Introduction au domaine de recherche : Algèbres de von Neumann

Amine Marrakchi
sous la direction de Cyril Houdayer

2015

Introduction

Le but de ce texte est de présenter la théorie des *algèbres de von Neumann*, les principaux résultats dans ce domaine, ainsi que certains problèmes ouverts.

Historiquement, la théorie des algèbres de von Neumann tire ses origines de la physique. En effet, en mécanique quantique, l'algèbre a priori commutative des observables d'un système physique doit en fait être remplaçée par une algèbre non commutative d'observables opératorielles. C'est en cherchant à élaborer un cadre mathématique adéquat pour la mécanique quantique que Murray et von Neumann introduisent et développent à partir de 1936 la théorie des *rings of operators*, qu'on appelle aujourd'hui *algèbres de von Neumann*. Les fondements de leurs théorie sont exposés dans les sections 1 à 4.

Durant les années 70, Alain Connes révolutionne le domaine et donne, en particulier, une classification complète des algèbres de von Neumann *moyennables* (sections 5 et 6). Il l'inscrit ensuite dans une théorie plus générale, la *géométrie non commutative*, où la théorie des algèbres de von Neumann devient la théorie des "espaces mesurables non commutatifs".

Les algèbres de von Neumann ont aujourd'hui des applications et des liens avec des domaines très variés tels que la mécanique statistique quantique, la théorie ergodique, la théorie des représentations, la théorie des feuilletages, la théorie des invariants L^2 découverte par Atiyah (que j'ai étudiée durant mon mémoire de $M2$), la théorie des noeuds avec la découverte remarquable du polynôme de Jones (que j'ai étudiée durant mon mémoire de première année) et même la théorie des nombres. La meilleure référence pour tout cela est le livre d'Alain Connes [Con94].

Mais si la plupart des problèmes relatifs aux algèbres de von Neumann moyennables sont résolus, il en est tout autrement dans le cas non moyennable où plusieurs problèmes continuent à frustrer les spécialistes. Des progrès très récents, dûs entre autres à S.Popa, montrent que les algèbres de von Neumann peuvent exhiber des propriétés de rigidité très fortes dès que l'on s'éloigne du régime moyennable avec des retombées remarquables en théorie ergodique. Ceci est brièvement discuté dans la dernière section de ce texte.

1 Définition des algèbres de von Neumann

Dans cette section nous définissons les algèbres de von Neumann et énonçons leurs premières propriétés.

L'exemple fondamental d'algèbre de von Neumann sera $\mathrm{B}(H)$, l'algèbre des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert H. Cette algèbre est munie d'une opération particulière : l'opération d'*adjonction* $T \mapsto T^*$. C'est donc un exemple particulier d'$*$-*algèbre* au sens de la définition suivante :

Définition 1.1. Une $*$-*algèbre* est une $\mathbb{C}$-algèbre A (avec unité) munie d'une opération $a \mapsto a^*$ qui est :
- — involutive : $(a^*)^* = a$.
- — anti-linéaire : $(\lambda a + \mu b)^* = \bar{\lambda} a^* + \bar{\mu} b^*$.
- — anti-multiplicative : $(ab)^* = b^* a^*$.

Par analogie avec le cas de $B(H)$, on dit qu'un élément a d'une $*$-algèbre A est *normal* lorsque $a^*a = aa^*$, *auto-adjoint* lorsque $a^* = a$ et *positif* lorsqu'il existe $b \in A$ tel que $a = b^*b$.

Définition 1.2. Soit M une $*$-algèbre. On dit que M est une *algèbre de von Neumann* lorsqu'il existe une norme $||\cdot||$ sur M telle que :
1. $(M, ||\cdot||)$ est une algèbre de Banach.
2. Pour tout $x \in M$, $||x^*x|| = ||x||^2$.
3. Il existe un espace de Banach E tel que $M = E^*$.

Cette définition peut sembler étrange au premier abord car on demande seulement l'existence de la norme et de l'espace de Banach E. En réalité, et c'est une des premières propriétés remarquables des algèbres de von Neumann, la norme et l'espace de Banach E sont nécessairement uniques. Plus précisément,

Théorème 1.3 (Sakaï). *Soit M une algèbre de von Neumann. Soit $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ deux normes et E_1, E_2 deux espaces de Banach qui vérifient les conditions de la définition précédente. Alors $||\cdot||_1 = ||\cdot||_2$ et il existe un et un seul isomorphisme d'espaces de Banach $\theta : E_1 \to E_2$ dont l'application duale vérifie $\theta^* = \mathrm{id}_M$.*

En raison de cette propriété, on notera à partir de maintenant M_* l'espace de Banach qui vérifie $(M_*)^* = M$. On l'appellera le *prédual* de M. Notons, dès maintenant, qu'une algèbre de von Neumann possède ainsi deux topologies naturelles : la topologie uniforme issue de la norme $||\cdot||$ ainsi que la topologie faible-$*$ issue de la dualité avec M_*. On préfère voir les éléments de M_* comme des formes linéaires sur M grâce à l'inclusion canonqiue $M_* \subset (M_*)^{**} = M^*$. En général, M^* est beaucoup plus gros que M_*.

Si l'on veut utiliser une algèbre de von Neumann M pour représenter l'algèbre des observables d'un système quantique, il serait bon de pouvoir interpréter la norme $||\cdot||$ ainsi que le prédual M_*.

Pour la norme on dispose de l'identité suivante qui la relie au *spectre* : pour x normal on a

$$||x|| = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } x - \lambda \text{ n'est pas inversible dans } M\}$$

ce qui permet d'interpréter $||x||$ comme la plus grande valeur (en valeur absolue) que peut prendre l'observable x lors d'une mesure.

Le *prédual* M_* est quant à lui lié à la notion d'*état* d'un système en mécanique quantique.

Définition 1.4. Soit M une algèbre de von Neumann. Un *état* sur M est un élément $\omega \in M_*$ qui vérifie :
- — $\omega(x) \geq 0$ pour x positif (i.e de la forme $x = y^*y$ pour un $y \in M$).
- — $\omega(1) = 1$.

