Fonctions L et Périodes des Formes Automorphes

Jie LIN.

28 octobre 2013

Introduction

Cet article est une introduction aux fonctions L et périodes des formes automorphes. On présente aussi les motifs et la conjecture de Deligne pour les valeurs spéciales des fonctions L.

Le chapitre 1 présente la théorie des formes modulaires classiques. En particulier les opérateurs de Hecke, le corps de rationnalité et la fonction L sont inclus dans cette section.

Dans le chapitre 2, on introduit les représentations automorphes qui sont des généralisations adéliques des formes modulaires. Donc l'analyse harmonique peut être appliquée pour obtenir des résultats des fonctions L. On ajoute quelques mots sur le programme de Langlands à la fin de cette section.

La théorie des motifs et la conjecture de Deligne sont abordées dans le chapitre 3. La conjecture de Deligne dit qu'une certaine valeur spéciale de la fonction L est presque égale à une période.

Le dernier chapitre contient d'abord un exemple pour la conjecture de Deligne, celui des formes modulaires classiques. Et on termine sur des idées pour les formes automorphes générales.

Pour simplifier l'exposition, les définitions et résultats ne sont pas les plus généraux et précis.

Table des matières

1 Formes modulaires classiques

1.1 Définitions et notions

Soit N un entier strictement positif. On définit le sous-groupe de conguence de $SL_2(\mathbb{Z})$

$$\Gamma_0(N) := \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0 \pmod{N}\}.$$

On note $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}, Imz > 0\}$ le demi-plan de Poincaré.

Définition 1.1. *Soit k un entier. Une* ***forme modulaire*** *(resp.* ***forme cuspidale****) de poids k et de niveau N est une fonction holomorphe sur $\mathcal{H}$ qui satisfait que :*

1. *pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$, $f\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$;*
2. *la fonction f est holomorphe (resp. s'annule) à l'infini au sens ci-dessous.*

Remarque

1. Notons que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est dans $\Gamma_0(N)$. Donc une fonction qui satisfait la condition (1) ci-dessus vérifie $f(z+1) = f(z)$. En particulier, elle admet un développement en série de Fourier :

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n q^n, q = e^{2\pi i z}.$$

   On dit que f est holomorphe (resp. s'annule) à l'infini si $a_n = 0$ pour tout $n < 0$ (resp. $n \leqslant 0$).

2. Il est facile de voir que l'ensemble des formes modulaires de poids k et de niveau N forme un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. On note cet espace $M_k(\Gamma_0(N))$ ou simplement M_k si le niveau est clair dans le contexte. On note aussi $S_k(\Gamma_0(N))$ ou simplement S_k l'espace des formes cuspidales. Par des astuces d'analyse complexe, on peux montrer que les dimensions de M_k et S_k sont finies. Des résultats de la géométrie algébrique complexe, en particulier le théorème de Riemann-Roch, nous permettent de calculer la dimension précise, voir le chapitre 3 de [DS05].

1.2 Les corps de rationalité

Dans la suite, on suppose que $k \geqslant 2$ et $f(z) = \sum_{n>0} a_n q^n$ une forme cuspidale de poids k et de niveau N.

Il y a beaucoup de propriétés intéressantes de ces coefficients a_n. Par exemple la fameuse conjecture de Ramanujan prédit une borne de ces coefficients : $|a_n| = O(n^{(k-1)/2})$. Cette conjecture reflète comment l'endomorphisme de Frobenius agit sur un certain objet géométrique. Elle a été montrée par Eicher et Shimura pour le cas $k = 2$, et par Deligne pour $k \geqslant 2$ dans son article profond [Del80].

Nous nous intéressons plutôt dans ce mémoire à l'algébricité de ces coefficients. L'histoire commence par interpéter les coefficients en valeurs propres de certaines opérateurs linéaires, les opérateurs de Hecke. On donne une définition simple de ces opérateurs :

Définition 1.2. *Soit p un entier premier qui ne divise pas N. On définit T_p, opérateur de Hecke, par*

$$(T_p f)(z) = f(pz) + \sum_{i=0}^{p-1} f\left(\frac{z+i}{p}\right)$$

pour tout $f \in S_k = S_k(\Gamma_0(N))$. Par un petit calcul, on voit que $T_p f$ est encore dans S_k. De plus, T_p définit un opérateur linéaire sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel S_k.

La définition géométrique des opérateurs de Hecke est plus élégante et naturelle. Mais cette définition est plus longue à exposer. On peut voir le chapitre 5 de [DS05] pour les détails.

Après un petit calcul, on voit que T_p commute avec T_q pour tout p, q premier et ne divisent pas N. De plus, il existe un produit scalaire sur S_k qui s'appelle le produit scalaire de Petersson tel que les T_p sont auto-adjoints. On sait que des opérateurs linéaires commutatifs et auto-adjoints peuvent être diagonalisés dans une base commune.

Définition 1.3. *On dit que $f \in S_k$ est une* ***forme propre*** *si elle est vecteur propre pour tous les opérateurs de Hecke T_p avec p premier ne divisant pas N. On dit de plus que f est* ***normalisée*** *si son premier coefficient de Fourier vérifie $a_1 = 1$.*

On a le fait suivant :

Théorème 1.1. *Il existe une base de S_k composée de formes propres.*

En calculant le premier coefficient de Fourier de $T_p f$, on obtient que a_p est la valeur propre de f par T_p. Le théorème suivant est bien connu par l'algébricité de ces opérateurs sur un certain objet géométrique défini sur $\mathbb{Q}$. La théorie est trop longue à expliquer ici. Dans le cas le poids $k = 2$, on peut voir la section 6.5 de [DS05].

