

**INTRODUCTION AU DOMAINE DE RECHERCHE:
VARIÉTÉS DE NAKAJIMA ET THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES
REPRÉSENTATIONS DES ALGÈBRES DE HALL**

ALIAKSANDR MINETS

Dans cet exposé nous sommes intéressés par les moyens géométriques de la construction des algèbres de Lie semisimples, des algèbres de Hall et de leurs représentations. On commence avec le cas le plus simple : l'algèbre \mathfrak{sl}_2 . On va toujours travailler sur le corps \mathbb{C} sauf indication contraire.

1. ALGÈBRE \mathfrak{sl}_2 ET SES REPRÉSENTATIONS

On rappelle que l'algèbre $\mathfrak{sl}_2 = \{A \in \text{End}(\mathbb{C}^2) : \text{Tr } A = 0\}$ est munie d'un crochet de Lie donné par $[A, B] = AB - BA$, et elle est complètement déterminée par sa base

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

avec des relations

$$(1) \quad [H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F, \quad [E, F] = H.$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}_0$ on a l'unique représentation irréductible V_n de \mathfrak{sl}_2 de dimension $n + 1$. Si on fixe une base (v_0, \dots, v_n) de V_n , alors l'action de \mathfrak{sl}_2 sur V_n peut être décrit par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} H v_k &= (n - 2k)v_k; \\ E v_k &= (n - k + 1)v_{k-1}, \quad k = 1 \dots n; \quad E v_0 = 0; \\ F v_k &= (k + 1)v_{k+1}, \quad k = 0 \dots n - 1; \quad F v_n = 0. \end{aligned}$$

Cette classification des représentations est un exercice classique en théorie des représentations (voir par exemple [3], problem 1.55). Mais nous sommes intéressés à trouver une interprétation géométrique de ces formules. Pour faire ça, on va regarder les grassmaniennes $\text{Gr}(k, n)$ qui paramétrisent les sous-espaces de $W = \mathbb{C}^n$ de dimension k . On définit les variétés suivantes :

$$\begin{aligned} Y_k &= \{(V, V') \in \text{Gr}(k, n) \times \text{Gr}(k, n) \mid V = V'\}; \\ Y_k^+ &= \{(V, V') \in \text{Gr}(k + 1, n) \times \text{Gr}(k, n) \mid V' \subset V, \dim V/V' = 1\}; \\ Y_k^- &= \{(V, V') \in \text{Gr}(k - 1, n) \times \text{Gr}(k, n) \mid V \subset V', \dim V'/V = 1\}. \end{aligned}$$

Moralement, on veut représenter la base (v_0, \dots, v_n) de V_n par les grassmaniennes, et les opérateurs E et F par Y_k^+ et Y_k^- , qui augmentent ou diminuent la dimension d'un sous-espace de W par 1. Une façon de faire le produit des variétés est par composition.

Définition 1.1. Soit X_1, X_2, X_3 trois ensembles, et $Y_{12} \subset X_1 \times X_2, Y_{23} \subset X_2 \times X_3$. On appelle l'ensemble

$$(2) \quad Y_{12} \circ Y_{23} = \{(x_1, x_3) : \exists x_2 \in X_2 \text{ tel que } (x_1, x_2) \in Y_{12}, (x_2, x_3) \in Y_{23}\} \subset X_1 \times X_3$$

la *composition* de Y_{12} et Y_{23} .

Avec notre motivation en tête, on va regarder les compositions de variétés Y_k^+ et Y_k^- :

$$\begin{aligned} Y_k^+ \circ Y_{k+1}^- &= \{(V_1, V_2) \in \text{Gr}(k+1, n) \times \text{Gr}(k+1, n) : \exists V \in \text{Gr}(k, n) \text{ tel que } V \subset V_1 \cap V_2\} \\ &= Y_{k+1} \cup \{(V_1, V_2) \in \text{Gr}(k+1, n) \times \text{Gr}(k+1, n) : \dim(V_1 \cap V_2) = k\} \\ &= Y_{k+1} \cup X_{k+1}, \end{aligned}$$

où on note $X_k = \{(V_1, V_2) \in \text{Gr}(k, n) \times \text{Gr}(k, n) : \dim(V_1 \cap V_2) = k-1\}$. De même on a :

$$\begin{aligned} Y_{k+1}^- \circ Y_k^+ &= \{(V_1, V_2) \in \text{Gr}(k, n) \times \text{Gr}(k, n) : \exists V \in \text{Gr}(k+1, n) \text{ tel que } V_1 + V_2 \subset V\} \\ &= Y_k \cup \{(V_1, V_2) \in \text{Gr}(k, n) \times \text{Gr}(k, n) : \dim(V_1 \cap V_2) = k-1\} \\ &= Y_k \cup X_k. \end{aligned}$$

En reprenant notre motivation, il faut maintenant construire le commutateur de Y_k^+ et Y_k^- . Pour ce faire, on considère la théorie d'homologie convenable.

2. HOMOLOGIE DE BOREL-MOORE ET CONVOLUTION

Définition 2.1. Soit X une variété algébrique complexe, et $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ son compactifié d'Alexandrov. On définit l'homologie $H_*^{BM}(X)$ de Borel-Moore de X par $H_*^{BM}(X) = H_*(\hat{X}, \infty)$, où on a l'homologie relative de la paire (\hat{X}, ∞) à droite.

