Sous-groupes discrets des groupes de Lie semi-simples
Introduction au domaine de recherche

Sebastien MIQUEL
sous la direction d'Yves BENOIST

Résumé

La théorie des groupes discrets de $SL_2(\mathbb{R})$, appelés groupes Fuchsiens est bien développée. De même, depuis la résolution des conjectures de Marden et Thurston, les sous-groupes discrets de $SL_2(\mathbb{C})$, appelés groupes de Klein sont classifiés. On s'intéresse aux groupes discrets de plus gros groupes de Lie semi-simples comme $SL_3(\mathbb{R})$ et $SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})$, ou généralement $SL_n(\mathbb{R})$. Parmi ces sous-groupes discrets, seuls les réseaux sont bien compris. On se pose la question de la recherche de groupes discrets de covolume infini qui intersectent certains sous-groupes plus petits en des réseaux.

Table des matières

1 Introduction

Commençons par définir sans trop de généralité les groupes avec lesquels on travaille.

Définition 1.1. *Par G, on entendra toujours un groupe de Lie, et plus précisément un groupe de Lie réel linéaire, c'est-à-dire un sous-groupe fermé d'un groupe $SL_n(\mathbb{R})$.*
On dit que G est simple s'il n'a pas de sous-groupe connexe, fermé, normal, non trivial et si G n'est pas abélien.
On dit que G est semi-simple s'il est isogène à une produit $H = H_1 \times \cdots \times H_n$ de groupes simples : il existe G' d'indice fini dans G, H' dans H, N sous-groupe normal fini de G, M sous-groupe normal fini de H tels que $G'/N \simeq H'/M$.

Dans la suite, G sera toujours un groupe de Lie semi-simple.

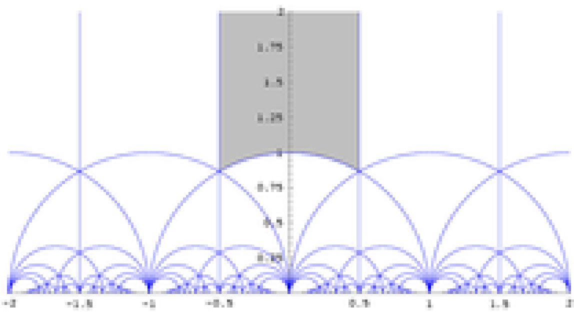
Exemple 1.2. *Les groupes classiques $SL_n(\mathbb{R})$ $(n \geq 2)$ et $SU(m,n)$ $(n+m \geq 2)$ sont simples.*
Le groupe $SO(m,n)$ est semi-simple pour $m+n \geq 3$ et simple si $m+n \neq 4$.
Le groupe $SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})$ est semi-simple, non simple : chaque facteur fourni un sous-groupe normal, fermé et connexe.

On s'intéresse aux sous-groupes discrets Γ de groupes de Lie semi-simples G. Pour que les propriétés de Γ soient fortement liées à celle de G, on rajoute l'hypothèse que Γ soit Zariski dense dans G, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de groupe intermédiaire algébrique G' tel que $\Gamma \subset G' \subsetneq G$. Parmi les sous-groupes discrets, les réseaux (voir la définition suivante) sont mieux compris et ont donc un rôle important.
Tout groupe semi-simple est unimodulaire, la mesure de Haar de G descend donc en une unique mesure σ-finie et G-invariante sur le quotient G/Γ.

Définition 1.3. *Soit Γ un sous-groupe discret de G. On dit que Γ est un réseau si le volume de G/Γ est fini. Si G/Γ est de plus compact, on dit que Γ est un réseau uniforme.*
On dit que Γ, Γ' sont commensurables si $\Gamma \cap \Gamma'$ est d'indice fini dans Γ et Γ'.

