Construction des éléments centraux de l'algèbre d'Iwahori-Hecke affine par cycles proches

Shi-Nan LIU

20 octobre 2014

Table des matières

Introduction

Cet article est une "Introduction au domaine de recherche" de l'Ecole Normale Supérieure de Paris, sous la direction de Benoît Stroh de l'Université Paris 13. Dans cet article nous allons donner une introduction au théorème principal d'un article de Gaistgory en 2001, [G]. Dans le chapitre d'introduction nous décrivons le contexte du problème et dans les chapitres suivants nous donnons les définitions de base pour énoncer ce théorème.

Soit $G = GL_n$ le groupe algébrique linéaire sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, l un nombre premier inversible dans $\mathbb{F}_q$. Notons $\mathcal{K} = \mathbb{F}_q((t)), \mathcal{O} = \mathbb{F}_q[[t]]$. Par définition, l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}_{sph}$ est l'espace vectoriel des fonctions à support compact de $G(\mathcal{K})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}_l}$ qui sont bi-$G(\mathcal{O})$-invariantes. Sur $\mathcal{H}_{sph}$ il y a une structure de produit de convolution, défini par

$$f^1 \star f^2(g) = \int_{G(\mathcal{K})} f^1(x) f^2(x^{-1}g) dx$$

où dx est la mesure de Haar sur $G(\mathcal{K})$ tel que $dx(G(\mathcal{O})) = 1$.

Soit $I \subset G(\mathcal{O})$ le sous-groupe d'Iwahori, qui est par définition, l'ensemble des $g \in G(\mathcal{O})$ tel que $g(mod\ t) \in B(\mathbb{F}_q)$, où $B \subset G$ le sous-groupe de matrices triangulaires supérieures. De même façon on peut définir l'algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}_I$, constituée par les fonctions à support compact bi-I-invariantes .

Une propriété fondamentale de ces algèbres est que $\mathcal{H}_{sph}$ est commutative, mais $\mathcal{H}_I$ ne l'est pas. Soit $Z(\mathcal{H}_I)$ le centre de $\mathcal{H}_I$. Considérons le morphisme $\Pi : \mathcal{H}_I \to \{\text{fonctions } I\text{-}G(\mathcal{O})\text{-invariants}\}$ défini par

$$\Pi(f)(g) = \int_{G(\mathcal{O})/I} f(gx) dx$$

Un théorème de Bernstein ([B]) assure que la restriction de Π à $Z(\mathcal{H}_I)$ donne un isomorphisme $Z(\mathcal{H}_I) \simeq \mathcal{H}_{sph}$. Le but de [G] est de trouver un inverse "géométrique" de Π, dans le sens suivant.

Sur les quotients $Gr = G(\mathcal{K})/G(\mathcal{O}), Fl = G(\mathcal{K})/I$ il existe des structures d'ind-schéma, i.e. limites inductives des schémas usuels. Comme $G(\mathcal{O}), I$ agit sur Gr, Fl respectivement, on peut considérer les catégories des faisceaux pervers équivariants $P_{G(\mathcal{O})}(Gr), P_I(Fl)$.

Par ailleurs, pour un schéma X de type fini sur $\mathbb{F}_q$, K un complexe borné de faisceau ℓ-adique sur X, il existe une fonction $\tau_K : X(\mathbb{F}_q) \to \overline{\mathbb{Q}_l}$ associée à K tel que $\tau_K(x) = \sum(-1)^i tr(Frob_q, K^i_{\bar{x}})$ pour un $\mathbb{F}_q$-point x. C'est la "correspondance faisceaux-fonctions" de Grothendieck. Si $K \in P_{G(\mathcal{O})}(Gr)$ ou $P_I(Fl)$, alors τ_K est dans $\mathcal{H}_{sph}, \mathcal{H}_I$ respectivement.

Notons $\pi : Fl \to Gr$ le morphisme de quotient naturel, et $R\pi_! : D(Fl) \to D(Gr)$ le foncteur d'image direct à support compact entre les catégories dérivées ℓ-adiques. Alors, par la formule des traces de Grothendieck, $R\pi_!$ est une "géométrisation" de Π. C'est-à-dire que, pour $K \in P_I(Fl)$, on a $\tau_{R\pi_!(K)} = \Pi(\tau_K)$.

Le théorème principal de [G] est une construction d'un inverse de $R\pi_!$: plus précisément, il a construit un foncteur $Z : P_{G(\mathcal{O})}(Gr) \to P_I(Fl)$ tel que les images de Z sont des faisceaux pervers "central", et $R\pi_! Z = id$. Il se trouve que le foncteur Z est construit par le foncteur de cycle proche. Plus précisément, Gaitsgory a construit un schéma Fl_X sur une courbe lisse X, qui est une dégénérescence de $Gr \times G/B$ à Fl. Alors pour $\mathcal{S} \in P_{G(\mathcal{O})}(Gr)$, $Z(\mathcal{S})$ est le cycle proche de produit $\mathcal{S} \boxtimes \delta_{1_{G/B}}$.

Le modèle local des variétés de Shimura a une structure similaire à Fl_X, donc on peut utiliser le même argument de Gaitsgory pour étudier les cycles proches sur les variétés de Shimura. Dans cette direction, voir [HN], [PZ]. Le but de ma thèse est de généraliser la construction du modèle local de [PZ] dans le cas de niveau pro-p-Iwahori.

Voici la structure de cet article. Le but des trois premiers chapitres est de donner la définition des faisceaux pervers ℓ-adiques : on commence par les catégories triangulés et t-structures, après la définition compliqué de la catégorie dérivée ℓ-adique, et finalement les faisceaux pervers ℓ-adiques. Dans le dernier chapitre on parlera des ind-schémas Gr, Fl, du produit de convolution sur la catégorie $P_{G(\mathcal{O})}(Gr)$, et du théorème principal (théorème 6 de 4.5) avec quelques mots sur sa démonstration.

1 Algèbre homologique

1.1 Catégories triangulées

Soit $\mathcal{K}$ une catégorie, munie d'un automorphisme T. Pour un objet A de $\mathcal{K}$, notons $A[1] = T(A)$. Un **triangle** dans $\mathcal{K}$ est (A, B, C, u, v, w) où A, B, C sont des objets dans $\mathcal{K}$ et u, v, w sont des morphismes entre ces objets tel que

$$A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} A[1]$$

(parfois noté par $A \to B \to C \nrightarrow$). Un morphisme entre deux triangles (A, B, C) et (A', B', C') est par définition un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C & \xrightarrow{w} & A[1] \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f[1] \\ A' & \xrightarrow{u'} & B' & \xrightarrow{v'} & C' & \xrightarrow{w'} & A'[1] \end{array}$$

.

