Introduction au domaine de recherche
École normale supérieure

Algèbres de Hecke et bimodules de Soergel

Laurent Vera

Introduction

L'objet de ce document est d'introduire quelques constructions de théorie des représentations liées à la notion de groupe de Coxeter. Les groupes de Coxeter apparaissent naturellement dans de nombreux domaines des mathématiques. Géométriquement, ce sont des sous-groupes de groupes linéaires réels engendrés par un nombre fini de réflexions. En théorie des représentations, on s'intéresse particulièrement à une certaine classe de groupes de Coxeter : les groupes de Weyl. Leur importance est due au fait qu'ils permettent de classifier de nombreux objets qui n'ont a priori pas de lien entre eux, comme par exemple les représentations d'une algèbre Lie semi-simple complexe et les représentations d'un carquois de type fini.
Le premier objet que l'on construira à partir d'un groupe de Coxeter sera son algèbre de Hecke. Les algèbres de Hecke occupent une place centrale en théorie des représentations depuis la seconde moitié du 19ème siècle. Elles sont notamment le point de départ de toute la théorie de Kazhdan-Lusztig, qui a permis de formuler et de démontrer dans les années 80 le calcul des caractères des modules de Verma d'une algèbre de Lie semi-simple, ce qui constituait à l'époque le principal objet de recherche en théorie des représentations : c'est la conjecture de Kazhdan-Lusztig. Les méthodes utilisées ont donné naissance à la théorie géométrique des représentations, qui a été le principal développement de la théorie des représentations dans les années 80 et 90.
Dans les années 90, Soergel introduit une certaine catégorie de bimodules attachés au groupe de Weyl d'une algèbre de Lie : ce sont les bimodules de Soergel. Cette catégorie catégorifie l'algèbre de Hecke du groupe de Weyl, et Soergel en déduit une nouvelle preuve de la conjecture de Kazhdan-Lusztig, en se basant sur une correspondance entre les bimodules indécomposables et une base canonique de l'algèbre de Hecke.
Cependant, tout ce qui précède utilise des outils géométriques de manière cruciale. Or, l'algèbre de Hecke et la catégorie de Soergel peuvent être définies pour des groupes de Coxeter qui ne sont pas des groupes de Weyl. Il est alors naturel de se demander si, malgré le fait qu'on ne dispose d'aucun outil géométrique, la correspondance entre bimodules indécomposables et base canonique est toujours valable : c'est la conjecture de Soergel. Cette conjecture a été démontrée en 2012 par Elias et Williamson pour tous les groupes de Coxeter. Cette avancée donne donc notamment une preuve purement algébrique des conjectures importantes de Kazdhan-Lusztig.

Table des matières

1 Systèmes de Coxeter

1.1 Systèmes de racines et groupes de Weyl

La théorie des systèmes de racines et de leurs groupes de Weyl est centrale dans de nombreux domaines des mathématiques : classification d'algèbres des Lie semi-simples, des groupes de Lie simples, des représentations irréductibles de carquois de type fini... On s'intéresse ici à cette notion car on peut voir les systèmes de Coxeter (qui sont les objets de base pour la suite de ce document) comme une généralisation des groupes de Weyl.

Définition. *Un* ***système de racines*** *dans un espace euclidien V est la donnée d'une partie Φ de V satisfaisant aux conditions suivantes :*

1. *Φ est finie et $0 \notin \Phi$.*

2. *Φ engendre linéairement V.*

3. *Pour tous $\alpha, \beta \in \Phi$, $\dfrac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \beta, \beta \rangle} \in \mathbb{Z}$.*

4. *Pour tout $\alpha \in \Phi$, la symétrie orthogonale d'hyperplan $\alpha^\perp$, notée s_α, laisse stable Φ.*

5. *Pour tout $\alpha \in \Phi$, $\mathbb{R}\alpha \cap \Phi = \{\pm\alpha\}$.*

*Le **groupe de Weyl** de Φ, noté $W(\Phi)$ ou W s'il n'y a pas d'ambiguïté, est le sous-groupe de* $\mathrm{GL}(V)$ *engendré par les* $(s_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$.

