Introduction au domaine de recherche

Autour de la deuxième plus grande valeur propre d'un graphe d-régulier aléatoire

---

Hongzhou LIN
sous la direction de Bálint Virág

Table des matières

1 Graphes d-réguliers aléatoires **1**
1.1 Un peu d'histoire . . . 1
1.2 Matrice adjacente, valeurs propres et expansion . . . 1
1.3 La borne d'Alon-Boppana . . . 3

2 La méthode de la trace **4**

3 Distribution des valeurs propres **6**

4 Vecteurs propres du graphes réguliers **8**

References **9**

Octobre 2013

1 Graphes d-réguliers aléatoires

1.1 Un peu d'histoire

La théorie des graphes aléatoires est développée à partir des années 50s par Erdös et Rényi, la méthode probabiliste étant utilisée pour répondre aux questions d'existence de certains objets combinatoires. Erdös et Rényi ont introduit le modèle de base pour les graphes aléatoires $G(n,p)$, dans lequel chaque arête apparaît indépendamment avec probabilité p. Ici, nous nous intéressons aux graphes réguliers aléatoires. Contrairement au modèle de $G(n,p)$, les arêtes ne sont plus indépendantes et on a mis environ deux décennies avant de découvrir les modèles pratiques. Un sujet important sur ce domaine concerne la deuxième plus grande valeur propre de la matrice adjacente d'un graphe. Il se trouve que cette valeur est liée à la connectivité du graphe, qui a du sens dans divers domaines.

1.2 Matrice adjacente, valeurs propres et expansion

Nous commençons par définir les graphes d-réguliers aléatoires et leurs valeurs propres :

Définition 1.1. Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté d'ordre N (i.e. ayant N sommets),

(a) G est dit d-régulier si chaque sommet est incident à exactement d arêtes.

(b) Notons $G_{N,d}$ l'ensemble des graphes d-réguliers simples d'ordre N (sans boucle ni arêtes multiples). Alors un graphe régulier aléatoire $X_{N,d}$ est un graphe choisi avec probabilité uniforme dans $G_{N,d}$.

Définition 1.2. Soit G un graphe simple de sommets $\{1, 2, \ldots, N\}$, on note A_G la matrice adjacente de G :

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \sim j \text{ (i.e. } i \text{ adjacent à } j); \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On remarque que A_G est une matrice symétrique. Elle admet donc N valeurs propres réelles, que l'on peut noter $\lambda_1(G) \geqslant \lambda_2(G) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_N(G)$. On dit que les $\lambda_i(G)$ sont les valeurs propres de G. De plus, un vecteur propre peut être vu comme une fonction $f : V \to \mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\sum_{j \sim i} f(j) = \lambda f(i), \quad \text{pour tout } i \in [1, N] \tag{1}$$

Dans la suite, on s'intéresse aux propriétés géométriques et combinatoires liées aux valeurs propres de $X_{N,d}$ lorsque $N \to \infty$. Dans un premier temps, on présente quelques propriétés élémentaires :

Proposition 1.3. Soit G un graphe d-régulier,

(a) d est une valeur propre de G et admet $(1, \ldots, 1)$ comme vecteur propre.

(b) d est la plus grande valeur propre en valeur absolue.

(c) $\lambda_2 < d$ si et seulement si G est connexe. Plus généralement, d est de multiplicité k ssi G a k composantes connexes.

Preuve rapide. Par définition du graphe d-régulier, on prouve immédiatemment que $(1, \ldots, 1)$ est le vecteur propre de valeur propre d. De plus, un vecteur propre de valeur propre d est constant sur chaque composante connexe. Du coup la multiplicité de d coïncide avec le nombre de composantes connexes. On utilise alors le théorème de Perron-Frobenius pour déduire que d est la plus grande valeur propre en valeur absolue. $\square$

On peut montrer que $X_{N,d}$ est asymptotiquement presque sûrement (on notera a.p.s.) connexe, c'est-à-dire $\mathbf{P}(X_{N,d}$ connexe$) \to 1$ quand $N \to \infty$. Ceci nous conduit à étudier la deuxième plus grande valeur propre λ_2 qui est a.p.s $< d$. En effet, λ_2 traduit en quelque sorte la connectivité du graphe, plus λ_2 est grande, plus le graphe est facile à déconnecter en supprimant des arêtes, en particulier si $\lambda_2 = d$, le graphe est non connexe. Pour être plus clair, on introduit la notion du ratio d'expansion, qui est un paramètre isométrique important du graphe :