On note que dans les homologies de Borel-Moore d'une variété irréductible X , il y a toujours la classe fondamentale $[X]$. En effet, si X est lisse, alors d'après de la suite exacte longue de la paire (\hat{X}, ∞) on a l'isomorphisme $H_{2\dim X}^{BM}(\hat{X}) \simeq H_{2\dim X}(\hat{X}) \simeq \mathbb{C}$, et on pose $[X] = [\hat{X}]$ sous cet isomorphisme. Si X n'est pas lisse, on note par X_{reg} l'ouvert de ses points lisses. On a la partie suivante de la suite exacte longue en homologie de Borel-Moore (voir [2]) :

$$\dots \rightarrow H_{\dim X}^{BM}(X \setminus X_{reg}) \rightarrow H_{\dim X}^{BM}(X) \rightarrow H_{\dim X}^{BM}(X_{reg}) \rightarrow H_{\dim X-1}^{BM}(X \setminus X_{reg}) \rightarrow \dots$$

Comme la dimension réelle de $X \setminus X_{reg}$ est au plus $\dim X - 2$, on a l'isomorphisme $H_{\dim X}^{BM}(X) \xrightarrow{\sim} H_{\dim X}^{BM}(X_{reg})$, et donc on définit $[X]$ comme l'unique classe qui se restreint à $[X_{reg}]$. De plus, on a la proposition suivante :

Proposition 2.1. Soit X une variété algébrique de dimension n et X_1, \dots, X_m ses composantes irréductibles de dimension n . Alors les classes fondamentales $[X_1], \dots, [X_k]$ constituent une base de l'espace vectoriel $H_{top}^{BM}(X)$ des homologies de degré maximal.

Démonstration. Comme ci-dessus, on peut supposer que X est lisse. Mais dans ce cas les composantes irréductibles sont les composantes connexes, et on conclut par Mayer-Vietoris appliqué à \hat{X} et ses composantes irréductibles. \square

La plupart des constructions homologiques usuelles, comme tiré-en-arrière, poussé-en-avant et le couplage d'intersection, peuvent être définies sur les homologies de Borel-Moore (pour les définitions plus précises, voir [2]). Alors, à partir de maintenant, on va noter les homologies de Borel-Moore juste par H_* .

Pour traduire la notion de composition dans le cadre homologique on récrit l'égalité (2) de la façon suivante :

$$Y_{12} \circ Y_{23} = p_{13} (p_{12}^{-1}(Z_{12}) \cap p_{23}^{-1}(Z_{23})).$$

Cette forme peut être traduite assez directement dans le contexte homologique :

Définition 2.2. Soit M_1, M_2, M_3 des variétés algébriques, $p_{ij} : M_1 \times M_2 \times M_3 \rightarrow M_i \times M_j$ les projections, et $Y_{12} \subset M_1 \times M_2, Y_{23} \subset M_2 \times M_3$ des sous-variétés. Alors on définit le *produit de convolution* en homologie de Borel-Moore

$$H_i(Y_{12}) \times H_j(Y_{23}) \rightarrow H_{i+j-\dim M_2}(Y_{12} \circ Y_{23}), \quad (c_{12}, c_{23}) \mapsto c_{12} * c_{23}$$

par la formule suivante :

$$c_{12} * c_{23} = (p_{13})_* (p_{12}^* c_{12} \cap p_{23}^* c_{23}) = (p_{13})_* ((c_{12} \boxtimes [M_3]) \cap ([M_1] \boxtimes c_{23})).$$

On peut observer que si $i = (\dim M_1 + \dim M_2)/2$ et $j = (\dim M_2 + \dim M_3)/2$, alors l'image de $H_i(Y_{12}) \times H_j(Y_{23})$ va être dans $H_{(\dim M_1 + \dim M_3)/2}(Y_{12} \circ Y_{23})$. On appelle ça *la propriété de la dimension moyenne*. En particulier, si $M_1 = M_2 = M_3 = M$, $Y_{12} = Y_{23} = Y_{12} \circ Y_{23} = Y$ et $\dim Y = \dim M$, alors le produit de convolution définit une structure d'algèbre associative sur $H_{top}(Y)$.

Généralement, le produit de convolution n'est pas facile à calculer, même pour les classes fondamentales, parce qu'il faut compter les intersections avec des multiplicités. Mais dans ce qui suit, le seul cas qui va nous intéresser est celui de fibrés conormaux.

Définition 2.3. Soit X une variété complexe lisse, $Y \subset X$ une sous-variété. On définit *le fibré conormal* T_Y^*X comme le sous-fibré de T^*X annulant TY :

$$T_Y^*X = \{(y, \varphi) \in T^*X : y \in Y, \varphi(v) = 0 \quad \forall v \in T_y Y\}.$$

Dans le cas où l'espace ambiant est évident, on va aussi utiliser la notation simplifiée T_Y^* .

Le théorème suivant est la cœur technique de ce chapitre :

Théorème 2.2. Dans les notations de la définition 2.2, on note $Y_{13} = Y_{12} \circ Y_{23}$ et $Z_{ij} = T_{Y_{ij}}^*(X_i \times X_j)$. Si les assertions suivantes sont satisfaites :

- l'intersection $p_{12}^{-1}(Y_{12}) \cap p_{23}^{-1}(Y_{23})$ est transverse ;
 - $p_{13} : p_{12}^{-1}(Y_{12}) \cap p_{23}^{-1}(Y_{23}) \rightarrow Y_{13}$ est un fibré localement trivial avec la fibre F lisse compacte ;
- alors

(1) $Z_{12} \circ Z_{23} = Z_{13}$;

(2) dans $H_*(Z_{13})$ on a l'équation $[Z_{12}] * [Z_{23}] = \chi(F) \cdot [Z_{13}]$, où $\chi(F)$ dénote la caractéristique d'Euler de F .

La démonstration de ce théorème est assez compliquée, donc on ne va pas la reproduire ici (on peut regarder [2], théorème 2.7.26). Moralement ça signifie que le passage aux fibrés conormaux "détord" les intersections dans un sens. Aussi, dans toutes les utilisations de ce théorème on ne va pas vérifier la transversalité pour éviter les détails calculatoires (le lecteur est invité à le faire).

Le théorème précédent nous suggère de regarder la variété $M = \sqcup_{k=0}^n \text{Gr}(k, n)$ et son fibré cotangent T^*M .