L'étude des réseaux est originellement motivée par la recherche de pavages, éventuellement cocompacts, d'espaces géométriques comme l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$ ce qui correspond à la recherche de réseaux cocompacts de $SL_2(\mathbb{C})$. Lorsque Γ est un réseau de G, la mesure de probabilité sur l'espace G/Γ permet l'utilisation d'outils de théorie ergodique pour obtenir des informations sur le groupe Γ comme le théorème d'arithméticité de Margulis 2.22.

Exemple 1.4. *Le groupe $\mathbb{Z}^2$ est un réseau cocompact de $\mathbb{R}^2$.*
On peut montrer que $SL_2(\mathbb{Z})$ est un réseau non uniforme de $SL_2(\mathbb{R})$ en considérant un domaine fondamental de son action sur $SO(2)\backslash SL_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{H}^2$.



On aura besoin de la définition suivante pour énoncer les résultats de la partie 2.

Définition 1.5. *On dit qu'un réseau Γ d'un groupe de Lie est irréductible si pour tout sous-groupe fermé, normal, non compact N de G, ΓN est dense dans G.*

Exemple 1.6. *Le groupe $SL_2(\mathbb{Z}) \times SL_2(\mathbb{Z})$ est un réseau non irréductible de $SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})$.*

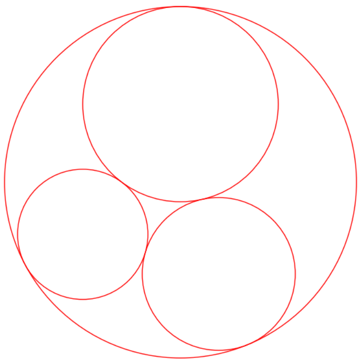
Réciproquement, si on suppose que le centre de G est trivial et que Γ est un réseau non irréductible de G qui se projette de manière dense dans le facteur compact maximal de G, on peut décomposer G en un produit $G_1 \times G_2 ... \times G_k$ tel que $\Gamma \cap G_i$ soit irréductible pour tout i et qu'un sous-groupe d'indice fini de Γ soit isomorphe à un sous-groupe d'indice fini de $(\Gamma \cap G_1) \times (\Gamma \cap G_k) ... \times (\Gamma \cap G_k)$.

Question 1.7. *Comment construire des groupes discrets ?*

Quand la dimension est petite, la géométrie des surfaces et des 3-variétés hyperboliques fournit des exemples de sous-groupes discrets de $SL_2(\mathbb{R})$, $SL_2(\mathbb{C})$:

— Le théorème de Poincaré donne des conditions pour qu'un polygône de $\mathbb{H}^2$ soit un domaine fondamental de l'action d'un groupe discret de $SL_2(\mathbb{R})$ décrit par les côtés du polygône.

— Considérons le demi-espace hyperbolique, modèle de $\mathbb{H}^3 \approx SU(2)\backslash SL_2(\mathbb{C})$ et le sous-groupe Γ de $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$ engendré par quatre symétries par rapport à des demi-sphères de bases quatre cercles en configuration de Descartes :



Un argument de ping-pong montre que l'intérieur de la plus grosse demi-boule, privé des 3 autres forme un domaine fondamental pour l'action de Γ sur $\mathbb{H}^3$. On en déduit que Γ est un sous-groupe discret, de covolume infini ainsi qu'une présentation de Γ : $\langle S_1, S_2, S_3, S_4 \,|\, S_i^2 = Id \ \forall i \rangle$.

— Si l'on construit une variété hyperbolique en recollant des morceaux de $\mathbb{H}^2$, son groupe d'isométrie est un sous-groupe discret de $SL_2(\mathbb{R})$.

Ces méthodes ne se généralisent pas à des groupes de Lie généraux. On peut alors utiliser des méthodes arithmétiques. Soient

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 - \sqrt{2}z^2, \ J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ et } \Gamma = \{g \in SL_3(\mathbb{Z}[\sqrt{2}]), \ gJ^tg = J\}.$$

Le groupe Γ est alors un sous-groupe discret de $SO(q)$. En effet, en notant $\cdot^\sigma$ le morphisme de Galois qui envoi $\sqrt{2}$ sur $-\sqrt{2}$, l'image de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par le morphisme $x \mapsto (x, x^\sigma)$ est discrète. On peut donc voir Γ comme un sous-groupe discret de $SO(q) \times SO(q^\sigma)$ et comme le second facteur est compact, la projection sur le premier est également discrète.