Un des premiers intérêts des systèmes de racines est qu'ils permettent de classifier les algèbres de Lie semi-simples. Plus précisément, on a le :

Théorème 1.1. *Il y a une bijection entre les classes d'isomorphisme de systèmes de racines et les classes d'isomorphisme d'algèbres de Lie semi-simples complexes.*

Rappelons brièvement comment on associe un système de racines à une algèbre de Lie semi-simple complexe $\mathfrak{g}$. On commence par se donner une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, c'est à dire une sous-algèbre de Lie maximale dont les éléments sont semi-simples. On peut alors montrer que $\mathfrak{h}$ est abélienne, et donc l'action des éléments de $\mathfrak{h}$ sur $\mathfrak{g}$ est simultanément diagonalisable. Autrement dit, on a une décomposition :

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{h}^\star} \mathfrak{g}^\alpha$$

avec $\mathfrak{g}^\alpha = \{x \in \mathfrak{g}; \forall H \in \mathfrak{h}, [H,x] = \alpha(H)x\}$. On peut ensuite montrer que $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$, donc en notant $\Phi = \{\alpha \in \mathfrak{h}^\star \setminus \{0\}; \mathfrak{g}^\alpha \neq 0\}$, on a :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathfrak{g}^\alpha.$$

Le résultat important est alors que Φ forme un système de racines, et qu'à isomorphisme près, il ne dépend pas du choix de la sous-algèbre de Cartan. Ainsi, la classification des systèmes de racines permet de classifier les algèbres de Lie semi-simples. Elle permet aussi de classifier d'autres objets importants de la théorie de Lie, comme les groupes de Lie simples et les carquois de type fini.

Une importante propriété des groupes de Weyl est qu'ils peuvent se décrire d'une manière purement combinatoire. C'est l'objet du résultat suivant :

Théorème 1.2. *Soit W le groupe de Weyl d'un système de racines (V,Φ) de rang n. Alors il existe $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \Phi$ tels que, en notant $m_{i,j}$ l'ordre de $s_{\alpha_i}s_{\alpha_j}$, W admet la présentation par les générateurs $s_{\alpha_1}, ..., s_{\alpha_n}$ et les relations :*

$$\forall i,j \leqslant n, \left(s_{\alpha_i}s_{\alpha_j}\right)^{m_{i,j}} = 1.$$

Exemple. Le groupe de Weyl associé à l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ est le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Il est décrit par les générateurs $s_i := (i \quad i+1)$ et les relations :

$$\begin{cases} s_i^2 = 1 & \\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} & \\ s_i s_j = s_j s_i & \text{si } |i-j| > 1 \end{cases}.$$

Ce résultat amène naturellement à généraliser la notion de groupes de Weyl, en prenant pour les $m_{i,j}$ des entiers quelconques : c'est la notion de groupe de Coxeter.

1.2 Groupes de Coxeter

Définition. *Soit W un groupe et $S \subset W$ un ensemble d'éléments de W d'ordre 2. Pour tous $s, t \in S$, on note $m_{s,t}$ l'ordre de st (éventuellement infini). On dit que (W, S) est un* ***système de Coxeter*** *si W admet la présentation par les générateurs S et les relations :*

$$\begin{cases} s^2 = 1 \\ st... = ts... \end{cases}$$

la dernière relation comportant $m_{s,t}$ termes de chaque coté (avec la convention qu'il n'y a pas de relation si $m_{s,t} = \infty$).

Remarque. *La classe des groupes de Coxeter est bien plus vaste que celle des groupes de Weyl : on peut en effet montrer que le groupe de Weyl d'une algèbre de Lie semi-simple est fini, alors qu'il existe des groupes de Coxeter infinis.*

Exemple. Si $|S| = 2$, W est dit diédral. Un groupe diédral est donc paramétré par un entier m (éventuellement infini), à savoir l'ordre de st, où s et t sont les éléments de S. Alors W est un groupe de Weyl si et seulement si $m \in \{2, 3, 4, 6\}$. Géométriquement, le groupe diédral de paramètre m s'interprète comme le groupe des isométries d'un polygone régulier à m sommets.