En mécanique quantique, le nombre $\omega(x)$ donne la valeur moyenne de l'observable x si on la mesure quand le système est dans l'état ω.

Maintenant, nous nous intéressons à l'exemple fondamental d'algèbre de von Neumann.

Proposition 1.5. *Soit H un espace de Hilbert de dimension quelconque. Alors l'$*$-algèbre* $\mathrm{B}(H)$ *est une algèbre de von Neumann.*

La norme de $\mathrm{B}(H)$ n'est pas difficile à deviner, c'est la *norme opérateur* :

$$||T|| = \sup_{||\xi||=1} ||T\xi||$$

En effet, $\mathrm{B}(H)$ est bien une algèbre de Banach pour cette norme et il est facile de vérifier l'identité $||T^*T|| = ||T||^2$. Il nous faut maintenant décrire le prédual $\mathrm{B}(H)_*$.

Les physiciens définissent l'état d'un système quantique par un vecteur normalisé $\xi \in H$ considéré "à une phase près". En fait, c'est une façon de dire qu'ils ne s'intéressent qu'à la forme linéaire

$$\omega_\xi : T \mapsto \langle \xi, T\xi \rangle$$

qui est bien un *état* sur $\mathrm{B}(H)$ au sens de la définition 1.4. En effet, on a

Proposition 1.6. *Soit H un espace de Hilbert. Alors le prédual* $\mathrm{B}(H)_* \subset \mathrm{B}(H)^*$ *est le sous-espace fermé de* $\mathrm{B}(H)^*$ *engendré par les ω_ξ pour $\xi \in H$.*

L'exemple de l'algèbre de von Neumann $\mathrm{B}(H)$ est fondamental en raison du théorème suivant. Il montre que toute algèbre de von Neumann peut être représentée comme une algèbre d'opérateurs sur un espace de Hilbert (mais de façon non canonique).

Définition 1.7. Soit M une algèbre de von Neumann. Soit N une sous-$*$-algèbre de M. On dit que N est une *sous-algèbre de von Neumann* de M lorsque N est fermée pour la topologie faible-$*$ de M. Dans ce cas, N est une algèbre de von Neumann, la norme de N est la restriction de la norme de M et le prédual N_* est le quotient de M_* par le sous-espace

$$N^\perp = \{\omega \in M_* \mid \omega_{|N} = 0\}$$

Théorème 1.8. *Toute algèbre de von Neumann est isomorphe à une sous-algèbre de von Neumann de* $\mathrm{B}(H)$ *pour un certain espace de Hilbert H.*

En réalité, c'est essentiellement ainsi, i.e comme des sous-$*$-algèbres fermées de $B(H)$ pour la topologie faible-$*$, que von Neumann a historiquement défini les algèbres qui portent son nom. La définition abstraite 1.2 est conceptuellement plus satisfaisante car elle n'implique pas un choix arbitraire d'une représentation sur un espace de Hilbert.

2 Algèbres de von Neumann commutatives

Dans cette partie, nous étudions les algèbres de von Neumann commutatives. Le but est de montrer que ce sont des algèbres d'observables "classiques", c'est-à-dire des algèbres de fonctions sur un espace. Plus précisément, nous allons voir que tout algèbre de von Neumann commutative est de la forme $L^\infty(\Omega)$ où Ω est un *espace mesurable*.

Toutefois, l'approche usuelle en théorie de la mesure souffre de plusieurs pathologies et distractions liées aux problèmes de non mesurabbilité, aux ensembles de mesures nulles et aux contraintes de dénombrabilité. Comme nous allons le voir, tous ces problèmes sont dûs au fait que l'on se force à modéliser les espaces mesurables comme des ensembles de *points*. Ici, nous allons exposer une approche différente où la notion fondamentale est celle de *partie* plutôt que celle de point.

L'ensemble des parties d'un espace mesurable sera modélisé par le concept d'*algèbre de Boole* qui remplace le concept de *tribu*.

Définition 2.1. Une *algèbre de Boole* [1] est un ensemble ordonné $\mathbb{A}$ tel que :

- Toute partie de $\mathbb{A}$ admet une borne inférieure et une borne supérieure (notées avec les symboles $\bigwedge$ et $\bigvee$ respectivement, on note 0 et 1 le plus petit élément et le plus grand élément de $\mathbb{A}$).
- Les opérations $\bigwedge$ et $\bigvee$ sont disributives l'une par rapport à l'autre.
- Pour tout $a \in \mathbb{A}$, il existe un élément $a^c \in \mathbb{A}$ tel que

$$a \vee a^c = 1$$

$$a \wedge a^c = 0$$

Lorsque X est un ensemble, l'ensemble $\mathfrak{P}(X)$ de toutes les parties de X est un exemple d'algèbre de Boole. C'est le cas *discret* (ou *atomique*). Mais il existe des algèbres de Boole très intéressantes qui n'ont pas d'atomes. On dit qu'elles sont *diffuses.*

Définition 2.2. Soit $\mathbb{A}$ une algèbre de Boole. Une *mesure* sur $\mathbb{A}$ est une application

$$\mu : \mathbb{A} \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

telle que :

- $\mu(0) = 0$.
- Pour tout $a \in \mathbb{A}$ et toute partition $(a_i)_{i\in I}$ de a (même infinie non dénombrable) on a

$$\mu(a) = \sum_{i\in I} \mu(a_i)$$

L'algèbre de Boole $\mathbb{A}$ est dite *mesurable* si elle vérifie la propriété suivante :
Pour tout $a \in \mathbb{A}$ avec $a \neq 0$, il existe une mesure μ sur $\mathbb{A}$ telle que $0 < \mu(a) < +\infty$.

