

Introduction au domaine de recherche: Couches limites: exemples et phénomène de dégénérescence

Jean Rax

Table des matières

1	Introduction et exemples	2
1.1	Problématique	2
1.2	Un exemple simple	3
1.3	Cadre du problème	3
2	Analyse formelle	4
2.1	Idée de l'analyse	4
2.2	Exemples	5
2.3	Cas général	5
2.4	Exemple de dégénérescence spatiale	6
3	Construction standard des couches limites pour les fluides tournants	6
3.1	Existence et stabilité	6
3.2	Sur la pénalisation de Coriolis	7
3.3	Idée de la construction	8
4	Méthode systématique via des opérateurs adaptés	9
4.1	Opérateurs de bords	9
4.2	Opérateur intérieur	10
4.3	Convergence	10
5	Une dégénérescence en fréquence: la cas du forçage résonnant	11
6	Analyse du phénomène sans construction explicite	11
7	Conclusion	12
7.1	Les dégénérescences	12
7.2	Remarques sur les termes non linéaires	12

1 Introduction et exemples

1.1 Problématique

De nombreux phénomènes physiques font apparaître après adimensionnement, c'est à dire un changement d'échelles adapté aux grandeurs typiques du problème, des rapports de quantités caractéristiques, quantifiant ainsi la prédominance d'un phénomène par rapport à un autre. Par exemple après avoir fait ressortir la vitesse caractéristique U et la longueur caractéristique L , l'équation de Navier-Stokes modélisant l'écoulement d'un fluide de viscosité ν devient:

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \frac{1}{\mathcal{R}} \Delta u + \nabla p &= 0 \\ \nabla \cdot u &= 0 \end{aligned} \quad (NS_\varepsilon)$$

où

$$\mathcal{R} = \frac{UL}{\nu} = \frac{1}{\varepsilon}$$

est le nombre de Reynolds traduisant le rapport entre les influences respectives de la partie visqueuse et cinématique.

La question qu'on se pose alors est de savoir s'il est possible de négliger totalement l'un des comportements dans l'équation et ainsi obtenir une approximation suffisante du comportement réel, c'est-à-dire si on considère un problème de pénalisation singulière:

$$Au^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} Lu^\varepsilon = 0$$

est-il envisageable de penser que la résolution de $Lu = 0$ donne une bonne approximation de u^ε quand $\varepsilon \rightarrow 0$?

En d'autres termes la solution de l'équation limite (au sens formel) est-elle proche de la limite de la solution de l'équation ?

Par exemple dans l'exemple précédent, sous réserve que l'on connaisse une solution suffisamment régulière de l'équation d'Euler (correspondant à $\varepsilon = 0$ ou encore $\mathcal{R} = +\infty$), aucun problème supplémentaire n'apparaît pour un domaine sans bords et on peut sans difficultés particulières montrer:

Proposition 1 (Cas où le domaine est \mathbb{R}^d (sans bord)):

Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ à divergence nulle tel que l'équation d'Euler de donnée initiale u_0 admette sur $[0, T]$ une solution u telle que $u \in C([0, T], L^2(\mathbb{R}^d))$ et $\nabla u \in L^2([0, T] \times \mathbb{R}^d) \cap L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d)$.

Avec u^ε solution de Leray (c'est à dire une solution faible vérifiant une inégalité d'énergie) de (NS_ε) de donnée initiale u_0 , on a:

$$u^\varepsilon \rightarrow u \text{ dans } L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{R}^d))$$

Mais si le domaine Ω sur lequel on considère l'équation possède un bord non vide alors il n'y a plus aucune raison d'espérer obtenir un résultat similaire, en effet une équation différentielle n'a de sens qu'avec des **conditions aux bords**, ainsi Navier-Stokes s'écrit sur un domaine Ω :

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \frac{1}{\mathcal{R}} \Delta u + \nabla p &= 0 \\ \nabla \cdot u &= 0 \\ \boxed{u|_{\partial\Omega} = 0} \end{aligned} \quad (NS_\varepsilon)$$

Or sur le même domaine l'équation d'Euler s'écrit en notant n la normale au bord:

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p &= 0 \\ \nabla \cdot u &= 0 \\ \boxed{(u \cdot n)|_{\partial\Omega} = 0} \end{aligned} \quad (Euler)$$

Et de manière générale si l'opérateur différentiel L est de degré inférieur à A les conditions aux bords associées à u^ε sont a priori incompatibles avec celles de $Lu = 0$.

1.2 Un exemple simple

Considérons à titre d'exemple l'équation différentielle ordinaire sur $[0, 1]$:

$$\partial_x^2 u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x u^\varepsilon + u^\varepsilon = 0 \text{ dans } [0, 1]$$

$$u^\varepsilon(0) = \alpha, u^\varepsilon(1) = \beta$$

Le système limite en prenant formellement $\varepsilon = 0$ serait:

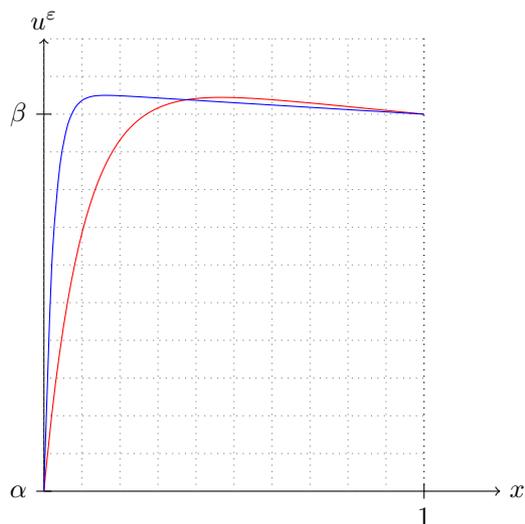
$$\partial_x u = 0$$

c'est à dire une fonction constante, ce qui n'est pas compatible avec $u(0) = \alpha \neq \beta = u(1)$.