Proposition 2.3. Soit $V \subset W$ est un point dans $\text{Gr}(k, n)$. Alors on a $T_V^* \text{Gr}(k, n) = \text{Hom}(W/V, V)$.

Démonstration. Dans les coordonnées locales de la grassmannienne (c'est-à-dire on choisit une base de V telle que le premier mineur de la matrice d'application $V \hookrightarrow W$ est égal à identité) le voisinage de V est identifié avec le voisinage de zéro dans $\text{Hom}(V, W/V)$. Donc $T_V \text{Gr}(k, n) = \text{Hom}(V, W/V)$, et par conséquent $T_V^* \text{Gr}(k, n) = \text{Hom}(V, W/V)^* = \text{Hom}(W/V, V)$. \square

Remarquons qu'on a une égalité

$$\bigcup_V \text{Hom}(W/V, V) = \{\varphi \in \text{End } W \mid \varphi^2 = 0\} =: \mathcal{N}_2,$$

où l'inclusion $\text{Hom}(W/V, V) \hookrightarrow \text{End } W$ est donnée par la composition $W \twoheadrightarrow W/V \rightarrow V \hookrightarrow W$. On peut donc définir l'application

$$\pi : T^*M \rightarrow \mathcal{N}_2, \quad (V \subset W, \varphi : W/V \rightarrow V) \mapsto \varphi.$$

Remarque. Cette application est une équivalence birationnelle (voir [2]), mais on n'utilise pas ce fait dans ce qui suit. Par contre, π n'est pas un isomorphisme de variétés. Par exemple, $\pi^{-1}(0) = \sqcup_{k=0}^n \text{Gr}(k, n)$, comme l'application zéro est contenue dans tous les espaces cotangents.

On va aussi noter

$$\begin{aligned} Z &= T^*M \times_{\mathcal{N}_2} T^*M = \{(x_1, x_2) \in T^*M \times T^*M : \pi(x_1) = \pi(x_2)\} \\ &= \{(V_1, V_2, \varphi) \in M \times M \times \text{End } W : V_1 + V_2 \subset \text{Ker } \varphi, \text{Im } \varphi \subset V_1 \cap V_2\} \\ &\subset T^*(M \times M). \end{aligned}$$

Remarque. La dernière inclusion demande le choix d'un isomorphisme $T^*M \times T^*M \simeq T^*(M \times M)$. Pour des raisons de commodité, on préfère utiliser l'isomorphisme qui envoie le deuxième facteur sur son inverse, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} T^*M \times T^*M &\rightarrow T^*(M \times M) \\ (x_1, \varphi_1), (x_2, \varphi_2) &\mapsto (x_1, \varphi_1, x_2, -\varphi_2). \end{aligned}$$

Évidemment on a $Z \circ Z = Z$. L'importance de cette variété vis-à-vis de nos considérations est justifiée par la proposition suivante :

Proposition 2.4. *Z est l'union des fibrés conormaux de toutes les $GL(W)$ -orbites dans $M \times M$.*

Démonstration. Soit $(V_1, V_2) \in M \times M$, et $\varphi \in T^*_{(V_1, V_2)}(M \times M)$. On note $\iota_i : V_i \hookrightarrow W$, $p_i : W \rightarrow W/V_i$ les applications naturelles. On va aussi noter $G = GL(W)$. L'élément φ peut être représenté par une paire $(\varphi_1, \varphi_2) \in \text{Hom}(W/V_1, V_1) \oplus \text{Hom}(W/V_2, V_2) \hookrightarrow \text{End } W \oplus \text{End } W$. Par la définition de l'action de $GL(W)$ sur M , l'espace tangent à l'orbite $G \cdot (V_1, V_2)$ dans le point (V_1, V_2) peut être exprimé de la manière suivante :

$$T_{(V_1, V_2)}G(V_1, V_2) = \{(p_1 \circ g \circ \iota_1, p_2 \circ g \circ \iota_2) \in \text{Hom}(V_1, W/V_1) \oplus \text{Hom}(V_2, W/V_2) : g \in \text{End } W\}.$$

Alors φ est dans le fibré conormal si et seulement si

$$\text{Tr}(\varphi_1 \circ p_1 \circ g \circ \iota_1) + \text{Tr}(\varphi_2 \circ p_2 \circ g \circ \iota_2) = 0 \Leftrightarrow \text{Tr}(\varphi_1 g + \varphi_2 g) = 0 \quad \forall g \in \text{End } W.$$

Mais la dernière condition est équivalente à $\varphi_1 = -\varphi_2$ qui, modulo notre convention de signe, signifie exactement $\varphi \in Z$. \square

Corollaire 2.5. *Si Z' est une composante irréductible de Z qui est contenu dans $T^* \text{Gr}(k, n) \times T^* \text{Gr}(l, n)$, alors $\dim Z' = \dim \text{Gr}(k, n) + \dim \text{Gr}(l, n)$.*

D'après la propriété de la dimension moyenne, le corollaire nous dit que $H_{top}(Z)$ est une algèbre associative.

3. CONSTRUCTION DE $U(\mathfrak{sl}_2)$

Notons H_n le sous-espace vectoriel de $H_*(\pi^{-1}(0))$ engendré par les classes fondamentales $[\text{Gr}(k, n)]$ (voir la remarque 2). Le produit de convolution nous définit l'action de $H_{top}(Z)$ sur H_n .

On regarde maintenant trois éléments de $H_{top}(Z)$:

$$\mathbf{h} = \sum_{k=0}^n (2k - n) [T_{Y_k}^*], \quad \mathbf{e} = \sum_{k=0}^{n-1} [T_{Y_k^+}^*], \quad \mathbf{f} = \sum_{k=1}^n [T_{Y_k^-}^*],$$

et on calcule leur action sur H_n en utilisant le théorème 2.2. Dans l'énoncé du théorème on pose $M_1 = M_2 = M$, $M_3 = \{*\}$. Dans ce cas on a $Y_{23} \subset M_2 = M$, et

$$Y_{12} \circ Y_{23} = \{x \in M : \exists y \in Y_{23}, (x, y) \in Y_{12}\}.$$

En outre, les variétés $\text{Gr}(k, n) \subset \pi^{-1}(0)$ sont égales à leurs fibrés cotangents, comme ils se trouvent dans la section zéro du fibré cotangent T^*M .