Le théorème 2.14 à venir, dû à Borel et Harish-Chandra, dit que tous ces exemples 'arithmétiques' sont des réseaux. Comment construire des sous-groupes discrets Zariski denses non 'arithmétiques' ? Le but de la section 3 est d'énoncer des résultats et des questions ouvertes sur l'existence de sous-groupes discrets de covolume infini construits à partir de réseaux.

2 Réseaux

2.1 Propriétés

Avant de pouvoir espérer construire où étudier l'existence de sous-groupes discrets de covolume infini, il est important de comprendre les seuls sous-groupes discret que l'on sait construire dans des groupes de Lie généraux : les réseaux. Dans cette section, on va énoncer certains résultats classiques sur les réseaux de groupes de Lie semi-simples, donner une caractérisation de l'uniformité d'un tel réseau et finir par des théorèmes puissants de Margulis.
Commençons par quelques résultats concernant la structure interne des réseaux :

Définition 2.1. *Un groupe est de présentation finie s'il est engendré par un nombre fini de générateurs qui vérifient un nombre fini de relations.*

En utilisant la géométrie de domaines fondamentaux, on peut montrer le théorème suivant dans le cas particulier où G/Γ est compact. Le cas général nécessite l'utilisation du théorème d'arithméticité de Margulis qui sera présenté plus tard.

Théorème 2.2. *Tout réseau Γ d'un groupe de Lie semi-simple est de présentation finie*

On en déduit qu'il existe $a_1, a_2...., a_k$ tels que Γ soit inclus dans $SL_n(\mathbb{Z}[a_1, a_2, ..., a_k])$.

Théorème 2.3. *(Selberg) Tout sous-groupe de type fini de $SL_n(\mathbb{R})$ est virtuellement sans torsion.*

En particulier, par ce qui précède, quitte à passer à un sous-groupe d'indice fini, on peut supposer que tout réseau Γ soit sans torsion.

Sous des hypothèses mineures, les réseaux que l'on considère sont Zariski denses, donc entre bien dans le cadre que l'on s'est fixé.

Théorème 2.4. *(Borel) Si l'on suppose G connexe et que la projection de Γ sur le facteur compact maximal (sous-groupe compact normal maximal) de G est dense, alors Γ est Zariski dense dans G.*

On peut caractériser algébriquement l'uniformité d'un réseau Γ :

Théorème 2.5. *Le quotient G/Γ est compact si et seulement si l'identité e n'est pas point d'accumulation de l'ensemble*

$$^G\Gamma = \{g\gamma g^{-1},\ g \in G,\ \gamma \in \Gamma\}.$$

On a en fait le résultat plus fort suivant :

Théorème 2.6. *Si G n'a pas de facteur compact et Γ est un réseau de G, G/Γ est compact si et seulement si Γ n'a pas d'élément unipotent non-trivial.*

Pour finir, on énonce un résultat sur les sous-groupes normaux des réseaux.

Théorème 2.7. *(Margulis) Si le rang réel de G est supérieur ou égal à 2 et Γ est un réseau irréductible de G, tout sous-groupe normal de Γ est soit fini, soit d'indice fini.*

On va à présent donner des résultats de rigidité des réseaux. L'idée derrière ces théorèmes est que des informations sur la structure d'un réseau d'un groupe de Lie semi-simple G fixent fortement les propriétés du groupe G.