La condition de mesurabilité sur une algèbre de Boole signifie qu'il y a suffisamment de mesures non triviales. Bien sûr, les algèbres de Boole discrètes (i.e de la forme $\mathfrak{P}(X)$ avec X un ensemble) sont mesurables mais ce ne sont pas les seules. On aboutit finalement à la définition principale de cette section :

Définition 2.3. Un *espace mesurable* Ω est défini par une algèbre de Boole mesurable, notée $\mathfrak{P}(\Omega)$, dont les éléments sont appelés les *parties* de Ω.

On verra un ensemble X quelconque comme un cas particulier d'espace mesurable associé à l'algèbre de Boole $\mathfrak{P}(X)$ et on dira que X est un espace mesurable discret. On adopte alors, pour des espaces mesurables généraux, des notations cohérentes avec cette identification :

Si Ω est un espace mesurable, l'élément 0 de $\mathfrak{P}(\Omega)$ sera noté $\emptyset$ et l'élément 1 sera noté Ω. Si $A, B \in \mathfrak{P}(\Omega)$, on notera $A \subseteq B$ plutôt que $A \preceq B$. Enfin, on utilisera les symboles $\bigcup$ et $\bigcap$ au lieu de $\bigvee$ et $\bigwedge$.

Il est possible de fonder la théorie de la mesure sur cette notion d'espace mesurable, avec des énoncés plus élégants et des preuves plus éfficaces. Toutefois, comme ce n'est pas le but de ce texte et aussi afin de ménager le lecteur de tendance conservatrice, nous allons simplement noter que lorsque $(X, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace mesuré σ-fini classique, l'ensemble des éléments de la tribu $\mathcal{T}$ quotienté par les ensembles de mesure nulle est une algèbre de Boole mesurable $\mathfrak{P}(\Omega)$. De plus, l'algèbre $L^\infty(X, \mathcal{T}, \mu)$ ne dépend pas vraiment de la mesure μ mais seulement de Ω. Ayant cela en tête, le lecteur pourra traduire, s'il le souhaite, tous les énoncés futurs en termes d'espaces mesurés classiques, en remplaçant "fonction" par "fonction mesurable modulo égalité presque partout", "partie" par "partie mesurable modulo un ensemble de mesure nulle" etc.

1. Plus précisément, il s'agit ici d'algèbres de Boole complètes et complètements distributives

Théorème 2.4. *Soit Ω un espace mesurable. Soit $L^\infty(\Omega)$ la $*$-algèbre des fonctions bornées de Ω dans $\mathbb{C}$.*

Alors $L^\infty(\Omega)$ est une algèbre de von Neumann commutative. La norme de $L^\infty(\Omega)$ est la norme uniforme $||\cdot||_\infty$ et le prédual $L^\infty(\Omega)_*$ s'identifie à l'espace des mesures à valeurs complexes sur Ω.

Toute algèbre de von Neumann commutative est de cette forme.

Expliquons brièvement comment on retrouve l'espace mesurable Ω à partir d'une algèbre de von Neumann commutative M. L'idée est de considérer l'ensemble de toutes les *projections* :

$$\mathcal{P}_M = \{p \in M \mid p^* = p \text{ et } p^2 = p\}$$

qui devraient, intuitivement, correspondre aux fonctions indicatrices des parties de Ω. Et effectivement, on montre, en utilisant la commutativité de M, que $\mathcal{P}_M$ est une algèbre de Boole mesurable pour la relation d'ordre

$$p \preceq q \Leftrightarrow pq = p$$

On définit alors Ω par $\mathfrak{P}(\Omega) = \mathcal{P}_M$ et on montre que $M = L^\infty(\Omega)$.

En raison de ce théorème, la théorie des algèbres de von Neumann est souvent considérée comme une généralisation non commutative de la théorie de la mesure et elle s'en inspire fortement. Par exemple, nous verrons que les projections continuent à jouer un rôle crucial dans l'analyse des algèbres de von Neumann non commutatives et il est souvent utile de les voir comme les parties d'un prétendu "espace mesurable non commutatif". De même, la notion de *poids*, qui est la généralisation de la notion de mesure au cas non commutatif, est d'une importance capitale dans la théorie :

Définition 2.5. Soit M une algèbre de von Neumann. Soit

$$M_+ = \{x \in M \mid \exists y \in M,\ x = y^* y\}$$

le *cône positif* de M.

Un *poids* sur M est une application $\varphi : M_+ \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ qui est :

— *linéaire* : $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y)$ pour tout $\lambda, \mu > 0$ et $x, y \in M_+$.

— *semi-continue inférieurement* : $\varphi(x) = \sup_i \varphi(x_i)$ pour toute suite $(x_i)_{i \in I} \in M_+$ qui croît vers $x \in M_+$.

Lorsque $M = L^\infty(\Omega)$, les mesures sur Ω correspondent aux poids sur M grâce à la théorie de l'intégration.

$$\varphi(f) = \int_\Omega f d\mu$$

La propriété de semi-continuité inférieure de φ est la traduction de la propriété de convergence monotone.

Dans le cas où M est une algèbre de von Neumann quelconque, la notion de poids permet de développer toute une théorie de l'intégration non commutative où on peut généraliser le théorème de convergence dominée, le théorème de Radon-Nikodym, la théorie des espaces L^p etc.

Lorsque φ est un poids *fini*, i.e $\varphi(1) < +\infty$, il s'étend naturellement en une forme linéaire $\varphi \in M_*$. En particulier, lorsque $\varphi(1) = 1$ alors φ est un *état* au sens de la définition 1.4.

Une paire (M, φ) constituée d'une algèbre de von Neumann et d'un état φ est l'analogue non commutatif d'un espace de probabilité. Les probabilités non commutatives ainsi que leur variante libre constituent aujourd'hui un sujet de recherche très actif (voir [VDN92]).

3 Facteurs et classification en types

Une fois que l'on a introduit les algèbres de von Neumann, la question qui se pose naturellement est celle de leur classification à isomorphisme près. C'est ce problème qui va nous intéresser à partir de maintenant. Afin d'éviter des petites distractions liées à la cardinalité, nous allons à partir de maintenant faire l'hypothèse technique que toutes les algèbres de von Neumann considérées ont un prédual séparable (en tant qu'espace de Banach).