- $(Y_k \times \{*\}) \cap (M \times \text{Gr}(k, n))$ se projette sur $\text{Gr}(k, n)$, la fibre F ne consiste qu'en un point, donc

$$\mathbf{h} \cdot [\text{Gr}(k, n)] = (2k - n)[\text{Gr}(k, n)];$$

- $(Y_k^+ \times \{*\}) \cap (M \times \text{Gr}(k, n))$ se projette sur $\text{Gr}(k + 1, n)$, la fibre en un point V est égale à $\{V' \in \text{Gr}(k, n) : V' \subset V\} \simeq \mathbb{P}^k$. Alors on a

$$\mathbf{e} \cdot [\text{Gr}(k, n)] = \chi(\mathbb{P}^k)[\text{Gr}(k + 1, n)] = (k + 1)[\text{Gr}(k + 1, n)];$$

- $(Y_k^- \times \{*\}) \cap (M \times \text{Gr}(k, n))$ se projette sur $\text{Gr}(k - 1, n)$, la fibre en un point V est égale à $\{V' \in \text{Gr}(k, n) : V \subset V'\} \simeq \mathbb{P}^{n-k}$. Alors on a

$$\mathbf{f} \cdot [\text{Gr}(k, n)] = \chi(\mathbb{P}^{n-k})[\text{Gr}(k - 1, n)] = (n - k + 1)[\text{Gr}(k - 1, n)].$$

Pour terminer notre construction, on prétend que l'attribution $E \mapsto \mathbf{e}$, $F \mapsto \mathbf{f}$, $H \mapsto \mathbf{h}$ s'étend en un morphisme d'algèbres associatives $\Phi_n : U(\mathfrak{sl}_2) \rightarrow H_{top}(Z)$, où $U(\mathfrak{sl}_2)$ est l'algèbre enveloppante de \mathfrak{sl}_2 . Pour ça, il faut vérifier les relations (1). On va utiliser le théorème 2.2 encore une fois. Prenons $M_1 = M_2 = M_3 = M$.

Les relations $[\mathbf{h}, \mathbf{e}] = 2\mathbf{e}$, $[\mathbf{h}, \mathbf{f}] = -2\mathbf{f}$ sont plus faciles, donc on commence avec elles. Comme $Y_k \circ Y_{k-1}^+ = Y_{k-1}^+$, et la fibre de l'application $(Y_k \times M) \cap (M \times Y_{k-1}^+) \rightarrow Y_k \circ Y_{k-1}^+$ est triviale, on a l'égalité $[T_{Y_k}^*] * [T_{Y_{k-1}^+}^*] = [T_{Y_{k-1}^+}^*]$. Par le même raisonnement, on a

$$[T_{Y_k}^*] * [T_{Y_{k+1}^-}^*] = [T_{Y_{k+1}^-}^*], \quad [T_{Y_k^+}^*] * [T_{Y_k}^*] = [T_{Y_k^+}^*], \quad [T_{Y_k^+}^*] * [T_{Y_k}^*] = [T_{Y_k^+}^*].$$

Maintenant, on fait un peu de calcul :

$$\begin{aligned} [\mathbf{h}, \mathbf{e}] &= \mathbf{h} * \mathbf{e} - \mathbf{e} * \mathbf{h} \\ &= \left(\sum_{k=0}^n (2k - n)[T_{Y_k}^*] \right) * \left(\sum_{k=0}^{n-1} [T_{Y_k^+}^*] \right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} [T_{Y_k^+}^*] \right) * \left(\sum_{k=0}^n (2k - n)[T_{Y_k}^*] \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (2(k+1) - n)[T_{Y_k^+}^*] - \sum_{k=0}^{n-1} (2k - n)[T_{Y_k^+}^*] \\ &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} [T_{Y_k^+}^*] = 2\mathbf{e}. \end{aligned}$$

En faisant le même type de calcul, on montre aussi $[\mathbf{h}, \mathbf{f}] = -2\mathbf{f}$.

Pour démontrer $[\mathbf{e}, \mathbf{f}] = \mathbf{h}$, on commence avec le résultat plus faible suivant :

Lemme 3.1. *Il existe une constante m vérifiant*

$$(3) \quad [T_{Y_{k-1}^+}^*] * [T_{Y_k^-}^*] - [T_{Y_{k+1}^-}^*] * [T_{Y_k^+}^*] = m[T_{Y_k}^*].$$

Démonstration. On sait que pour tout k on a l'égalité au niveau des ensembles $Y_{k+1}^- \circ Y_k^+ = Y_k \cup X_k$. Comme Y_k et X_k sont les G -orbites dans $M \times M$, d'après la proposition 2.4 on a l'égalité

$$[T_{Y_{k+1}^-}^*] * [T_{Y_k^+}^*] = m_1[T_{Y_k}^*] + r[T_{X_k}^*]$$

pour des constantes m_1, r . Maintenant on va regarder la même égalité sur l'ensemble $M \times M \setminus Y_k$. Dans ce cas, la fibre de $(Y_{k+1}^- \times M) \cap (M \times Y_k^+)$ sur X_k dans un point (V_1, V_2) est égal à

$$\{V \in \text{Gr}(k + 1, n) : V_1 + V_2 \subset V\}.$$

Mais comme $\dim(V_1 \cap V_2) = k - 1$, la fibre ne consiste qu'en un point $\{V_1 + V_2\}$. Alors en appliquant le théorème 2.2 on trouve

$$[T_{Y_{k+1}^-}^*] * [T_{Y_k^+}^*] = [T_{X_k}^*]$$

sur X_k . Comme le produit de convolution commute avec la restriction, ceci nous montre $r = 1$.