Théorème 1.2. *Soit* $f(z) = \sum_{n>0} a_n q^n$ *une forme propre normalisée. Alors les coefficients* a_p *avec* p *ne divise pas* N *sont des entiers algébriques et engendrent un corps de nombres sur* $\mathbb{Q}$ *(dans* $\mathbb{C}$*), noté* K_f *et appelé le* ***corps de rationalité*** *de* f*. De plus,* S_k *admet une base composée de formes propres normalisées à coefficients dans* $\mathbb{Q}$*.*

1.3 Les fonctions L des formes cuspidales

Soit f une forme cuspidale.

On définit la **fonction L associée à** f par

$$L(f,s) := \sum_{n>0} a_n n^{-s}.$$

On rappelle que la fonction Gamma définie par $\Gamma(s) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-t} t^s \frac{dt}{t}$ converge sur le demi-plan $Re(s) > 0$ et s'étend en une fonction méromorphe sur tout le plan complexe.

Théorème 1.3. ***(Prolongement analytique et l'équation fonctionnelle)***

1. *La fonction L associée à* f *converge absolument sur le demi plan* $Re(s) > k/2 + 1$*.*
2. *On pose* $\Lambda(f,s) := (2\pi)^{-s} N^{s/2} \Gamma(s) L(f,s)$*. Il y a une décomposition d'espaces vectoriels* $S_k = S_k^+ \oplus S_k^-$ *telle que, pour tout* $f \in S_k^{\pm}$*, on a* $\Lambda(f,s)$ *s'étend en une fonction méromorphe sur* $\mathbb{C}$ *et satisfait*

$$\Lambda(f,s) = \pm \Lambda(f, k-s).$$

Par conséquence, pour toute forme cuspidale f*,* $L(f,s)$ *s'étend en une fonction méromorphe sur* $\mathbb{C}$*.*

On note $(2\pi)^{-s} N^{s/2} \Gamma(s)$ par $L_\infty(f,s)$ qui s'appelle le facteur infini de la fonction L de f. Pour les détails, voir [DS05] proposition 5.9.1 et 5.10.2.

On revient aux opérateurs de Hecke. En effet, on peut définir les opérateurs de Hecke pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Et une forme propre est en réalité un vecteur propre pour tous les T_n. En calculant les coefficients de Fourier de $T_n f$ avec f une forme propre, on obtient des relations entre les coefficients de Fourier de f. Ces relations impliquent le théorème suivant :

Théorème 1.4. ***(Produit eulérien)*** *Soit $f \in S_k(\Gamma_0(N))$ une forme propre. Alors la fonction L associée à f a un développement en produit eulérien :*

$$L(f,s) = \prod_p (1 - a_p p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1}.$$

Les travaux profonds d' Eichler et Shimura sur les opérateurs de Hecke nous donnent une construction d'une variété abélienne à partir de certaines forme propres f de poids 2 (proposition 21 en page 90 de [CSS97]). En particulier, si le corps de rationalité de f est égal à $\mathbb{Q}$, cette variété abélienne est une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$. De plus, elle a la même fonction L que f. On présentera la construction dans la section 4.1. La conjecture fameuse de Shimura-Taniyama-Weil prédit l'inverse :

Théorème 1.5. ***(Théorème de modularité)***
Soit E une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$. Alors il existe un entier positif N et une forme cuspidale f de poids 2 et de niveau N, tels que :

$$L(f,s) = L(E,s).$$

où $L(E,s)$ est la fonction L associée à la courbe elliptique E.

Cela a été démontré par A. Wiles dans le cas où la courbe elliptique est semi-stable. Il implique le grand théorème de Fermat(c.f. [Wil95]). Le cas général était démontré plus tard dans [BCDT01]. Par conséquence, on obtient le prolongement analytique et l'équation fonctionnelle pour les courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$.

2 Représentations automorphes

2.1 L'approche adélique

Dans la thèse de Tate, il avait traité la fonction L de caractères de Hecke, une généralisation de ceux de Dirichlet, à l'aide de l'analyse harmonique adélique. Cette méthode donne une démonstration élégante du prolongement analytique et l'équation fonctionnelle qui peut être généralisée á beaucoup de cas. C'est le cas des fonctions L automorphes qu'on va introduire après.

On peut définir la fonction L de beaucoup d'objets arithmétiques. Il y a des conjectures importantes sur le prolongement analytique et l'équation fonctionnelle de ces fonctions L. Mais la plupart des résultats connus portent sur les fonctions L automorphes. En ce sens, les fonctions L automorphes, ou les représentations automorphes sont vraiment importantes.

On introduit d'abord l'anneau adélique. On rappelle que $|\cdot|_p$, la norme p-adique sur $\mathbb{Q}$, est définie par $|0|_p = 0$; $\left|p^r \frac{n}{m}\right|_p = p^{-r}$ avec $r, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$ et $p \nmid mn$. On note $\mathbb{Q}_p$ le complété de cette norme de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}_p$ l'adhérence de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}_p$.

On définit l'**anneau adélique des rationnels** par le produit tensoriel restreint :

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} := \mathbb{R} \times \prod_p{}' \mathbb{Q}_p = \{(a_\infty, a_p) \mid a_\infty \in \mathbb{R}, a_p \in \mathbb{Q}_p \text{ avec } a_p \in \mathbb{Z}_p \text{ pour presque tout } p\}.$$

Dans la suite, on pose $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ et $\mathbb{A}_f = \prod_p{}' \mathbb{Q}_p$ la partie finie de $\mathbb{A}$.

