Quantification de variétés kähleriennes (compactes)

Soutenance du mémoire du diplôme

Étudiant :
Gabriele Rembado

Encadrant du mémoire de M2 :
Laurent Charles

session de juin
27/06/2014

Table des matières

1 Motivation physique **3**
1.1 Le contexte 3
1.2 L'oscillateur harmonique 4

2 Préquantification **8**
2.1 Intégralité 8
2.2 Préquantification à la Konstant-Souriau 9

3 Quantification **10**
3.1 Polarisations 10

4 Espaces de modules de polygones **4**
4.1 Définition 4
4.2 Longueurs admissibles 5
4.3 Premiers exemples 7
4.4 Autres propriétés 9

5 Réduction Symplectique **10**
5.1 Actions hamiltoniennes et moments 10
5.2 Actions lisses de groupes de Lie 15
5.3 Réduction symplectique 22
5.4 Retour à l'espace de module de polygones 26

6 Singularités **28**
6.1 Énoncé sur les singularités et remarques préliminaires 28
6.2 Preuve de 22 31

7 Structure Complexe **39**
7.1 Structure kählerienne 39
7.2 Le cas affine 40
7.3 GIT 44
7.4 Retour à l'espace de modules de polygones 48

8 Bending flows et coordonnées action-angle **52**
8.1 Bending flows 52
8.2 Systèmes intégrables et coordonnées action-angle 60
8.3 Retour à l'espace de modules de polygones 64

9 Quantification **69**
9.1 La motivation physique . . . 69
9.2 Préquantification . . . 71
9.3 Polarisations complexes et quantification de variété kähleriennes . . . 75
9.4 [Q,R] = 0 . . . 81
9.5 Retour à l'espace de modules de polygones . . . 86

10 Feuilletages : Définition et premières propriétés **3**
10.1 Définitions . . . 3
10.2 Champs de p-plans . . . 5
10.3 Orientation transverse . . . 6
10.4 Revêtement double d'orientation . . . 7
10.5 Autres propriétés . . . 8

11 Exemples **11**
11.1 Submersions . . . 11
11.2 Champs de vecteurs sans points singuliers . . . 12
11.3 Fibrations . . . 12
11.4 Pull-backs . . . 14
11.5 Actions de groupes . . . 14
11.6 Actions de groupes de Lie . . . 15
11.7 Feuilletage de Reeb de $\mathbb{S}^3$ . . . 16

12 Théorème de Frobenius **18**

13 Propriétés topologiques des feuilles **22**
13.1 Cartes distinguées et lemmes techniques . . . 22
13.2 Quelques propriétés topologiques . . . 26

14 Holonomie et théorèmes de stabilité **28**
14.1 Systèmes cohérents de cartes . . . 28
14.2 Holonomie . . . 32
14.2.1 Germes d'applications . . . 32
14.2.2 Holonomie d'une feuille . . . 33
14.3 Stabilité locale . . . 36
14.4 Stabilité globale . . . 40

15 Théorème de Novikov **44**
15.1 Énoncé et idée de la preuve . . . 44
15.1.1 Énoncé . . . 44
15.1.2 Idée de la preuve . . . 44
15.2 Démonstration . . . 45
15.2.1 Existence d'un vanishing cycle . . . 45
15.2.2 Extensions cohérentes normales . . . 51
15.2.3 Extensions cohérentes simples . . . 53
15.2.4 Existence d'une feuille compacte . . . 55
15.2.5 Conclusion de la preuve . . . 64

Annexe A Feuilletages du disque et construction de Hæfliger **68**
A.1 Singularités d'applications à valeurs réels 68
A.2 Feuilletages singuliers du disque 69
A.2.1 Définitions 69
A.2.2 Feuilletages singuliers du disque et champs de vecteurs 70
A.3 Construction de Hæfliger 75
A.4 Construction de la région R d'holonomie triviale 77

Annexe B Théorème de Poincaré-Bendixson **79**

Introduction au domaine de recherche

Mémoire de magistère

Chapitre 1

Motivation physique

Dans cette première partie on essayera d'encadrer le problème, né en physique, dont la recherche d'une solution a motivé l'étude de la *quantification géométrique* après les années '60. On expliquera les idées fondamentales à l'aide d'un exemple : l'oscillateur harmonique.