Définition. *Soit (W, S) un système de Coxeter et $x \in W$. Sa* ***longueur*** *est le plus petit entier r tel qu'il existe $s_1, ..., s_r \in S$ vérifiant $x = s_1...s_r$. On dit alors que $s_1...s_r$ est une* ***expression réduite*** *de x.*
Si $x, y \in W$, on note $x \geqslant y$ lorsque de toute expression réduite de y on peut extraire une expression réduite de x. Il s'agit bien d'une relation d'ordre (non total) sur W, appelé ***ordre de Bruhat****.*

On donne maintenant une propriété fondamentale des systèmes de Coxeter : le lemme de Matsumoto, qui signifie que les expressions réduites d'un élément du groupe de Coxeter se déduisent les unes les autres par application des relations de tresse.

Proposition 1.3 (Lemme de Matsumoto). *Soit (W, S) un système de Coxeter, $\underline{S}$ le monoïde libre engendré par S, M un monoïde, et $f : \underline{S} \to M$ un morphisme de monoïdes. On suppose que pour tous $s, t \in S$, on a $f(st...) = f(ts...)$ où les produits comportent $m_{s,t}$ termes. Alors f est constante sur l'ensemble des expressions réduites d'un élément de W.*

Remarque. *La principale utilité du lemme de Matsumoto est de pouvoir définir des objets indexés par tout élément de W à partir d'objets indexés par S qui vérifient les relations de tresse. Concrètement, soit M un monoïde, et $(m_s)_{s\in S}$ des éléments de M qui vérifient les relations de tresse. Alors si $x \in W$, et que $x = s_1...s_r$ est une expression réduite, on peut définir un élément m_x de W en posant :*

$$m_x = m_{s_1}...m_{s_r}.$$

En effet, cet élément est bien défini d'après le lemme de Matsumoto.

2 Algèbres de Hecke

On introduit dans cette section les algèbres de Hecke des systèmes de Coxeter, qui sont fondamentales en théorie des représentations. On commence par traiter le cas où le système de Coxeter est le groupe de Weyl d'un groupe algébrique réductif : dans ce cas les algèbres de Hecke sont définies de manière géométrique, comme une algèbre de fonctions. On étend ensuite la définition à tous les systèmes de Coxeter en utilisant une description de l'algèbre de Hecke basée uniquement sur la combinatoire du groupe de Weyl.

2.1 Algèbre de Hecke d'un groupe réductif

Soit G un groupe algébrique réductif sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, B un sous-groupe de Borel de G et T un tore maximal. Pour une vision plus concrète, on pourra penser à $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, auquel cas on peut prendre pour B le sous-groupe de G constitué des matrices triangulaires supérieures, et pour T le sous-groupe de B constitué des matrices diagonales.

Définition. *L'**algèbre de Hecke** associée à G, notée $\mathcal{H}$, est l'algèbre des fonctions $B \times B$ invariantes sur G à valeurs dans $\mathbb{C}$:*

$$\mathcal{H} = \mathcal{F}_{B\times B}(G, \mathbb{C}).$$

Soit W le groupe de Weyl associé à la donnée de G,B et T, et $S \subset W$ telle que (W, S) soit un système de Coxeter. Dans le cas de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, il s'agit de $\mathfrak{S}_n$, vu comme le sous-groupe des matrices de permutation.

Proposition 2.1.
- *On a un isomorphisme de groupe :*

$$W \simeq N_G(T)/T$$

- *On a la décomposition de Bruhat :*

$$G = \bigsqcup_{x\in W} BxB$$

Ainsi, les indicatrices T_x de BxB, pour x parcourant W, forment une base de $\mathcal{H}$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On a en fait le résultat suivant :

Théorème 2.2. *L'algèbre $\mathcal{H}$ admet la présentation par les générateurs $(T_s)_{s\in S}$ et les relations :*

$$\begin{cases} T_s^2 = (q-1)T_s + q \\ T_sT_t... = T_tT_s... \end{cases}$$

avec $m_{s,t}$ termes dans chaque membre de la dernière égalité.