En répétant les arguments ci-dessus, on montre qu'il existe une constante m_2 telle que

$$[T_{Y_{k-1}^+}^*] * [T_{Y_k^-}^*] = m_2 [T_{Y_k}^*] + [T_{X_k}^*].$$

En soustrayant les deux égalités, on montre que l'assertion du lemme est vérifiée pour $m = m_2 - m_1$. \square

Comme on connaît déjà l'action de \mathbf{e} et \mathbf{f} sur $[\mathrm{Gr}(k, n)]$, on peut calculer la valeur précise de m :

$$\begin{aligned} m[\mathrm{Gr}(k, n)] &= m[T_{Y_k}^*] \cdot [\mathrm{Gr}(k, n)] \\ &= \left([T_{Y_{k-1}^+}^*] * [T_{Y_k^-}^*] - [T_{Y_{k+1}^-}^*] * [T_{Y_k^+}^*] \right) \cdot [\mathrm{Gr}(k, n)] \\ &= (k(n - k + 1) - (n - k)(k + 1)) [\mathrm{Gr}(k, n)] = (2k - n)[\mathrm{Gr}(k, n)]. \end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned} [\mathbf{e}, \mathbf{f}] &= \mathbf{e} * \mathbf{f} - \mathbf{f} * \mathbf{e} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} [T_{Y_k^+}^*] \right) * \left(\sum_{k=1}^n [T_{Y_k^-}^*] \right) - \left(\sum_{k=1}^n [T_{Y_k^-}^*] \right) * \left(\sum_{k=0}^{n-1} [T_{Y_k^+}^*] \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left([T_{Y_{k-1}^+}^*] * [T_{Y_k^-}^*] - [T_{Y_{k+1}^-}^*] * [T_{Y_k^+}^*] \right) = \sum_{k=0}^n (2k - n) [T_{Y_k}^*] = \mathbf{h}. \end{aligned}$$

et donc $[\mathbf{e}, \mathbf{f}] = \mathbf{h}$.

Enfin, on peut recoller nos résultats dans un théorème :

Théorème 3.2. *L'application $\Phi_n : U(\mathfrak{sl}_2) \rightarrow H_{top}(Z)$ est un morphisme d'algèbres. De plus, le foncteur*

$$\Phi_n^* : H_{top}(Z)\text{-mod} \rightarrow U(\mathfrak{sl}_2)\text{-mod}$$

induit par Φ_n envoie le $H_{top}(Z)$ -module H_n sur le \mathfrak{sl}_2 -module V_n .

Remarque. En fait, l'application Φ_n est surjective, et on a l'isomorphisme $\hat{U}(\mathfrak{sl}_2) \simeq \varprojlim_n H_{top}(Z)$, où $\hat{U}(\mathfrak{sl}_2)$ est la complétion de $U(\mathfrak{sl}_2)$ par rapport à la topologie donnée par les idéaux de codimension finie. Remarquons qu'on ne précise pas la structure de système projectif sur $\{H_{top}(Z)\}$ (voir [2], chapitre 4.4).

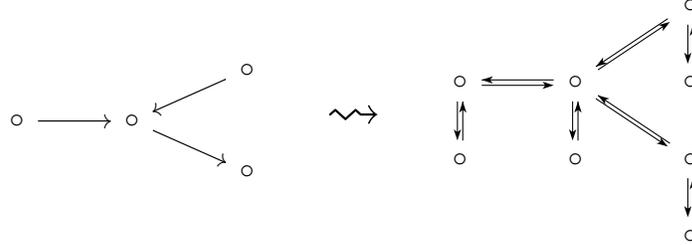
4. LES VARIÉTÉS DE NAKAJIMA

Maintenant on va esquisser comment on peut étendre cette stratégie géométrique dans le cas d'une algèbre de Lie semisimple quelconque (ou, plus généralement, une algèbre de Kac-Moody quelconque). Quand on faisait les constructions pour \mathfrak{sl}_2 , on regardait les fibrés cotangents des grassmaniennes. Chaque point $V \subset W$ de $\text{Gr}(k, n)$ peut être regardé comme $GL(V)$ -orbite d'une application $\varphi \in \text{Hom}(V, W)$ de rang maximal. Le fibré cotangent $T^*\text{Hom}(V, W)$ est égal à $\text{Hom}(V, W) \oplus \text{Hom}(W, V)$, en d'autres termes à l'espace des représentations du carquois suivant :



Généralement, pour obtenir $T^*(X/G)$ à partir de T^*X , il faut faire le quotient symplectique de T^*X par G (pour les détails, voir [1]). Donc en gros on a justement quotienté un ouvert de l'espace des représentations d'un carquois par les automorphismes d'un des deux sommets en sens symplectique. Remarquons que \circ est la diagramme de Dynkin de \mathfrak{sl}_2 . Il semble logique de remplacer ce carquois par le carquois dont le graphe non orienté sous-jacent est le diagramme de Dynkin d'une algèbre de Lie semisimple. Dans ce qui suit, on va brièvement préciser cette stratégie.