On peut maintenant introduire l'adélisation des formes modulaires. Soit $f \in S_k(\Gamma_0(N))$ une forme cuspidale de poids k et de niveau N. On pose $GL_2(\mathbb{R})^+$ l'ensemble des matrices de $GL_2(\mathbb{R})$ de déterminant positif. Il est facile de vérifier que la fonction $\widetilde{f}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := (ci+d)^{-k} f\left(\frac{ai+b}{ci+d}\right)$ est bien définie sur $\Gamma_0(N)\backslash GL_2(\mathbb{R})^+$.

On pose aussi $K_\infty := O_2(\mathbb{R})$ le sous-groupe orthogonal de $GL_2(\mathbb{R})$, $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}l_2(\mathbb{R})$ l'algèbre de Lie du groupe $GL_2(\mathbb{R})$, $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ et $Z(U(\mathfrak{g}))$ son centre.

On définit l'analogue adélique de $\Gamma_0(N)$

$$K_0(N) := \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}_p) \mid c \equiv 0 \pmod N\}.$$

Notons

$$GL_2(\mathbb{A}) = GL_2(\mathbb{R}) \prod_p{}' GL_2(\mathbb{Q}_p)$$

$$= \{(g_\infty, g_p) \mid g_\infty \in GL_2(\mathbb{R}), g_p \in GL_2(\mathbb{Q}_p) \text{ avec } a_p \in GL_2(\mathbb{Z}_p) \text{ pour presque tout } p\}.$$

On rappelle que v, une **place** de $\mathbb{Q}$, est soit ∞, soit un entier premier. Si $v = \infty$, on pose $\mathbb{Q}_v = \mathbb{R}$ et $|\cdot|_v$ la norme réelle naturelle sur $\mathbb{R}$. Donc pour $g = (g_v = \begin{pmatrix} a_v & b_v \\ c_v & d_v \end{pmatrix})_{v \leqslant \infty} \in GL_2(\mathbb{A})$, on a $|det(g_v)|_v = 1$ et $|a_v|_v, |b_v|_v, |c_v|_v, |d_v|_v \leqslant 1$ pour presque tout place v de $\mathbb{Q}$. On peut alors définir la norme

$$||g|| := \prod_{v \leqslant \infty} max\{|a_v|_v, |b_v|_v, |c_v|_v, |d_v|_v, |det(g_v)|_v^{-1}\}$$

sur $GL_2(\mathbb{A})$.

Par le théorème d'approximation forte ([GH11] théorème 4.11.5), on sait que le plongement naturel $GL_2(\mathbb{R}) \hookrightarrow GL_2(\mathbb{A})$ donne un isomorphisme

$$\Gamma_0(N)\backslash GL_2(\mathbb{R})^+ \simeq GL_2(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A})/K_0(N)$$

où $GL_2(\mathbb{Q})$ se plonge dans $GL_2(\mathbb{A})$ diagonalement.

Alors $\widetilde{f}$ se relève en ϕ_f, une fonction sur $GL_2(\mathbb{A})$, qui est en particulier une forme automorphe que l'on va définir dans la suite.

2.2 Formes automorphes et représentations automorphes

On définit les formes automorphes pour $GL_2(\mathbb{A})$. Elles généralisent les formes modulaires.

Définition 2.1. *Une **forme automorphe** pour $GL_2(\mathbb{A})$ de niveau N est une fonction $\phi : GL_2(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ qui vérifie les conditions suivantes :*

1. *ϕ est se factorise à travers $GL_2(\mathbb{Q})\backslash GL_2(\mathbb{A})$;*
2. *ϕ est lisse (l'autrement dit, $\phi\mid_{GL_2(\mathbb{R})}$ est lisse et $\phi\mid_{GL_2(\mathbb{A}_f)}$ est localement constante).*
3. *le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par*
$$\{g \mapsto \phi(gk_\infty k) \mid k_\infty \in K_\infty(\mathbb{R}), k \in K_0(N)\}$$
est de dimension finie ;
4. *le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par*
$$\{g \mapsto D\phi(g) \mid D \in Z(U(\mathfrak{g}))\}$$
est de dimension finie (on ne veut pas préciser l'action de $Z(U(\mathfrak{g}))$ sur ϕ ici, naïvement, elle est la dérivation selon certaine direction).
5. *ϕ est de croissance moderée : il existe $C, B > 0$ tels que $|\phi(g)|_{\mathbb{C}} < C||g||^B$ pour tout $g \in GL_2(\mathbb{A})$.*

On définit aussi un analogue adélique de la définition de formes cuspidales.

Définition 2.2. *Soit ϕ une forme automorphe pour $GL_2(\mathbb{A})$ de niveau N. Alors ϕ est dite **cuspidale** si*

$$\int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} \phi\left(\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix} g\right) du = 0$$

pour tout $g \in GL_2(\mathbb{A})$.

Remarque On peut vérifier que si f est une forme cuspidale, alors ϕ_f est une forme automorphe cuspidale (c.f. proposition 12.3 de [KL06]).

