèles. Avant de donner ce résultat, on donne une des multiples définitions de point générique.

Définition. Soit $F \subset \mathbb{U}^n$ un fermé de Kolchin irréductible défini sur K. On dit que $x \in F$ *est générique pour F au dessus de K* si pour tout fermé de Kolchin $G \subset \mathbb{U}^n$ définissable sur K, on a :

$$x \in G \Longrightarrow F \subset G.$$

Proposition 3.2 (Propriété de la base canonique)**.** *Soit $X \subset \mathbb{U}^n$ un fermé de Kolchin défini sur K de dimension finie et $(Y_b : b \in B)$ une famille de sous-fermés de Kolchin de X indexée par un fermé de Kolchin irréductible B de dimension finie. On suppose que :*

(i) la famille est fidèlement indexée par B i.e :

$$\forall \sigma \in Aut_K(\mathbb{U}, \delta), \sigma(Y_b) = Y_{b'} \Longleftrightarrow \sigma(b) = b'$$

(ii) il existe un point $a \in X$ tel que pour tout $b \in B$ générique au dessus de K, on ait $a \in Y_b$,

(iii) pour $b \in B$ générique, Y_b est un fermé de Kolchin irréductible.

Alors B est δ-rationnellement équivalent à $V(k)$ pour V une variété définie sur le corps des constantes k.

Cette proposition est un résultat d'algébrisation pour les ensembles de paramètres de famille de fermés de Kolchin irréductibles.

La condition (i) est une condition de minimalité sur B. Elle signifie qu'on ne peut indexer la même famille de fermés de Kolchin par un ensemble de paramètres "plus petit".

Les conditions (ii) et (iii) signifient qu' en dehors d'un fermé de Kolchin strict de B, les élements de cette famille constituent un pinceau de fermés de Kolchin irréductibles passant tous par le même point a.

Un exemple de telle famille est donné comme suit : Soit $\Gamma = (G, Y)^\delta \subset G$ un fermé de Kolchin en groupe et en présentation directe. Considérons $F \subset (G, Y)^\delta$ un sous-fermé de Kolchin et supposons $e \in F$ et

$$Stab_\Gamma(F) = \{g \in \Gamma \mid g.F = F\} = \{0\}$$

Assertion. *La famille des $(F_t = F.t^{-1} \ / \ t \in F)$ est une famille de δ-fermés vérifiant les hypothèses (i), (ii) et (iii) du théorème précédent.*

D'après la propriété de la base canonique, on obtient que F est δ-rationnellement équivalent à $V(k)$ pour V une variété algébrique sur k. Avec un peu plus d'efforts et à l'aide de la proposition 3.1, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 3.1. *Soit $\Gamma = (G, Y)^\delta$ un fermé de Kolchin en groupes et en présentation directe et X une sous-variété irréductible de G vérifiant $\Gamma \cap X$ est dense dans X. Supposons que :*

- *$e \in X$ et que X engendre G en tant que groupe.*
- *$Stab_G(X) = \{g \in G \ / \ g.X = X\}$ est trivial.*

Alors il existe un groupe algébrique H défini sur k et un isomorphisme de groupes algébriques $f : G \longrightarrow H$ vérifiant :

$$f((G, Y)^\delta) = H(k).$$

Démonstration du théorème 1.2 .

On utilise maintenant le corollaire 3.1 pour obtenir une démonstration du théorème 1.2 . En combinant le lemme 1.1 avec le théorème 2.1, on ramène la preuve du théorème 1.2 à la preuve du théorème suivant :

Théorème 3.1 (E. Hrushovski, [6])**.** *Soit k un corps algébriquement clos, (K, δ_X) un corps de fonctions sur k muni d'une structure différentielle, A une variété abelienne définie sur K. Considérons un groupe algébrique connexe commutatif G défini sur K muni d'un morphisme de groupes $f : G \longrightarrow A$ vérifiant*

(i) $\mathrm{Ker}(f)$ *est un espace vectoriel,*

(ii) La restriction de f à $(G,Y)^\delta$ est injective.

Alors la paire $(G,(G,Y)^\delta)$ est mordellique.

On réduit à l'aide propriétés structurelles sur les données de ce théorème, la preuve du théorème à la preuve du lemme suivant :

Lemme 3.1. *Avec les hypothèses du théorème précédent, si $V \subset G$ est une sous-variété algébrique irréductible telle que :*

$$Stab_G(V) = \{x \in G \ , \ g + V = V\} = \{0\}$$

Alors $V \cap (G,Y)^\delta$ n'est pas Zariski dense dans V.

Supposons par l'absurde que $V \cap (G,Y)^\delta$ est Zariski dense dans V. Considérons $G_0 \subset G$ le sous-groupe de G engendré par V.

On vérifie facilement que $Y : G \longrightarrow T_X(G)$ se restreint en une section $Y : G_0 :\longrightarrow T_X(G_0)$. On peut donc appliquer le corollaire 3.1 au couple $((G_0,Y)^\delta, X)$. Il existe donc un groupe algébrique H défini sur k et un isomorphisme de groupes algébriques $\phi : G_0 \longrightarrow H$ vérifiant :

$$\phi((G_0,Y)^\delta) \subset H(k)$$

Considérons la composée :

$$\psi : H \xrightarrow{\phi^{-1}} G_0 \xrightarrow{f} A$$

Le morphisme ψ est un morphisme de groupe. Comme le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ est un espace vectoriel d'après (i), on en déduit que $L = \mathrm{Ker}(\psi)$ est aussi un espace vectoriel.

Comme A est une variété abelienne, L est le plus grand sous-groupe de H qui est un espace vectoriel. Par unicité de ce dernier, le sous-groupe L est défini sur le même corps que H et donc sur k. On en déduit que si L est non trivial alors $L(k)$ aussi mais d'après l'hypothèse (ii), $L(k)$ est trivial.

On a donc montré que $ker(\psi)$ est trivial. Comme $tr_{K/k}(A) = 0$, le morphisme ψ est trivial et donc le groupe G_0 aussi. On en déduit que X est réduit au point e, ce qui est absurde.

Références

[1] S. Lang, *Abelian varieties.* Springer-Verlag, 1983.

[2] Y. Manin, "Rational points of algebraic curves over function fields," *Amer. Math. Soc. Transl*, vol. 59, pp. 189–234, 1966.

[3] A. Buium, "Intersection in jet spaces and a conjecture of S. Lang," *Annals of Math.*, vol. 136, pp. 557–567, 1992.

[4] A. Pillay and M. Ziegler, "Jet spaces of varieties over differential and difference fields," *Selecta Math. (N.S.)*, vol. 9, pp. 579–599, 2003.

[5] D. Marker, M. Messmer, and A. Pillay, *Model theory of fields*, vol. 5 of *Lecture Notes in Logic.* La Jolla, CA : Association for Symbolic Logic, second ed., 2006.

[6] E. Hrushovski, "The Mordell-Lang conjecture for function fields," *Journal of AMS*, vol. 9, pp. 667–690, 1996.