Définition 1. *Une catégorie additive $\mathcal{K}$ munie un automorphisme T est dite une* ***catégorie triangulée*** *si on a choisi une famille de triangles (les triangles* ***distingués****) tel que les 4 axiomes suivants sont vérifiées.*

1. *Chaque morphisme $A \xrightarrow{u} B$ peut-être complété dans un triangle distingué ; $A \xrightarrow{id} A \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} A[1]$ est distingué ; un triangle qui est isomorphe à un triangle distingué est distingué aussi.*
2. *Si $A \to B \to C \nrightarrow$ est distingué, alors les translatés $B \to C \to A[1] \nrightarrow$ et $C[-1] \to A \to B \nrightarrow$ sont distingués aussi.*
3. *Soit (A, B, C) et (A', B', C') distingués, et $A \xrightarrow{f} A', B \xrightarrow{g} B'$ deux morphismes tel que $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ A' & \xrightarrow{u'} & B' \end{array}$ est commutatif. Alors il existe un morphisme $C \xrightarrow{h} C'$ tel que (f, g, h) est un morphisme de triangle. (On peut montrer par 1, 2, 3 que h est unique).*

4. Soit $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{u} D \twoheadrightarrow, A \xrightarrow{h} C \xrightarrow{v} E \twoheadrightarrow, B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{w} F \twoheadrightarrow$ distingués. Soit $D \xrightarrow{r} E, E \xrightarrow{s} F, F \xrightarrow{t} D[1]$ deux morphismes donnés par l'axiome 3. Alors (D, E, F, r, s, t) est distingué.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "h"] & & & \\
B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"] & C \arrow[rr, "w"] \arrow[dr, "v"] & & F \\
D \arrow[rr, "r"] & & E \arrow[ur, "s"] &
\end{tikzcd}$$

Remarque 1. *Les axiomes 1, 2, 3 semblent plus naturels que l'axiome 4. Cependant, c'est l'axiome 4 (l'**axiome octaèdre** de Verdier) qui est crucial dans plusieurs démonstrations.*

Exemple 1. *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne. On définit la **catégorie d'homotopie** $K(\mathcal{A})$ dont les objets sont des complexes dans $\mathcal{A}$, et les morphismes sont les morphismes de complexes modulo homotopie. De la même façon, on peut définir $K^b(\mathcal{A})$ ($K^+(\mathcal{A})$) donc les objets sont les complexes bornés (bornés inférieurement).*

Pour un complexe A, la translation $A[1]$ est défini par

$$A[1]^n = A^{n+1}, d[1]^n = -d^{n+1}.$$

*Le **cône** d'un morphisme de complexes $A \xrightarrow{u} B$ est un complexe $C(u)$ où*

$$C(u)^i = A[1]^i \oplus B^i, d(a, b) = (-d(a), u(a) + d(b)).$$

Par définition, les triangles distingués de $K(\mathcal{A})$, $K^b(\mathcal{A})$, $K^+(\mathcal{A})$ sont des triangles isomorphes à un cône $A \xrightarrow{u} B \to C(u) \twoheadrightarrow$.

Proposition 1. *Les catégories $K(\mathcal{A})$, $K^b(\mathcal{A})$, $K^+(\mathcal{A})$ sont des catégories triangulées.*

Démonstration. [W] 10.2.4. □

1.2 Catégories dérivées

La catégorie dérivée $D(\mathcal{A})$ est par définition égale à $Q^{-1}K(\mathcal{A})$, la "localisation" de $K(\mathcal{A})$ par Q={quasi-isomorphismes} (un morphisme de complexe est dit un quasi-isomorphisme s'il induit des isomorphismes entre les groupes de cohomologie). Nous allons préciser le sens de localisation dans les paragraphes suivants.

Définition 2. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, S une famille de morphismes dans $\mathcal{C}$ stable par composition. Une **localisation** de $\mathcal{C}$ par S est une catégorie $S^{-1}\mathcal{C}$ avec un foncteur $q : \mathcal{C} \to S^{-1}\mathcal{C}$ tel que $q(s)$ est un isomorphisme pour tout $s \in S$, et pour tout foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tel que les $F(S)$ sont des isomorphismes dans $\mathcal{D}$, on a une factorisation de F par q.*

Proposition 2. *La localisation $S^{-1}\mathcal{C}$ existe et est unique.*

Démonstration. Définissons les objets de $S^{-1}\mathcal{C}$ comme les mêmes que dans $\mathcal{C}$. Les morphismes de $S^{-1}\mathcal{C}$ sont des classes d'équivalence de chemins engendrés par les suites $(f_1, ..., f_n)$ telles que les f_i sont soit un morphisme dans $\mathcal{C}$, soit un morphisme "formel" x_s, pour $s \in S$, regardé comme l'inverse de s. Pour chaque i, la source de f_i et le but de f_{i-1} coïncident.

La relation d'équivalence des suites est engendrée par les composés de vrais morphismes dans $\mathcal{C}$, et les relations $sx_s = id, x_s s = id$. On peut vérifier que $S^{-1}\mathcal{C}$ est une catégorie avec la propriété universelle dont on a besoin.

$\square$

Définition 3. *Une famille S de morphismes dans $\mathcal{C}$ est dite un **système multiplicatif** si les 3 points suivants sont satisfaits.*

1. *$id \in S$; S est stable par composition.*
2. *Un diagramme* $\begin{array}{ccc} & & Z \\ & & \downarrow t \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$ *,où $t \in S$, peut être complété comme* $\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f} & Z \\ \downarrow s & & \downarrow t \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$ *avec $s \in S$. La version symétrique est vraie aussi.*
3. *Il existe $s \in S$ tel que $sf = sg$ si et seulement s'il existe $t \in S$ tel que $ft = gt$.*

Remarque 2. *Soit $\mathcal{K} \subset \{K(\mathcal{A}), K^b(\mathcal{A}), K^+(\mathcal{A})\}$. Un foncteur $H : \mathcal{K} \to \mathcal{A}$ est dit **cohomologique** si pour tout triangle distingué (A, B, C) dans $\mathcal{K}$, la suite longue $\cdots \to H(A[i]) \to H(B[i]) \to H(C[i]) \to H(A[i+1]) \to \cdots$ est exacte dans $\mathcal{A}$.*

Une famille de morphismes S est dite associée à un foncteur cohomologique H si S={morphismes s tel que $H(s[i])$ est un isomorphisme}. Par exemple si on prend H le foncteur de cohomologie en degré 0 usuel, alors S={quasi-isomorphismes}. La proposition suivante est dans [W] 10.4.1.