Dans ce cas simple il est possible de calculer les solutions exactes:

$$u^\varepsilon(x) = \frac{\left(\beta - \alpha e^{-\frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon}}\right)}{e^{-\frac{1+\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon}} - e^{-\frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon}}} e^{-\frac{1+\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon}x} + \frac{\left(-\beta + \alpha e^{-\frac{1+\sqrt{1+4\varepsilon^2}}{2\varepsilon}}\right)}{e^{-\frac{1+\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon}} - e^{-\frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon}}} e^{-\frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon}x}$$

Graphiquement si on trace les solutions pour plusieurs valeurs de ε , on observe que les solutions après une variation rapide près de 0 se stabilisent et varient ensuite lentement avec des valeurs proches de β .



$$\varepsilon = 0.1, 0.025$$

Et en effectuant un développement asymptotique, les solutions tendent bien vers une constante, en l'occurrence β . Néanmoins pour relever la condition de bord en 0 se crée alors une **couche limite**: une variation rapide de u^ε près du bord qui tend fortement vers 0 avec ε mais permet à la solution approchée de vérifier les bonnes conditions aux bords.

Plus précisément en effectuant le développement de la solution on trouve:

$$u^\varepsilon(x) = \beta + \varepsilon\beta(1-x) + \dots + (\alpha - \beta)e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + \varepsilon\beta e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \dots$$

le terme de couche limite étant celui en $e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$ de décroissance exponentielle en la distance au bord.

1.3 Cadre du problème

Ce comportement particulier est présent dans le cas général; plus précisément si on considère un problème d'évolution de la forme $Au^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}Lu^\varepsilon = 0$ où A est de degré supérieur à L avec des conditions aux bords adaptées en faisant $\varepsilon \rightarrow 0$ on s'attend si L est "sympathique" à:

- Avoir des estimées d'énergie uniformes en ε qui assurent donc une convergence faible à extraction près des u^ε vers u .
- En écrivant la formulation faible et en faisant $\varepsilon \rightarrow 0$ obtenir grâce à ces estimées que :

$$Lu = 0$$

- Or comme L est de degré plus petit les conditions aux bords de u^ε ne sont pas adaptées à cette équation. Il doit donc y avoir un développement asymptotique de la forme:

$$u^\varepsilon(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\varepsilon^\beta)^k (u_{k,int}(t, x) + u_{k,CL}(t, x))$$

où $u_{k,CL}(t, x)$ est un terme qui décroît rapidement près des bords relevant les conditions aux bords qui ne sont pas vérifiées par u dont les liens avec les termes intérieurs $u_{k,int}$ sont détaillés en 3.3.

Les questions que l'on se pose sont alors les suivantes:

- Est ce que cette analyse est correcte ?
- Si oui quelles sont les propriétés de la limite u ?
- Et quelles sont les propriétés des couches limites, notamment leurs interactions avec u ?

On traitera en particulier **l'équation des fluides tournants linéaire**:

$$\begin{aligned} \partial_t u^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon - \nu \partial_3^2 u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \nabla p^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} e_3 \wedge u^\varepsilon &= 0 \\ \nabla \cdot u^\varepsilon &= 0 \end{aligned} \quad (SC_\varepsilon)$$

sur $\Omega = (x_h, x_3) \in \mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ et les conditions aux bords:

$$\begin{aligned} u^\varepsilon|_{x_3=0} &= 0 \\ u^\varepsilon|_{x_3=0} = 0, \partial_3 u^\varepsilon|_{x_3=1} &= \Sigma^\varepsilon \end{aligned}$$

Cette équation tirée notamment de la géophysique (voir [2] ou [3]) correspond à la modélisation d'un fluide tournant autour de la verticale locale où le nombre de Rossby $\varepsilon = \frac{U}{L2\omega}$ caractérise l'amplitude des effets de rotation de vitesse angulaire ω et ν est introduit pour modéliser l'anisotropie de la viscosité (on peut montrer que le régime $\nu \sim \varepsilon$ est le plus pertinent).

Pour ce qui est du domaine le choix du tore pour la coordonnée horizontale permet d'éviter les problèmes de bords horizontaux, $x_3 \in [0, 1]$ représentant l'altitude, la condition au fond ($x_3 = 0$) étant une condition de non glissement usuelle et celle à la surface ($x_3 = 1$) un forçage par le vent.

La partie $\frac{1}{\varepsilon} e_3 \wedge u^\varepsilon$ créée par la force de Coriolis jouent le rôle de l'opérateur de pénalisation et présente de nombreux avantages:

- Elle stabilise l'équation ainsi que les couches limites.
- Elle est antisymétrique et n'intervient pas dans les estimées énergies.
- Son noyau est facile à décrire.
- Enfin les couches limites associées présentent de nombreux comportements intéressants: un effet de pompage pour celles dites d'Ekman apparaissant au fond, c'est-à-dire dans ce cas une interaction avec u dont le comportement est modifié par la présence de ces couches, et avec des conditions aux bords ou une géométrie adaptée on voit aussi apparaître un phénomène de **dégénérescence** c'est-à-dire des couches limites inhabituelles non prédites par l'analyse générale que l'on verra en 2.

2 Analyse formelle

2.1 Idée de l'analyse

Il est possible suivant [5] d'effectuer une analyse formelle très générale du phénomène de couches limites dans le cas linéaire. L'idée est la suivante: comme l'équation est linéaire le passage en Fourier permet de se ramener à un problème algébrique, le phénomène de couches limites étant alors traduit par certains des modes propres de l'opérateur reflétant ce comportement particulier près des bords.

Plus précisément l'équation $Au^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} Lu^\varepsilon = 0$ dans \mathbb{R}^d peut s'écrire en Fourier:

$$\widehat{A}(\xi) \widehat{u}^\varepsilon(\xi) + \frac{1}{\varepsilon} \widehat{L}(\xi) \widehat{u}^\varepsilon(\xi) = 0$$

où par le symbole \widehat{A} de A vérifie $\widehat{A}f(\xi) = \widehat{A}(\xi) \widehat{f}(\xi)$ ou encore formellement $\widehat{A}(\xi)V = e^{-i\xi \cdot x} (Ae^{i\xi \cdot x} V)$.