1.1 Le contexte

Le problème qu'on se pose est le suivant.

On se donne un système (mécanique) classique. Parfois, il peut être réalisé comme un système limite obtenu à partir d'un système quantique sous-jacent.
La limite dont on parle est celle pour laquelle $\hbar \longrightarrow 0$, en suivant le principe de correspondance de Bohr.

On aimerait être capable de reconstruire ce système quantique, ainsi que de définir une correspondance entre les observables classiques et quantiques des deux systèmes. Cette correspondance revient à définir une *quantification* des grandeurs classiques qu'on peut mesurer sur le système de départ.

Pour pouvoir essayer de résoudre ce problème, il faut déjà traduire les termes physiques qu'on vient d'utiliser dans un contexte mathématiques. Parmi les plusieurs choix possibles, on en fait un qui est proche de la géométrie symplectique.

Définition 1.1.

1. Un *système classique* est une variété symplectique (M, ω).
2. Une *observable classique* est une fonction lisse réelle $F : M \longrightarrow \mathbb{R}$.
3. Un *système quantique* est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de Hilbert séparable $\mathcal{H}$.
4. Une *observable quantique* est un endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire auto-adjoint $Q : \mathcal{H} \circlearrowleft$.

On rappelle qu'une variété symplectique (M, ω) est la donnée d'une variété lisse M munie d'une 2-forme différentielle fermée partout non dégénérée $\omega \in \Omega^2(M, \mathbb{R})$.

Maintenant, si on se donne un système classique (M, ω), on veut lui associer un système quantique $\mathcal{H}_M$ et une application

$$Q : (C^\infty(M, \mathbb{C}), \{,\}) \longrightarrow (\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_M), [,]), \quad F \longmapsto Q_F \tag{1.1}$$

qui satisfait aux axiomes suivants (dits de Dirac) :

1. Q est $\mathbb{C}$-linéaire.
2. si F est réelle, Q_F est un endomorphisme autoadjoint de $\mathcal{H}_M$
3. $Q_1 = Id_{\mathcal{H}_M}$: Q préserve les constantes.
4. $Q_{\{F,G\}} = i\hbar[Q_F, Q_G]$
5. Si $\{F_1, \ldots, F_n\} \subseteq C^\infty(M, \mathbb{C})$ est un système complet d'observables classiques, alors $\{Q_{F_1}, \ldots, Q_{F_n}\} \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_M)$ est un système complet d'observable quantiques.

On rappelle qu'un ensemble $\{F_1, \ldots, F_n\} \subseteq C^\infty(M, \mathbb{C})$ est un *système complet d'observables classiques* si les seules fonctions qui Poisson-commutent avec les F_i sont les constantes, tandis que $\{Q_{F_1}, \ldots, Q_{F_n}\} \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_M)$ est un *système complet d'observable quantiques* s'ils agissent de façon irréductible sur $\mathcal{H}_M$ (ce qui revient au même d'après le lemme de Schur).

Il faut tout de suite avouer qu'on ne peut pas trouver une telle application en toute généralité. Il y a des obstructions au procédé de la quantification, dont les plus fameuses sont devenues théorèmes (e.g., les *no go theorems* de Groenvold et Van Hove).
Dans la suite on décrira une solution partielle à ce problème-ci présentée par Konstant et Souriau dans les années '70. L'idée sera de construire $\mathcal{H}_M$ comme étant un espace de sections convenables d'un fibré en droites sur (M, ω).

Avant de passer aux détails techniques, voyons un exemple élémentaire et "plat".