Définition 1.4. Le ratio d'expansion d'un graphe G est défini par :

$$h(G) = \min_{\{S \subseteq V(G) \,|\, |S| \leqslant N/2\}} \frac{|E(S, \overline{S})|}{|S|} \tag{2}$$

où $\overline{S} = V \backslash S$ et $E(S, \overline{S})$ est l'ensemble des arêtes entre S et $\overline{S}$.

On peut voir le ratio d'expansion comme un outil pour comparer les tailles de S et ∂S : il nous dit que la taille de ∂S est au moins proportionnelle à la taille de S sauf si G n'est pas connexe, seul cas où $h(G) = 0$. Le théorème suivant relie λ_2 à $h(G)$:

Théoreme 1.5 (Alon-Milman[2], Alon[1])**.** *Soit G un graphe d-régulier, alors*

$$\frac{d - \lambda_2}{2} \leqslant h(G) \leqslant \sqrt{2d(d - \lambda_2)} \tag{3}$$

Voici deux exemples élémentaires :

(a) Pour un graphe complet K_n, on a :

$$\lambda_1 = n - 1, \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = -1 \quad \text{et} \quad h_n = \frac{n}{2}$$

(b) Pour un cycle C_n, on a

$$\lambda_k = 2\cos\left((k-1)\frac{2\pi}{n}\right), k = 1, \ldots, n \quad \text{et} \quad h_n = \frac{4}{n} \tag{4}$$

En fait, pour les C_n, il suffit d'enlever deux arêtes pour le déconnecter, ce qui donne un petit h ; par contre il est plus difficile de déconnecter K_n, ce qui est reflété par la grande ratio d'expansion. Donc pour avoir un grand $h(G)$, il est nécessaire que λ_2 soit petit. De façon générale, il est beaucoup plus facile de déterminer λ_2 qu'un ratio d'expansion d'un point de vue computationnel. De plus, la recherche des graphes bien connectés a beaucoup d'applications dans divers domaines comme la théorie des nombres, la physique quantique, l'étude des réseaux. Il se trouve qu'un graphe régulier de grande taille a un petit λ_2 avec grande probabilité. Du coup une manière de construire ce genre de graphes est de générer des graphes réguliers aléatoires. C'est pour ces raisons qu'on s'intéresse au λ_2 d'un graphe régulier aléatoire.

1.3 La borne d'Alon-Boppana

Dans cette partie, on illustre quelques réponses à la question de maximisation du ratio d'expansion, ce qui revient à minimiser λ_2. La borne inférieure de λ_2 pour des graphes réguliers est proposée par N. Alon et R. Boppana :

Théoreme 1.6 (Alon-Boppana). *Soit $\{G_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de graphes d-réguliers telle que $\lim_{m\to\infty}|G_m| = \infty$, alors*

$$\liminf_{m\to\infty} \lambda_2(G_m) \geqslant 2\sqrt{d-1}$$

Nous allons présenter une preuve en utilisant la méthode de la trace plus tard. Par ce théorème, $2\sqrt{d-1}$ est en quelque sorte la plus petite valeur de λ_2 que l'on puisse espérer quand la taille du graphe est grande. On définit ainsi les graphes qui sont optimaux dans ce sens :

Définition 1.7. Un graphe d-régulier G est dit de Ramanujan si

$$\lambda(G) \leqslant 2\sqrt{d-1} \quad \text{où } \lambda(G) = \max_{i\geqslant 2}|\lambda_i(G)|$$

On peut se demander déjà l'existence de graphes de Ramanujan arbitrairement grands. Une construction explicite a été découverte par Lubotzky-Phillips-Sarnak [8] et Margulis [9] :

Théoreme 1.8. *Soit p un numbre premier et $k \in \mathbb{N}$, il existe une infinité de graphes de Ramanujan d-réguliers avec $d = p^k + 1$*