Pour commencer, la classification des algèbres de von Neumann commutative est assez simple. Par le théorème 2.4, cela revient à classifier les espaces mesurables. Or on montre facilement que tout espace mesurable Ω se décompose en deux parties : une partie *discrète* (ou *atomique*) et une partie *diffuse* (sans atomes). La partie discrète est simplement un ensemble. Pour ce qui est de la partie diffuse on a :

Théorème 3.1. *A isomorphisme près, il existe un unique espace mesurable non vide diffus.*

Ainsi, le monde des algèbres de von Neumann commutatives est assez pauvre. Comme on le verra, le monde non commutatif est beaucoup plus riche.

Afin de s'attaquer à la classification des algèbres de von Neumann quelconques, Murray et von Neumann s'intéressent à une classe très spéciale d'algèbres de von Neumann :

Définition 3.2. Soit M une algèbre de von Neumann. On dit que M est un *facteur* lorsque le centre de M

$$\mathcal{Z}(M) = \{a \in M \mid \forall b \in M,\ ab = ba\}$$

est réduit aux scalaires :

$$\mathcal{Z}(M) = \mathbb{C}$$

Les facteurs sont donc les algèbres de von Neumann les "moins commutatives" en un certain sens. Par exemple, $\mathrm{B}(H)$ est un facteur pour tout espace de Hilbert H.

Les facteurs sont importants pour la raison suivante. Si M est une algèbre de von Neumann quelconque, alors $\mathcal{Z}(M)$ est une algèbre de von Neumann commutative et s'écrit donc $\mathcal{Z}(M) = L^\infty(\Omega)$ pour un certain espace mesurable Ω. Murray et von Neumann montrent alors que M se décompose de façon unique en un *champ de facteurs* au-dessus de Ω. Peu importe l'énoncé précis, ce qu'il faut retenir est que pour classifier toutes les algèbres de von Neumann il suffit de classifier les facteurs.

Pour analyser les facteurs, Murray et von Neumann posent la définition suivante :

Définition 3.3 (Murray et von Neumann)**.** Soit M une algèbre de von Neumann. On dit que deux projections $p, q \in \mathcal{P}_M$ sont équivalentes dans M lorsqu'il existe $u \in M$ tel que

$$p = u^*u \text{ et } q = uu^*$$

et on note alors $p \sim_M q$.

Bien sûr, cette définition ne sert à rien dans le cas commutatif. Elle devient fondamentale lorsque M est un facteur. Il faut voir u comme un unitaire qui va de p vers q et il est intuitif de penser à deux projections équivalentes comme ayant la même "taille".

Le théorème suivant justifie cette intuition.

Théorème 3.4 (Muray et von Neumann)**.** *Soit M un facteur*[2]*. Alors il existe un poids φ sur M, unique à un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ près, tel que :*

$$\forall p, q \in \mathcal{P}_M,\ p \sim_M q \Longleftrightarrow \varphi(p) = \varphi(q)$$

2. séparable, encore

Murray et von Neumann analysent ensuite l'ensemble des valeurs du poids φ et en déduisent une classification des facteurs en différents types.

Proposition 3.5 (Muray et von Neumann)**.** *Soit M un facteur et soit φ le poids du théorème précédent. Alors, à une renormalisation près, le sous-ensemble*

$$\{\varphi(p) \mid p \in \mathcal{P}_M\} \subseteq \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$$

coincide avec l'un des ensemble suivants :

$\{0, 1, 2, \cdots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$,	et on dit alors que M est de type	I_n
$\{0, 1, 2, \cdots, \infty\}$		I_∞
$[0, 1]$		II_1
$[0, +\infty]$		II_∞
$\{0, \infty\}$		III

Les facteurs de type I_n pour $n \in \mathbb{N}$ sont bien connus. En effet, on montre que ce sont exactement les algèbres de matrices $M_n(\mathbb{C})$. Le poids φ, qui est fini dans ce cas, est donné par la trace tr usuelle (à un scalaire près). Deux projections p et q sont équivalentes si et seulement si elles ont la même trace, c'est-à-dire le même *rang*. Un élément $u \in M_n(\mathbb{C})$ qui vérifie $p = u^*u$ et $q = uu^*$ est en fait un unitaire de $\mathrm{Im}(p)$ vers $\mathrm{Im}(q)$.

De même, on montre qu'il existe un unique facteur (séparable) de type I_∞, c'est $\mathrm{B}(H)$ pour H un espace de Hilbert de dimension infinie (séparable). La seule différence avec le cas I_n est que la trace n'est plus finie. Elle est donnée par

$$\mathrm{tr}(T) := \sum_{i \in I} \langle \xi_i, T\xi_i \rangle \quad \text{pour } T \in \mathrm{B}(H)_+$$

où $(\xi_i)_{i \in I}$ est une base orthonormée quelconque de H.

Qu'en est-il des autres cas ? Existe-t-il des exemples de facteurs autres que les facteurs de type I ? La réponse est oui et nous verrons des exemples dans la partie suivante.

Dans les facteurs de type II, tout se passe comme si le rang des projections pouvait varier continûement au lieu de ne prendre que des valeurs entières discrètes. Le poids φ du théorème 3.4 a une caractérisation très satisfaisante qui en fait l'analogue parfait de la trace.

Définition 3.6. Soit M une algèbre de von Neumann. Un poids φ est dit

— *tracial* lorsque
$$\forall x \in M,\ \varphi(x^*x) = \varphi(xx^*)$$

— *non trivial* lorsque φ n'est ni le poids nul, ni le poids purement infini ($\varphi(x) = \infty$ pour tout $x \in M_+ \setminus \{0\}$).

Proposition 3.7. *Soit M un facteur qui n'est pas de type* III. *Alors le poids φ du théorème 3.4 est, à un scalaire près, l'unique poids tracial non trivial sur M. On le note en général τ.*

De plus, quand le facteur M est de type II_1, le poids tracial τ est fini et on peut le normaliser de sorte que $\tau(1) = 1$. Il s'étend alors en une forme linéaire $\tau \in M_*$ qui vérifie $\tau(xy) = \tau(yx)$ pour tout $x, y \in M$. τ est appelée l'*état tracial* de M. Il est l'analogue non commutatif d'une mesure de probabilité canonique sur M.