On note $\mathcal{A}(GL_2(\mathbb{A}))$ (resp. $\mathcal{A}_0(GL_2(\mathbb{A})))$ ou simplement $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{A}_0$) l'espace de formes automorphes (resp. automorphes cuspidales) d'un certain niveau fixé. Par la définition de formes automorphes et formes automorphes cuspidales, on voit que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_0$ sont des $\mathbb{C}$-espace vectoriels munies d'actions de $U(\mathfrak{g})$, K_∞ et $GL_2(\mathbb{A}_f)$. Par exemple, l'action de $GL_2(\mathbb{A}_f)$ est donnée par translation à droite des fonctions. De plus, les actions sont compatibles et on dit que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_0$ sont deux $(\mathfrak{g}, K_\infty) \times \mathrm{GL}_{22}(\mathbb{A}_f)$-modules. On ne veut pas préciser la définition ici, voir définition 5.1.5 et lemme 5.1.7 de [GH11].

Définition 2.3. *Une **représentation automorphe** (resp. **représentation automorphe cuspidale**) de $GL_2(\mathbb{A})$ est un $(\mathfrak{g}, K_\infty) \times GL_2(\mathbb{A}_f)$-module irréductible qui est isomorphe à un sous-quotient de l'espace des formes automorphes $\mathcal{A}$ (resp. l'espace des formes automorphes cuspidales $\mathcal{A}_0$).*

Remarque Soit π est une représentation cuspidale de $GL_2(\mathbb{A})$, alors π est en effet isomorphe à un sous $(\mathfrak{g}, K_\infty) \times GL_2(\mathbb{A}_f)$-module de $\mathcal{A}_0$.

Théorème 2.1. *Soit π une représentation automorphe de $GL_2(\mathbb{A})$. Alors π se factorise comme $\bigotimes_{v\leqslant\infty}{}'\pi_v$ où π_∞ est un $(\mathfrak{g}, K_\infty)$-module, π_p est une représentation admissible irréductible de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ qui est non ramifiée pour presque tout p (voir la définition* 2.4*).*

De plus, la factorisation est unique à isomorphisme près.

On va étudier la représentation π_p et leurs propriétés dans la section suivante. Pour ce théorème, voir le théorème 10.8.5 de [GH11].

On pose $\pi_f = \bigotimes_p{}'\pi_p$ la partie finie de π. On suppose dans la suite que π est "assez régulière". Alors π_f est définie sur un corps de nombres, noté $E(\pi)$ (voir [BHD94] thérème 4.4.1).

2.3 Les fonctions L des représentations cuspidales

On se concentre d'abord sur les représentations locales.

Une représentation de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ est une paire (π, V) avec V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et π un morphisme lisse de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ vers $GL(V)$.

Pour p un entier premier, on pose $K_p := GL_2(\mathbb{Z}_p)$, c'est un sous-groupe compact maximal de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$.

Définition 2.4. *Une représentation π_p de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ est dite* ***admissible*** *si $\pi_p^{K_p}$, le sous-espace de π_p fixé par K_p, est de dimension finie.*

On dit que π_p est ***non ramifiée*** *si elle est admissible, irréductible et $\pi_p^{K_p} \neq \{0\}$.*

Remarque Grâce à la théorie des algèbres de Hecke que l'on ne veut pas expliquer ici, on peut montrer que pour une représentation non ramifiée π_p, la dimension de $\pi_p^{K_p}$ est exactement 1 (voir proposition 4.2.3 et théorème 4.6.2 de [Bum98]).

Soient t_1, t_2 deux nombres complexes.

Définition-Lemme 2.1. *On définit $V_p(t_1, t_2)$ comme étant l'ensemble des fonctions lisses (=localement constantes) f de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ vers $\mathbb{C}$ qui satisfont :*

$$f\left(\begin{pmatrix} y_1 & x \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} g\right) = |y_1|_p^{t_1+1/2}|y_2|_p^{t_2-1/2} f(g).$$

Soit $h \in GL_2(\mathbb{Q})$ et $f \in V_p(t_1, t_2)$. On définit $h.f(g) := f(gh)$. Alors $V_p(t_1, t_2)$ devient une représentation lisse de $GL_2(\mathbb{Q})$. De plus, elle est admissible. Elle est irréductible si $t_1 \neq t_2$. Dans ce cas, on dit que $V_p(t_1, t_2)$ est dans la ***série principale*** *et on appelle t_1, t_2 le* ***paramètre de Satake*** *de $V_p(t_1, t_2)$.*

Proposition 2.1. *Toutes les représentations non ramifiées de $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ sont soit de dimension 1, soit dans la série principale. De plus, deux représentations $V_p(t_1, t_2)$ et $V_p(s_1, s_2)$ sont isomorphes si et seulement si $t_1 = s_1$, $t_2 = s_2$ ou $t_1 = s_2$, $t_2 = s_1$.*

Pour la théorie des représentions de GL_2, voir [GH11] chapitre 6 ou [Bum98] chapitre 4.

Soit $\pi = \pi_\infty \otimes \bigotimes_p{}' \pi_p$ une représentation cuspidale de $GL_2(\mathbb{A})$. Alors π_p est non ramifiée pour presque tout p. On pose S un ensemble fini des places de $\mathbb{Q}$ tel que $\infty \in S$ et pour tout $p \notin S$, π_p est non ramifiée. Donc pour tout place $p \notin S$, π_p est dans la série principale, on pose $t_{1,p}$, $t_{2,p}$ son paramètre de Satake.

Définition 2.5. *Soit S comme ci-dessus. Pour $p \notin S$, on pose la* ***fonction*** L ***locale***

$$L_p(\pi, s) := (1 - p^{-t_1}p^{-s})^{-1}(1 - p^{-t_2}p^{-s})^{-1}.$$

On définit la ***fonction*** L ***globale*** *de π par*

$$L^S(\pi, s) := \prod_{p \notin S} L_p(\pi, s).$$

Dans [GJ72], Godement et Jacquet ont défini la fonction L locale pour toute place v. Le résultat principal de [GJ72] est l'équation fonctionnelle et prolongement analytique pour la fonction L globale.