Conjecture 1.9. *Pour tous les $d \geqslant 3$, il existe des graphes de Ramanujan de taille arbitrairement grande.*

Une version probabiliste de cette conjecture est proposée par Noga Alon dans [1] :

Conjecture 1.10. *Pour tout $d \geqslant 3$ et $\epsilon > 0$, "presque" tous les graphes d-réguliers vérifient que $\lambda_2 \leqslant 2\sqrt{d-1} + \epsilon$.*

Mais il n'a pas précisé le sens de "presque". On peut comprendre par : avec une grande probabilité le graphe régulier aléatoire ayant un λ_2 petit. En 2003, Friedman a donné une preuve pour les d pairs et précisé le sens de "presque" :

Théoreme 1.11 (Friedman [7]). *Soit $\epsilon > 0$ et d un entier pair. Alors il existe une constante c telle que avec probabilité au moins $1 - c/N^\tau$, pour tout $i > 1$,*

$$|\lambda_i(X_{N,d})| \leqslant 2\sqrt{d-1} + \epsilon$$

où $\tau = \lceil(\sqrt{d-1}+1)/2\rceil - 1$ et $X_{N,d}$ est un graphe d-régulier aléatoire uniforme.

Frideman a aussi proposé une conjecture plus forte qui dit que la borne doit être $2\sqrt{d-1} - \epsilon(N)$, où $\epsilon(N) \leqslant O(\log^{-2} N)$: cette question reste ouverte même pour $\epsilon = 0$. Dans la suite, on va présenter une méthode très utilisée dans ce domaine, la méthode de la trace, qui relie la trace d'une matrice adjacente à une propriété géométrique du graphe.

2 La méthode de la trace

La méthode de la trace consiste à évaluer la trace d'une puissance bien déterminée de la matrice adjacente. Il se trouve que cette valeur est liée au nombre de marches fermées dans le graphe. On présente une preuve du Théorème 1.6 par cette méthode. Dans un premier temps, on définit la notion d'une marche sur le graphe :

Définition 2.1. Soient u, v deux sommets de G. Une marche de longueur $k \geqslant 1$ allant de u vers v est une suite de sommets de G $w_0, w_1, \ldots, w_k$ tels que $w_0 = u$, $w_k = v$ et $w_{i-1} \sim w_i$ for $1 \leqslant i \leqslant k$. Si en plus $u = v$, on dit qu'une telle marche est une marche fermée.

Intuitivement, on part d'un point u, à chaque pas on peut aller d'un sommet à un sommet adjacent et on s'arrête au sommet v. La proposition suivante relie le nombre de marches aux coefficients de la matrice adjacente :

Lemme 2.2. *Soit A la matrice adjacente de G. Si l'on note $W_{i,j}(k)$ le nombre de marches de longueur k partant de i et terminant à j, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$W_{i,j}(k) = (A^k)_{ij}$$

La preuve peut se faire facilement par récurrence. En particulier, la trace de A^k est égal au nombre de marches fermées de longueur k :

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^k = Tr(A^k) = \sum_{i=1}^{N} W_{i,i}(k) \tag{5}$$

On commence par donner une méthode naive. On utilise cette relation pour $k = 2$. Dans ce cas les marches fermées sont des aller-retours, et donc $W_{i,i}(k) = d$. Par conséquent,

$$Nd = Tr(A^2) = \sum_i \lambda_i^2 \leqslant d^2 + (N-1)\lambda^2 \tag{6}$$

où $\lambda = \max_{i \geqslant 2} |\lambda_i|$. On obtient $\lambda^2 \geqslant d \cdot \frac{N-d}{N-1}$, d'où $\lambda \geqslant \sqrt{d}(1 - o_N(1))$. Pour aller plus loin, on va utiliser le théorème du minimax :

Théoreme 2.3 (Théorème du minimax)**.** *Soit A une matrice hermitienne de taille $n \times n$ de valeurs propres $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_n$ et notons v_k les vecteurs propres respectifs. Le quotient de Rayleigh est défini pour tout vecteur w par :*

$$R_A(w) = \frac{< Aw, w >}{\|w\|^2}$$

où $< \cdot, \cdot >$ est le produit hermitien dans $\mathbb{C}^n$. Alors pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\begin{aligned} \mu_k &= \min\{\max\{R_A(w) \,|w \in U \text{ and } w \neq 0\} \,|\, dim(U) = n - k + 1\} \\ &= \max_{w \perp Vect(v_1, \ldots v_{k-1})} R_A(w) \end{aligned}$$