1.2 L'oscillateur harmonique

L'oscillateur harmonique (classique) en une dimension est décrit par la loi de Newton :

$$m\ddot{x} = -kx$$

où x est une coordonnée sur la variété des configurations $\mathbb{R}$, et $m, k \in \mathbb{R}_{>0}$ sont des constantes.

On peut résoudre cet ODE du deuxième ordre en la traduisant en un système du premier ordre. Pour faire ça, on introduit l'espace des phases ($\mathbb{R}^2 = q\,\mathbb{R} \otimes p\,\mathbb{R}$), avec ses coordonnées position-moment canoniques (q, p).
Il suffira de poser :

$$\begin{cases} q := x \\ p := m\dot{x} \end{cases}$$

L'équation de Newton devient alors le système de deux équations :

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} = -kq \end{cases}$$

En suivant la formulation hamiltonienne de la mécanique classique, on introduit la fonction lisse $H : q\,\mathbb{R} \otimes p\,\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui définit l'énergie mécanique totale du système :

$$H(q,p) := \underbrace{\frac{p^2}{2m}}_{\text{énergie cinétique}} + \underbrace{\frac{kq^2}{2}}_{\text{énergie potentielle}} \tag{1.2}$$

Cette fonction permet d'exprimer le problème dynamique de départ par les *équations de Hamilton* :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} \\ \frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p} \end{cases}$$

La solution de ces équations décrit l'évolution dynamique de l'oscillateur.

Remarque 1. Un cas plus général à traiter serait celui où justement l'espace des phases est le fibré cotangent à l'espace des configurations du système classique, avec sa structure symplectique naturelle. Résoudre les équations de Hamilton pour une hamiltonienne lisse H revient alors à calculer la flot du *gradient hamiltonien* X_H de H : par définition, l'évolution temporelle du système est donnée par les courbes intégrales de X_H.

Dans le cas où l'on est parti le gradient hamiltonien est simplement donné par

$$X_H = (\dot{q}, \dot{p}) = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right)$$

On remarque de plus que, dans le cas de l'oscillateur harmonique :

1. H est constante le long des solutions du système.
2. Le divergence de X_H est nulle.

En effet on a :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} = 0$$

Et :

$$< \nabla, X_H >= \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} - \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} = 0$$

Ceci signifie que respectivement :

1. H est conservée.
2. Le flot de X_H préserve l'aire dans l'espace des phases.

Tout ceci se généralise aussi en géométrie symplectique.

Maintenant on rappelle le cadre quantique. Là on part d'une fonction d'onde complexe $\psi = \psi(x,t)$ qui satisfait l'équation (différentielle) de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{k}{2}x^2\psi$$

On définit alors un opérateur

$$\hat{H} : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap H^2(\mathbb{R}, \mathcal{L}_1) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap H^2(\mathbb{R}, \mathcal{L}_1)$$

par :

$$\hat{H} := -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{k}{2}\mu_{x^2}$$

où $\mu_{x^2} : F(x) \longmapsto x^2 F(x)$ est l'opérateur de multiplication par x^2, et où $\mathcal{L}_1$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^1$.

L'équation de Schrödinger se réécrit alors :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}\psi$$

Dans ce cas-ci une solution n'est pas une trajectoire classique. Plutôt, supposons ψ normalisée :

$$\int_{\mathbb{R}} \psi\psi^* d\mathcal{L}_1 = 1$$

Alors on sait que la norme carrée $|\psi|^2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ donne la probabilité d'observer l'oscillateur en position x au temps t.

Le procédé de la quantification a eu lieu. Au système classique

$$(M, \omega) := (q\,\mathbb{R} \otimes p\,\mathbb{R}, dq \wedge dp)$$

on a associé l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H}_M := C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}, \mathcal{L}_1)$$

et on a pu quantifier les observables classiques de position et moment.
En fait, au couple (q, p) on a associé des opérateurs sur $\mathcal{H}_M$ donnés par :

$$q \longmapsto \hat{q} := \mu_x$$

$$p \longmapsto \hat{p} := -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

si l'on note avec x le variable sur l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_\infty)$.