Soit $Q = (I, E)$ un carquois sans boucle. On considère le carquois encadré dédoublé $\overline{Q^\heartsuit}$:



Plus précisément, $\overline{Q^\heartsuit} = (I', E')$, où $I' = \{i, i' \mid v \in I\}$, et

$$E' = \{e, \bar{e} \mid e \in E\} \sqcup \{i \rightarrow i', i' \rightarrow i \mid i \in I\}.$$

Pour chaque paire de vecteurs $\mathbf{v} = (v_i)_{i \in I}, \mathbf{w} = (w_i)_{i \in I} \in \mathbb{N}^I$, on prend des espaces $V_i, W_{i'} = W_i, i \in I$ tels que $\dim V_i = v_i, \dim W_i = w_i$. Considérons l'espace $\text{Rep}(\overline{Q^\heartsuit}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ des représentations de $\overline{Q^\heartsuit}$:

$$\begin{aligned} \text{Rep}(\overline{Q^\heartsuit}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \bigoplus_{e \in E'} \text{Hom}(V_{\text{out}(e)}, V_{\text{in}(e)}) = \\ &= \bigoplus_{e \in E} \text{Hom}(V_{\text{out}(e)}, V_{\text{in}(e)}) \oplus \bigoplus_{e \in E} \text{Hom}(V_{\text{in}(e)}, V_{\text{out}(e)}) \oplus \bigoplus_{i \in I} \text{Hom}(W_i, V_i) \oplus \bigoplus_{i \in I} \text{Hom}(V_i, W_i). \end{aligned}$$

On écrit $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{i}, \mathbf{j}) \in \text{Rep}(\overline{Q^\heartsuit}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$. Cet espace est symplectique par rapport à la forme symplectique naturelle ω , donnée par

$$\omega((\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{i}, \mathbf{j}), (\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{i}', \mathbf{j}')) = \text{Tr}(\mathbf{x} \circ \mathbf{y}' - \mathbf{x}' \circ \mathbf{y} + \mathbf{i} \circ \mathbf{j}' - \mathbf{i}' \circ \mathbf{j}).$$

L'action naturelle de $G = \prod_{i \in I} GL(V_i)$ sur $\text{Rep}(\overline{Q^\heartsuit}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ est évidemment symplectique, et aussi hamiltonienne, d'application moment suivante :

$$\begin{aligned} \mu &: \text{Rep}(\overline{Q^\heartsuit}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \rightarrow \mathfrak{g}^*, \\ \mu(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{i}, \mathbf{j}) &= \mathbf{x} \circ \mathbf{y} - \mathbf{y} \circ \mathbf{x} + \mathbf{i} \circ \mathbf{j} \in \mathfrak{g}, \end{aligned}$$

où on identifie \mathfrak{g} avec \mathfrak{g}^* par le moyen de la forme de Killing. Alors on peut construire la variété $\mathcal{M}_0(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \mu^{-1}(0)/G = \text{Spec } \mathbb{C}[\mu^{-1}(0)]^G$. Cette variété va habituellement être singulière. Pour remédier à cette circonstance malheureuse, on fera le quotient GIT [6] par rapport à un caractère $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$. On définit alors les variétés de Nakajima par

$$\mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \mu^{-1}(0)/_\chi G = \mu^{-1}(0)^{st}/G$$

pour tout \mathbf{v}, \mathbf{w} .

Maintenant on choisit $\chi = \prod_{i \in I} \det_{V_i}^{-1}$. Dans ce cas, la condition de la stabilité peut s'écrire de la façon suivante :

$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ est (semi-)stable si et seulement si le seul sous-espace $\oplus_i V_i'$ de $\oplus_i V_i$, contenu dans $\text{Ker } \mathbf{j}$ et invariant sous \mathbf{x} et \mathbf{y} , est le trivial.

D'après les résultats généraux sur GIT (voir [6]) $\mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ est lisse, et on a une application projective $\pi : \mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \rightarrow \mathcal{M}_0(\mathbf{v}, \mathbf{w})$. Notons

$$\mathcal{M}(\mathbf{w}) = \sqcup_{\mathbf{v}} \mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w}), \quad \mathcal{M}_0(\mathbf{w}) = \varinjlim_{\mathbf{v}} \mathcal{M}_0(\mathbf{v}, \mathbf{w}),$$

$$\mathcal{Z}(\mathbf{w}) = \mathcal{M}(\mathbf{w}) \times_{\mathcal{M}_0(\mathbf{w})} \mathcal{M}(\mathbf{w}),$$

où les inclusions $\mathcal{M}_0(\mathbf{v}', \mathbf{w}) \subset \mathcal{M}_0(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ sont induites à partir des inclusions $V_i' \subset V_i$ pour tout $\mathbf{v}' \leq \mathbf{v}$.

Le produit de convolution munit $H_*(\mathcal{Z}(\mathbf{w}))$ d'une structure d'algèbre associative, et définit l'action de $H_*(\mathcal{Z}(\mathbf{w}))$ sur $H_*(\pi^{-1}(x))$ pour tout $x \in \mathcal{M}_0(\mathbf{w})$. On va restreindre notre attention à la sous-algèbre $H_{\mathbf{w}} := H_{top}(\mathcal{Z}(\mathbf{w})) \subset H_*(\mathcal{Z}(\mathbf{w}))$ et le $H_{\mathbf{w}}$ -module $L_{\mathbf{w}} := H_{top}(\pi^{-1}(x))$, qui consiste des homologies de degré plus haut.

Notons \mathfrak{g}_Q l'algèbre de Kac-Moody correspondant au carquois Q avec les directions des arêtes oubliées (si Q est un diagramme de Dynkin, on va obtenir l'algèbre de Lie semisimple correspondante). Nakajima a montré le théorème suivant, qui nous donne une description géométrique de $U(\mathfrak{g}_Q)$:

Théorème 4.1. *Il existe un homomorphisme d'algèbres*

$$\Phi : \tilde{U}(\mathfrak{g}_Q) \rightarrow H_*(\mathcal{Z}(\mathbf{w}))$$

pour tout $\mathbf{w} \in \mathbb{N}^I$, où $\tilde{U}(\mathfrak{g}_Q)$ est l'algèbre enveloppante modifiée [7]. En plus, $L_{\mathbf{w}}$ est isomorphe au \mathfrak{g}_Q -module simple intégrable avec le poids plus haut \mathbf{w} .

On ne donnera pas la définition précise de l'algèbre enveloppante modifiée ici. En gros, si $U(\mathfrak{g}_Q) = U(\mathfrak{n}^+) \otimes U(\mathfrak{h}) \otimes U(\mathfrak{n}^-)$ est la décomposition triangulaire, on retrouve $\tilde{U}(\mathfrak{g}_Q)$ en remplaçant la partie diagonale $U(\mathfrak{h})$ par l'espace vectoriel \tilde{U} ayant le réseau des poids de \mathfrak{g}_Q pour base.