En particulier, l'algèbre de Hecke de G peut se décrire en utilisant simplement la combinatoire de son groupe de Weyl. De la même manière que le théorème 1.2. nous a permis de généraliser la notion de groupe de Weyl, ce théorème nous permet donc de généraliser la notion d'algèbre de Hecke à des systèmes de Coxeter quelconques, c'est à dire même quand on n'a pas la géométrie d'un groupe réductif à disposition.

Remarque. *Il existe de nombreuses conventions différentes pour définir les algèbres de Hecke. Dans la suite, on utilisera plutôt les générateurs H_s définis par $H_s = vT_s$, avec $v = q^{-1/2}$. Les relations de tresse sont toujours vérifiées par les H_s, et les relations quadratiques deviennent :*

$$H_s^2 = (v^{-1} - v)H_s + 1.$$

2.2 Cas d'un système de Coxeter

Soit (W, S) un système de Coxeter. On pose $\mathcal{L} = \mathbb{Z}[v^{\pm 1}]$ l'anneau des polynômes de Laurent.

Définition. *L'**algèbre de Hecke** $\mathcal{H}$ de (W, S) est la $\mathcal{L}$-algèbre définie par les générateurs $(H_s)_{s \in S}$ et les relations :*

$$\begin{cases} H_s^2 = (v^{-1} - v)H_s + 1 \\ H_s H_t ... = H_t H_s ... \end{cases}$$

avec $m_{s,t}$ termes dans chaque membre de la dernière relation.

Le fait que les relations de tresse soient vérifiées par les générateurs de $\mathcal{H}$ permet de définir des éléments $(H_x)_{x \in W}$ de $\mathcal{H}$ en appliquant le lemme de Matsumoto. Plus précisément, étant donné une expression réduite $s_1 ... s_r$ d'un élément $x \in W$, le produit $H_{s_1} ... H_{s_r}$ ne dépend que de x par le lemme de Matsumoto, on peut donc définir $H_x = H_{s_1} ... H_{s_r}$.

Proposition 2.3. *Le $\mathcal{L}$-module $\mathcal{H}$ est libre de base $(H_x)_{x \in W}$*

Remarque. *Ce résultat exprime en particulier le fait que l'algèbre de Hecke est une déformation de l'algèbre de groupe classique $\mathbb{Z}W$, que l'on retrouve en évaluant en $v = 1$. Plus précisément, on a un isomorphisme d'anneaux :*

$$\mathbb{Z}W \simeq \mathcal{L}/(v-1) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{H}.$$

Définition. *On note $(.,.)$ l'unique forme $\mathcal{L}$-bilinéaire symétrique non dégénérée sur $\mathcal{H}$ qui fait de $(H_x)_{x \in W}$ une base orthonormale. En formules, on définit donc pour tous $x, y \in W$:*

$$\big(H_x, H_y\big) := \delta_{x,y}.$$

Cette forme bilinéaire interviendra plus loin pour décrire les espaces de morphismes entre bimodules de Soergel.

2.3 Base et polynômes de Kazhdan-Lusztig

Définition. *Il existe une unique involution $h \mapsto \overline{h}$ de l'anneau $\mathcal{H}$ satisfaisant $\overline{v} = v^{-1}$ et pour tout $x \in W$, $\overline{H}_x = H_{x^{-1}}^{-1}$. Les éléments $h \in \mathcal{H}$ tels que $\overline{h} = h$ sont dits **auto-duaux**.*

Cette "conjugaison" dans $\mathcal{H}$ aura des liens profonds avec la dualité des bimodules de Soergel. Il sera alors crucial de disposer d'une base auto-duale de $\mathcal{H}$. C'est l'objet du théorème suivant, qui est à l'origine de toute la théorie que Kazhdan et Lusztig ont introduit en 1979 dans [KL79].

Théorème 2.4. *Il existe une unique base du $\mathcal{L}$-module $\mathcal{H}$ notée $(\underline{H}_x)$ et appelée* ***base de Kazhdan-Lusztig****, satisfaisant aux propriétés suivantes pour tout $x \in W$:*

1. $\overline{\underline{H}_x} = \underline{H}_x$.
2. $\underline{H}_x \in H_x + \bigoplus_{y<x} v\mathbb{Z}[v]H_y$.