L'équation admet donc une solution non nulle sous la forme $e^{i\xi \cdot x}$ ssi $\left(\widehat{A} + \frac{1}{\varepsilon} \widehat{L} \right) (\xi)$ est de noyau non vide, ce qui pousse à poser la variété caractéristique associée à l'équation:

$$\sigma^\varepsilon = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^d \text{ t.q. } \det \left(\widehat{A} + \frac{1}{\varepsilon} \widehat{L} \right) (\xi) = 0 \right\}$$

Comme une solution correspond à un mode de la variété caractéristique, par linéarité, les termes de couches limites sont ceux décroissant rapidement avec la distance au bord. Pour un domaine en demi-plan $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+$ en notant les variables de Fourier adaptées $\xi = (\xi_{\parallel}, \xi_{\perp}) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$ une décroissance rapide loin du bord de correspond à un mode en ξ_{\perp} de la forme $i\frac{C}{\varepsilon^{\alpha}}$ (on peut montrer qu'on a en effet une puissance de ε de manière générale) i.e à une fonction en:

$$u^{\varepsilon}(x_{\parallel}, x_{\perp}) = e^{-C\frac{x_{\perp}}{\varepsilon}} e^{i\xi_{\parallel} \cdot x_{\parallel}} V^{\varepsilon}$$

Ce qui donne alors la définition:

Définition 1:

Une couche limite de taille ε^{α} correspond à un mode $\xi^{\varepsilon} = (\xi_{\parallel}^{\varepsilon}, \xi_{\perp}^{\varepsilon}) \in \sigma^{\varepsilon}$ tel que:

- ξ_{\parallel} indépendant de ε (ou tout du moins variant peu avec ε).
- $\xi_{\perp}^{\varepsilon} \sim \frac{iC}{\varepsilon^{\alpha}}$ où $\Re(C) > 0$.

Cette approche permet donc de ramener théoriquement la recherche de couches limites à une recherche algébrique de modes particuliers.

2.2 Exemples

Illustrons cette idée à travers les deux exemples précédents: Pour l'équation différentielle ordinaire précédente $\partial_x^2 u^{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \partial_x u^{\varepsilon} + u^{\varepsilon} = 0$ l'équation s'écrit en Fourier:

$$\left(-\xi^2 + \frac{1}{\varepsilon} i\xi + 1 \right) \widehat{u}^{\varepsilon}(\xi) = 0$$

Ici du fait de la faible dimension la variété caractéristique est réduite à deux points, et on observe que l'une des solutions a un développement asymptotique en $\xi \sim \frac{-i}{\varepsilon}$ c'est-à-dire une couche limite près de 0 de taille ε .

Un exemple plus complexe est celui des fluides tournants (SC_{ε}). L'équation en Fourier est (en notant (τ, ξ_h, ξ_3) correspondant à (t, x_h, x_3)):

$$\begin{pmatrix} i\tau + \xi_h^2 + \nu\xi_3^2 & -\frac{1}{\varepsilon} & 0 & i\frac{\xi_1}{\varepsilon} \\ \frac{1}{\varepsilon} & i\tau + \xi_h^2 + \nu\xi_3^2 & 0 & i\frac{\xi_2}{\varepsilon} \\ 0 & 0 & i\tau + \xi_h^2 + \nu\xi_3^2 & i\frac{\xi_3}{\varepsilon} \\ i\frac{\xi_1}{\varepsilon} & i\frac{\xi_2}{\varepsilon} & i\frac{\xi_3}{\varepsilon} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{\varepsilon} \\ u_2^{\varepsilon} \\ u_3^{\varepsilon} \\ p^{\varepsilon} \end{pmatrix} = 0$$

en effet ∂_t correspond à $i\tau$, $\Delta_h + \nu\partial_3^2$ à $-\xi_h^2 - \nu\xi_3^2$, le gradient à la multiplication par ξ et la divergence au produit scalaire par rapport à ξ i.e la multiplication par rapport à ξ^T , et $e_3 \wedge u^{\varepsilon}$ se transformant simplement en $e_3 \wedge \widehat{u}^{\varepsilon}$.

L'équation de la variété caractéristique est:

$$\varepsilon^2(i\tau + \xi_h^2 + \nu\xi_3^2)^2 \xi^2 + \xi_3^2 = 0$$

Si on cherche des modes de couche limite i.e τ, ξ_h fixes et $\xi_3 \rightarrow +\infty$ un simple développement donne:

$$\xi_3 \sim \frac{\pm 1 - i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\nu}}$$

D'où l'apparition de couches limites de taille $\sqrt{\varepsilon\nu}$.

Il est ensuite possible de suivre la même idée pour préciser le comportement de ces couches notamment obtenir leurs amplitudes et équations ainsi que de considérer d'autres modes, par exemple des oscillations rapides en temps couplées à une décroissance exponentielle près des bords, $\tau \sim \frac{\mu}{\varepsilon}$ et $\xi_3 \rightarrow +\infty$ qui apparaissent en fait naturellement dans le problème et correspondant physiquement à l'apparition d'ondes comme on le verra.

2.3 Cas général

Cette analyse extrêmement formelle, si elle permet de trouver les modes de couche limite, présente le défaut de ne pas expliciter ceux qui sont effectivement présents pour des conditions initiales et aux bords spécifiquement données et ne donne aussi aucune information précise sur l'approximation de la solution.

L'article [6] précise cette étude en l'étendant de plus au cas d'opérateurs généraux, par exemple pouvant dépendre de la position. Il montre alors que si certaines hypothèses sont vérifiées cette analyse donne en effet le résultat. Parmi ces hypothèses deux sont particulièrement importantes et constituent plus que de simples hypothèses techniques, elle traduisent le fait que le comportement doit être non **dégénéré**, c'est à dire:

- Les modes ξ (définis de manière locale en général) ont un comportement qui ne dépend pas trop de la position spatiale dans $\partial\Omega$. Dans le cas contraire, comme par exemple dans le cas d'une latitude variable, la taille typique dépend de la position et on est en présence d'une dégénérescence de nature géométrique.
- Le comportement de ξ_\perp ne dépend pas trop des autres modes ξ_\parallel , dans le cas contraire on a une dégénérescence en fréquence liée à la structure algébrique de σ^ε . On verra un exemple à travers le cas du forçage quasi-résonnant.

Dans les cas dégénérés une telle analyse formelle ne fonctionne plus, il faut alors traiter plus finement les couches limites.

2.4 Exemple de dégénérescence spatiale

Un premier exemple de dégénérescence spatiale, c'est à dire lié à la dépendance en x des modes est celui de la latitude variable.