Proposition 3. *Si S est associé à un foncteur cohomologique, alors S est multiplicative et $S^{-1}\mathcal{K}$ est triangulée.*

Donc on sait que les catégories dérivées $D(\mathcal{A}), D^b(\mathcal{A}), D^+(\mathcal{A})$ sont triangulées. On remarque que les triangles distingués dans $D(\mathcal{A}), D^b(\mathcal{A}), D^+(\mathcal{A})$ sont des triangles isomorphes des cônes.

Soit $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ deux catégories abéliennes telles que $\mathcal{A}$ possède suffisamment d'injectifs. Soit $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un foncteur (pas nécessairement exact à gauche). Son foncteur dérivé à droite $RF : D^+(\mathcal{A}) \to D^+(\mathcal{B})$ est défini par une propriété universelle compliquée (c.f. [W] 10.5), qui envoie un complexe K sur $F(I)$, où I est une résolution injective de K.

1.3 t-structure

Définition 4. *Soit $\mathcal{D}$ une catégorie triangulée. Une **t-structure** sur $\mathcal{D}$ est la donnée de deux sous-catégories strictement pleines (c'est-à-dire pleines et stables par extensions) $\mathcal{D}^{\leqslant 0}$, $\mathcal{D}^{\geqslant 0}$ telle que (notons $\mathcal{D}^{\leqslant n} = \mathcal{D}^{\leqslant 0}[-n]$, $\mathcal{D}^{\geqslant n} = \mathcal{D}^{\geqslant 0}[-n]$) :*

1. $Hom(\mathcal{D}^{\leqslant 0}, \mathcal{D}^{\geqslant 1}) = 0$;
2. $\mathcal{D}^{\leqslant 0} \subset \mathcal{D}^{\leqslant 1}, \mathcal{D}^{\geqslant 1} \subset \mathcal{D}^{\geqslant 0}$;
3. *pour tous* $X \in \mathcal{D}$, *il existe un triangle distingué* (A, X, B) *tel que* $A \in \mathcal{D}^{\leqslant 0}, B \in \mathcal{D}^{\geqslant 1}$.

Proposition 4. 1. *L'inclusion* $\mathcal{D}^{\leqslant n} \to \mathcal{D}$ *admet un adjoint à droite* $\tau_{\leqslant n}$; *l'inclusion* $\mathcal{D}^{\geqslant n} \to \mathcal{D}$ *admet un adjoint à gauche* $\tau_{\geqslant n}$.

2. $\forall X \in \mathcal{D}$, *il existe un triangle distingué* $\tau_{\leqslant 0}X \to X \to \tau_{\geqslant 1}X \not\to$.

Démonstration. Voir [BBD] 1.3.3. □

Le théorème principal de la théorie des t-structures est le théorème suivant :

Théorème 1. *Le coeur* $\mathcal{C}$ *de la t-structure, par définition* $\mathcal{D}^{\leqslant 0} \cap \mathcal{D}^{\geqslant 0}$, *est une catégorie abélienne. Le foncteur* $H^0 = \tau_{\leqslant 0}\tau_{\geqslant 0}$ *est un foncteur cohomologique à valeurs dans* $\mathcal{C}$.

Démonstration. Voir [BBD] 1.3.6. □

Exemple 2. *Soit* $\mathcal{D} = D(\mathcal{A})$. *La* ***t-structure usuelle*** *sur* $\mathcal{D}$ *est définie par* $\mathcal{D}^{\leqslant 0} = \{K \in \mathcal{D} \mid H^i(K) = 0, \forall i \geqslant 1\}, \mathcal{D}^{\geqslant 0} = \{K \in \mathcal{D} \mid H^i(K) = 0, \forall i \leqslant -1\}$. *Dans ce cas là, nous pouvons écrire explicitement les foncteurs tronqués* $\tau_{\leqslant 0}, \tau_{\geqslant 0}$:

$$\tau_{\leqslant 0}K : \cdots \to K^{-2} \to K^{-1} \to ker(d^0) \to 0 \to \cdots$$
$$\tau_{\geqslant 0}K : \cdots \to 0 \to K^0/im(d^{-1}) \to K^1 \to K^2 \to \cdots$$

On retrouve alors $H^0(K) = ker(d^0)/im(d^{-1})$ *la cohomologie en degré 0 comme d'habitude.*

La raison pour laquelle on introduit la notion générale de t-structure est que sur $D(\mathcal{A})$ il existe plusieurs t-structures, par exemple les t-structures perverses si $\mathcal{A}$ est la catégorie de faisceaux usuels. Le fait que le coeur d'une t-structure est abélienne est le point de départ de la théorie des faisceaux pervers qu'on va voir dans le chapitre 3.

2 Faisceaux ℓ-adiques

Dans ce chapitre nous allons résumer les définitions de base des faisceaux ℓ-adiques qui sont nécessaires pour définir les faisceaux pervers ℓ-adiques. On va commencer par une section courte sur la cohomologie étale.

2.1 Cohomologie étale

Soit X un schéma quelconque.

Définition 5. *Un morphisme localement de présentation fini de schémas* $f : U \to X$ *est dit* ***étale*** *s'il est plat et nonramifié (*f *est dit non-ramifié si le faisceau* $\Omega^1_{U/X}$ *est nul).*

Une famille de morphismes $\{f_i : U_i \to U\}$ est dite un recouvrement si on a $\cup f_i(U_i) = X$.