Théorème 2.8. *(Mostow) Soient G_1, G_2 deux groupes de Lie semi-simples connexes de centres triviaux, sans facteurs compacts et Γ_1, Γ_2 des réseaux de G_1 et G_2 respectivement. Si $\Gamma_1 \simeq \Gamma_2$ alors $G_1 \simeq G_2$.*

Corollaire 2.9. *Si G est connexe et n'admet pas de facteur compact ou isogène à $SL_2(\mathbb{R})$, si Γ_t est une famille réelle continue de réseaux de G, alors Γ_t est conjugué à Γ_0 pour tout t.*

Dans $SL_2(\mathbb{R})$ on arrive au contraire, par des méthodes géométriques, à construire des familles continues de réseaux de $SL_2(\mathbb{R})$ Γ_t telles que les Γ_t ne soient pas conjugués deux-à-deux.

Théorème 2.10. *(Margulis) Pour $G = SL_n(\mathbb{R})$ avec $n \geq 3$, si Γ est un réseau non uniforme de G et $\phi : \Gamma \to GL_n(\mathbb{R})$ est un morphisme, alors il existe un morphisme continu $\hat{\phi} : G \to GL_n(\mathbb{R})$ et un sous-groupe d'indice fini Γ' de Γ tel que $\hat{\phi}$ coincide avec ϕ sur Γ'.*

Les conséquences de ce dernier théorème sont bien plus fortes que celui de Mostow. Il est en fait valable pour des groupes plus généraux que $SL_n(\mathbb{R})$:

Théorème 2.11. *(Margulis) Supposons G connexe, non isogène à un produit de la forme $SO(1,m) \times K$ ou $SU(1,n) \times K$ où K compact. Soient Γ un réseau irréductible de G et $\phi : \Gamma \to GL_n(\mathbb{R})$ un morphisme. Alors quitte à passer à un revêtement fini de G, il existe un morphisme continu $\hat{\phi} : G \to GL_n(\mathbb{R})$, un sous-groupe d'indice fini Γ' de Γ et un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ qui centralise $\hat{\phi}(G)$ tels que*

$$\forall \gamma \in \Gamma', \;\; \phi(\gamma) \in \hat{\phi}(\gamma) C.$$

2.2 Sous-groupes arithmétiques

L'exemple typique du réseau $SL_n(\mathbb{Z}) \subset SL_n(\mathbb{R})$ conduit à s'intéresser aux sous-groupes formés des points entiers d'un groupe algébrique.

Définition 2.12. *Soit H un sous-groupe fermé de $SL_n(\mathbb{R})$. On dit que H est un $\mathbb{Q}$-groupe si il existe un ensemble $\mathcal{Q} \subset \mathbb{Q}[x_{11}, ..., x_{nn}]$ tel que*

— *$Var(\mathcal{Q}) = \{g \in SL_n(\mathbb{R}) \,|\, Q(g) = 0, \, \forall Q \in \mathcal{Q}\}$ soit un sous-groupe de $SL_n(\mathbb{R})$*
— *$H^\circ = Var(\mathcal{Q})^\circ$*
— *H n'ait qu'un nombre fini de composantes connexes.*

A isogénie près, les groupes de Lie classiques sont tous des $\mathbb{Q}$-groupes.

Proposition 2.13. *Tout groupe de Lie semi-simple est isogène à un $\mathbb{Q}$-groupe*

Le théorème suivant justifie l'importance des sous-groupes 'arithmétiques', que l'on définira formellement par la suite.

Théorème 2.14. *(Borel et Harish-Chandra) Si G est un $\mathbb{Q}$-groupe semi-simple, $G_\mathbb{Z} = G \cap SL_n(\mathbb{Z})$ est un réseau de G.*

Exemple 2.15. *Le groupe $SO(m,n)_\mathbb{Z}$ est un réseau de $SO(m,n)$.*

Les théorèmes de la sous-section précédente s'appliquent donc aux sous-groupes 'arithmétiques' et fournissent des résultats non triviaux.
Dans ce cas là, l'analogue du théorème 2.5 est plus simple, appelé critère de compacité de Godement :

Proposition 2.16. *(Godement) Si G est un $\mathbb{Q}$-groupe semi-simple, $G_\mathbb{Z}$ est uniforme si et seulement si $G_\mathbb{Z}$ n'a pas d'éléments unipotents non-triviaux.*

On obtient également comme conséquence du théorème précédent que tout groupe de Lie semi-simple G admet un réseau. A l'aide de ce critère, pour G non compact, on peut en fait construire des réseaux uniformes et non uniformes de G.