Dans notre cas, nous allons utiliser que

$$\lambda_2(G) = \max_{h \perp \mathbf{1}} \frac{< A_G h, h >}{\|h\|^2}$$

où $\mathbf{1}$ est le vecteur constant $(1, \ldots, 1)$. En conséquence, on va construire des fonctions qui ont une somme nulle et ayant un grand quotient de Rayleigh. On va montrer dans un premier temps un résultat légèrement moins fort que le Théorème 1.6 :

Théoreme 2.4. *Soit $G \in G_{N,d}$, soit Δ son diamètre, et posons $\lambda = \max_{i \geqslant 2} |\lambda_i|$. Alors*

$$\lambda \geqslant 2\sqrt{d-1} \cdot (1 - O(\log \Delta / \Delta)) \tag{7}$$

Démonstration. On considère deux sommets s, t de G de distance Δ. On note f la fonction $\delta_s - \delta_t$, qui vaut 1 en s, -1 en t et 0 ailleurs. Alors f est orthogonale au vecteur constant $\mathbf{1}$. On considère la matrice A^{2k}. Il est évident que $\lambda(A^{2k}) = (\lambda(A))^{2k}$, ce qui, par le théorème du minimax, entraîne que :

$$\lambda^{2k} \geqslant \frac{fA^{2k}f^T}{\|f\|^2} = \frac{(A^{2k})_{ss} + (A^{2k})_{tt} - 2(A^{2k})_{st}}{2} \tag{8}$$

On prend $k = \lfloor \frac{\Delta - 1}{2} \rfloor$, de sorte que $(A^{2k})_{st} = 0$ puisque s et t sont à distance Δ et $2k < \Delta$. La minoration de $(A^{2k})_{ss}$ est donnée par le lemme important suivant :

Lemme 2.5. *Soit T_d l'arbre d-régulier infini, on note t_{2k} le nombre de marches fermées sur T_d. (Cela ne dépend pas du point de départ). Alors pour tout graphe d-régulier G et pour tout sommet v, le nombre de marches fermées partant de v vérifie $W_{v,v}(2k) \geqslant t_{2k}$*

Pour montrer ce lemme, il suffit de voir que T_d est le revêtement universel de tous les graphes d-réguliers et que donc toutes les marches sur T_d admet une unique projection sur G. Ici, on a juste besoin d'une minoration de t_{2k}. À une marche $w = w_0, \ldots, w_{2k}$, on associe la suite de distance $l(w) = (l_0, \ldots, l_{2k})$ où l_i désigne la distance entre w_i et w_0. La suite l est ainsi une suite d'entiers positifs avec $l_0 = l_{2k} = 0$ et $|l_i - l_{i+1}| = 1$, par un résultat connu, le nombre de telles suites est égal au nombre de Catalan $C_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$. Pour chaque l fixé, il y a au moins $(d-1)^k$ marches qui lui sont associées. Donc $t_{2k} \geqslant \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}(d-1)^k$. En utilisant ce lemme avec (8), on obtient finalement :

$$\lambda^{2k}(G) \geqslant t_{2k} \geqslant C_k(d-1)^k = O\left((2\sqrt{d-1})^{2k} \cdot k^{-\frac{3}{2}}\right) \tag{9}$$

En prenant la racine $2k-$ième de chaque côté, on obtient (7). $\square$

Ce théorème nous donne la borne d'Alon-Boppana pour λ au lieu de λ_2. On se contentera de cette version moins forte. Par ce théorème, λ_2 dans un grand graphe ne soit pas plus petit que $2\sqrt{d-1} - \epsilon$, on peut ainsi se poser la question combien on peut en avoir. Le théorème suivant proposé par J.P.Serre donne une vision quantitative du spectre :