La démonstration se fait de manière constructive par induction. Donnons-en les idées principales :

- Pour $s \in S$, on a $\overline{H_s} = H_s^{-1} = H_s + v - v^{-1}$. Donc en posant $\underline{H}_s = H_s + v$, on a bien $\overline{\underline{H}_s} = \underline{H}_s$.
- Supposons maintenant qu'on a construit les $\underline{H}_y$, pour $y \leqslant x$, et qu'on se donne $s \in S$ tel que $xs > x$. Puisque $\underline{H}_x\underline{H}_s$ est auto-dual, il est naturel de s'intéresser à ce produit pour définir $\underline{H}_{xs}$. Par calcul explicite, on trouve :

  $$\underline{H}_x\underline{H}_s \in H_{xs} + \sum_{y<xs} v\mathbb{Z}[v]H_y + \sum_{y<x} \mathbb{Z}H_y$$

  Ainsi, on trouve des entiers (n_y) tels que la définition :

  $$\underline{H}_{xs} = \underline{H}_x\underline{H}_s - \sum_{y<x} n_y\underline{H}_y$$

  convient.

Définition. *Les* ***polynômes de Kazhdan-Lusztig*** $(h_{y,x})$ *sont les éléments de $v\mathbb{Z}[v]$ définis par :*

$$\underline{H}_x = H_x + \sum_{y<x} h_{y,x}H_y.$$

Ces polynômes interviennent de manière cruciale dans plusieurs points de théorie des représentations comme la conjecture de Kazhdan-Lusztig sur les caractères des modules de Verma des algèbres de Lie semi-simples complexes.

3 Bimodules de Soergel

3.1 Définition et premières propriétés

Soit (W, S) un système de Coxeter et $\mathfrak{h}$ une représentation de W sur un corps k. Commençons par introduire quelques notations préliminaires.

Notations.

- On note R la k-algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{h}$, munie d'une graduation d'algèbre telle que les éléments de $\mathfrak{h}^\star$ soient de degré 2 (on a donc doublé la graduation usuelle).

- L'action de W sur $\mathfrak{h}^\star$ se prolonge naturellement en une action de W sur R par isomorphismes d'algèbres. Pour tout $x \in W$, on note alors R^x la sous-k-algèbre de R formée des éléments invariants par l'action de x.

- On note R-Bimod la catégorie des R-bimodules gradués qui sont de type fini comme modules à droite et à gauche. Cette catégorie est stable par sommes directes et produits tensoriels.

- Si $M \in R$-Bimod, on note $M = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} M^i$ sa décomposition en espaces homogènes. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on notera $M(j)$ l'objet de R-Bimod décalé j fois à partir de M, c'est à dire qu'on a pour tout i :

$$M(j)^i = M^{i+j}.$$

  La catégorie R-Bimod est donc stable par décalages.

- Si $p = \sum a_i v^i \in \mathcal{L}$ est à coefficients positifs, on note :

$$M^{\oplus p} = \bigoplus_i M(i)^{a_i}.$$

- Si $M \in R$-Bimod, son rang gradué est défini par :

$$\underline{\mathrm{rk}}(M) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{rk}(M^i) v^{-i}.$$

  C'est un élément de $\mathcal{L}$ à coefficients positifs.

On peut maintenant définir la catégorie des bimodules de Soergel relative à W et $\mathfrak{h}$.

Définition. • *Pour tout $s \in S$, soit B_s l'objet de* R-Bimod *défini par :*

$$B_s := R \otimes_{R^s} R(1).$$

- *Soit $\underline{x} = s_1 ... s_r$ un mot de S. On lui associe un objet $BS(\underline{x})$ de* R-Bimod *en définissant :*

$$BS(\underline{x}) := B_{s_1} \otimes_R ... \otimes_R B_{s_r}.$$

  On appelle ces bimodules les ***bimodules de Bott-Samelson****.*

- *La catégorie $\mathcal{B}$ des* ***bimodules de Soergel*** *est la plus petite sous-catégorie pleine de R-*Bimod *stable par somme directe, produit tensoriel et décalages, et contenant les facteurs indécomposables des bimodules de Bott-Samelson.*

Pour que cette catégorie soit intéressante (c'est à dire pour qu'on ait le théorème d'isomorphisme de Soergel que l'on verra plus bas), il faut que la représentation $\mathfrak{h}$ vérifie certaines conditions de fidélité (si par exemple $\mathfrak{h}$ est triviale, $\mathcal{B}$ est réduite à R).