On va à présent définir formellement la notion de groupe arithmétique : on souhaite que pour un $\mathbb{Q}$-groupe G, $G_\mathbb{Z}$ soit un sous-groupe arithmétique de G, que la notion soit stable par isomorphisme, par passage à des sous-groupes d'indice fini et modulo des sous-groupes compacts normaux.

Définition 2.17. *Un sous-groupe Γ de G est dit arithmétique s'il existe un $\mathbb{Q}$-sous-groupe fermé, connexe, semi-simple G' d'un $SL_n(\mathbb{R})$, des sous-groupes normaux compacts K, K' de G et G' respectivement et un isomorphisme $\phi : G/K \to G'/K'$ tels que modulo passage à des sous-groupes d'indice fini, ϕ envoie Γ/K sur $G'_{\mathbb{Z}}/K'$.*

On va donner une deuxième définition, qui fait essentiellement abstraction du choix de la base canonique dans $\mathbb{R}^k$. On commence par définir la notion de $\mathbb{Q}$-forme ainsi que les analogues de concepts naturels dans ce cas.

Définition 2.18. *Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie.*

- *Un $\mathbb{Q}$-sous-espace $V_{\mathbb{Q}}$ de V est une $\mathbb{Q}$-forme si l'application $\mathbb{R}$-linéaire $V_{\mathbb{Q}} \bigotimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \to V$, $t \bigotimes v \mapsto tv$ est un isomorphisme.*
- *Un sous-groupe de type fini $\mathcal{L}$ du groupe additif de $V_{\mathbb{Q}}$ engendré par un nombre fini de générateurs est un réseau de $V_{\mathbb{Q}}$ si l'application $\mathbb{Q}$-linéaire $\mathbb{Q} \bigotimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{L} \to V_{\mathbb{Q}}$, $t \bigotimes v \mapsto tv$ est un isomorphisme. Une $\mathbb{Q}$-forme $V_{\mathbb{Q}}$ et un réseau $\mathcal{L}$ représentent $\mathbb{Q}^l$ et $\mathbb{Z}^l$ pour une identification de V avec $\mathbb{R}^l$.*
- *Une fonction f sur V est polynomiale si pour tout isomorphisme linéaire $\phi : \mathbb{R} \to V$, la composée $f \circ \phi$ est une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^l$*
- *Un polynôme f sur V est défini sur $\mathbb{Q}$ si $f(V_{\mathbb{Q}}) \subset \mathbb{Q}$.*
- *A la $\mathbb{Q}$-forme $V_{\mathbb{Q}}$ sur V correspond une $\mathbb{Q}$-forme sur $End(V)$ définie par*

$$End(V)_{\mathbb{Q}} = \{A \in End(V) \mid A(V_{\mathbb{Q}}) \subset V_{\mathbb{Q}}\}$$

- *Un sous-groupe H de $SL(V)$ est défini sur $\mathbb{Q}$ s'il existe un ensemble $\mathcal{Q}$ de polynômes sur $End(V)$ tel que tout $Q \in \mathcal{Q}$ soit défini sur $\mathbb{Q}$, $Var(\mathcal{Q})$ soit un sous-groupe de $SL(V)$ et $Var(\mathcal{Q})^\circ$ soit un sous-groupe d'indice fini de H.*

On peut définir de manière équivalente un sous-groupe arithmétique comme le stabilisateur d'un réseau d'une $\mathbb{Q}$-forme.