Théoreme 2.6 (Serre)**.** *Pour tout $d \geqslant 3$ et $\epsilon > 0$, il existe une constante $c = c(\epsilon, d) > 0$ telle que tout graphe d-régulier $G \in G_{N,d}$ a au moins $c \cdot N$ valeurs propres plus grandes que $2\sqrt{d-1} - \epsilon$.*

La preuve suivante utilisant la méthode de la trace est donnée par Cioabă [5]

Démonstration. On note n_ϵ le nombre de valeurs propres plus grandes que $2\sqrt{d-1} - \epsilon$. On considère la matrice $(A + dI)^k$ où k sera déterminé plus tard. Alors on a

$$\begin{aligned} Tr(A + dI^k) &= \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i + d)^k && (10) \\ &\leqslant (2d)^k \cdot n_\epsilon + (d + 2\sqrt{d-1} - \epsilon)^k \cdot N && (11) \end{aligned}$$

D'autre part,

$$Tr(A+dI)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} d^{k-j} \cdot Tr(A^j) \geqslant \sum_{l=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \binom{k}{2l} d^{k-2l} \cdot Nt_{2l}$$

En utilisant le fait que $t_{2l} = O\left((2\sqrt{d-1})^{2l} \cdot 2l^{-\frac{3}{2}}\right)$, on obtient que

$$Tr(A+dI)^k \geqslant \frac{c'}{2k^{3/2}} N(d+2\sqrt{d-1})^k \tag{12}$$

Et on prend $k = O(\frac{d}{\epsilon}\log(\frac{d}{\epsilon}))$ pour conclure. □

Question ouverte 2.7. *Quelle est la plus grande $c(\epsilon, d)$ pour laquelle le Théorème 2.6 soit vrai ?*

D'après tous ces théorèmes, on voit que $2\sqrt{d-1}$ est la borne inférieure optimale pour λ_2. Pour répondre à conjecture 1.9, qui dit a.p.s $\lambda_2 \leqslant 2\sqrt{d-1}+\epsilon$, Frideman a montré que la méthode de la trace ne suffit pas : il faut éliminer certaines sous-structures qui engendrent de grandes valeurs propres et utiliser une "trace sélective". Pour aller plus loin, vous pouvez voir Frideman [7], on ne va pas rentrer dans les détails ici. Jusqu'ici, nous nous sommes concentrés sur les valeurs extrêmes de λ_2. Dans la prochaine partie, nous allons présenter la limite de la distribution du spectre.

3 Distribution des valeurs propres

Dans la théorie des matrices aléatoires, Wigner prouve que les valeurs propres d'une matrice aléatoire symétrique avec des entrées indépendantes ont une répartition du spectre proche d'un demi-cercle, appelée loi du demi-cercle de Wigner. Dans le cadre des graphes aléatoires, un résultat similaire est prouvé par McKay qui dit que la répartition empirique des valeurs propres a une limite.

Définition 3.1. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ les valeurs propres de G. La fonction de répartition empirique est la fonction définit par :

$$F(G,x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}(\lambda_i \leqslant x) = \frac{1}{N}|\{i : \lambda_i \leqslant x\}|$$

Théoreme 3.2 (McKay [10])**.** *Soient $(G_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de graphes d-réguliers vérifiant :*

(a) $V(G_m) \to \infty$ quand $m \to \infty$.

(b) Pour tout $k \geqslant 3$, $C_k(G_m)/V(G_m) \to 0$ quand $m \to \infty$, où $C_k(G_m)$ désigne le nombre de k-cycles dans G_m.

Alors pour tout x, $\lim_{m\to\infty} F(G_m, x) = F(x)$, où

(1) F(x) =0 sur $]-\infty, -2\sqrt{d-1}]$,

(2) Si $-2\sqrt{d-1} \leqslant x \leqslant 2\sqrt{d-1}$

$$F(x) = \int_{-2\sqrt{d-1}}^{x} \frac{d\sqrt{4(d-1)-z^2}}{2\pi(d^2-z^2)} \mathrm{d}z$$

(3) F(x) =1 quand $2\sqrt{d-1} \leqslant x$.