Définition 6. *Un faisceau étale $\mathcal{F}$ est un foncteur contravariant qui associe, pour chaque morphisme étale $U \to X$, un ensemble $\mathcal{F}(U)$ tel que, pour tout recouvrement étale $\{U_i \to U\}$, la suite $\mathcal{F}(U) \to \prod_i \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \times_U U_j)$ est exacte.*

Pour un morphisme de schémas $f : X \to Y$, $\mathcal{F}$ un faisceau étale sur X, $\mathcal{G}$ sur Y, on définit $f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}V)$, $f^*\mathcal{G}$ le faisceau associé à $U \mapsto \varinjlim_{"f(U)\subset V"} \mathcal{G}(V)$. Ils sont une paire des foncteurs adjoints.

Soit $f : X \to Y$ un morphisme de type fini entre les schémas noethériens. Par un théorème de Nagata, il existe une "compactification" $\overline{X}$, i.e. un morphisme propre $\overline{f} : \overline{X} \to Y$, une immersion ouverte $j : X \to \overline{X}$ tel que $f = \overline{f}j$. Alors pour un complexe K sur X, le foncteur d'image directe à support compact est défini par $Rf_!K = R\overline{f}_*j_!K$.

Définition 7. *Un faisceau étale $\mathcal{F}$ sur X est dit* **constructible** *s'il existe une stratification finie X_i de X par des schémas localement fermés, telle que les $\mathcal{F} \mid_{X_i}$ sont "localement constants constructibles", i.e. il existe $X_i^{'} \to X_i$ étale surjectif, tel que $\mathcal{F} \mid_{X_i^{'}}$ est un faisceau constant et $\mathcal{F}(X_i^{'})$ est fini.*

2.2 Faisceaux π-adiques

Soit l un nombre premier, E une extension finie de $\mathbb{Q}_l$, $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de E et $\pi \in \mathcal{O}$ une uniformisante, $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}/\pi^i$.

Un système projectif de faisceaux est, par définition, une famille $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de faisceaux constructibles de $\mathcal{O}$-modules de torsion avec des morphismes de transition $\mathcal{F}_{i+1} \to \mathcal{F}_i$. Un **faisceau π-adique** est un système projectif $(\mathcal{F}_i)$ tel que $\pi^i\mathcal{F}_i = 0$ et $\mathcal{F}_{i+1}/\pi^i\mathcal{F}_{i+1} \cong \mathcal{F}_i$.

Les faisceaux π-adiques forment une catégorie $Sh(X, \mathcal{O})$, qui n'est pas abélienne, car le noyau n'existe pas dans cette catégorie. La notion de catégorie d'Artin-Rees est une solution de ce problème. Notons $\mathcal{F}[n]_i = \mathcal{F}_{n+i}$. Soit S la famille des morphismes de la forme $\mathcal{F}[n] \to \mathcal{F}$. Alors S est un système multiplicatif au sens de 1.2. La catégorie d'Artin-Rees de faisceaux π-adiques $Sh_{AR}(X, \mathcal{O})$ est la localisation de $Sh(X, \mathcal{O})$ par S, dont les ojets sont les mêmes que $Sh(X, \mathcal{O})$, et pour deux faisceaux π-adiques $\mathcal{F}, \mathcal{G}$, on a $Hom_{Sh_{AR}(X,\mathcal{O})}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \varinjlim_n Hom_{Sh(X,\mathcal{O})}(\mathcal{F}[n], \mathcal{G})$. Le nom "Artin-Rees" devient du fait que, dans la démonstration de la proposition suivante, le point crucial est le lemme d'Artin-Rees pour les filtrations stables d'un module noethérien.

Proposition 5. *La catégorie $Sh_{AR}(X, \mathcal{O})$ est une catégorie abélienne.*

Démonstration. Voir [FK] I.12.11. □

Soit $E/F/\mathbb{Q}_l$ des extensions finies de corps, $\mathcal{O}_E, \mathcal{O}_F$ ces anneaux des entiers, π_E, π_F des uniformisantes. Soite l'indice de ramification de E/F est e. Un faisceau π_F-adique $(\mathcal{F}_i)$ définit un faisceau π_E^e-adique $(\mathcal{G}_{ei})_i$ tel que $\mathcal{G}_{ei} = \mathcal{F}_i \otimes_{\mathcal{O}_F}$

$\mathcal{O}_E$. Pour $(i-1)e < j < ei$, on pose $\mathcal{G}_j = \mathcal{G}_{ei}/\pi_E^j\mathcal{G}_{ei}$. Alors $(\mathcal{G}_j)$ est un faisceau π_E-adique. Donc on obtient un foncteur naturel $Sh_{AR}(X,\mathcal{O}_F) \to Sh_{AR}(X,\mathcal{O}_E)$ pour toute extension $F \hookrightarrow E$.

Les objets de la catégorie de E-faisceaux $Sh(X,E)$ sont par définition des objets de $Sh_{AR}(X,\mathcal{O})$. Pour un faisceau π-adique $\mathcal{F}$, on note le même objet dans $Sh(X,E)$ par $\mathcal{F}\otimes E$. Les morphismes entre deux faisceaux π-adiques $\mathcal{F},\mathcal{G}$ sont définis par $Hom_{Sh(X,E)}(\mathcal{F}\otimes E,\mathcal{G}\otimes E) = Hom_{Sh_{AR}(X,\mathcal{O})}(\mathcal{F},\mathcal{G})\otimes_{\mathcal{O}} E$. La composition de morphisme dans $Sh(X,E)$ est par définition, la composition dans $Sh_{AR}(X,\mathcal{O})$ pour le premier facteur, et la multiplication dans E pour le second.

Le foncteur naturel $Sh_{AR}(X,\mathcal{O}_F) \to Sh_{AR}(X,\mathcal{O}_E)$ s'étend naturellement à $Sh(X,F) \to Sh(X,E)$. On définit la catégorie de $\overline{\mathbb{Q}_l}$-faisceaux $Sh(X,\overline{\mathbb{Q}_l})$ comme une limite inductive des catégories $Sh(X,E)$, pour toute extension finie $E/\mathbb{Q}_l$. Donc pour $\mathcal{F}\otimes E,\mathcal{G}\otimes E$ dans $Sh(X,E)$, on a $Hom_{Sh(X,\overline{\mathbb{Q}_l})}(\mathcal{F}\otimes E,\mathcal{G}\otimes E) = \varinjlim_{E'/E} Hom_{Sh(X,E')}(\mathcal{F}\otimes E',\mathcal{G}\otimes E')$.

2.3 Catégorie dérivée ℓ-adique

Dans la suite de ce chapitre, on suppose que X est un schéma de type fini sur $\mathbb{F}_q$, où q est une puissance d'un nombre premier tel que l est inversible dans $\mathbb{F}_q$.