Proposition 2.19. *Soit $G \subset GL(V)$, défini sur $\mathbb{Q}$ pour la $\mathbb{Q}$-forme $V_{\mathbb{Q}}$. Pour tout réseau $\mathcal{L}$ de $V_{\mathbb{Q}}$, $G_{\mathcal{L}} = \{g \in G \mid g\mathcal{L} = \mathcal{L}\}$ est un sous-groupe arithmétique de G. Si $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ sont deux réseaux de $V_{\mathbb{Q}}$, $G_{\mathcal{L}_1}$ est commensurable à $G_{\mathcal{L}_2}$.*

L'exemple suivant illustre l'intéret de cette définition.

Exemple 2.20. *Soit $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$ et $G = SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})$.*
On considère les applications $\sigma : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \to \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$ et $\Delta : x \mapsto (x, \sigma(x))$.
En notant $F = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ et $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. On a que $\Delta(F)$ est une $\mathbb{Q}$-forme de $\mathbb{R}^2$,

$$\Delta(F^2) = \{(u, \sigma(u)) \in F^4 \,,\, u \in F^2\}$$

est une $\mathbb{Q}$-forme de $\mathbb{R}^4$ et $\Delta(\mathcal{O})$ est un réseau de $\Delta(F^2)$. On peut vérifier que $G_{\Delta(\mathcal{O}^2)} = \Delta(\Gamma)$.
$\Delta(\Gamma)$ est donc un sous-groupe arithmétique de G.

Cette construction est en un sens la seule façon de construire des réseaux irréductibles :

Proposition 2.21. *Si $\Gamma = G_{\mathbb{Z}}$ est un réseau irréductible de G, il existe*

- *un corps de nombres F,*
- *un sous-groupe connexe simple H de $SL_l(\mathbb{C})$ tel que H soit défini sur F,*
- *une isogénie $\phi : \prod_{\sigma \in S^\infty} H^\sigma \to G$, où S^∞ est l'ensemble des plongements de F dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ où l'on a identifié chaque réalisation avec son conjugué.*

tels que Γ soit commensurable à $\phi(\Delta(H_{\mathcal{O}}))$.

2.3 Classification

Le théorème fondamental suivant ramène la classification des réseaux des groupes de Lie à celle des groupes arithmétiques.

Théorème 2.22. *(Margulis) Tout réseau irréductible d'un groupe de Lie non isogène à $SU(n,1) \times K$ ou $SO(n,1) \times K$ est arithmétique.*

Remarquons que ce théorème ne s'applique pas à $SL_2(\mathbb{R}) \simeq SO(2,1)$, ni à $SL_2(\mathbb{C}) \simeq SO(3,1)$. Dans $SO(n,1)$, on sait construire des réseaux irréductibles non arithmétiques à partir de deux réseaux arithmétiques par des méthodes géométriques. On peut se demander si tout les réseaux sont en lien avec des réseaux arithmétiques.

Question 2.23. *Pour $n \geq 4$, soit Γ un réseau de $SO(n,1)$. Existe-t-il forcément un réseau arithmétique Γ_1 tel que $\Gamma \cap \Gamma_1$ soit Zariski dense ?*

La question de l'arithméticité des réseaux de $SU(n,1)$ pour $n \geq 4$ est quant à elle toujours ouverte.

Pour les autres groupes de Lie, une classification des $\mathbb{Q}$-forme entraine donc un classification de tout les réseaux. On va donner une liste des réseaux possibles des groupes de Lie semi-simples classiques.

Définition 2.24. *On dit que G est un groupe de Lie classique s'il est isogène à un produit direct des groupes suivants :*

- $SL_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$.
- $SO(m,n)$, $n+m \geq 3$.
- $SU(m,n)$, $n+m \geq 2$.
- $Sp(2m,\mathbb{R})$, $n \geq 1$.
- $SL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{H})$, $n \geq 2$.
- $SO_n(\mathbb{C})$, $SO_n(\mathbb{H})$.
- $Sp(2m,\mathbb{C})$.
- $Sp(m,n,\mathbb{H})$.