En effet si on considère dans les fluides tournants un axe de rotation dépendant de la latitude comme c'est le cas en géophysique, l'équation devient (en imposant pour plus de simplicité $\nu = \varepsilon$)

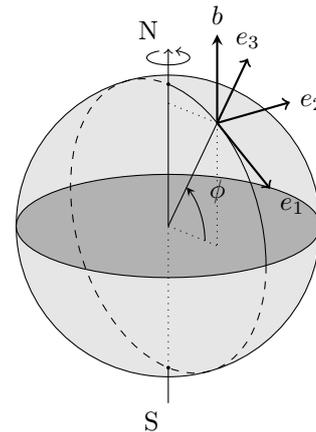
$$\partial_t u^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon - \Delta_h u^\varepsilon - \varepsilon \partial_3^2 u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \nabla p^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} b(\phi) \wedge u^\varepsilon = 0$$

$$\nabla \cdot u^\varepsilon = 0$$

où ϕ est la latitude et:

$$b(\phi) = \cos(\phi)e_1 + \sin(\phi)e_3$$

la verticale locale.



Si on essaie d'adapter la même analyse que précédemment on voit que selon ϕ apparaissent plusieurs comportements, par exemple pour $\phi = \frac{\pi}{2}$ on obtient une couche limite de taille ε comme précédemment. Par contre à l'équateur on obtient une variété caractéristique qualitativement différente:

$$\varepsilon^2 \xi^2 (i\tau + \xi_h^2 + \varepsilon \xi_3^2)^2 + \xi_1^2 = 0$$

ce qui donne après prise en compte de la courbure de la Terre une couche limite de taille $\varepsilon^{\frac{2}{3}}$.

Il est alors possible d'essayer de déterminer la zone critique à partir de laquelle la taille change de manière qualitative, et on obtient avec une dépendance $\phi \sim \varepsilon^\gamma$ l'existence d'un γ critique valant $\gamma_c = \frac{1}{3}$.

En résumé dans ce cas du fait de la dépendance de l'équation caractéristique en les coordonnées spatiales du point considéré (ici la latitude ϕ) les couches limites présentes un phénomène atypique avec entre autres un changement de régime près de l'équateur au niveau de leurs tailles. Ce phénomène illustre bien les cas de dégénérescences spatiales possibles et explique pourquoi il est a priori difficile de montrer la validité d'une analyse purement formelle dans ces cas.

3 Construction standard des couches limites pour les fluides tournants

On va maintenant essayer de rentrer dans les détails de la construction de ces couches limites ainsi que dans les détails quantitatifs de la convergence des u^ε , tout d'abord par la construction classique de [2], puis via des opérateurs généraux introduits par [3].

3.1 Existence et stabilité

Une première étape consiste à justifier l'existence des solutions et à établir une estimée de stabilité de l'équation (SC_ε) .

Théorème 1 (Théorème de Leray pour les fluides tournants):

Soit $u_0^\varepsilon \in V_0$, alors il existe une solution de Leray de (SC_ε) c'est à dire une fonction $u^\varepsilon \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+, V_0) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, V_1) \cap C(\mathbb{R}^+, V_1')$ telle que $\forall \psi \in C^1(\mathbb{R}^+, V_1)$ on ait:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (u^\varepsilon \cdot \psi)(t, x) dx + \int_0^t \int_{\Omega} \left(\nabla_h u^\varepsilon : \nabla_h \psi + \nu \partial_3 u^\varepsilon \cdot \partial_3 \psi - \frac{1}{\varepsilon} u^\varepsilon \cdot L\psi - u^\varepsilon \cdot \partial_t \psi \right) dx dt \\ &= \int_{\Omega} u_0^\varepsilon(x) \cdot \psi(0, x) dx + \nu \int_0^t \int_{\omega_h} (\partial_3 u_h^\varepsilon \cdot \psi_h)|_{x_3=0}(s, x_h) dx_h ds - \nu \int_0^t \int_{\omega_h} (\Sigma \cdot \psi_h)|_{x_3=1}(x_h, s) dx_h ds \end{aligned}$$

De plus u^ε vérifie l'inégalité d'énergie:

$$\frac{1}{2} \|u^\varepsilon\|_{L^2}^2(t) + \int_0^t \left(\|\nabla_h u^\varepsilon\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{2} \|\partial_3 u^\varepsilon\|_{L^2}^2 \right)(s) ds \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2}^2 e^{2t} + \left(\frac{1}{2} \nu^{3/2} \int_0^t \|\Sigma\|_{L^2(\omega_h)}^2(s) e^{2(t-s)} ds \right)$$

où on a posé $V_0 = \overline{\{u \in H^1, \nabla \cdot u = 0, (u \cdot n)|_{\partial\Omega} = 0 \text{ i.e } u_3|_{x_3=0} = u_3|_{x_3=1} = 0\}}^{L^2}$ et $V_1 = V_0 \cap H^1$.

La démonstration de ce théorème suit exactement celle du théorème de Leray (voir [2] ou [8]) assurant l'existence de solutions à l'équation de Navier-Stokes, le terme de Coriolis $\frac{1}{\varepsilon} e_3 \wedge u^\varepsilon$ étant antisymétrique il n'intervient jamais dans les estimées d'énergie, la seule différence étant en pratique la condition aux bords de la surface nécessitant une estimée de trace de la forme:

$$\sqrt{\nu} \|u_h|_{x_3=1}\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \leq 2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|\partial_3 u(\Omega)\|_{L^2}^2$$

expliquant l'apparition d'un terme exponentiel crée par le lemme de Gronwall.

Le théorème en plus de donner l'existence de solutions régulière fournit surtout une estimée d'énergie qui grâce à la linéarité permet de quantifier l'approximation de l'équation requise pour avoir une bonne approximation de la solution, plus précisément on en déduit:

Proposition 2 (Stabilité de l'équation):

Soit $w^\varepsilon \in V_0$ solution de:

$$\begin{aligned} \partial_t w_h^\varepsilon - \Delta_h w_h^\varepsilon - \nu \partial_3^2 w_h^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} (Lw^\varepsilon)_h &= \eta_{eq}^\varepsilon \\ w|_{t=0} &= \eta_{ini}^\varepsilon \\ \partial_3 w_h^\varepsilon|_{x_3=1} &= \eta_1^\varepsilon \\ w_h^\varepsilon|_{x_3=0} &= 0 \\ \nabla \cdot w^\varepsilon &= 0 \end{aligned}$$

Avec $\|\eta_{eq}^\varepsilon\|_{L_t^2(L_\Omega^2)} \rightarrow 0$, $\|\eta_{ini}^\varepsilon\|_{L_t^\infty(L_\Omega^2)} \rightarrow 0$ ainsi que $\|\nu^{\frac{3}{4}} \eta_1^\varepsilon\|_{L_{loc,t}^2(L_{\omega_h}^2)} \rightarrow 0$.