Définition. *On dit que $\mathfrak{h}$ est* ***réflexion fidèle*** *si elle est fidèle et les éléments de S sont les seuls éléments de W dont l'ensemble des points fixes dans $\mathfrak{h}$ est un hyperplan.*

Exemple. Lorsque $k = \mathbb{R}$, on peut construire une représentation réflexion fidèle en généralisant la situation d'un groupe de Weyl agissant sur la sous-algèbre de Cartan de son algèbre de Lie semi-simple. Concrètement, on se donne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathfrak{h}$, une partie libre $(\alpha_s^\vee)_{s\in S}$ de $\mathfrak{h}$ et une partie libre $(\alpha_s)_{s\in S}$ de $\mathfrak{h}^\star$ vérifiant :

$$\alpha_s\left(\alpha_t^\vee\right) = -2\cos\left(\frac{\pi}{m_{s,t}}\right).$$

et on suppose que $\mathfrak{h}$ est de dimension minimale pour cette propriété. Alors on peut montrer que ceci définit une représentation sur $\mathfrak{h}$ et qu'elle est réflexion fidèle.

3.2 Théorème d'isomorphisme de Soergel

On fixe dans cette section une représentation $\mathfrak{h}$ de W sur un corps infini k et la catégorie des bimodules de Soergel $\mathcal{B}$ associée à cette donnée.

Définition. *Le* ***groupe de Grothendieck scindé*** *de $\mathcal{B}$, noté $[\mathcal{B}]$, est le groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphisme d'objets de $\mathcal{B}$ et les relations :*

$$[A] = [B] + [C] \quad \text{lorsque} \quad A = B \oplus C.$$

Cette définition appelle quelques remarques :

- La catégorie $\mathcal{B}$ étant stable par produits tensoriels et décalages, $[\mathcal{B}]$ hérite naturellement d'une structure de $\mathcal{L}$-algèbre. Plus précisément, si $A, B \in \mathcal{B}$ et $p \in \mathcal{L}$ à coefficients positifs, on a les formules :

$$[A][B] = [A \otimes_R B]$$

$$p[A] = [A^{\oplus p}]$$

- On peut montrer que la catégorie R-Bimod vérifie le théorème de Krull-Schmidt, c'est à dire que chacun de ses objets s'écrit de manière unique comme somme directe d'objets indécomposables. Il en résulte que les classes d'isomorphisme de bimodules de Soergel indécomposables forment une base de $[\mathcal{B}]$ (en tant que groupe abélien).

- La raison pour laquelle on travaille avec le groupe de Grothendieck scindé plutôt qu'avec le groupe de Grothendieck usuel est que la catégorie $\mathcal{B}$ n'est pas stable par noyaux de morphismes. En d'autres termes, on peut avoir des suites exactes courtes d'objets de R-Bimod de la forme :
$$0 \to B \to A \to C \to 0$$
avec A, C des bimodules de Soergel, sans que B soit un bimodule de Soergel.

On peut maintenant énoncer le théorème d'isomorphisme de Soergel :

Théorème 3.1. *Supposons que $\mathfrak{h}$ soit réflexion fidèle. Alors :*

1. *Il existe un unique isomorphisme de $\mathcal{L}$-algèbres $\varepsilon : \mathcal{H} \to [\mathcal{B}]$ tel que :*
$$\varepsilon(\underline{H}_s) = B_s.$$

2. *L'inverse de ε est appelé le **caractère**, et est donné par :*
$$\mathrm{ch} : \begin{cases} [\mathcal{B}] & \to & \mathcal{H} \\ B & \mapsto & \sum_{x \in W} \underline{\mathrm{rk}}\left(\mathrm{Hom}(\Delta_x, B)\right) H_x \end{cases}.$$

Le théorème d'isomorphisme permet notamment de calculer facilement les rangs gradués d'espaces de morphismes entre bimodules de Soergel.