Théorème 2.25. *Si G est un groupe de Lie classique, tel qu'aucun des facteurs simples de $G_{\mathbb{C}}$ ne soit isogène à $SO_8(\mathbb{C})$ alors tout réseau irréductible arithmétique Γ de G est commensurable à l'ensemble des points entiers d'un des groupes suivants :*
Pour F un corps de nombres,

- $SL_n(D)$ *où D est une algèbre à division de centre F,*
- $Sp(2n,F)$,
- $SO(A,F)$ *où A est une matrice inversible symétrique à coefficients dans F,*
- $SU(A,\mathbb{H}_F)$ *où $\mathbb{H}_F$ est un corps de quaternions sur F,*
- $SU(A,D)$ *où D est une algèbre à division de centre une extension quadratique de F.*

Plus précisément, il existe un corps de nombre F, d'anneau d'entiers $\mathcal{O}$, un groupe G_F de cette liste auquel est associé à groupe de Lie $\hat{G}$ défini sur F dont on ne donne pas la liste ici et un morphisme ϕ : $\prod_{\sigma \in S^\infty} \hat{G}^\sigma \to G$ de noyau compact tel que quitte à passer à des sous-groupes d'indices finis, $\phi(\Delta(G_{\mathcal{O}})) = \Gamma$.

Voici comment se traduit se théorème dans le cas d'un exemple simple.

Corollaire 2.26. *Tout réseau arithmétique non uniforme de $SL_3(\mathbb{R})$ est commensurable à un conjugué de $SL_3(\mathbb{Z})$ ou à un $SU(J_3,\sigma,\mathcal{O})$ où $\mathcal{O}$ est l'anneau des entiers d'une extension quadratique réelle de $\mathbb{Q}$ d'automorphisme de Galois $\sigma \neq Id$ et $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

3 Construction/existence de sous-groupes discrets à partir de réseaux

On s'intéresse à l'existence et/ou la construction de sous-groupes discrets Zariski denses qui intersectent certains sous-groupes en des réseaux :

Question 3.1. *(Nori, 1983) Soit H un sous-groupe algébrique d'un groupe semi-simple G. A quelles conditions sur H, G, tout sous-groupe discret Zariski dense Γ de G intersectant H en un réseau est-il un réseau de G ?*

Si G et H sont simples, non compacts et de rangs réel ≥ 2, aucun exemple de groupe discret intersectant H en un réseau mais qui ne soit pas un réseau de G n'est connu.

Question 3.2. *Si H est un sous-groupe de Lie simple d'un groupe de Lie simple G, tout sous-groupe Zariski dense de G intersectant H en un réseau est-il un réseau de G ?*

I. Chatterji et N. Venkataramana ont apporté le début de réponse partielle suivant :

Théorème 3.3. *[CV09] On suppose que G est simple et que H est un sous-groupe semi-simple de G, de rangs réel ≥ 2. Soit Γ un sous-groupe Zariski dense de G qui intersecte H en un réseau irréductible. On suppose que H est de dimension strictement supérieure à celle de K, un sous-groupe compact maximal de G. Alors Γ est un sous-groupe superrigide de G au sens du théorème de rigidité de Margulis.*

Pour des réseaux, la superrigidité est équivalente à l'arithméticité. Dans le cas général, on a un résultat plus faible.