Avec ce choix, et si on demande que l'opération de quantification soit linéaire, on voit que l'opérateur $\hat{H}$ correspond à l'hamiltonienne classique (1.2) :

$$H \longmapsto \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{k}{2}\hat{q}^2 = \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{2m} + \frac{k}{2}\mu_x^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{k}{2}\mu_{x^2}$$

où bien sûr la multiplication point par point dans $C^\infty(M, \mathbb{C})$ revient à la composition dans $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_M)$: on préserve les structures d'algèbres.

Remarque 2. Jusqu'à ici on n'a pas eu de problèmes, puisque on a quantifié somme d'observables qui contenaient de produits homogènes.
Toutefois, comme on a $[\hat{q}, \hat{p}] = -i\hbar$ par le principe d'indétermination de Heisenberg, les deux opérateurs $\hat{p}\hat{q}$ et $\hat{q}\hat{p}$ diffèrent, et il n'y a pas de façon naturelle pour déclarer lequel des deux est la quantification du produit $pq = qp$.
La différence entre ces deux choix devient nulle à la limite $\hbar \longrightarrow 0$, mais on a à priori deux théories quantiques distinctes.

Les bifurcations possibles deviennent de plus en plus complexes à gérer, et le cas des *observables cubiques* nous met déjà en difficulté. Ceci exprime les *no go theorems* dont on parlé dans l'introduction : on ne peut pas espérer de quantifier l'algèbre $C^\infty(M, \mathbb{C})$ toute entière.

Chapitre 2

Préquantification

Dans ce chapitre on voit un tentative naïf de construire la quantification Q de (9). On corrigera cette construction dans le chapitre suivant.

2.1 Intégralité

Fixons une variété symplectique (M, ω).

Définition 2.1. La forme ω est dite *entière* si sa classe de cohomologie $[\omega] \in H^2_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{R})$ est dans l'image de l'application canonique $H^2(M; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{R})$.
Dans ce cas-là, on dit que (M, ω) est *préquantifiable*.

Ici on a noté par $H^*_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{R})$ la cohomologie de de Rham de M, et par $H^*(M; \mathbb{Z})$ sa cohomologie singulière (à coefficients entiers).

Remarque 3. Déjà, l'inclusion canonique $\iota : C^2(M; \mathbb{Z}) \hookrightarrow C^2(M; \mathbb{R})$ induit une application en cohomologie

$$\tilde{\iota} : H^2(M; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(M; \mathbb{R})$$

car l'inclusion commute aux différentielles des cochaînes singulières de M.

De plus, on a un isomorphisme canonique $\psi : H^2(M; \mathbb{R}) \longrightarrow H^2_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{R})$, dit de de Rham.

La composée $\varphi := \psi \circ \tilde{\iota}$ est l'application naturelle dont on parle en énoncé.

On peut essayer de caractériser l'image et le noyau de $\tilde{\iota}$ à l'aide du théorème des coefficients universels pour la cohomologie singulière.
Si l'on suppose que $H^1(M; \mathbb{Z})$ et $H^2(M; \mathbb{Z})$ soient de type fini, on a alors les deux suites exactes :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}(H^1(M; \mathbb{Z})) \longrightarrow H^2(M; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_2(M), \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H^2(M; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_2(M), \mathbb{R}) \longrightarrow 0$$

d'où l'on tire le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & H^2(M;\mathbb{R}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_2(M),\mathbb{R}) \\
\mathrm{Tor}(H^1(M;\mathbb{Z})) \arrow[r] & H^2(M;\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[u, "\tilde{\iota}"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_2(M),\mathbb{Z}) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

qui permet de montrer le fait suivant.