Proposition 3.2 (Formule du Hom de Soergel)**.** *Soient B, B' des bimodules de Soergel. Alors* $\mathrm{Hom}(B, B')$ *est un R-module libre à droite de type fini et son rang gradué est donné par :*
$$\underline{\mathrm{rk}}\left(\mathrm{Hom}(B, B')\right) = \overline{\left(\mathrm{ch}(B), \overline{\mathrm{ch}(B')}\right)}$$

Le théorème d'isomorphisme de Soergel permet de décrire le groupe de Grothendieck de $\mathcal{B}$. On a cependant une bonne description des objets indécomposables (et donc de tous les objets) de $\mathcal{B}$.

Proposition 3.3.
- *Soit $x \in W$ et $\underline{x}$ un mot de S correspondant à une expression réduite de x. Il existe un bimodule de Soergel indécomposable B_x qui ne dépend que de x à isomorphisme près tel que B_x est un facteur direct de $BS(\underline{x})$, mais n'est facteur direct d'aucun $BS(\underline{y})$ pour $\underline{y}$ une sous-expression de $\underline{x}$.*

- *Les $(B_x(i))_{x \in W, i \in \mathbb{Z}}$ sont un système complet de représentants des classes d'isomorphisme de bimodules de Soergel indécomposables.*

Dans toute la théorie des bimodules de Soergel, une certaine notion de dualité intervient de façon cruciale.

Définition. *Soit $M \in R\text{-Bimod}$, son **dual**, noté $\mathbb{D}M$ est l'ensemble des morphismes de R-modules à droite de tous degrés de M vers R. C'est également un objet de $R\text{-Bimod}$, et son rang gradué vérifie :*

$$\underline{\mathrm{rk}}\,(\mathbb{D}M) = \overline{\underline{\mathrm{rk}}(M)}.$$

*Le bimodule M est dit **auto-dual** s'il est isomorphe à son dual.*

Proposition 3.4.
- *Si M est un bimodule de Soergel, alors $\mathbb{D}M$ aussi et on a :*

$$\mathrm{ch}\,(\mathbb{D}M) = \overline{\mathrm{ch}(M)}.$$

  En particulier, les caractères des bimodules de Soergel auto-duaux sont des éléments auto-duaux de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}$.

- *Les bimodules B_x sont auto-duaux.*

3.3 Conjecture de Soergel

On suppose à partir de maintenant que $\mathfrak{h}$ est une représentation réflexion fidèle de W sur un corps infini k, de sorte que tous les résultats de la section précédente s'appliquent.

Conjecture (Soergel). *Pour tout $x \in W$, $\mathrm{ch}(B_x) = \underline{H}_x$.*

Commençons par donner quelques exemples en petite longueur.

- Si $s \in S$, on a $\mathrm{ch}(B_s) = \underline{H}_s$, par définition du morphisme ch.

- Si $s, t \in S$ sont des réflexions distinctes, on a $B_{st} = B_s B_t$. Donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(B_{st}) &= \mathrm{ch}(B_s)\mathrm{ch}(B_t) \\ &= \underline{H}_s \underline{H}_t \\ &= \underline{H}_{st}. \end{aligned}$$

Ainsi, la conjecture de Soergel est vraie pour les éléments de longueur 2.

Remarque. *On sait déjà que les* $\mathrm{ch}(B_x)$ *sont des éléments auto-duaux de* $\mathcal{H}$*, puisque les* B_x *sont des modules auto-duaux, et qu'il s'écrivent de la forme :*

$$\mathrm{ch}(B_x) \in H_x + \sum_{y<x} \mathcal{L} H_y.$$

La difficulté de la conjecture de Soergel réside dans le fait qu'il n'est pas évident a priori que les coefficients apparaissant dans la somme soient dans $v\mathbb{Z}[v]$.

Étant donné la définition des objets, il est naturel de chercher à démontrer la conjecture de Soergel par induction. Dans la fin de cette section, on va mettre en évidence les arguments cruciaux qui font fonctionner l'induction.