Théorème 3.4. *[Ven93] Si G est un groupe algébrique réel absolument simple et Γ un sous-groupe discret de G superrigide, il existe un sous-groupe arithmétique Γ_0 de G contenant Γ.*

Dans certains cas particuliers où le réseau $\Gamma \cap H$ est $SL_d(\mathbb{Z}) \subset SL_d(\mathbb{R})$ ou $Sp_d(\mathbb{Z}) \subset Sp_d(\mathbb{R})$, Chatterji et Venkataramana arrivent à conclure :

Théorème 3.5. *[CV09] Pour $n \geq 4$ et $d \geq 3$, si $SL_d(\mathbb{R})$ est plongé dans $SL_n(\mathbb{R})$ par exemple dans le coin en haut à gauche, et si Γ est un sous-groupe discret Zariski dense de $SL_n(\mathbb{R})$ intersectant $SL_d(\mathbb{R})$ en un sous-groupe d'indice fini de $SL_d(\mathbb{Z})$, alors modulo passage à des sous-groupes d'indices finis, Γ est lui-même conjugué à $SL_n(\mathbb{Z})$.*

Dans le cas où G est de rang réel 1, la réponse à la question 3.2 est négative.

Théorème 3.6. *[CV09] Soit G un groupe de Lie simple de rang réel 1 et H un sous-groupe semi-simple non compact. Soit Δ un réseau de H, alors il existe un sous-groupe discret Zariski dense de G de covolume infini dont l'intersection avec H est un sous-groupe d'indice fini de Δ.*

Hee Oh s'est intéressée à des groupes intersectant une paire de sous-groupes horosphériques opposés en des réseaux, motivée par le résultat suivant :

Théorème 3.7. *[Mar74] Soit G de rang réel au moins égal à 2, alors pour tout réseau Γ irréductible non uniforme de G, il existe une paire de sous-groupes horosphériques opposés U_1, U_2 tels que $\Gamma \cap U_i$ soit un réseau de U_i pour $i = 1, 2$.*

Elle montre [Oh98] réciproquement que sous certaines conditions sur G, tout sous-groupe discret intersectant un couple de sous-groupes horosphériques opposés en des réseaux est lui-même un réseau arithmétique.

Plus récemment, en colaboration avec Yves Benoist, ils obtiennent le résultat suivant concernant $SL_3(\mathbb{R})$:

Théorème 3.8. *[BO09] Soit $G = SL_3(\mathbb{R})$, et U_1, U_2 les sous-groupes triangulaires inférieur et supérieur. Soit F_1, F_1 des réseaux de U_1, U_2 tels que F_1 soit irréductible et $\Gamma_{F_1,F_2} = \langle F_1, F_2 \rangle$ soit discret. Alors il existe un corps quadratique réel K tel qu'à conjugaison près par un élément diagonal de $GL_3(\mathbb{R})$, Γ soit commensurable à*

$$\{g \in SL_3(\mathcal{O}_K)\,,\, g \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sigma(g)^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\}$$

où σ est l'élément de Galois non trivial associé à K.

Ce dernier théorème correspondait au dernier cas manquant à Hee Oh pour établir le résultat suivant.

Théorème 3.9. *[BO09] On suppose que G est déployé sur $\mathbb{R}$, de rang réel supérieur ou égal à 2, absolument simple et connexe. Si un sous-groupe discret Γ, Zariski dense de G intersecte un sous-groupe horosphérique en un réseau, alors Γ est un réseau arithmétique.*

Références

[BO09] Y. Benoist and H. Oh. Discrete subgroups of $sl_3(\mathbb{R})$ generated by triangular matrices. *Int. Math. Research Notices 149*, 2009.

[CV09] I. Chatterji and T. N. Venkataramana. Discrete linear groups containing arithmetic groups, 2009.

[Mar74] G. A. Margulis. Arithmetic properties of discrete groups. *Russian Math. Surveys 29*, 1974.

[Mar89] G. A. Margulis. *Discrete sugbroups of semisimple Lie groups.* Springer-Verlag, 1989.

[Mor] D. W. Morris. *Introduction to arithmetic groups.*

[Oh98] H. Oh. Discrete groups generated by lattices in opposite horospherical subgroups. *J. Algebra*, 1998.

[Ven93] T. N. Venkataramana. On the arithmeticity of certain rigid subgroups. *CR.Acad. Aci. Paris. s er I, Math 316*, 1993.