Proposition 1. *1.* $\mathrm{Ker}(\tilde{\iota}) = \mathrm{Tor}(H^2(M;\mathbb{Z}))$

2. $\mathrm{Im}(\tilde{\iota}) = \{\alpha \in H^2(M;\mathbb{R}) \mid \alpha(c) = 0$ *pour tout* $c \in Z_2(M))\}$

2.2 Préquantification à la Konstant-Souriau

La préquantification à la Konstant-Souriau se fait avec un fibré en droites sur (M, ω).

Définition 2.2. La variété préquantifiable (M, ω) est *préquantifiée* par le fibré en droites holomorphe hermitien avec connexion de Chern $(\pi : L \longrightarrow M, h, \nabla_L)$ si l'on a :

$$\mathrm{Ch}(L) = -i\omega$$

où $\mathrm{Ch}(L)$ est la courbure de Chern du fibré L.

Ceci entraîne tout de suite que $\frac{\omega}{2\pi}$ soit entière, et la réciproque est justement le théorème de Konstant-Souriau.

On pose maintenant $\mathcal{H}_0 := \Omega^0(M, L)$: l'espace des sections lisses de L. Si on se donne $F \in C^\infty(M, \mathbb{C})$, on voudrait définir un opérateur Q_F sur $\mathcal{H}_0$. Dans 1.2 on a vu deux types d'opérateurs qui agissait sur des espaces de fonctions lisses (à carré intégrable), a savoir l'opérateur de multiplication et de gradient. Le premier se généralise sans soucis au cas où il y a de la courbure, tandis que pour le deuxième on doit faire intervenir explicitement la connexion.
On pose :

$$Q_F := \mu_F + i(\nabla_L)_{X_F}$$

Remarque 4. On pourrait montrer que les axiomes 2 et 4 de Dirac sont vérifiés avec ce choix, ce qui est fait dans le mémoire de M2.
Toutefois, il y a des problèmes avec l'action d'irréductibilité, qui du point de vue de la physique reviennent au fait que l'espace de Hilbert naturel qu'on construit à partir de $\mathcal{H}_0$ est trop grand.

Dans le chapitre suivant on essaie de corriger notre espace de sections pour couper le nombre des variables sur lesquelles les opérateurs quantifiés agissent.

Chapitre 3

Quantification

La correction de l'espace $\mathcal{H}_0$ de la section précédente passe par les polarisations complexes sur variétés symplectiques.
Après les avoir définies en pleine généralité, on se concentrera sur le cas des variétés kähleriennes.

3.1 Polarisations

On commence par la définition.

Définition 3.1. Une *polarisation complexe* sur la variété symplectique (M, ω) est un feuilletage lagrangien $P \subseteq T^{\mathbb{C}}M$ tel que $P \cap \overline{P}$ ait dimension constante.

On rappelle que $T^{\mathbb{C}}M$ est le complexifié du fibré tangent à M, tandis qu'un feuilletage est une distribution de plans lisse et intégrable.
Ceci signifie que pour tout $x \in M$ on a un sous-espace lagrangien $P_x \subseteq (T^{\mathbb{C}}M)_x$ qui varie de façon lisse avec le point. De plus, il existe une partition de M en sous-variété (immergées)

$$M = \coprod_{x \in M} F_x$$

telle que $T_x F_x = P_x$ pour tout $x \in M$.

Il faudra seulement avoir en tête l'exemple suivant.

Exemple 3.1. On rappelle d'abord qu'est-ce qu'une variété kählerienne. On peut partir de la géométrie complexe ou symplectique.

Considérons une variété complexe X. Si l'on fixe une métrique hermitienne h sur X, on sait que l'opposé de sa partie imaginaire est une $(1,1)$-forme définie positive sur le fibré tangent holomorphe $T_{(1,0)}X \subseteq T^{\mathbb{C}}X$. On appelle h une *métrique de Kähler* si cette forme est d-fermée, i.e. si elle est une structure symplectique pour X.
On dit que la variété complexe X est *kählerienne* si elle admet une métrique de Kähler.