La catégorie dérivée $D_c^b(X,\overline{\mathbb{Q}_l})$ ne peut pas être obtenue comme la catégorie dérivée borné de la catégorie abélienne $Sh(X,\overline{\mathbb{Q}_l})$. La raison est que $Sh(X,\overline{\mathbb{Q}_l})$ ne possède pas suffisamment d'injectifs, donc si on utilise cette définition naïve, il est difficile de construire une théorie de foncteur dérivé. La vraie définition est par le principe qu'on a vu plusieurs fois : d'abord on définit $D_c^b(X,\mathcal{O})$, après $D_c^b(X,E)$ en tensorisant par E pour les morphismes, et finalement $D_c^b(X,\overline{\mathbb{Q}_l})$ est une limite inductive de $D_c^b(X,E)$ sur tous les E.

Le but maintenant est donc de définir $D_c^b(X,\mathcal{O})$. Pour le faire, on pose $D^b(X,\mathcal{O}_i) = D^b(Sh(X,\mathcal{O}_i))$. La catégorie $D_c^b(X,\mathcal{O}_i)$ est constituée par les complexes dans $D^b(X,\mathcal{O}_i)$ avec cohomologies constructibles. Elle est bien une sous-catégorie triangulée, car pour un triangle distingué, on a une suite exacte longue de cohomologie, et les faisceaux constructibles sont stables par extensions.

Un faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_i$-modules est dit **plat** si pour tout point géométrique $\bar{x}\to X$ (c'est-à-dire que $\bar{x}$ est le spectre d'un corps séparablement clos), $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ est un $\mathcal{O}_i$-module plat. Un **complexe parfait** $K \in D_c^b(X,\mathcal{O}_i)$ est par définition, un objet qu'il existe un représentant qui est un complexe borné tel que K^n est un $\mathcal{O}_i$-module plat constructible pour tout n. La sous-catégorie $D_{ctf}^b(X,\mathcal{O}_i)$ de $D_c^b(X,\mathcal{O}_i)$, dont les objets sont des complexes isomorphes à un complexe parfait, est une sous-catégorie triangulée, car l'opération de prendre le cône est stable par les propriétés borné, plat et constructible. Le mot "tf" est une abréviation de "de Tor-dimension finie".

Par définition, $D_c^b(X,\mathcal{O}) = \varprojlim_i D_{ctf}^b(X,\mathcal{O}_i)$. Les objets de $D_c^b(X,\mathcal{O})$ sont des systèmes projectifs $K = (K_i)_{i\geqslant 1}$ où $K_i \in D_{ctf}^b(X,\mathcal{O}_i)$, avec des isomorphismes dans les catégories dérivées $\phi_i^K : K_{i+1}\otimes^L_{\mathcal{O}_{i+1}}\mathcal{O}_i \simeq K_i$. Un morphisme entre deux objets K, L est un morphisme en chaque niveau commutant avec les ϕ_i^K, ϕ_i^L. Soit $K \in D_c^b(X, \mathcal{O})$. Considérons pour tout n le système projectif de faisceaux $(H^n(K_i))_{i \geqslant 1}$. Dans la démonstration de la proposition suivante on va voir pourquoi on veut l'hypothèse tor-dimension finie, c.f. [KW] II 5.5.

Proposition 6. *Le système projectif* $(H^n(K_i))_{i \geqslant 1}$ *est un objet de* $Sh_{AR}(X, \mathcal{O})$.

Par la procédure expliquée au début de cette section, on va obtenir la définition de la catégorie $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$. On remarque que $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$ est bien une catégorie triangulée. Un triangle (K, L, M) dans $D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$ est distingué si chaque composante (K_i, L_i, M_i) l'est.

2.4 Dualité de Poincaré

Soit $f : X \to Y$ un morphisme entre deux schémas de type fini sur $\mathbb{F}_q$. Les six foncteurs de Grothendieck $Rf_*, f^*, Rf_!, Rf^!, - \otimes^L -, R\underline{Hom}$ sont définis par composantes : par exemple, $Rf_*K = (Rf_*K_i)_{i \geqslant 1}$, etc.

Le théorème suivant assure l'existence du foncteur $Rf^!$. Voir [SGA4], exposé XVIII.

Théorème 2. *Soit* $f : X \to S$ *un morphisme entre schémas de type fini sur* $\mathbb{F}_q$*. Alors le foncteur* $Rf_! : D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_l}) \to D_c^b(S, \overline{\mathbb{Q}_l})$ *admet un adjoint à droite* $Rf^! : D_c^b(S, \overline{\mathbb{Q}_l}) \to D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$*, c'est-à-dire*

$$Hom(K, Rf^!(L)) = Hom(Rf_!(K), L)$$

pour $K \in D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_l}), L \in D_c^b(S, \overline{\mathbb{Q}_l})$.

Lorsque f *est lisse de dimension relative* d*, on a un calcul explicite :* $Rf^!(L) = L(d)[2d]$*, où* (d) *est le twist de Tate et* $[2d]$ *la translation.*

Avec $Rf^!$ on arrive à définir le **dual de Verdier** :

Définition 8. *Soit* $X \to \mathbb{F}_q$ *de type fini. Pour* $K \in D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$*, on pose* $D(K) = R\underline{Hom}(K, Rf^!(\overline{\mathbb{Q}_l}))$.

La démonstration du théorème suivant est dans [SGA4.5], l'exposé "Théorème de finitude".

Théorème 3. *On a* $D^2 = id$.

3 Faisceaux pervers ℓ-adiques

On suppose toujours que X est de type fini sur $\mathbb{F}_q$. On note $D(X) = D_c^b(X, \overline{\mathbb{Q}_l})$. Donnons la définition de **faisceau pervers ℓ-adique autodual** :

Définition 9.

$$D(X)^{\leqslant 0} = \{K \in D(X) \mid dim(supp\ \mathcal{H}^{-i}(K)) \leqslant i, \forall i \in \mathbb{Z}\}$$

$$D(X)^{\geqslant 0} = \{K \in D(X) \mid dim(supp\ \mathcal{H}^{-i}(DK)) \leqslant i, \forall i \in \mathbb{Z}\}$$

Dans ce chapitre on va voir pourquoi il définit une t-structure sur $D(X)$. Le coeur de cette t-structure est la catégorie des faisceaux pervers ℓ-adiques sur X, notée $Perv(X)$ ou $P(X)$.