Alors:

$$w^\varepsilon \rightarrow 0 \text{ dans } L_{loc}^\infty(L^2([0, 1], (H^1(\omega_h))))$$

L'idée est alors la suivante: on construit une solution approchée de l'équation $u^{\varepsilon, app}$ et on applique la proposition précédente à $u^\varepsilon - u^{\varepsilon, app}$. Sous réserve que $u^{\varepsilon, app}$ vérifie, aux erreurs de la proposition près, les mêmes conditions initiales et aux bords ainsi que l'équation on obtient $u^{\varepsilon, app} \rightarrow u^\varepsilon$ et de par la construction on connaît son comportement.

3.2 Sur la pénalisation de Coriolis

Ensuite, concernant le terme de Coriolis, on observe heuristiquement que le seul terme pouvant compenser la force de Coriolis est le gradient de pression. Cela est visible d'un point de vue plus rigoureux en remarquant que comme pour Navier-Stokes sans terme de Coriolis le gradient de pression correspond en fait à une projection orthogonale sur les fonctions à divergence nulle. Dans ce cas en posant \mathbb{P} le projecteur sur V_0 le terme de pénalisation devient:

$$Lu = \mathbb{P}(e_3 \wedge u)$$

cet opérateur est antisymétrique sur V_0 et il est possible d'obtenir une base orthogonale de V_0 constituée de vecteurs propres de L , les valeurs propres associées étant les:

$$\lambda_{k_h, k_3} = i\omega_k = \frac{ik_3}{\sqrt{k^2}}$$

avec $k = (k_h, k_3) \in \mathbb{Z}^2 \times 2\pi\mathbb{Z}$.

On peut en déduire notamment:

- Que le noyau de L est constitué des champs de vecteurs $u = (u_h, 0)$ où u_h est un champ de vecteurs 2D à divergence nulle ne dépendant pas de x_3 , ce qui était prévisible en écrivant $\nabla p = e_3 \wedge u$ et $\nabla \cdot u = 0$ on obtient que u_h est un champ de vecteur 2D à divergence nulle et ne dépendant pas de x_3 ainsi que $u_3 = 0$. Cela signifie que le fluide se déplace en colonnes verticales appelées colonnes de Taylor Proudman.
- Que sur l'orthogonal du noyau le comportement est régi par $\partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} L u^\varepsilon = 0$ c'est à dire la propagation d'ondes de pulsations $\frac{\omega_k}{\varepsilon}$ créant ainsi des termes qui même si ils convergent faiblement vers 0 peuvent a priori porter une énergie non nulle.

3.3 Idée de la construction

Une fois la proposition de stabilité établie on cherche alors à construire une solution de la manière suivante. On se place tout d'abord pour plus de simplicité dans le cas $u_0 \in \text{Ker}(L)$ pour éviter d'avoir à traiter l'évolution sur l'orthogonal du noyau.

L'idée est de considérer $u^{0,int} \in \text{Ker}(L)$ non connu et d'ajouter des termes supplémentaires relevant successivement les erreurs aux bords et dans l'équation pour obtenir, sous condition sur $u^{0,int}$, une approximation suffisante de l'équation au sens de la stabilité c'est à dire une approximation de u^ε .

Pour cela on corrige ordre par ordre les différents défauts chaque terme correcteur rajoutant une erreur mais d'ordre plus petit, l'avantage étant qu'on contrôle, ici de manière totalement explicite même, ces termes correcteurs.

Ainsi comme u est un champ de vecteur horizontal indépendant de la verticale il ne vérifie pas la condition au bord $u_h^{eps,app}|_{x_3=0} = 0$. A cet ordre cette condition ne peut être relevée que par un terme de couche limite $u^{0,CL}$ qui varie rapidement près des bords mais permet de vérifier cette condition. On explicite donc un tel terme vérifiant l'équation et les conditions horizontales nécessaires (pour vérifier la divergence nulle il faut en fait chercher un terme supplémentaire $\sqrt{\varepsilon\nu}u^{1,int}$ car dans la couche limite la dérivation multiplie par un terme d'ordre $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\nu}}$).

Mais ce terme ainsi construit crée un défaut de pénétration $(u^{0,int} + u^{0,CL} + \sqrt{\varepsilon\nu}u_3^{1,CL})|_{x_3=0} \neq 0$. On peut alors voir que le seul terme pouvant relever cette condition est un terme intérieur d'amplitude plus petite, i.e un terme $\sqrt{\varepsilon\nu}u^{1,int}$.

Pour que ce terme, qui comme tous les précédents dépend de $u^{0,int}$ non encore fixé, vérifie l'équation à l'intérieur on obtient qu'il faut et suffit que $u^{0,int}$ soit solution de:

$$\partial_t u_h^{int,0} - \Delta u_h^{int,0} + \sqrt{\frac{\nu}{2\varepsilon}} u_h^{int,0} = 0$$

Mais ce nouveau terme introduit néanmoins un défaut de condition au bord horizontal que l'on relève alors par une couche limite $u_h^{1,CL}$, etc.

On s'arrête alors lorsque l'erreur effectuée est dans les marges acceptables par la proposition de stabilité (en remarquant que les égalités strictes avec 0, par exemple $u_3|_{\partial\Omega} = 0$ sont atteignables en ajoutant au bout d'un certain ordre un terme u^{exp} arbitraire ne servant qu'à relever ces conditions).

On a donc construit $u^{\varepsilon,app}$ tel que:

$$\|u^\varepsilon - u^{\varepsilon,app}\|_{L_{loc}^\infty(L^2([0,1],(H^1(\omega_h))))} \rightarrow 0$$

et donc en particulier on déduit par exemple que la limite faible de u^ε est bien $(\bar{u}, 0) = u^{0,int}$ et vérifie l'équation:

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{u} - \Delta \bar{u} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\nu}} \bar{u} &= 0 \\ \bar{u}(t=0) &= u_0 \end{aligned}$$

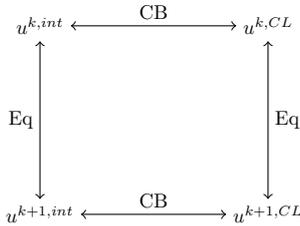
Le terme dissipatif $\sqrt{\frac{\varepsilon}{2\nu}} \bar{u}$ appelé pompage d'Ekman traduisant de l'échange d'énergie entre l'intérieur et la couche limite (via $u^{1,int}$).