5. L'ALGÈBRE DE HALL

Dans cette section on essaie de donner une idée de comment on peut généraliser la théorie de Nakajima dans le cadre plus général des algèbres de Hall.

Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne finitaire héréditaire, c'est-à-dire :

- i) pour tout $M, N \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ on a $|\text{Hom}(M, N)| < \infty$, $|\text{Ext}^1(M, N)| < \infty$;
- ii) la dimension globale de \mathcal{C} est inférieure ou égale à 1.

Les exemples principaux de telles catégories sont

- la catégorie $\text{Rep}_{\mathbb{F}_q} Q$ des représentations d'un carquois Q sur le corps \mathbb{F}_q ; on peut aussi considérer la sous-catégorie $\text{Rep}_{\mathbb{F}_q}^{nil} Q$ des représentations nilpotentes ;
- la catégorie $\text{Coh}(X)$ des faisceaux cohérents sur une courbe lisse X définie sur \mathbb{F}_q .

Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne finitaire héréditaire. On définit la forme d'Euler sur l'ensemble des objets de \mathcal{C} par

$$(M, N) = \sqrt{\frac{|\mathrm{Hom}(M, N)|}{|\mathrm{Ext}^1(M, N)|}}.$$

On note que d'après la suite exacte longue en Ext, associée à une suite exacte courte, cette quantité ne dépend que des classes de M et N dans le groupe de Grothendieck $K(\mathcal{C})$ de \mathcal{C} .

Ringel [8] a défini une \mathbb{C} -algèbre associative $H_{\mathcal{C}}$, appelé *l'algèbre de Hall* de \mathcal{C} , qui est engendrée par les classes d'isomorphisme des objets de \mathcal{C} comme \mathbb{C} -espace vectoriel, où la multiplication est donnée par

$$[M] \cdot [N] = (M, N) \sum_{[R]} \frac{\#\{0 \rightarrow N \rightarrow R \rightarrow M \rightarrow 0\}}{|\mathrm{Aut} M| \cdot |\mathrm{Aut} N|} [R].$$

Cette multiplication encode plus ou moins l'information sur les extensions dans notre catégorie. Le facteur (M, N) n'est pas nécessaire pour définir le produit associatif, mais est très utile pour la formulation des théorèmes à venir. Pour la convenance on va aussi définir l'algèbre de Hall $\tilde{H}_{\mathcal{C}}$ étendue de la manière suivante :

$$\tilde{H}_{\mathcal{C}} = H_{\mathcal{C}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[K(\mathcal{C})],$$

où $\mathbb{C}[K(\mathcal{C})]$ est l'algèbre du groupe de $K(\mathcal{C})$ engendrée par les éléments \mathbf{k}_{α} , $\alpha \in K(\mathcal{C})$, et la multiplication est donnée par

$$\mathbf{k}_{\alpha}[M]\mathbf{k}_{\alpha}^{-1} = (\alpha, M)[M].$$

Remarquons que cette définition est un peu parallèle à la définition de l'algèbre enveloppante modifiée.

C'est un fait bien connu que les algèbres de Lie semisimples sont des objets rigides, c'est-à-dire que l'on ne peut pas déformer le crochet de Lie de façon non triviale. Par contre, on a une famille de déformations $U_{\nu}(\mathfrak{g})$ de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ de \mathfrak{g} , appelée *le groupe quantique*. On ne va pas définir tout la déformation $U_{\nu}(\mathfrak{g})$ ici, mais juste sa restriction à la sous-algèbre nilpotente $\mathfrak{b}'_{+} = \mathfrak{n}_{+}$.

Définition 5.1. L'algèbre associative $U_{\nu}(\mathfrak{b}'_{+})$ est donnée par les générateurs E_i, K_i^{\pm} , $i \in I$, et les relations

$$\begin{aligned} [K_i, K_j] &= 0, & K_i E_j K_i^{-1} &= \nu^{a_{ij}} E_j, \\ \sum_{l=0}^{1-a_{ij}} (-1)^l \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ l \end{bmatrix} E_i E_j E_i^{1-a_{ij}-l} &= 0, \end{aligned}$$

où $A = (a_{ij})$ est la matrice de Cartan, et $\begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ l \end{bmatrix}$ est le coefficient ν -nomial, défini par

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]_{\nu}!}{[k]_{\nu}! [n-k]_{\nu}!}, \quad [n]_{\nu}! = \prod_{k=1}^n \frac{1-\nu^k}{1-\nu}.$$

L'observation motivant la recherche d'une interprétation géométrique de $H_{\mathcal{C}}$ est le théorème suivant :

Théorème 5.1 ([9], théorème 3.16). *Soit $\mathcal{C} = \mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_q}^{nil} Q$, et $\nu = q^{1/2}$. Alors il existe un plongement $\Psi : U_{\nu}(\mathfrak{b}'_{+}) \hookrightarrow \tilde{H}_Q$, où \tilde{H}_Q est l'algèbre de Hall étendue, et $U_{\nu}(\mathfrak{b}'_{+})$ est la partie positive du groupe quantique $U_{\nu}(\mathfrak{g}')$, spécialisée à $v = \nu$. En plus, Ψ est un isomorphisme si et seulement si Q est de type fini.*

Alors il semble raisonnable d'essayer de trouver un analogue des variétés de Nakajima pour une catégorie finitaire héréditaire quelconque. On va se concentrer sur le cas de la catégorie des faisceaux sur une courbe. Plus précisément, on regarde une courbe algébrique lisse \tilde{X} définie sur \mathbb{Z} , sa réduction $X = \tilde{X}/\mathbb{F}_q$, et on considère $\mathcal{C} = \text{Coh}(X)$. Comme les variétés de Nakajima sont construites à partir d'espace de représentations sur \mathbb{C} d'un carquois, le premier candidat pour remplacer cet espace dans notre cas est l'espace $\underline{\text{Coh}}(X_{\mathbb{C}})$ de modules des faisceaux cohérents sur $X_{\mathbb{C}}$.