Corollaire 3.3. *Pour les graphes d-réguliers aléatoires, on a quand $N \to \infty$,*

$$\mathbf{E}_{\mathcal{G}_{N,d}}[F(X_N, x)] \to F(x) \tag{13}$$

Remarque 3.4. On remarque que $\mathrm{d}F$ a pour support $[-2\sqrt{d-1}, 2\sqrt{d-1}]$, ce qui n'est pas étonnant. On peut effectuer un changement d'échelle pour ramener F dans l'intervalle de $[-1, 1]$. D'après cette transformation, en faisant tendre d vers l'infini, la limite est la loi du demicercle de Wigner.

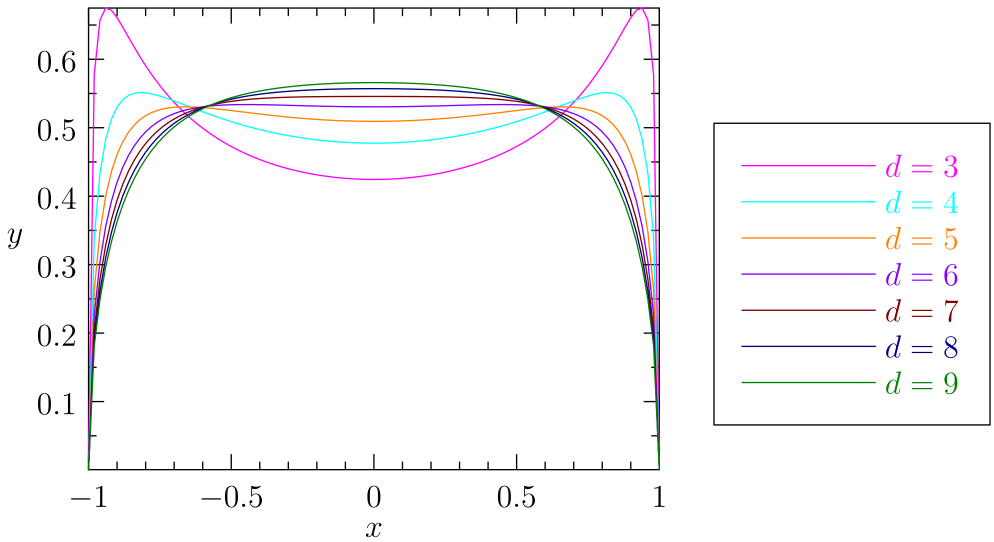

FIGURE 1 – La distribution de F après changement d'échelle

On va juste expliquer l'idée de la preuve. L'hypothèse (b) impose qu'il y a peu de cycles. Donc localement, le voisinage de chaque sommet ressemble à un arbre. Plus précisément, on peut montrer que pour tout $k \geqslant 0$,

$$\int x^k \mathrm{d}F(G_m, x) = \frac{Tr(A^k_{G_m})}{V(G_m)} \to t_k \quad \text{quand } m \to \infty \tag{14}$$

De plus, la fonction F vérifie que $\int x^k \mathrm{d}F = t_k$. Par conséquent, on déduit la convergence des moments. Comme F est caractérisée par ses moments, on déduit que $\lim_{m\to\infty} F(G_m, x) = F(x)$. On remarque qu'ici on présente comme un fait que les moments de F sont égaux aux nombres de marches sur T_d, mais en réalité c'est à nous de trouver l'expression de F. Pour cela, on décompose F comme une série de polynôme de Chebyshev et on calcule ses coefficients en utilisant l'orthogonalité entre les polynômes de Chebyshev. Pour déduire le Corollaire 3.3, on a besoin de la propriété suivante :

Théoreme 3.5 (Bollobas [3], Wormald [11])**.** *Fixons le degré d, on note $C_{N,l}$ le nombre de l-cycles dans le graphe aléatoire régulier $X_{N,d}$. Pour $m \geqslant 3$ fixe, $C_{N,3}, \ldots, C_{N,m}$ converge asyptotiquement vers des variables de Poisson indépendantes de moyennes $\mu_i = \frac{(d-1)^i}{2i}$, plus précisément, pour tout $k_1, \ldots, k_m \geqslant 0$,*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{E}[(C_{N,1})_{k_1} \ldots (C_{N,m})_{k_m}] = \mu_1^{k_1} \ldots \mu_m^{k_m} \tag{15}$$

où $(Y)_k = Y(Y-1)\ldots(Y-k+1)$ note la puissance factorielle de Y.