On peut résumer en schémas la construction, à chaque étape on construit un nouveau terme correcteur qui introduit une nouvelle erreur.

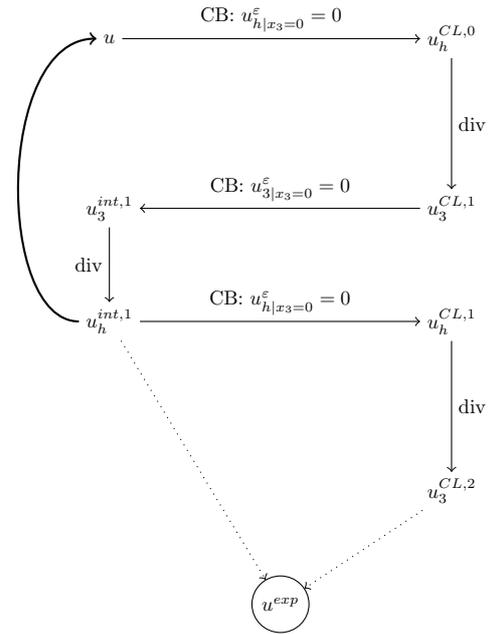
Les règles de construction, en dehors des calculs techniques sont:

- Dans la couche limite, les termes intérieurs ne varient pas et réciproquement les termes de couche limite sont quasiment nuls à l'intérieur. En conséquence l'équation sépare les deux, c'est à dire qu'il n'est possible de rattraper une erreur au niveau de l'équation à l'intérieur (resp. dans la couche limite) que par un terme intérieur (resp. de couche limite).
- Au contraire les conditions aux bords font intervenir les deux termes, une erreur créée par un terme intérieur sera corrigée par un terme de bord et réciproquement.

Cela se résume en indiquant par k les différents ordres:



Et dans le cas qui nous intéresse la procédure complète est:



Résumé des différents termes correcteurs et de leurs interactions.

4 Méthode systématique via des opérateurs adaptés

On cherche suivant [3] à systématiser cette construction pour traiter non seulement le cas dit "mal préparé" où u_0 n'est pas forcément dans le noyau de L mais aussi pour traiter les cas quasi-résonnants c'est à dire le forçage par le vent Σ_ε excitant justement les modes de Coriolis ω_k dans le supplémentaire orthogonal de ce noyau.

4.1 Opérateurs de bords

Pour ce qui est des termes de couches limites on construit de manière générale un opérateur de bord, qui relève des conditions arbitraires horizontales (si $\mu \neq \pm 1$ i.e pas de résonance):

$$\delta_h^{0/1} = \sum_{|k_h| \leq N} \sum_{\mu \in M_0} \widehat{\delta}_h^{0/1}(\mu, k_h) e^{i\mu \frac{x}{\varepsilon}} e^{ik_h \cdot x_h}$$

ce qui est possible par:

Théorème 2 (Opérateur de bord dans le cas non-résonnant):

Il existe $v^0 = \mathcal{B}(\delta_0, 0)$ et $v^1 = \mathcal{B}(0, \delta_1)$ solutions de (SC_ε) ayant comme conditions aux bords:

$$\begin{aligned} v_h^0|_{x_3=0}(x_h, t) &= \delta_h^0(x_h, t) \\ \partial_3 v_h^1|_{x_3=1} &= \delta_h^1(x_h, t) \end{aligned}$$

décroissant de manière exponentielle loin des bords et vérifiant de plus:

$$\begin{aligned} \|v_h^0\|_{L_t^\infty(L_\Omega^2)} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\nu}} \|v_3^0\|_{L_t^\infty(L_\Omega^2)} &\leq C(\varepsilon\nu)^{1/4} \|\delta_h^0\| \\ \|v_h^1\|_{L_t^\infty(L_\Omega^2)} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\nu}} \|v_3^1\|_{L_t^\infty(L_\Omega^2)} &\leq C(\varepsilon\nu)^{3/4} \|\delta_h^1\| \end{aligned}$$

La construction d'un tel opérateur consiste à chercher des solutions sous la forme:

$$v(t, x_h, x_3) = V(\mu, k_h) \exp\left(i\mu \frac{t}{\varepsilon}\right) \exp(ik_h \cdot x_h) \exp\left(-\lambda \frac{x_3}{\sqrt{\varepsilon\nu}}\right)$$

Où λ tel que:

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} (i\mu - \lambda^2 + \varepsilon k_h^2) + \varepsilon\nu \frac{k_1 k_2}{\lambda^2 - \varepsilon\nu k_h^2} & -1 - \varepsilon\nu \frac{k_1^2}{\lambda^2 - \varepsilon\nu k_h^2} \\ 1 + \varepsilon\nu \frac{k_2^2}{\lambda^2 - \varepsilon\nu k_h^2} & (i\mu - \lambda^2 + \varepsilon k_h^2) - \varepsilon\nu \frac{k_1 k_2}{\lambda^2 - \varepsilon\nu k_h^2} \end{pmatrix}$$

possède un noyau non nul. On obtient alors que dans le cas $\mu \neq \pm 1$ les λ solutions sont contrôlés et on construit alors une base des fonctions périodiques \mathbb{C}^2 à partir de solutions w_λ^\pm .

C'est à dire qu'il est possible de relever des conditions aux bords horizontales (non résonnantes) par des termes de couche limite dont on contrôle la norme mais par contre créant un défaut de non pénétration.