Définition 5.2. Soit $\underline{M} : \text{Sch}/\mathbb{k} \rightarrow \text{Ens}^{op}$ un foncteur contravariant. On dit que l'objet $M \in \text{Sch}/\mathbb{k}$ est l'espace de modules (fin) s'il représente ce foncteur, c'est-à-dire s'il existe un isomorphisme naturel $\tau : \underline{M} \rightarrow \text{Hom}(-, M)$.

Pour les faisceaux sur une courbe on a deux invariants discrets : rang et degré. Alors on définit le foncteur

$$\underline{\text{Coh}}_{r,d} : \text{Sch}/\mathbb{k} \rightarrow \text{Ens}^{op},$$

qui envoie $Y \in \text{Sch}/\mathbb{k}$ sur l'ensemble des faisceaux cohérents F sur $X_{\mathbb{C}} \times Y$, plat sur $X_{\mathbb{C}}$, et tels que pour tout $y \in Y$ la fibre $F(y)$ est de rang r et de degré d . Si ce foncteur est représenté par $\text{Coh}_{r,d}$, alors il existe une famille universelle $\mathcal{F} \in \text{Coh}(X_{\mathbb{C}} \times \text{Coh}_{r,d})$, correspondant à $id \in \text{Hom}(\text{Coh}_{r,d}, \text{Coh}_{r,d})$, qui va contenir tous les faisceaux de rang r et de degré d comme fibres. Malheureusement, ce n'est pas le cas :

Définition 5.3. Soit $\mathcal{V} = \{F_{\alpha}\}$ un ensemble de classes d'isomorphisme de faisceaux cohérents sur X . On dit que \mathcal{V} est *bornée*, s'il existe une variété $S \in \text{Sch}/\mathbb{k}$ et un faisceau $\mathcal{F} \in \text{Coh}(S \times X)$ vérifiant $\mathcal{V} \subset \{\mathcal{F}(s) \mid s \in S\}$.

Proposition 5.2. *L'ensemble des classes d'isomorphisme des fibrés vectoriels de rang r et de degré d n'est pas borné pour $r \geq 2$.*

Démonstration. On fixe un fibré en droites $\mathcal{O}_X(1)$ sur X , qui est ample et de degré 1, et considère les fibrés

$$E_k = \mathcal{O}_X(-k) \oplus \mathcal{O}_X(d+k) \oplus \mathcal{O}_X^{r-2}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'après le théorème de Riemann-Roch, on a $h_1(E_k) \geq h_1(\mathcal{O}_X(-k)) = k + g - 1$. Comme les nombres de Betti des fibres doivent être bornés par une constante (voir [5], corollaire 4.14), la famille $\{E_k\}$ n'est pas bornée, d'où la proposition. \square

On voit alors qu'il n'existe pas de schéma représentant le foncteur $\text{Coh}_{r,d}$; généralement, on parle plutôt des soi-disants champs algébriques et le champ de modules représentant ce foncteur. Néanmoins, on peut saisir une partie géométrique assez grande des faisceaux cohérents sur $X_{\mathbb{C}}$, à savoir les faisceaux semistables. On note $\mu(E) = \frac{\deg E}{\text{rg } E}$.

Définition 5.4. Soit E un faisceau cohérent sur X . On dit que E est *semistable* si $\mu(F) \leq \mu(E)$ pour tout sous- \mathcal{O}_X -module propre F de E , et *stable* si l'inégalité est stricte.

D'après [5], il existe un espace de modules fin des faisceaux stables, et un espace de modules grossier des faisceaux semistables, qui est propre sur \mathbb{C} .

De la même façon, pour imiter la construction de Nakajima on peut fixer un faisceau $F \in \text{Coh}(X_{\mathbb{C}})$, regarder le champ de modules des paires $(E \in \text{Coh}(X_{\mathbb{C}}), \alpha \in \text{Hom}(E, F))$ et passer à son fibré cotangent. En fixant la notion de semistabilité convenable, on retrouve une partie géométrique de ce champ. Mais il s'avère qu'en fait on a une famille de notions de semistabilité paramétrisée par un paramètre rationnel, et a priori on n'a pas de choix naturel. De plus, on n'a plus d'analogue de l'application $\pi : \mathcal{M}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \rightarrow \mathcal{M}_0(\mathbf{v}, \mathbf{w})$. De toute façon, c'est encore possible

de définir les variétés de paires \mathcal{Z} , et je crois qu'on peut éventuellement reproduire la théorie de Nakajima dans ce cadre.

RÉFÉRENCES

- [1] A. Cannas da Silva. *Lectures on symplectic geometry*, Springer, 2008.
- [2] N. Chriss, V. Ginzburg. *Representation theory and complex geometry*, Birkhäuser, 1997.
- [3] P. Etingof. *Introduction to representation theory*, AMS, 2011.
- [4] V. Ginzburg. *Lectures on Nakajima's quiver varieties*, arXiv :0905.0686, 2009.
- [5] Joseph Le Potier. *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques*, Université de Paris 7 - Denis Diderot, Paris, 1994.
- [6] D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan. *Geometric invariant theory*, Springer-Verlag, 1994.
- [7] H. Nakajima. *Quiver varieties and Kac-Moody algebras*, Duke Math. J. 91 (1998), no. 3, 515–560.
- [8] C. Ringel. *Hall algebras*, Topics in algebra, Part 1 (Warsaw, 1988), 433–447, Banach Center Publ., 26, Part 1, PWN, Warsaw, 1990.
- [9] O. Schiffmann. *Lectures on Hall algebras*, arXiv :math/0611617, 2006.