3.1 Le cas lisse

On dit que X est **essentiellement lisse** sur $\mathbb{F}_q$ si $(X_{\overline{\mathbb{F}_q}})_{red}$ est lisse sur $\overline{\mathbb{F}_q}$. Pour un tel X de dimension d, le théorème 2 implique que le complexe dualisant de X, par définition le complexe $D(\overline{\mathbb{Q}_l})$, est isomorphe à $\overline{\mathbb{Q}_l}(d)[2d]$.

On dit qu'un faisceau ℓ-adique $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_i)$ est **lisse** si tous les $\mathcal{G}_i$ sont localement constants constructibles au sens de 2.1. Pour un tel faisceau $\mathcal{G}$, on définit son dual $\mathcal{G}^\vee = \underline{Hom}(\mathcal{G}, \overline{\mathbb{Q}_l})$.

Définition 10. *Un complexe $K \in D(X)$ est dit un **complexe lisse** si les cohomologies $\mathcal{H}^i(K)$ sont des faisceaux lisses.*

Proposition 7.
1. *Soit X un schéma essentiellement lisse de dimension d, $K \in D(X)$ un complexe lisse. On va dire que (X, K) est dans "le cas lisse". Alors $\mathcal{H}^i(DK) \simeq \mathcal{H}^{-i-2d}(K))^\vee(d)$.*
2. *Soit X irréductible et $K \in D(X)$. Alors il existe une immersion ouverte $j : U \to X$, dense, essentiellement lisse sur $\mathbb{F}_q$ telle que $j^*(K)$ est un complexe lisse.*

Démonstration. Voir [KW] III.2.1. □

On va utiliser cette proposition pour calculer les faisceaux pervers dans le cas lisse. Soit (X, K) dans le cas lisse, et $K \in Perv(X)$. Alors pour tout i, $\mathcal{H}^{-i}(K)$ est un faisceau ℓ-adique lisse. Il se déduit que $dim(supp\ \mathcal{H}^{-i}(K)) = 0, d$, donc si $\mathcal{H}^{-i}(K)$ n'est pas zéro, alors $i \geqslant d$.

D'autre part, par la proposition précédente, on sait que $dim(supp\, \mathcal{H}^{i-2d}(K))= dim(supp\ \mathcal{H}^{-i}(DK)) \leqslant i$, ou de manière équivalente, $dim(supp\ \mathcal{H}^{-i}(K)) \leqslant 2d - i$. Donc si $\mathcal{H}^{-i}(K)$ n'est pas zéro, alors $i \leqslant d$.

Donc on a vu que dans le cas lisse, un faisceau pervers K est isomorphe à un $\mathcal{G}[d]$ pour $\mathcal{G}$ un faisceau lisse sur X.

3.2 Recollement

On va démontrer dans cette section que les deux sous-catégories définies au début de ce chapitre forment une t-structure. Soit $j : U \to X$ une immersion ouverte, $i : Y \to X$ le fermé complémentaire. Soit $T(U) \subset D(U)$ une sous-catégorie triangulée, et on a donné des t-structures sur $T(U), D(Y)$, respectivement. On veut les recoller comme une t-structure sur la sous-catégorie $T(X, U) = \{K \in D(X) \mid j^*(K) \in T(U)\}$ de $D(X)$. Le théorème suivant est le théorème central pour les t-structures, c.f. [BBD] 1.4.10.

Théorème 4. *Les deux sous-catégories*

$$T(X, U)^{\leqslant 0} = \{K \in T(X, U) \mid j^*(K) \in T(U)^{\leqslant 0}, i^*(K) \in D(Y)^{\leqslant 0}\},$$

$$T(X, U)^{\geqslant 0} = \{K \in T(X, U) \mid j^*(K) \in T(U)^{\geqslant 0}, i^!(K) \in D(Y)^{\geqslant 0}\}$$

de $T(X, U)$ forment une t-structure sur $T(X, U)$.

Revenons à la définition 9, on montre par récurrence sur la dimension de X, que $D(X)^{\leqslant 0}, D(X)^{\geqslant 0}$ est bien une t-structure. Pour un schéma U essentiellement lisse, on pose $T(U)$ la sous-catégorie des complexes lisses sur U. Donc on a $T(X,U) = \{K \in D(X) \mid j^*(K) \text{ est un complexe lisse}\}$. On définit les catégories $T(U)^{\leqslant 0}$,$T(U)^{\geqslant 0}$, $D(Y)^{\leqslant 0}, D(Y)^{\geqslant 0}$, $T(X,U)^{\leqslant 0}, T(X,U)^{\geqslant 0}$ par les estimations de dimension dans la définition 9. Il est facile de voir que $T(X,U)^{\leqslant 0}, T(X,U)^{\geqslant 0}$ sont recollés par le théorème 4 de $T(U)^{\leqslant 0}, T(U)^{\geqslant 0}, D(Y)^{\leqslant 0}, D(Y)^{\geqslant 0}$.

Par l'hypothèse de récurrence, $D(Y)^{\leqslant 0}, D(Y)^{\geqslant 0}$ est une t-structure sur $D(Y)$. Par le calcul à la fin de la section précédente, on va voir que $T(U)^{\leqslant 0}, T(U)^{\geqslant 0}$ est la translation par d de la t-structure usuelle. Donc par le théorème 4, $T(X,U)^{\leqslant 0}, T(X,U)^{\geqslant 0}$ est une t-structure sur $T(X,U)$.

Pour finir l'argument, on voit par le deuxième point de la proposition 7 que $D(X) = \cup_U T(X,U)$, donc la définition 9 est bien une t-structure sur $D(X)$.

4 Grassmannienne affine, variété de drapeaux affine

4.1 Ind-schéma

On commence par une discussion de faisceau fpqc (fidèlement plat, quasi-compact). Soit X un schéma quelconque. La définition de faisceau fpqc est similaire à celle de faisceau étale, mais pour un site différent, i.e. le site fpqc.