On revient aux formes cuspidales. Soit $f = \sum_{n>0} a_n q^n$ une forme nouvelle de niveau N (une forme nouvelle de niveau N est une certaine forme propre qui ne peut pas être obtenue par des formes de niveau plus petit que N). On sait que ϕ_f engendre une représentation cuspidale de $GL_2(\mathbb{A})$, noté π (c.f. [GH11] théorème 5.4.2 et théorème 10.8.5). Cette représentation est non ramifiée en tout $p \nmid N$. On pose S l'ensemble qui contient les premiers qui divisent N et la place infinie. On sait que π et f ont la même fonction L :

$$L^S(s, \pi) = \sum_{(n,N)=1} a_n n^{-s}.$$

Voir [Kud03] pour les détails.

En outre, on peut définir la fonction L pour tout représentation galoisienne. En particulier, pour toute variété abélienne (par exemple une courbe elliptique), on peut lui associer une représentation galoisienne (le module de Tate), et donc définir leur fonction L. Le programme de Langlands prédit la correspondance entre les représentations galoisiennes et représentations automorphes. Le lien de cette correspondance est les fonctions L. On a beaucoup de conjectures importantes pour plusieurs objets arithemetiques. Mais on ne connait pas bien ces conjectures sauf dans les cas des représentations automorphes. Et on retrouve les propriétés des autres fonctions L quand on peut associer cet objet avec une représentation automorphe selon le programme de Langlands comme on l'a vu pour les courbes elliptiques à la fin de la section 1.2.

3 L'introduction des motifs

3.1 Notions de base

On note toujours $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$ et $G_{\mathbb{Q}}$ le groupe de Galois $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Et on fixe un isomorphisme $\overline{\mathbb{Q}_l} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ et note $G_{\mathbb{Q}_l} = Gal(\overline{\mathbb{Q}_l}/\mathbb{Q}_l)$ pour tout nombre premier l. De même, $G_{\mathbb{F}_p}$ dénote le groupe de Galois $Gal(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p)$ où $\mathbb{F}_p$ est le corps fini d'ordre p.

Le programme de Langlands lie les représentations galoisiennes et les représentations automorphes. On croit qu'il y a une troisième chose qui est plus "universelle" derrière, c'est le motif. Dans ce mémoire, on considère les moitfs de façon naïve. Soit E un corps de nombres. Un motif M sur $\mathbb{Q}$ à coefficient dans E est donné par ses réalisations M_B (la réalisation de Betti), M_{DR} ((la réalisation de De Rham)

et M_l (la réalisation l-adique) pour tous les nombres premiers l. Plus précisément, M_B et M_{DR} sont deux espaces vectoriels de dimension finie sur E, M_l est un espace vectoriel de dimension finie sur $E_l := E \otimes \mathbb{Q}_l$. On a des isomorphismes
— $I_\infty : M_B \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} M_{DR} \otimes \mathbb{C}$ en tant que $E \otimes \mathbb{C}$-module ;
— $I_l : M_B \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} M_l$ en tant que $E \otimes \mathbb{Q}_l = E_l$-module.

Donc les M_B, M_{DR} et M_l ont même dimension (resp. sur $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{Q}_l$), qui s'appelle le **rang** de M.

On a de plus :

1. M_B a une involution E-linéaire (Frobenius infini)

$$F_\infty : M_B \longrightarrow M_B$$

et une structure de Hodge

$$M_B \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p,q \in \mathbb{Z}} M^{p,q}$$

tel que F_∞ envoit $M^{p,q}$ vers $M^{q,p}$.
On suppose de plus que cette stucture de Hodge est **pure** de poids $w \in \mathbb{Z}$, c'est à dire $M^{p,q} = 0$ si $p + q \neq w$.

2. M_{DR} admet une filtration E-rationnelle (la filtration de Hodge)

$$\cdots \supset M^i \supset M^{i+1} \cdots$$

qui est compatible avec la structure de Hodge de M_B via I_∞ (l'isomorphisme de comparaison), i.e.

$$I_\infty(\bigoplus_{p \geqslant i} M^{p,q}) = M^i \otimes \mathbb{C}.$$

3. Les M_l forment un système compatible de représentations (voir la section suivante pour cette notion) l-adiques

$$\rho_l : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL(M_l).$$

Remarque Notons que F_∞ agit sur M_B comme une involution. On peut décomposer M_B comme $M_B^+ \oplus M_B^-$ où F_∞ agit sur $M_B^\pm$ par ± 1. On note $d^\pm$ la dimension de $M_B^\pm$.

A partir d'une variét'e algébrique sur $\mathbb{Q}$, on peut définit un motif tel que ses réalisations sont données par les cohomologie de Betti, de de Rham et l-adiques.

3.2 Les fonctions L des motifs

On rappelle quelques propriétés sur les groupes de Galois.