Si l'on veut partir de la géométrie symplectique, considérons d'abord une variété lisse M. Une *structure presque-complexe* J sur M est une section lisse du fibré $\pi : End_{\mathbb{R}}(TM) \longrightarrow M$

qui satisfait $J^2 = -Id_{TM}$. Une structure presque-complexe J sur M est *intégrable* si pour tout $x \in M$ il existe un ouvert de carte $U \subseteq M$ autour de x avec coordonnées $(x_1, y_1, ..., x_n, y_n)$ telles que J s'écrit localement :

$$\begin{cases} J : \frac{\partial}{\partial x_i} \longmapsto \frac{\partial}{\partial y_i} \\ J : \frac{\partial}{\partial y_i} \longmapsto -\frac{\partial}{\partial x_i} \end{cases}$$

pour $1 \leq i \leq n$. On appelle alors J une *structure complexe* sur M.

Maintenant, soit (M, ω) une variété symplectique. Une structure presque-complexe J sur M est est *ω-compatible* si $\omega(J(.), .)$ est une métrique riemanienne sur TM.
On dit que la variété symplectique (M, ω) est kählerienne si elle admet une structure presque-complexe ω-compatible et intégrable.

Considérons une variété kählerienne (M, ω, J). On pose, pour $x \in M$:

$$P_x := \{v \in T_x^{\mathbb{C}} M | J_x(v) = -iv\}$$

On a simplement considéré le fibré tangent anti-holomorphe $T_{(0,1)}M \subseteq T^{\mathbb{C}}M$, qui est celui où les deux multiplications par i qu'on peut définir sont opposées.

Pour comprendre ça, fixons un point $x \in M$. On a l'endomorphisme $J_x : T_xM \circlearrowleft$ qui satisfait $J_x^2 = -\operatorname{Id}_{T_xM}$, ainsi que l'espace tangent complexifié $T_x^{\mathbb{C}}M = T_xM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Ce complexifié admet une multiplication par $i \in \mathbb{C}$ naturelle, à savoir :

$$i(v \otimes \mu) := (v \otimes i\mu)$$

pour $v \in T_xM, \mu \in \mathbb{C}$.

De même, on peut étendre J_x en un endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de $T_x^{\mathbb{C}}M$ dont le carré est encore l'opposé de l'identité. Cet endomorphisme admet les valeurs propres $\pm i$, et $(T_{(0,1)}M)_x$ est justement défini comme l'espace propre de cette extension de J_x pour la valeur propre $-i$.
On a donc une décomposition naturelle $T^{\mathbb{C}}M = T_{(1,0)}M \oplus T_{(0,1)}M$, si $T_{(1,0)}M$ est l'espace propre de l'extension de J par la valeur propre i.

On a bien défini une polarisation complexe pour la variété symplectique (M, ω), en oubliant pour un instant sa structure complexe. Pour le voir il suffit de montrer que P est une distribution de plans isotropes, pour questions de dimension.
Soient alors $v \otimes \lambda, w \otimes \mu \in P_x$, et montrons que $\omega_x(v \otimes \lambda, w \otimes \mu) = 0$.

On sait que la formule $(y, z) \longmapsto \omega_x(J(y), z)$ définit une forme $\mathbb{C}$-bilinéaire symétrique sur $T^{\mathbb{C}}M$, d'où :

$$\omega_x(J(v \otimes \lambda), w \otimes \mu) = \omega_x(J(w \otimes \mu), v \otimes \lambda)$$

D'autre part, on a $J(v \otimes \lambda) = -i(v \otimes \lambda) = v \otimes -i\lambda$, par définition de P_x, et de même pour $J(w \otimes \mu)$.