On pose Y_N l'union disjointe de tous les graphes dans $G_{N,d}$. Par définition de la répartition empirique,

$$F(Y_N, x) = \mathbf{E}[F(X_N, x)]$$

Pour appliquer le théorème de McKay, on vérifie que les graphes Y_N satisfont les condition du Théorème 3.2, en effet

$$\frac{C_k(Y_N)}{V(Y_N)} = \frac{\sum_{X \in G_{N,d}} C_k(X)}{N|G_{N,d}|} = \frac{\mathbf{E}[C_k(X_N)]}{N} \sim \frac{\mu_k}{N} \to 0$$

On en déduit que

$$\mathbf{E}[F(X_N, x)] \to F(x) \quad \text{quand} \quad N \to \infty$$

Pour finir, on va présenter quelques résultats concernant les vecteurs propres de X_N.

4 Vecteurs propres du graphes réguliers

Contrairement aux nombreuses études sur les valeurs propres, il n'y a pas beaucoup de résultats connus concernant les vecteurs propres des graphes réguliers. L'un des résultats connus est la délocalisation donnée par I.Dumitriu, S.Pal[6] et S.Brooks, E.Lindenstrauss [4] :

Théoreme 4.1. *Pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe* $\delta > 0$ *tel que l'assertion suivante est a.p.s vraie : si un sous-ensemble de sommets* S *vérifie que* $\sum_{x \in S} |\phi(x)|^2 > \epsilon$*, où* ϕ *désigne un vecteur propre de* $X_{N,d}$*, alors* $|S| \gtrsim |G|^\delta$.

En d'autres termes, les vecteurs propres sont plutôt equirépartis sur les sommets : pour avoir une masse L^2 grande, la taille du sous-ensemble doit être aussi grande. On finit par donner une question ouverte concernant les vecteurs propres :

Question ouverte 4.2. *Supposons* $d \geqslant (1 + \epsilon) \log N$ *pour un* $\epsilon > 0$*, est-il vrai que presque tous les vecteurs propres* ϕ *de* $X_{N,d}$ *satisfont* $\|\phi\|_\infty = o(1)$ *? Ou encore mieux* $\|\phi\|_\infty = N^{-1/2+o(1)}$ *?*

Références

[1] N. Alon. Eigenvalues and expanders. *Combinatorica*, 6(2) :83–96, 1986. Theory of computing (Singer Island, Fla., 1984).

[2] N. Alon and V. D. Milman. λ_1, isoperimetric inequalities for graphs, and superconcentrators. *J. Combin. Theory Ser. B*, 38(1) :73–88, 1985.

[3] Béla Bollobás. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs. *European J. Combin.*, 1(4) :311–316, 1980.

[4] Shimon Brooks and Elon Lindenstrauss. Non-localization of eigenfunctions on large regular graphs. *Israel J. Math.*, 193(1) :1–14, 2013.

[5] Sebastian M. Cioabă. On the extreme eigenvalues of regular graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 96(3) :367–373, 2006.

[6] Ioana Dumitriu and Soumik Pal. Sparse regular random graphs : spectral density and eigenvectors. *Ann. Probab.*, 40(5) :2197–2235, 2012.

[7] Joel Friedman. A proof of Alon's second eigenvalue conjecture. In *Proceedings of the Thirty-Fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 720–724 (electronic), New York, 2003. ACM.

[8] A. Lubotzky, R. Phillips, and P. Sarnak. Ramanujan graphs. *Combinatorica*, 8(3) :261–277, 1988.

[9] G. A. Margulis. Explicit group-theoretic constructions of combinatorial schemes and their applications in the construction of expanders and concentrators. *Problemy Peredachi Informatsii*, 24(1) :51–60, 1988.

[10] Brendan D. McKay. The expected eigenvalue distribution of a large regular graph. *Linear Algebra Appl.*, 40 :203–216, 1981.

[11] Nicholas C. Wormald. The asymptotic distribution of short cycles in random regular graphs. *J. Combin. Theory Ser. B*, 31(2) :168–182, 1981.