Le corps $\overline{\mathbb{Q}_p}$ est muni d'une norme qui est l'unique norme qui étend la norme p-adique sur $\mathbb{Q}_p$. Par unicité, on sait que les élements dans $G_{\mathbb{Q}_p}$ préservent cette norme (l'unicité est expliquée dans beaucoup de livres sur les corps p-adiques, voir le chapitre 2 de [Neu99] par exemple). En particulier ils préservent l'anneau d'entiers de $\overline{\mathbb{Q}_p}$ (=l'ensemble des élements de $\overline{\mathbb{Q}_p}$ qui sont racines d'un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$ = l'ensemble des élements de $\overline{\mathbb{Q}_p}$ avec norme p-adique $\leqslant 1$). Dans cet anneau, on peut définir l'action modulo p comme dans $\mathbb{Z}_p$. Cela nous donne une action de $G_{\mathbb{Q}_p}$ sur $\overline{\mathbb{F}_p}$, on obtient un épimorphisme $G_{\mathbb{Q}_p} \twoheadrightarrow G_{\mathbb{F}_p}$. On note I_p son noyau.

Le morpisme $x \mapsto x^p$ est dans $G_{\mathbb{F}_p}$, qui s'appelle **le Frobenius arithmétique**. On note $F_p \in G_{\mathbb{F}_p}$ son inverse. C'est le **Frobenius géométrique**. On note aussi F_p l'un des ses antécédents dans $G_{\mathbb{Q}_p}$ quelconque.

En outre, on fixe un plongement $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ qui étend le plongement $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$. Ce plongement définit un morphisme de groupes de $G_{\mathbb{Q}_p}$ vers $G_{\mathbb{Q}}$. Comme $\overline{\mathbb{Q}}$ est dense dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$, ce morphisme est un monomorphisme. De plus, il est unique à conjugaison par un élément dans $G_{\mathbb{Q}}$ près en variant le plongement $\overline{\mathbb{Q}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$. On continue de noter F_p son image dans $G_{\mathbb{Q}}$ et on l'appelle encore le Frobenius géométrique. On appelle l'image de I_p un **groupe d'inertie**, noté encore I_p.

On peut maintenant définir la notion de système compatible de représentations. Soient E un corps de nombres comme précédement et n un entier strictement positif. Soient $\rho_l : Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow GL_n(E_l)$ des représentations galoisiennes pour tout l entier premier. On dit que ρ_l est un **système compatible** des représentations galoisiennes s'il existe un ensemble fini d'entiers premiers S qui s'appelle **l'ensemble exceptionnel** tel que

1. ρ_l est **non ramifiée** hors S et l : pour tout $p \notin S \cup \{l\}$, ρ_l est trivial sur I_p ;
2. pour tout entier premier $p \notin S \cup \{l\}$, le polynôme caractéristique de $\rho_l(Frob_p)$ est à coefficients dans E ;
3. ce polynôme ne dépend pas du choix de l.

On revient à notre motif M. Par définition, les M_l forment un système compatible. On note S son ensemble exceptionnel.

Alors pour tout $p \notin S$, on prend $l \neq p$. Et on voit M_l comme une représentation de $G_{\mathbb{Q}_l}$. Par (1) et (2), $det(1 - F_p \mid M_l^{I_p}) = det(1 - F_p)$ est un polynôme à coefficient dans E. Par (3), ce polynôme ne dépend pas du choix de l. Ici $M_l^{I_p}$ signefie le sous-ensemble de M_l fixé par I_p. Notons que ce polynôme ne dépend pas du choix de F_p dans $G_{\mathbb{Q}_p}$ ou du plongement $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$.

On suppose de plus : pour tout $p \in S$, le polynôme $det(1 - F_p \mid M_l^{I_p})$ est à coefficients dans E et indépendant de $l \neq p$.

Alors pour tout p, on peut définir $L_p(M, t) = det(1 - p^{-s} F_p \mid M_l^{I_p})^{-1} \in E(p^{-s})$. Pour tout plongement $\sigma : E \hookrightarrow \mathbb{C}$, on peut définit

$$L(\sigma, M, s) = \prod_p L_p(M, p^{-s})$$

une fonction à coefficient dans $\mathbb{C}$.

On définit **la fonction** L **de motif** M par

$$L(M, s) = (L(\sigma, M, s))_{\sigma : E \hookrightarrow \mathbb{C}}$$

une fonction à coefficient dans $E \otimes \mathbb{C}$.

Il est conjecturé que cette fonction se prolonge analytiquement et satisfait une certaine équation fonctionnelle.

3.3 Les périodes des motifs et la conjecture de Deligne

Soit M un motif sur $\mathbb{Q}$ à coefficient dans un corps de nombres E. On suppose comme précédement que la structure de Hodge de M est pure de poids $w \in \mathbb{Z}$.

Pour tout $\sigma : E \hookrightarrow \mathbb{C}$, on peut associer $L_\infty(\sigma, M, s)$ le facteur à l'infini de la fonction L de M comme dans le théorème 1.3.

Définition 3.1. *Soit m un entier. On fixe un $\sigma : E \hookrightarrow \mathbb{C}$. On dit que m est* ***critique*** *pour M si ni $L_\infty(\sigma, M, s)$, ni $L_\infty(\sigma, \breve{M}, 1 - s)$ n'ont de pôle en $s = m$. On dit que M est* ***critique*** *si 0 est critique pour M.*

Remarque La fonction $L_\infty(\sigma, M, s)$ est indépendante de σ, voir section 2.5 de [Del79]. Donc cette définition ne dépend pas du choix de σ. En outre, $\breve{M}$ est le motif dual de M. Ses réalisations sont les duales des réalisations de M.