4.2 Opérateur intérieur

De même on peut construire de manière systématique des termes intérieurs relevant les conditions de pénétration (de manière exacte) et la condition initiale de manière approchée, avec:

$$\delta_3^{0/1} = \sum_{|k_h| \leq N} \sum_{\mu \in M_0} \widehat{\delta}_3^{0/1}(\mu, k_h) e^{i\frac{\mu}{\varepsilon}t} e^{ik_h \cdot x_h}$$

Théorème 3 (Opérateur intérieur):

Il existe $u^{int} = \mathcal{U}(u_0, \delta_3^1, \delta_3^0)$ tel que:

$$\begin{aligned} u_{3|x_3=0}^{int} &= \sqrt{\varepsilon\nu} \delta_3^0 \\ u_{3|x_3=1}^{int} &= \sqrt{\varepsilon\nu} \delta_3^1 \\ u_{t=0}^{int} &= u_0 + o(1) \\ \partial_t u^{int} - \Delta u^{int} - \partial_3^2 u^{int} + \frac{1}{\varepsilon} L u^{int} &= o(1) \end{aligned}$$

Les idées principales de la démonstration sont les suivantes:

- Filtrer l'équation par rapport à l'opérateur \mathcal{L} défini par $\mathcal{L}(t)(u_0)$ solution de $\partial_t u + Lu = 0$ et $u(t=0) = u_0$.
- Décomposer la solution sous la forme:
 - $\mathcal{L}\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) u_L \in V_0$ correspondant au terme d'ordre 0 lié à la condition initiale et à l'équation.
 - $u^{1,int}$ permettant de relever les conditions verticales aux bords comme précédemment.
 - $\delta u = \mathcal{L}\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) \delta u_L \in V_0$ correspondant aux termes restants c'est à dire à ceux d'ordre $\sqrt{\varepsilon\nu}$ liés à l'équation ainsi que les pulsations du bord qui ne sont pas celles de l'équation.
- Écrire les équations projetées sur les vecteurs propres de L et identifier et majorer tous les termes.

On remarque que contrairement à précédemment, comme il est nécessaire de tronquer en fréquence, l'équation n'est pas exactement vérifiée i.e cette construction en plus de créer des défauts de conditions horizontales aux bords crée aussi des termes sources dans l'équation.

On obtient alors des bornes sur les différents termes ainsi qu'une équation reliant u_L , le seul terme qui ne converge pas vers 0, et les $\delta_3^{0/1}$.

4.3 Convergence

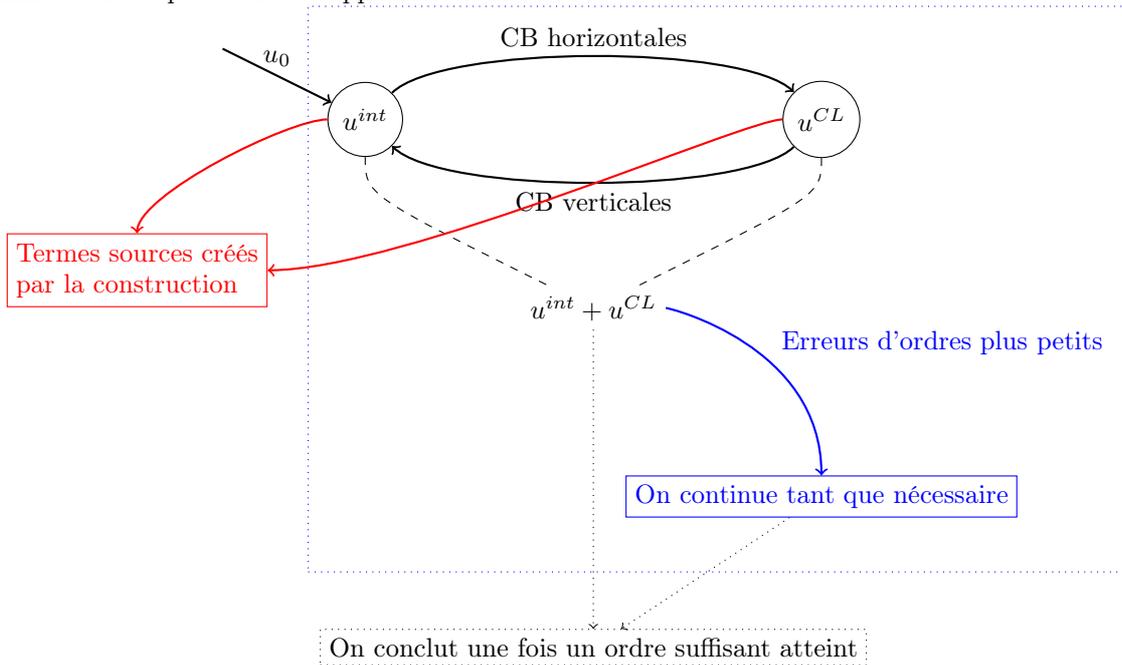
Il faut ensuite utiliser ces deux résultats pour construire une solution approchée de l'équation. Comme le terme intérieur crée un défaut compensé par le terme de bord qui crée un défaut compensé par le terme intérieur il faut équilibrer les deux.

Par le calcul on obtient que cela n'est possible que si u_L vérifie une équation de la forme:

$$\left(\partial_t - \Delta_h - \nu \partial_3^2 + \sqrt{\frac{\nu}{\varepsilon}} A\right) u = \nu S$$

où A est un opérateur de dissipation valant notamment $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sur $\text{Ker}(L)$.

Après construction il reste cependant des erreurs d'ordres trop élevés et il faut ensuite réitérer la procédure jusqu'à obtenir une approximation suffisante, tout en remarquant que la création de termes sources n'est jamais compensée et limite donc la précision de l'approximation.



On obtient alors bien une approximation explicite de la solution ce qui permet non seulement de connaître la limite de u^ε mais aussi les amplitudes et tailles des couches limites.

5 Une dégénérescence en fréquence: la cas du forçage résonnant

Les calculs précédents ne sont plus valides dans le cas d'une oscillation de fréquence $\mu = \pm 1$. Il faut alors comme dans [3] distinguer deux cas selon que la fréquence spatiale k_h soit nulle ou non.

Dans le cas $k_h \neq 0$ appelé quasi-résonnant on obtient typiquement des résultats analogues au précédents en termes d'opérateurs avec néanmoins une taille typique qui n'est plus de $\sqrt{\varepsilon\nu}$ mais de $\sqrt{\frac{\varepsilon\nu}{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon\nu}}}$. De plus même cette taille atypique de la couche limitée nécessite alors une analyse plus fine de la convergence le résultat est le même: on a bien convergence de la solution vers la solution approchée construite.