Soient $x \in W$, et $s \in S$ tels que $xs > x$. Supposons que la conjecture de Soergel soit vraie pour tous les éléments $y \geqslant x$. D'une part, par construction de la base de Kazhdan-Lusztig, on a :

$$\underline{H}_x \underline{H}_s = \underline{H}_{xs} + \sum_{y<x} n_y \underline{H}_y$$

avec les n_y entiers. Maintenant en appliquant la formule du Hom de Soergel, on a pour tout $y < x$:

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{rk}}\left(\mathrm{Hom}^\bullet(B_x B_s, B_y)\right) &= \overline{\left(\mathrm{ch}(B_x B_s), \overline{\mathrm{ch}(B_y)}\right)} \\ &= \overline{\left(\underline{H}_{xs} + \sum_{z<x} n_y \underline{H}_z, \underline{H}_y\right)} \\ &\in n_y + v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}] \end{aligned}$$

donc en particulier, $n_y = \dim\left(\mathrm{Hom}(B_x B_s, B_y)\right)$.
D'autre part, par caractérisation des bimodules de Soergel indécomposables, on a :

$$B_x B_x = B_{xs} \oplus \left(\bigoplus_{y<x} m_y B_y\right)$$

avec les m_y dans $\mathcal{L}$ a priori. On peut cependant montrer que les m_y sont entiers. Au final, en comparant les expressions de $\underline{H}_{xs}$ et $B_x B_s$, on obtient la proposition suivante :

Proposition 3.5. *Soient $x \in W$, $s \in S$ tels que $xs > x$. Supposons la conjecture de Soergel vraie pour tous $y \leqslant x$. Alors la conjecture de Soergel est vraie pour xs si et seulement si la multiplicité de B_y dans $B_x B_s$ est égale à* $\dim\left(\mathrm{Hom}(B_x B_s, B_y)\right)$.

Pour terminer, expliquons brièvement comment Elias et Williamson ont démontré la conjecture de Soergel dans le cas réel en 2012. On peut munir $\mathrm{Hom}(B_x B_s, B_y)$ d'une forme bilinéaire, appelée forme d'intersection locale, dont la non-dégénérescence permet d'obtenir le résultat de multiplicité de la proposition précédente, et donc de conclure l'induction. Sur un corps quelconque, on ne sait pas démontrer cette non-dégénérescence. En revanche, sur $\mathbb{R}$, on peut montrer qu'elles sont définies (positives ou négatives), par un argument d'induction à nouveau. Cet argument, seulement valable dans le champ réel, permet donc de démontrer la conjecture de Soergel.

Références

[EW12] B. Elias and G. Williamson. The Hodge theory of Soergel bimodules. *ArXiv e-prints*, December 2012.

[EW14] B. Elias and G. Williamson. Diagrammatics for Coxeter groups and their braid groups. *ArXiv e-prints*, May 2014.

[Iwa64] N. Iwahori. On the structure of a Hecke ring of a Chevalley group over a finite field. *J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I*, 10 :215–236, 1964.

[KL79] David Kazhdan and George Lusztig. Representations of Coxeter groups and Hecke algebras. *Invent. Math.*, 53(2) :165–184, 1979.

[Lib08a] Nicolas Libedinsky. Équivalences entre conjectures de Soergel. *J. Algebra*, 320(7) :2695–2705, 2008.

[Lib08b] Nicolas Libedinsky. Sur la catégorie des bimodules de Soergel. *J. Algebra*, 320(7) :2675–2694, 2008.

[Rou98] Raphaël Rouquier. Weyl groups, affine Weyl groups and reflection groups. In *Representations of reductive groups*, pages 21–39. Cambridge : Cambridge University Press, 1998.

[Rou06] Raphaël Rouquier. Categorification of $\mathfrak{sl}_2$ and braid groups. 406 :137–167, 2006.

[Soe92] Wolfgang Soergel. The combinatorics of Harish-Chandra bimodules. *J. Reine Angew. Math.*, 429 :49–74, 1992.

[Soe07] Wolfgang Soergel. Kazhdan-Lusztig-Polynome und unzerlegbare Bimoduln über Polynomringen. *J. Inst. Math. Jussieu*, 6(3) :501–525, 2007.

[Wil11] Geordie Williamson. Singular Soergel bimodules. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (20) :4555–4632, 2011.