Reste le cas des facteurs de type III. Ce sont les seuls facteurs pour lesquel le poids du théorème 3.4 est trivial. Il est purement infini et toutes les projections non nulles sont équivalentes. Pour cette raison, von Neumann considéra les facteurs de type III comme étant pathologiques et douta même pendant un moment de leur existence. En réalité, les facteurs de type III sont très intéressants mais la richesse de leur structure ne peut être révélée que grâce à *la théorie modulaire* que nous verrons plus loin.

4 Exemples

Dans cette partie, on donne des exemples de constructions intéressantes d'algèbres de von Neumann en lien avec la théorie des groupes et les systèmes dynamiques. Une référence générale pour cette partie est le chapitre 13 de [Tak01b].

Définition 4.1. Soit Γ un groupe discret. Considérons l'espace de Hilbert $\ell^2(\Gamma)$. Pour tout $g \in \Gamma$, définissons un unitaire $u_g \in \mathrm{B}(\ell^2(\Gamma))$ par

$$(u_g \cdot \xi)(h) = \xi(g^{-1}h) \text{ pour tout } \xi \in \ell^2(\Gamma)$$

La sous-algèbre de von Neumann de $\mathrm{B}(\ell^2(\Gamma))$ engendrée par les unitaires $\{u_g \mid g \in \Gamma\}$ est notée $L(\Gamma)$.

Un fait remarquable est que l'algèbre de von Neumann $L(\Gamma)$ possède une trace canonique.

Proposition 4.2. *Soit Γ un groupe discret. Soit $\delta_e \in \ell^2(\Gamma)$ la suite qui vaut 1 sur l'élément neutre $e \in \Gamma$ et 0 ailleurs. Pour tout $x \in L(\Gamma)$, posons*

$$\tau(x) = \langle \delta_e, x\delta_e \rangle$$

Alors τ est un état tracial fidèle sur $L(\Gamma)$.

Il est clair que $L(\Gamma)$ est commutative si et seulement si Γ est commutatif. Dans ce cas, $L(\Gamma)$ doit être de la forme $L^\infty(\Omega)$ pour un certain espace mesurable Ω. En fait, on montre, lorsque Γ est commutatif, que $L(\Gamma)$ est canoniquement isomorphe à $L^\infty(\hat{\Gamma}, \mu)$ où $\hat{\Gamma}$ est le *dual de Pontryagin* de Γ, i.e le groupe compact formé par les caractères

$$\hat{\Gamma} := \hom(\Gamma, \mathbb{U})$$

et μ est la mesure de Haar sur $\hat{\Gamma}$.

La trace τ sur $L(\Gamma)$ s'identifie alors à la mesure μ. L'exemple le plus simple est $\Gamma = \mathbb{Z}$ et $\hat{\Gamma} = \mathbb{S}_1$.

Lorsque Γ n'est pas commutatif, la dualité de Pontryagin classique ne fonctionne plus, mais du point de vue de la géométrie non commutative, il est utile d'imaginer que $\hat{\Gamma}$ est maintenant un espace non commutatif pour lequel on aurait $L^\infty(\hat{\Gamma}) \simeq L(\Gamma)$ et où τ serait la mesure de Haar de $\hat{\Gamma}$. La théorie des *groupes quantiques* développe cette idée et bien plus encore.

Enfin, lorsque Γ est suffisamment non commutatif, on obtient un facteur :

Proposition 4.3. *Soit Γ un groupe discret. Alors $L(\Gamma)$ est un facteur si et seulement si toutes les classes de conjugaisons (non triviales) de Γ sont infinies.*

Lorsque $L(\Gamma)$ est un facteur, il est forcément de type II_1 puisqu'il possède un état tracial τ. De plus, il est très facile de donner des exemples de groupes discrets à classes de conjugaisons infinies. C'est le cas des groupes libre $\mathbb{F}_n$, $n \geq 2$ par exemple. On obtient donc :

Corollaire 4.4. *Il existe des facteurs de type II_1.*

Maintenant, on va donner une autre construction d'algèbres de von Neumann à partir d'une action d'un groupe discret sur un espace mesurable.

Définition 4.5. Une *action* d'un groupe discret Γ sur un espace mesurable Ω est un morphisme

$$\sigma : \Gamma \to \mathrm{Aut}(\Omega)$$

L'action σ est dite *libre* lorsque

— pour tout $g \in \Gamma$ et $A \subseteq \Omega$ on a

$$\sigma(g)_{|A} = \mathrm{Id} \Rightarrow g = 1 \text{ ou } A = \emptyset$$

A partir d'une action σ d'un groupe discret Γ sur un espace mesurable Ω, on obtient une action, qu'on note encore σ, de Γ sur $L^\infty(\Omega)$ définie par

$$\sigma(g)(f) = f \circ \sigma(g^{-1})$$

On peut alors à partir de cette donnée construire une algèbre de von Neumann $\Gamma \ltimes_\sigma L^\infty(\Omega)$ qui est le *produit croisé* de Γ et de $L^\infty(\Omega)$. Plutôt que de détailler la construction de $\Gamma \ltimes_\sigma L^\infty(\Omega)$, contentons-nous juste de dire qu'elle est engendrée par une copie de $L^\infty(\Omega)$ et une copie de $L(\Gamma)$ qui sont liées par les relations

$$\forall g \in \Gamma, \forall f \in L^\infty(\Omega),\ u_g f u_g^* = \sigma(g)(f)$$

où les $(u_g)_{g\in\Gamma}$ sont les unitaires canonique de $L(\Gamma)$.

Sous l'hypothèse que l'action est libre, il est très facile de déterminer le centre de $\Gamma \ltimes_\sigma L^\infty(\Omega)$.