Dans le cas $k_h = 0$ dit résonnant on obtient des couches limites d'équations similaires à celle de la chaleur. En particulier même si $k_h = 0$ assure que ces couches limites ne créent pas de terme supplémentaire à relever facilitant les calculs de convergence, comme la taille typique des couches limites est de $\frac{1}{\sqrt{\nu t}}$ on obtient que cette dégénérescence déstabilise en temps très longs (d'ordre $\frac{1}{\nu}$) la solution en pénétrant à l'intérieur du domaine.

On remarque notamment que le forçage résonnant contrairement au quasi-résonnant est présent naturellement dès que la moyenne horizontale de la condition initiale est non nulle.

6 Analyse du phénomène sans construction explicite

Une méthode différente pour étudier la problématique serait celle de [9] qui selon un procédé similaire aux convergence double échelle analyse les échelles des couches limites dans la formulation faible de l'équation. Plus précisément à partir de la formulation faible de l'équation cela consiste à:

- Prendre des fonctions identiquement nulles près des bords dans la formulation faible afin obtenir toutes les informations nécessaires sur le terme intérieur.
- En choisissant des solutions approchées explicites de l'équation duale relevant dans conditions arbitraires aux bords expliciter les termes de trace dans la formulation faible.
- En déduire l'expression de ces termes de trace en fonction de l'intérieur.
- Réinjecter dans la formulation faible et passer à la limite pour obtenir l'équation vérifiée par la limite faible.

Cette méthode utilise pour la construction des fonctions test pour la trace un opérateur très similaire à celui de bord précédent. Néanmoins elle présente l'avantage d'être très générique et robuste ainsi que d'éviter d'avoir à construire plusieurs ordres successifs d'approximation au prix d'une convergence plus faible a priori que dans le cas général.

7 Conclusion

7.1 Les dégénérescences

On a donc vu comment construire à l'aide d'opérateurs de bords et intérieurs adaptés des solutions approchées à des problèmes de pénalisation singulière conduisant à des couches limites. De plus on a aussi vu deux cas typiques de dégénérescence, phénomène qui empêche a priori toute analyse générale de ce type de problème, une dégénérescence spatiale via la latitude variable et une dégénérescence dans le domaine de fréquence via le forçage quasi-résonnant et résonnant.

Ce genre de problème se rencontre dans de nombreuses équations aux dérivées partielles, d'autres exemples issus de la géophysique sont le modèle du β -plan linéarisant la dépendance en la latitude du vecteur de Coriolis ou encore l'équation de Munk dont les termes principaux sont:

$$\begin{aligned}\partial_x \phi - \nu \Delta^2 \phi &= \tau \text{ dans } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ \phi|_{\partial\Omega} &= 0, (\nabla \phi \cdot n)|_{\partial\Omega} = 0\end{aligned}$$

modélisant aussi les écoulements océaniques mais une fois les pompes, forçages et modèle β -plan pris en compte et traitant de l'équation vérifiée par l'écoulement 2D limite dans le régime permanent et avec des conditions de bord horizontales. Pour cette équation (traité formellement dans [6], de manière détaillée dans [4] et sans dérivation explicite des couches limites dans [1]) de nombreux phénomènes liés à la pénalisation singulière $\partial_x \phi = \tau$ apparaissent: on observe par exemple des tailles et amplitudes de couches limites ne sont pas les mêmes entre l'Est et l'Ouest du domaine expliquant ainsi les grands courants sur les côtes Est comme le Gulf Stream (il s'agit ici d'une dépendance en fréquences distinguant ainsi les deux directions comme c'était le cas dans l'exemple simple de l'ODE). De plus lorsque le domaine devient parallèle à l'équateur la taille des couches limites augmente rapidement, on est en présence d'une dégénérescence spatiale (cf [4]).

7.2 Remarques sur les termes non linéaires

On a ici traité le cas linéaire, pour traiter les non linéarités il faut vérifier trois points:

- Que les non linéarités ne perturbent pas l'existence de solutions ni les estimées d'énergie.
- Que la construction des termes de couche limite n'est pas modifiée, ce qui est a priori vérifié car ces termes étant petits un terme non linéaire sera a priori encore plus petit.
- Enfin que dans la convergence il n'y a de problème supplémentaire, ce qui est a priori le plus difficile, les différents modes étant par exemple mélangés.

Dans le cas qui nous intéresse il est possible de traiter le cas non linéaire ([2]) en faisant attention aux trois points situés précédemment sachant que les principales difficultés sont issues du dernier.

On remarquera que la méthode de compacité faible permet de traiter avec plus de facilité ces termes: par interpolation on obtient une convergence forte de la partie dite "bien préparée" dans $\text{Ker}(L)$ et on sait que la partie orthogonale au noyau converge faiblement vers 0. En décomposant alors la non linéarité: les produits d'éléments du noyau convergent fortement, les produits d'un élément du noyau avec un élément de l'orthogonal convergent vers 0, la difficulté consistant à traiter les produits de deux éléments de l'orthogonal comme dans [9].

References

- [1] Didier Bresch and Thierry Colin. Some remarks on the derivation of the sverdrup relation. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 4(2):95–108, 2002.
- [2] Jean-Yves Chemin, Benoît Desjardins, Isabelle Gallagher, and Emmanuel Grenier. *Mathematical geophysics*, volume 32. 2006.
- [3] Anne-Laure Dalibard and Laure Saint-Raymond. Mathematical study of rotating fluids with resonant surface stress. *Journal of Differential Equations*, 246(6):2304–2354, 2009.

- [4] Anne-Laure Dalibard and Laure Saint-Raymond. Mathematical study of degenerate boundary layers. *arXiv preprint arXiv:1203.5663*, 2012.
- [5] David Gérard-Varet. Formal derivation of boundary layers in fluid mechanics. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 7(2):179–200, 2005.
- [6] David Gerard-Varet and Thierry Paul. Remarks on boundary layer expansions. *Communications in Partial Differential Equations*, 33(1):97–130, 2008.
- [7] Nader Masmoudi. Ekman layers of rotating fluids: the case of general initial data. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 53(4):432–483, 2000.
- [8] Laure Saint-Raymond. Analyse des équations aux dérivées partielles, quelques exemples en mécanique des fluides. *Cours de M1*.
- [9] Laure Saint-Raymond. Weak compactness methods for singular penalization problems with boundary layers. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 41(1):153–177, 2009.