Définition 11. *Un **faisceau fpqc** $\mathcal{F}$ est un foncteur contravariant qui associe à tout morphisme de schémas $U \to X$ quasi-compact et plat, un ensemble $\mathcal{F}(U)$ tel que pour tous morphismes quasi-compact et plat $U \to X$, tous recouvrements quasi-compact et plat $\{U_i \to U\}$, la suite $\mathcal{F}(U) \to \prod_i \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \times_U U_j)$ est exacte.*

La propriété clé de la notion de faisceau fpqc est la proposition suivante.

Proposition 8. *Soit S un schéma et Z un schéma sur S. Alors le foncteur $Hom_S(-, Z)$ est un faisceau fpqc.*

Un ind-schéma est une limite inductive de schémas où on regarde les schémas comme des faisceaux fpqc, et la limite est dans la catégorie de faisceaux fpqc. Plus précisément, soit $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de schémas séparés, de type fini sur $\mathbb{F}_q$, telle que les morphismes de transition $\phi_i : T_i \to T_{i+1}$ sont des immersions fermées. Un faisceau fpqc de la forme $\varinjlim_i T_i$ est dit un **ind-schéma**.

Pour chaque i, le morphisme de transition ϕ_i induit un foncteur $\phi_{i_*} : D(T_i) \to D(Y_{i+1})$. Comme ϕ_i est une immersion fermée, donc t-exacte, elle envoie les faisceaux pervers sur des faisceaux pervers.

Définition 12. *Soit $T = \varinjlim_i T_i$ un ind-schéma. On définit $D(T) = \varinjlim_i D(T_i)$, $P(T) = \varinjlim_i P(T_i)$.*

4.2 Faisceaux pervers équivariants

On note S le schéma de base. Soit H un schéma en groupe lisse affine géométriquement connexe sur S . Soit T un S-schéma tel qu'il existe une S-action de H sur T. Soit $a : H \times_S T \to T$ le morphisme d'action et $p : H \times_S T \to T$ la projection en T. Dans ce contexte-là, on peut donner la définition d'un faisceau pervers équivariant.

Définition 13. *Un faisceau pervers $\mathcal{A} \in P(T)$ est dit **H-équivariant** s'il existe un isomorphisme $a^*\mathcal{A} \simeq p^*\mathcal{A}$ dans $D(H \times_S T)$. La catégorie des faisceaux H-équivariants est notée $P_H(T)$.*

Un point clé de la notion de faisceau équivariant est que les faisceaux pervers peuvent descendre le long des morphismes lisses. La proposition suivante est démontrée dans [C] Appendix B.9.

Proposition 9. *Soit H un schéma en groupe sur Y, lisse affine, géométriquement connexe. Soit $f : X \to Y$ un H-torseur. Alors $f^*[d] : P(Y) \to P_H(X)$ est une équivalence de catégories.*

Maintenant supposons que $T = \varinjlim_i T_i$ est un ind-schéma sur une base S. Soit H_i une famille projective de schémas en groupes sur S, lisses affines, géométriquement connexes. On note $H = \varprojlim H_i$ la limite projective, qui est un schéma en groupe affine sur S. Supposons qu'il y a des actions de H_i sur T_i. Alors on définit $P_H(T) = \varinjlim P_{H_i}(T_i)$.

4.3 Grassmannienne affine, variété de drapeaux affine

On note $k = \mathbb{F}_q$. Dans cet article on suppose que $G = GL_n$, mais tous les résultats sont vrais pour tous les groupes réductifs.

Définition 14. *Les foncteurs $G(\mathcal{K}), G(\mathcal{O})$ sont des faisceaux fpqc sur $Spec(k)$ qui associe une k-algèbre R aux ensembles $G(R((t))), G(R[[t]])$ respectivement, où t est la variable formelle.*

*Le faisceau quotient fpqc $Gr = G(\mathcal{K})/G(\mathcal{O})$ s'appelle la **grassmannienne affine**.*

Lemme 1. *Le faisceau fpqc Gr est un ind-schéma. Pour toute k-algèbre R, on a $Gr(R)=\{(\mathcal{F}, \beta) \mid \mathcal{F}$ est un G-torseur sur $Spec(R[[t]])$, β est une trivialisation de $\mathcal{F} \mid_{Spec(R((t)))}\}$.*

Démonstration. Le premier point se déduit du deuxième point. En fait comme $G = GL_n$, la donnée d'un G-torseur est équivalence à la donnée d'un fibré vectoriel de rang n. Donc on peut voir $\mathcal{F}$ comme un fibré vectoriel sur $Spec(R[[t]])$, i.e. un $R([[t]])$-module projectif de type fini $M_{\mathcal{F}}$. La trivialisation β se traduit comme une inclusion de $M_{\mathcal{F}}$ dans $R((t))^n$. Comme $M_{\mathcal{F}}$ est de type fini, on sait qu'il existe un entier N tel que $t^N R[[t]]^n \subset t^{-N} R[[t]]^n$. La projectivité de $M_{\mathcal{F}}$ implique que $t^{-N} R[[t]]^n / M_{\mathcal{F}}$ est un R-module projectif, qui est un quotient du

R-module libre $t^{-N}R[[t]]^n/t^N R[[t]]^n$, donc s'identifie à un R-point d'une grassmannienne. Prenons la limite inductive pour N, on obtient Gr.

Le deuxième point est démontré dans [G], Appendix A. $\square$

Si on note G_i le groupe algébrique sur k qui associe à une k-algèbre R le groupe $G(R[t]/t^i)$, et si $Gr = \varinjlim Gr^i$ où Gr^i est défini comme dans la démonstration précédente. Alors G_i agit sur Gr^i. Donc la catégorie des faisceaux pervers $G(\mathcal{O})$-équivariants sur Gr, $P_{G(\mathcal{O})}(Gr) = \varinjlim P_{G_i}(Gr^i)$, est bien définie.

La variété de drapeaux affine est définie d'une façon similaire. Notons $B \subset G$ le sous-groupe de Borel constitué par les matrices triangulaires supérieures. Considérons le sous-groupe $I \subset G(\mathcal{O})$, qui est l'image réciproque de B par le morphisme $G(\mathcal{O}) \to G(\mathbb{F}_q), t \mapsto 0$. Alors la **variété de drapeaux affine** Fl est le faisceau fpqc $G(\mathcal{K})/I$. Il est aussi un ind-schéma.