Proposition 4.6. *Soit* $\sigma : \Gamma \to \mathrm{Aut}(\Omega)$ *une action libre. Alors*

$$\mathcal{Z}(\Gamma \ltimes_\sigma L^\infty(\Omega)) = \{f \in L^\infty(\Omega) \mid \forall g \in \Gamma,\ \sigma(g)(f) = f\}$$

On peut reformuler cette propriété en identifiant les fonctions invariantes aux fonctions sur le *quotient* Ω/Γ. Plus précisément, on vérifie que l'ensemble des parties invariantes

$$\mathfrak{P}(\Omega)^\sigma = \{A \subseteq \Omega \mid \forall g \in \Gamma,\ \sigma(g)(A) = A\}$$

est une algèbre de Boole mesurable. On note alors Ω/Γ l'espace mesurable défini par

$$\mathfrak{P}(\Omega/\Gamma) = \mathfrak{P}(\Omega)^\sigma$$

et on obtient une identification

$$L^\infty(\Omega/\Gamma) = \{f \in L^\infty(\Omega) \mid \forall g \in \Gamma,\ \sigma(g)(f) = f\} = \mathcal{Z}(\Gamma \ltimes_\sigma L^\infty(\Omega))$$

Maintenant, la condition pour que $\Gamma \ltimes_\sigma L^\infty(\Omega)$ soit un facteur est claire :

Proposition 4.7. *Soit* $\sigma : \Gamma \to \mathrm{Aut}(\Omega)$ *une action libre. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

— $\Gamma \ltimes_\sigma L^\infty(\Omega)$ *est un facteur.*

— Ω/Γ *est réduit à un point.*

— *Les seules parties de* Ω *invariantes sous l'action de* Γ *sont* $\emptyset$ *et* Ω.

— *Les seuls fonctions* $f \in L^\infty(\Omega)$ *invariantes sous l'action de* Γ *sont les fonctions constantes.*

Lorsque ces conditions sont vérifiées, on dit que l'action σ *est* ergodique.

Maintenant, nous allons déterminer le type du facteur $\Gamma \ltimes_\sigma L^\infty(\Omega)$ pour une action libre ergodique σ.

D'abord remarquons que l'ergodicité assure que Ω est soit discret, soit diffus (sinon, la partie diffuse et la partie discrète serait des parties invariantes non triviales).

Autre conséquence de l'ergodicité : si μ est une mesure non triviale sur Ω invariante sous l'action σ alors elle est nécessairement unique à un scalaire près. De plus, elle s'étend naturellement en un poids tracial sur $\Gamma \ltimes_\sigma L^\infty(\Omega)$.

On a alors la classification suivante :

Théorème 4.8. *Soit $\sigma : \Gamma \to \mathrm{Aut}(\Omega)$ une action libre ergodique. Le facteur $\Gamma \ltimes_\sigma L^\infty(\Omega)$ est :*

- *de type* I *si et seulement si Ω est discret. Dans ce cas, il est de type* I_n *si Ω est fini de cardinal n et de type* I_∞ *sinon. La mesure de comptage est une mesure invariante non triviale.*
- *de type* II *si et seulement si Ω est diffus et admet une mesure invariante non triviale. Dans ce cas, il est de type* II_1 *si μ est finie et de type* II_∞ *sinon.*
- *de type* III *si et seulement si Ω est diffus et n'admet pas de mesure invariante non triviale.*

5 Théorie modulaire

Le développement de la théorie modulaire, essentiellement par Tomita, Takesaki et Connes, a permis de faire un grand pas en avant dans la compréhension des algèbres de von Neumann. En un certain sens, on peut la voir comme une généralisation non commutative du théorème de Radon-Nikodym.

Commençons par rappeler le théorème de Radon-Nikodym

Définition 5.1. Soit Ω un espace mesurable et soit μ une mesure sur Ω. On dit que μ est

- *fidèle* lorsque
$$\forall A \subseteq \Omega,\ \mu(A) = 0 \Rightarrow A = \emptyset$$
- *semi-finie* lorsque
$$\Omega = \bigcup_{\mu(A) < +\infty} A$$

Théorème 5.2 (Radon-Nikodym)**.** *Soit Ω un espace mesurable et soit μ et ν deux mesures semi-finies fidèles sur Ω. Alors il existe une et une seule fonction $h : \Omega \to \mathbb{R}_+^*$ telle que*

$$\forall f \geq 0,\ \int_\Omega f d\nu = \int_\Omega f h d\mu$$

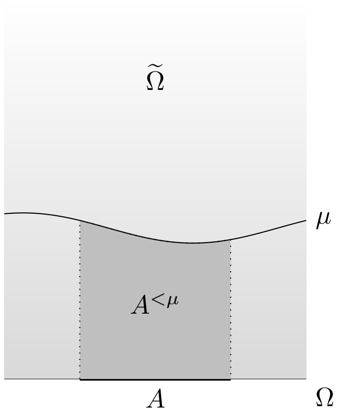
relation que l'on note $\nu = h \cdot \mu$

Une façon de reformuler le théorème de Radon-Nikodym est de dire que les mesures semi-finies fidèles sont exactement les sections d'un certain $\mathbb{R}_+^*$-fibré principal au dessus de Ω (c'est-à-dire que $\mathbb{R}_+^*$ agit librement et transitivement sur les fibres). On appellera ce fibré le *fibré modulaire* de Ω. On va voir que ce point de vue est celui qui va bien se généraliser au cas non commutatif.

Une propriété remarquable du fibré modulaire est qu'il possède une mesure semi-finie fidèle complètement canonique qu'on appelle la *mesure modulaire*. Sans détailler formellement, il s'agit de l'unique mesure τ qui, pour toute partie $A \subseteq \Omega$ et toute mesure semi-finie fidèle μ sur Ω, vérifie

$$\tau(A^{<\mu}) = \mu(A)$$

où $A^{<\mu}$ est la partie du fibré qui est au-dessus de A et en-dessous de la section μ (voir le dessin ci-dessous).