Donc on a :

$$\begin{aligned}-i\lambda\mu\omega_x(v,w) &= \omega(v\otimes -i\lambda, w\otimes\mu) = \omega_x(J(v\otimes\lambda), w\otimes\mu) = \\ &= \omega_x(J(w\otimes\mu), v\otimes\lambda) = \omega_x(w\otimes -i\mu, v\otimes\lambda) = \\ &= -i\mu\lambda\omega_x(w,v) = i\lambda\mu\omega_x(v,w)\end{aligned}$$

qui donne ce qu'on veut.

De plus, on a $T^{\mathbb{C}}M = T_{(0,1)}M \oplus \overline{T_{(0,1)}M}$ par définition du complexifié du fibré tangent, ce qui signifie que $P\cap\overline{P} = \{0\}$ partout.

Finalement, on corrige $\mathcal{H}_0$ en prenant seulement les sections lisses d'un fibré préquantifiant $\pi : L \longrightarrow M$ qui sont polarisées.

Définition 3.2. Une section $s \in \Omega^0(M,L)$ est *polarisée* par rapport à la polarisation complexe $P \subseteq T^{\mathbb{C}}M$ si l'on a :

$$(\nabla_L)_X s = 0$$

pour tout champ de vecteurs lisse $X \in C^\infty(M,P)$ tangent à P.

Dans le cas qui nous intéresse, c'est à dire les variétés kähleriennes, on retrouve les sections homolorphes de L.

Proposition 2. *Soit (M,ω,J) une variété kählerienne préquantifiable préquantifiée par $(\pi : L \longrightarrow M, h, \nabla_L)$, où L est holomorphe et ∇_L est la connexion de Chern du fibré holomorphe hermitien (L,h). Soit $P := T_{(0,1)}M \subseteq T^{\mathbb{C}}M$ la polarisation kählerienne naturelle de l'exemple 9.1.*
L'espace des sections lisses polarisées de L est l'espace des sections holomorphes globales $H^0(M,L)$.

La preuve de ce fait suit des caractérisation de la partie $(0,1)$ de ∇_L et de l'opérateur de Dolbeault ∂_L sur le fibré L.

Avec cette proposition on considérera d'avoir résout le problème de la quantification d'une variété kählerienne compacte (M,ω,J).

Définition 3.3. Avec les notations ci-dessus, supposons M compacte.
On note $\mathcal{H}_M := H^(M,L)$, et on l'appelle *l'espace de la quantification de* (M,ω,J).

Remarque 5. Il y aurait encore un certain nombre d'étapes avant de pouvoir construire la quantification 9 qu'on voulait, mais on préfère s'arrêter ici. On remarque qu'il y a quand même un certain nombre de problèmes techniques qu'il faudrait encore résoudre.

Pour commencer, les sections polarisées sont constantes le long des feuilles de P, et donc elle ne sont jamais intégrables par rapport à l'élément de volume de Liouville si ces feuilles ne sont pas compactes. Une solution possible serait d'intégrer les sections sur l'espace des feuilles $M/(P\cap\overline{P})$.
Il faut donc supposer que la distribution réelle $P\cap\overline{P} = P\cap TM$ soit un feuilletage, et que l'espace des feuilles soit lisse. Ceci amène à la définition d'une polarisation *fortement admissible*.

Maintenant la difficulté technique est qu'il n'existe pas de forme volume canonique sur l'espace $M/(P \cap \overline{P})$. Pour la surmonter, on peut travailler avec *demi-densités* ou *demi-formes*, ce qui amène aussi à la définition d'une *structure métaplectique* sur M. Il y a une obstruction topologique en plus pour l'existence d'une telle structure métaplectique, à savoir la deuxième classe de cohomologie de Stiefel-Whitney de M, qui vit dans $H^2(M, \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2)$.