Proposition 3.1. *Supposons M est critique. Alors F_∞ agit sur $M^{p,p}$ par -1 si $p \geqslant 0$, par $+1$ si $p < 0$. Notons que cette condition est vérifiée automatiquement si $M^{p,p} = 0$.*

A partir de maintenant, supposons M est critique. On note
$p^+ = p^- = \frac{w-1}{2}$ si w est impair ;
$p^+ = \frac{w}{2}$ et $p^- = \frac{w}{2} + 1$ si w est pair et F_∞ agit par $+1$ sur $M^{w/2,w/2}$;
$p^- = \frac{w}{2}$ et $p^+ = \frac{w}{2} + 1$ si w est pair et F_∞ agit par -1 sur $M^{w/2,w/2}$.

On note $M_{DR}^{\pm} := M_{DR}/M^{p^{\mp}}$. On rappelle que $I_\infty(\bigoplus_{p\geqslant i} M^{p,q}) = M^i \otimes \mathbb{C}$ pour tout i et F_∞ commute $M^{p,q}$ et $M^{q,p}$. Donc le morphisme suivant entre $E \otimes \mathbb{C}$-modules induit par I_∞ est un isomorphisme :

$$I_\infty^{\pm} : M_B^{\pm} \otimes \mathbb{C} \hookrightarrow M_B \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} M_{DR} \to M_{DR}^{\pm} \otimes \mathbb{C}.$$

Définition 3.2. *On définit* ***les périodes de Deligne*** *par*

$$c^{\pm} = det(I_\infty^{\pm}) \in (E \otimes \mathbb{C})^{\times}.$$

Notons que les périodes sont calculées dans des bases E-rationnelles de M_B et M_F. Donc les périodes de Deligne sont uniques à multiplication par un élément de $E^{\times}$ près.

Définition 3.3. *Soit $x, y \in E \otimes \mathbb{C}$, on dit que $x \sim_E y$ si $y = 0$ ou $y \neq 0$ et $x/y \in E \subset E \otimes \mathbb{C}$.*

Conjecture 3.1. ***(La conjecture de Deligne)***
Si M est critique, alors les deux éléments $L(M, 0)$ et $c^+(M)$ dans $E \otimes \mathbb{C}$ vérifient $L(M, 0) \sim_E c^+(M)$.

Si on tord M par un motif de Tate $\mathbb{Q}(n)$ (voir [Del79] pour la définition), la fonction L est translatée par n, et on obtient une généralisation de cette conjecture :

Corollaire 3.1. *Supossons n est critique pour M. Alors*

$$L(M, n) \sim_E (2\pi i)^{d^+ n} c^+(M) \text{ si } n \text{ est pair ;}$$

$$L(M, n) \sim_E (2\pi i)^{d^- n} c^-(M) \text{ si } n \text{ est impair.}$$

Remarque

1. Classiquement les périodes sont les nombres $< \omega, c >$ où $\omega \in M_{DR}$ et $c \in \widetilde{M_B}$. Dans le cas des variétés algébriques, ces sont les intégrales des formes différentielles rationnnelles autours des cycles rationnels. Si on prend $(\omega)_i$ une base de $\widetilde{M_{DR}^+}$ et $(c_j)_j$ une base de M_B^+, alors $c^+ = det(< \omega_i, c_j >)$.

2. Les périodes de Deligne ne sont pas suffisantes en générale pour exprimer les valeurs spéciales des fonctions L des motifs associés aux M. Par exemple, si on considère deux motifs M et N, si on veux calculer $L(M \otimes N, 0)$, il y a d'autres périodes qui apparaissent. On peut définir des periodes comme dans 1. Pour plus de détails, voir la section 2 de [Yos01] où les périodes fondalentales sont définies. On sait que les périodes fondamentales sont finies au moins pour les motifs associés (hypothéthiquement) aux représentations automorphes. De plus, si un motif est construit par d'autres motifs selon des opérations $\otimes$, $\oplus$, $\bigwedge$ ou Sym, ses périodes fondamentales peuvent être écrites comme des polynômes en les périodes fondamentales de ces motifs.

3. Dans le cas des courbes elliptiques, la conjecture de Deligne est compatible avec la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer, voir le chapitre 4 de [Del79].

4 Motifs associés aux représentations automorphes

4.1 Motifs associés aux formes automorphes

On note $\Gamma_1(N) := \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) : c \equiv 0, a \equiv d \equiv 1 \pmod N\}$. On fixe $f = \sum\limits_{n>0} a_n q^n$ une forme cuspidale normalisée de niveau $\Gamma_1(N)$. Par le théorème 1.2, on peut supposer $a_n \in \mathbb{Q}$ pour tout n. De plus, pour simplifier, on suppose que f est de poids 2.

On note $X = X_1(N)$ la compatification de $\Gamma_1(N)\backslash\mathcal{H}$. C'est la courbe modulaire, une courbe algébrique sur $\mathbb{Q}$ (voir chapitre 7 de [DS05]). Pour une variété X, on identifie X et $X(\mathbb{C})$ sauf indication exceptionnelle.

On note Ω_X^1 le $\mathbb{Q}$-espace des formes différentielles holomorphes sur $X_1(N)$. C'est un fibré vectoriel sur $X_1(N)$. On note $H^0(\Omega_X^1)$ l'espace des sections globales de ce fibré vectoriel et $H^0(\Omega_{X/\mathbb{C}}^1) = \mathbb{C} \otimes H^0(\Omega_X^1)$. Il est facile de voir que $f(z)dz$ appartient à $H^0(\Omega_{X/\mathbb{C}}^1)$.