On peut donc voir l'espace total du fibré modulaire comme un espace mesurable $\widetilde{\Omega}$ muni d'une mesure semi-finie fidèle τ. L'action de $\mathbb{R}_+^*$ le long des fibres donne un groupe à un paramètre d'automorphismes de $\widetilde{\Omega}$ noté

$$\mathbb{R}_+^* \ni \lambda \mapsto \theta_\lambda \in \mathrm{Aut}(\widetilde{\Omega})$$

qui a la propriété de *dilater* la mesure τ :

$$\tau \circ \theta_\lambda = \lambda\tau$$

Et enfin, on dispose d'une projection $\pi : \widetilde{\Omega} \to \Omega$ qui identifie Ω au quotient de $\widetilde{\Omega}$ par $\mathbb{R}_+^*$.

Le théorème suivant (voir [Tak01a]) montre qu'on peut associer à n'importe quelle algèbre de von Neumann un objet qui est l'analogue parfait du fibré modulaire $(\widetilde{\Omega}, \tau, \theta, \pi)$.

Théorème 5.3 (Tomita-Takesaki, Connes)**.** *Soit M une algèbre de von Neumann. Alors il existe un quadruplet $(\widetilde{M}, \tau, \theta, \iota)$ canoniquement associé à M tel que :*

— *$\widetilde{M}$ est une algèbre de von Neumann.*

— *τ est un poids tracial semi-fini fidèle sur $\widetilde{M}$.*

— *$\theta = (\theta_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}_+^*}$ est une action de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\widetilde{M}$ qui vérifie*

$$\tau \circ \theta_\lambda = \lambda\tau$$

— *$\iota : M \to \widetilde{M}^\theta$ est un isomorphisme de M sur l'algèbre des points fixes :*

$$\widetilde{M}^\theta = \{x \in \widetilde{M} \mid \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ \theta_\lambda(x) = x\}$$

*On appelle $\widetilde{M}$ l'*algèbre modulaire *de M.*

En général, on voit M comme étant une sous-algèbre de $\widetilde{M}$ grâce à l'inclusion ι. L'algèbre modulaire est fonctorielle au sens où si $\alpha : M \to N$ est un isomorphisme d'algèbres de von Neumann alors il se prolonge de façon unique en un isomorphisme $\widetilde{\alpha} : \widetilde{M} \to \widetilde{N}$ qui commute avec l'action θ et qui préserve τ.

L'algèbre modulaire joue un rôle fondamental pour comprendre les facteurs de type III. En effet, quelque soit l'algèbre de von Neumann M, l'algèbre modulaire associée $\widetilde{M}$ admet toujours un poids tracial. Ainsi, en théorie, on peut ramener l'étude des facteurs de type III à l'étude des facteurs de type II.

Regardons en guise d'exemple ce que donne tout cela pour une algèbre de von Neumann de la forme $\Gamma \ltimes_\sigma L^\infty(\Omega)$ où $\sigma : \Gamma \to \mathrm{Aut}(\Omega)$ une action libre sans mesure invariante (i.e de type III).

Soit $\widetilde{\Omega}$ le fibré modulaire de Ω. Alors σ se relève naturellement en une action libre $\widetilde{\sigma} : \Gamma \to \mathrm{Aut}(\widetilde{\Omega})$ qui commute avec l'action θ et qui préserve la mesure modulaire τ.

On peut alors former le produit croisé $\Gamma \ltimes_{\widetilde{\sigma}} L^\infty(\widetilde{\Omega})$.

Proposition 5.4. *L'algèbre modulaire de $\Gamma \ltimes_\sigma L^\infty(\Omega)$ s'identifie naturellement à*

$$\Gamma \ltimes_{\widetilde{\sigma}} L^\infty(\widetilde{\Omega})$$

En fait, l'action de Γ sur $\widetilde{\Omega}$ encode la façon dont Γ dillate ou contracte les mesures sur Ω. Un fait intéressant est que même lorsque l'action initiale σ est ergodique, il est tout à fait possible que l'action $\widetilde{\sigma}$ ne soit pas ergodique. En effet, il est possible que Γ ne puisse pas dillater les mesures de n'importe quelle façon. On en déduit un invariant intéressant pour l'action : l'espace quotient $W_\sigma = \widetilde{\Omega}/\Gamma$ qui s'identifie au centre de $\Gamma \ltimes_{\widetilde{\sigma}} L^\infty(\widetilde{\Omega})$.

Cet invariant peut en fait se définir de façon générale.

Définition 5.5 (Connes [Con73])**.** Soit M un facteur de type III. Soit W_M l'espace mesurable défini par

$$L^\infty(W_M) = \mathcal{Z}(\widetilde{M})$$

L'action θ sur $\widetilde{M}$ préserve $\mathcal{Z}(\widetilde{M})$ et induit donc une action, encore notée θ, de $\mathbb{R}_+^*$ sur W_M. La paire (W_M, θ) s'appelle le *flot des poids* de M.

Le noyau S du morphisme $\theta : \mathbb{R}_+^* \to \mathrm{Aut}(W_M)$ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}_+^*$. On dit que M est de type :

— III_0 lorsque $S = \{1\}$.

— III_λ lorsque $S = \lambda^{\mathbb{Z}}$ pour un certain $\lambda \in]0,1[$.

— III_1 lorsque $S = \mathbb{R}_+^*$.

6 Classification des facteurs moyennables

Murray et von Neumann ont très tôt démontré le théorème suivant.

Définition 6.1. Soit M une algèbre de von Neumann. On dit que M est *hyperfinie* lorsqu'il existe une suite croissante $(A_n)_{n\geq 1}$ de sous-$*$-algèbres de dimension finie telle que M est engendrée par

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n$$

Théorème 6.2 (Murray et von Neumann)**.** *Il existe un et un seul facteur hyperfini de type* II_1.

Ils donnent comme exemple d'un tel facteur l'algèbre $L(\Gamma)$ d'un groupe localement fini (i.e qui est réunion croissante de sous-groupes finis) à classes de conjuguaisons infinies. Par exemple, $\Gamma = S_\infty$, le groupe des permutations de $\mathbb{N}$ à supports finis, convient.