4.4 Le produit de convolution

Dans cette section on va définir un produit de convolution dans la catégorie $P_{G(\mathcal{O})}(Gr)$. Considérons le "diagramme de convolution" suivant :

$$Gr \times Gr \xleftarrow{p} G(\mathcal{K}) \times Gr \xrightarrow{q} G(\mathcal{K}) \times_{G(\mathcal{O})} Gr \xrightarrow{m} Gr$$

où $G(\mathcal{K}) \times_{G(\mathcal{O})} Gr$ est le quotient de $G(\mathcal{K}) \times Gr$ par l'action diagonale de $G(\mathcal{O})$: $g(x, y) = (xg^{-1}, gy)$. Une remarque est que le quotient $G(\mathcal{K}) \to G(\mathcal{O})$ est un $G(\mathcal{O})$-torseur. Donc p, q sont des $G(\mathcal{O})$-torseurs aussi.

Soit $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in P_{G(\mathcal{O})}(Gr)$. Par une estimation de dimension, on sait que le complexe $\mathcal{S} \boxtimes \mathcal{T} = p_1^*\mathcal{S} \otimes^L p_2^*\mathcal{T}$ est un faisceau pervers sur $Gr \times Gr$. Ici p_1, p_2 sont les deux projections de $Gr \times Gr$ vers Gr.

Comme p est lisse, après une translation, $p^*(\mathcal{S} \boxtimes \mathcal{T})$ est un faisceau pervers. Comme q est un $G(\mathcal{O})$-torseur et les G_i sont lisses, le faisceau pervers $p^*(\mathcal{S} \boxtimes \mathcal{T})$ descend le long de q en un faisceau pervers $\mathcal{S}\widetilde{\boxtimes}\mathcal{T}$, c'est-à-dire que $p^*(\mathcal{S} \boxtimes \mathcal{T}) = q^*(\mathcal{S}\widetilde{\boxtimes}\mathcal{T})$. Finalement on définit $\mathcal{S} \star \mathcal{T} = Rm_!(\mathcal{S}\widetilde{\boxtimes}\mathcal{T})$. Le théorème remarquable suivant est dû à Lusztig.

Théorème 5. *Le complexe $\mathcal{S} \star \mathcal{T}$ est dans la catégorie $P_{G(\mathcal{O})}(Gr)$.*

On peut aussi définir le produit de convolution pour deux faisceaux pervers équivariants sur Fl. Par contre il n'existe pas un théorème similaire. Sous la correspondance faisceaux-fonctions de Grothendieck, l'opérateur $\star$ correspond au produit de convolution dans les algèbres de Hecke.

4.5 Le théorème principal

Soit $\pi : Fl \to Gr$ le morphisme quotient. Le théorème principal est le suivant :

Théorème 6. *Il existe un foncteur $Z : P_{G(\mathcal{O})}(Gr) \to P_I(Fl)$ tel que pour tout $\mathcal{S} \in P_{G(\mathcal{O})}(Gr), \mathcal{T} \in P_I(Fl)$, on a $Z(\mathcal{S}) \star \mathcal{T}$ est un faisceau pervers, $Z(\mathcal{S}) \star \mathcal{T} \simeq \mathcal{T} \star Z(\mathcal{S})$, et $R\pi_! Z(\mathcal{S}) \simeq \mathcal{S}$.*

La construction de Z est donnée par le foncteur de cycle proche. Soit S le spectre d'un anneau local hensélien de dimension 1, $s \in S$ le point spécial, $\eta \in S$ le point générique. On prend une clôture séparable $\overline{\eta}$ de η, et on note $\overline{S}$ la normalisation de S dans $\overline{\eta}$, $\overline{s}$ le point spécial de $\overline{S}$. Soit Y un S-schéma de type fini, $\overline{i} : Y_{\overline{s}} \to Y_{\overline{S}}, \overline{j} : Y_{\overline{\eta}} \to Y_{\overline{S}}$ les morphismes naturels. Pour un complexe $K \in D(Y_\eta)$, le foncteur de cycle proche $R\Psi_Y$ envoie K vers $R\Psi_Y(K) = \overline{i}^* R\overline{j}_*(K_{\overline{\eta}})$. D'après un théorème de Gabber, $R\Psi_Y$ envoie les faisceaux pervers vers les faisceaux pervers.

Fixons une courbe lisse X sur $\mathbb{F}_q$ et un $\mathbb{F}_q$-point x de X. Dans [G], Gaitsgory a construit deux ind-schémas Gr_X, Fl_X sur X tel que les fibres de Gr_X sont isomorphes à Gr, et $Fl_{X-x} \simeq Gr_{X-x} \times G/B, Fl_x \simeq Fl$. Soit $\mathcal{S} \in P_{G(\mathcal{O})}(Gr)$. On peut lui associer un faisceau pervers $\mathcal{S}_{X-x}$ sur Gr_{X-x}. Soit δ_1 le faisceau gratte-ciel associé à $1 \in G/B$. Alors la définition de Z est donnée par $Z(\mathcal{S}) = R\Psi(\mathcal{S}_{X-x} \boxtimes \delta_1)$, où on note $\widetilde{\mathcal{O}_x}$ la hensélisation de l'anneau local $\mathcal{O}_x$ de X en point x, et $R\Psi$ le foncteur de cycle proche associé au schéma $Fl_X \times_X \widetilde{\mathcal{O}_x}$ sur $\widetilde{\mathcal{O}_x}$.

Références

[B] J. Bernstein, *Le "centre" de Bernstein, travaux en cours*, Representations of reductive groups over local fields(1984), pp.1-32

[BBD] Beilinson, Bernstein, Deligne, *Faisceaux pervers*, Astérisque $n^0$100, 1982

[C] D. Clausen, *The Springer correspondence*, une note en ligne

[FK] E. Freitag, R. Kiehl, *Etale cohomology and the Weil conjecture*, Springer 1988

[G] D. Gaitsgory, *Construction of central elements in the affine Hecke algebra via nearby cycles*, Invent.math 2001

[HN] T. Haines, B.C.Ngô, *Nearby cycles of local model of some Shimura varieties*, Compositio 2002

[KW] R. Kiehl, R. Weissauer, *Weil conjectures, perverse sheaves and l-adic Fourier transform*, Springer 2001

[PZ] G. Pappas, X. Zhu, *Local models of Shimura varieties and a conjecture of Kottwitz*, Invent.math 2013

[SGA4] M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale de schémas*

[SGA4.5] P. Deligne, *Cohomologie étale*, Springer 1977

[W] C. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambrige university press, 1994