En outre, pour $\omega \in H^0(\Omega_{X/\mathbb{C}}^1)$, on peut écrire localement $\omega(z) = f(z)dz$. Et par un petit calcul, on voit que f est une forme cuspidale de poids 2 et de niveau $\Gamma_1(N)$. On en déduit un isomorphisme :

$$S_2(\Gamma_1(N)) \xrightarrow{\sim} H^0(\Omega^1_{X/\mathbb{C}}).$$

On prend $J_1(N)$, la variété jacobienne de $X_1(N)$, elle est isomorphe à (voir [Mil86] section 2)

$$J_1(N) \cong \frac{H^0(\Omega^1_{X/\mathbb{C}})^\vee}{H_1(X_1(N))}.$$

Les opérateurs de Hecke T_p agissent sur $S_2(\Gamma_1(N))$, donc sur $H^0(\Omega^1_{X/\mathbb{C}})^\vee$. Ils préservent $H_1(X_1(N))$. Les T_p engendrent une algèbre $\mathbb{T}$. On note $\lambda_f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui envoit T_p vers a_p. Et on note son noyau I_f.

Théorème 4.1. *$E_f := J_1(N)/I_f J_1(N)$ est une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$.*

On associe un motif M_f à f où ses réalisations sont données par les cohomologies de E_f. On peut calculer $c^+(M_f)$ explicitement comme dans [Del79] section 7, c'est $\int_0^{i\infty} f(z)dz$.

De plus, on sait

$$L(f,s) = \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} \int_0^\infty f(it)t^s \frac{dt}{t}.$$

En particulier

$$L(f,1) = -2\pi i \int_0^{i\infty} f(z)dz.$$

Donc la conjecture de Deligne est vérifiée pour $M_f(1)$.

4.2 Motifs associés aux représentations automorphes

Pour certaines représentations automorphes, on sait comment leur associer un système compatible des représentations l-adiques. Le système existe dans certaines cohomologies de certaines variétés (la variété de Shimura). Et on peut définir (hypothétiquement) un motif à partir de telles représentations.

D'une part, on peut calculer les valeurs spéciales des fonctions L pour certaines représentations automorphes par des méthodes automorphes. Par exemple, si cette représentation est une induction automorphe d'un caractère de Hecke, on peut alors exprimer sa fonction L en terme de la fonction L de ce caractère. On a bien sûr des théories beaucoup plus avancées. Dans [Har97], M. Harris a déduit les valeurs spéciales en étudieant soigneusement les série d'Eisenstein et en appliquant la méthode double de Piatetski-Shapiro-Rallis.

D'autre part, on peut calculer les périodes de Deligne par des périodes automorphes (par exemple, la norme de Petterson de certaines formes automorphes). Dans la section 4 de [GH], H. Grobner et M. Harris ont donné des comparaisons plausibles entre la période de Deligne et les périodes automorphes.

Les méthodes automorphes offrent des attaques contre la conjecture de Deligne. De plus, elles donnent des résultats sur les valeurs spéciales de la fonction L directement, en particulier pour des représentations automorphes comme dans la conjecture de Ichino-Ikeda. Il y a aussi des résultats qui montrent que les valeurs spéciales en termes des périodes sont compatibles avec l'action de Galois. La thèse de l'auteure est sur la fonctorialité de certaines périodes automorphes.

Références

[BCDT01] C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond, and R. Taylor. On the modularity of elliptic curves over Q : wild 3-adic exercises. *J. A. M. S.*, 14(4) :843–939, 2001.

[BHD94] D. Blasius, M. Harris, and D.Ramakrishnan. Coherent cohomology, limits of discrete series, and Galois conjugation. *Duke Math. J*, 73 :647–686, 1994.

[Bum98] D. Bump. *Automorphic forms and representations.* Cambridge University Press, 1998.

[CSS97] G. Cornell, J. H. Silverman, and G. Stevens. *Modular forms and Fermat's last theorem.* Springer-Verlag, 1997.

[Del79] P. Deligne. Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales. In A. Borel and W. Casselman, editors, *Automorphic forms, representations and L-functions*, volume 33 of *Proceedings of the symposium in pure mathematics of the American mathematical society.* American Mathematical Society, 1979.

[Del80] P. Deligne. La conjecture de Weil II. *Publications mathématiques de l'I.H.E.S*, 52 :137–252, 1980.

[DS05] F. Diamond and J. Shurman. *A first course in modular forms.* Springer-Verlag, 2005.

[GH] H. Grobner and M. Harris. Whittaker periods, motivic periods, and special values of tensor product of L-functions.

[GH11] G. Goldfeld and J. Hundley. *Automorphic representations and L-functions for the general linear group, Volume 1*, volume 129 of *CSAM.* Cambridge University Press, 2011.

[GJ72] R. Godement and H. Jacquet. *Zeta Functions of Simple Algebras*, volume 260 of *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, 1972.

[Har97] M. Harris. L-functions and periods of polarized regular motives. *J. Reine Angew. Math*, (483) :75–161, 1997.

[KL06] A. Knightly and C. Li. *Traces of Hecke operators*, volume 133 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, 2006.

[Kud03] S. S. Kudla. From modular forms to automorphic representations. In J. Bernstein and S. Gerbart, editors, *An introduction to the Langlands program*, chapter 7. Birkhauser, 2003.

[Mil86] J. Milne. *Abelian Varieties*, chapter 5. Springer, 1986.

[Neu99] J. Neukirch. *Algebraic number theory*. Springer-Verlag, 1999.

[Wil95] A. Wiles. Modular elliptic curves and Fermat's last theorem. *Annals of Mathematics, Second Series*, 141(3) :443–551, 1995.

[Yos01] H. Yoshida. Motives and Siegel modular forms. *Amercian Jounal of Mathematics*, 123(6) :1171–1197, December 2001.