Ils montrent aussi

Théorème 6.3 (Murray et von Neumann)**.** *Les facteurs des groupes libres $L(\mathbb{F}_n)$ pour $n \geq 2$ ne sont pas hyperfinis.*

Bien plus tard, Alain Connes établit une équivalence fondamentale entre l'hyperfinitude et une autre propriété d'approximation d'apparence beaucoup plus faible, la *moyennabilité* ([Con76]). Sans définir la moyennabilité, disons seulement que la classe d'algèbres de von Neumann ainsi obtenue est assez large et contient, en plus des algèbres de von Neumann commutatives et des facteurs de type I, toutes les algèbres de von Neumann de la forme $L(\Gamma)$ où Γ est un groupe discret moyennable ainsi que les produits croisés $\Gamma \ltimes_\sigma L^\infty(\Omega)$ où l'action σ est moyennable.

Grâce à la théorie modulaire et ce théorème fondamental de Connes (ainsi que le travail de feu U.Haagerup qui compléta le cas III_1), on dispose aujourd'hui d'une classification complète des facteurs moyennables. On a en effet :

Théorème 6.4. *De chacun des types suivants, il existe, à isomorphisme près, un et un seul facteur moyennable (ou hyperfini) :*
- I_n *pour* $n \in \mathbb{N}$
- I_∞
- II_1
- II_∞
- III_λ *pour* $0 < \lambda \leq 1$

Tandis que les classes d'isomorphismes de facteurs moyennables de type III_0 *sont en bijection naturelle avec les flots ergodiques intransitifs de* $\mathbb{R}_+^*$*. Cette bijection est donnée par le flot des poids*

$$M \mapsto (W_M, \theta)$$

De plus, tous ces facteurs peuvent être obtenus comme des produits croisés $\mathbb{Z} \ltimes_\sigma L^\infty(\Omega)$ pour une action σ libre et ergodique du groupe $\mathbb{Z}$.

7 Au-delà du cas moyennable

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, les algèbres de von Neumann moyennables sont très bien comprises. Aujourd'hui, la recherche se concentre donc surtout sur le cas non moyennable où il y a encore beaucoup à faire. Par exemple, on sait très peu de choses sur les algèbres $L(\Gamma)$ dès que Γ n'est pas moyennable et le problème suivant est encore ouvert :

Problème 7.1. *Les facteurs* II_1 *des groupes libres* $L(\mathbb{F}_n)$ *et* $L(\mathbb{F}_m)$ *sont-ils isomorphes pour* $n, m \geq 2$ *et* $n \neq m$ *?*

Plus généralement, on se pose la question suivante :

Problème 7.2. *Soit* Γ *et* Λ *deux groupes discrets non moyennables. A quelle condition un isomorphisme*

$$L(\Gamma) \simeq L(\Lambda)$$

implique-t-il que $\Gamma \simeq \Lambda$ *?*

Un autre problème similaire auquel la communauté s'intéresse est le suivant :

Problème 7.3. *Soit* $\sigma : \Gamma \to \mathrm{Aut}(\Omega)$ *et* $\sigma' : \Gamma' \to \Omega'$ *deux actions libres ergodiques avec* Γ *et* Γ' *non moyennables.*

A quelle condition un isomorphisme des facteurs

$$\Gamma \rtimes_\sigma L^\infty(\Omega) \simeq \Gamma' \rtimes_{\sigma'} L^\infty(\Omega')$$

implique-t-il que les actions σ *et* σ' *sont* conjuguées *(i.e* $\Gamma = \Gamma'$ *et il existe un isomorphisme* $\Omega \to \Omega'$ *qui entrelace* σ *et* σ'*) ?*

Récemment, grâce à de nouvelles techniques de *déformation/rigidité* qu'il a mises au point, S.Popa a permis des avancées remarquables sur ces problèmes (voir [Vae07]) avec des retombées importantes en théorie ergodique (voir [Hou11]). Voici un exemple du genre de résultat que l'on peut obtenir.

Théorème 7.4 (Popa). *Soit Γ un groupe discret avec la propriété de Kazhdan. Soit $(\Omega, \mu) = (\Omega_0, \mu_0)^\Gamma$ le processus de Bernoulli indéxé par Γ associé à un espace de probabilité (Ω_0, μ_0) et considérons l'action $\sigma : \Gamma \to \mathrm{Aut}(\Omega)$ par décalage.*

Si une autre action libre ergodique $\sigma' : \Gamma' \to \mathrm{Aut}(\Omega')$ vérifie

$$\Gamma \rtimes_\sigma L^\infty(\Omega) \simeq \Gamma' \rtimes_{\sigma'} L^\infty(\Omega')$$

alors $\Gamma = \Gamma'$ et les actions σ et σ' sont conjuguées.

Une autre approche, qu'on doit à N.Ozawa ([Oza06]), repose sur des techniques de topologie non commutative, i.e la théorie des C^**-algèbres*.

Durant ma thèse, j'essaierai d'utiliser ces méthodes afin de généraliser certains résultats sur les actions de Bernoulli ainsi que leur généralisation non commutative.

Références

[Con73] A. Connes. Une classification des facteurs de type III. 1973.

[Con76] A. Connes. Classification of injective factors. 1976.

[Con94] A. Connes. *Géométrie non commutative.* Academic press, 1994.

[Hou11] C. Houdayer. Invariant percolation and measured theory of non-amenable groups. 2011.

[Oza06] N. Ozawa. Amenable actions and applications. 2006.

[Tak01a] M. Takesaki. *Operator Algebra II.* Springer, 2001.

[Tak01b] M. Takesaki. *Operator Algebra III.* Springer, 2001.

[Vae07] S. Vaes. Rigidity results for Bernoulli actions and their von Neumann algebras. 2007.

[VDN92] D. V. Voiculescu, K. J. Dykema, and A. Nica. *Free random variables.* American Mathematical Soc., 1992.