Avec un fibré de demi-formes $\delta := \Omega^{\frac{1}{2}}(M/P \cap \overline{P})$ on peut finalement considérer les sections polarisées du produit tensoriel $L \otimes \delta$, par rapport à une connexion convenable sur le fibré δ. Deux telles sections peuvent être multipliées pour obtenir une forme volume qu'on peut intégrer sur $M/(P \cap \overline{P})$, ce qui nous donne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel à produit hermitien (pre-Hilbert) : sa complétion nous donne l'espace de Hilbert de la quantification qu'on souhaite, et avec un peut de travail en plus on peut définir une action de $C^\infty(M, \mathbb{C})$ sur cet espace.

Il y a puis des complications liées au fait que les feuilles de $P \cap \overline{P}$ peuvent être non simplement connexes. Plus précisément, toute feuille doit avoir holonomie triviale.
L'idée est que si une section $s \otimes v$ de $L \otimes \delta$ est constante le long des feuilles de $P \cap \overline{P}$, alors elle ne peut pas prendre une phase non triviale par l'action d'un élément du groupe d'holonomie d'une feuille.
Il faut donc que cette section soit nulle, ou que la représentation d'holonomie du groupe fondamental de la feuille soit triviale.
On se restreint alors à la sous-variété M_{B-S} de M définie comme la réunion des feuilles de $P \cap \overline{P}$ à holonomie triviale. On l'appelle la *sous-variété de Bohr-Sommerfeld* de M.

Pour conclure, il se peut à priori que l'espace de Hilbert construit soit nul.

Tous ces problèmes ont amené à chercher une construction géométrique plus naturelle pour la quantification. Un approche plus récent utilise des *structures spin* et des *opérateurs de Dirac* sur les variétés symplectiques.
Finalement, le cas non compact présent des difficultés techniques qui ne sont encore pas dépassée au présent. Dans mon doctorat, je m'intéresserai aussi à la quantification d'espaces de modules non compacts.

L'espace de modules de polygones

Mémoire de M2

Introduction

Le but de ce mémoire est l'étude détaillé d'un espace de module assez simple : l'espace de module de polygones à cotés dans l'espace euclidien standard. Cet espace de module a été beaucoup étudié dans les années '90, et plus récemment Laurent Charles a étudie des propriétés remarquables qui portent sur sa quantification géométrique.

L'espace de module de polygones permet de voir des exemples concrets de constructions et résultats abstraite souvent utilisées dans la théorie générale des espaces de modules, ainsi qu'en géométrie symplectique et complexe :

— Les quotients de Marsdem-Weinstein.
— Les quotients de Mumford.
— Le Slice-theorem.
— Les coordonnées action-angle.
— La quantification géométrique.

Si c'est vrai que, comme Arnold le disait, "les théories passent, tandis que les exemples restent", l'étude de l'espace de module de polygones est alors très efficace pour comprendre ces techniques pas tout à fait élémentaires : on part d'une intuition concrète, construite sur l'avoir appris un exemple concret dans tous ses détails.

Si l'on souhaite faire de la recherche dans ce cadre-ci, on peut alors regarder à ce mémoire comme une base solide pour bien commencer.

Chapitre 4

Espaces de modules de polygones

Dans ce chapitre on présente les espaces de modules de polygones. On introduit un peu de terminologie, et on discute quelques propriétés élémentaires.
De plus, on donne des premiers exemples assez simples, que l'on peut traiter de façon heuristique sans connaître la théorie qui suit.
La notation utilisée est désormais standard, et suit par exemple [**KMspace**] et [**CHAquant**].

4.1 Définition

On note $\mathbb{E}^3$ l'espace euclidien standard de dimension 3, c'est à dire $\mathbb{R}^3$ avec le produit scalaire standard, que l'on notera $<,>$.
On fixe un entier positif $n \in \mathbb{N}$ et une n-uple de nombres réels positifs $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$.
On note $\mathcal{P}_{n,\mathbf{l}}$ l'ensemble des n-gones à sommets numérotés dans $\mathbb{E}^3$ dont les cotés ont les longueurs indiquées par $\mathbf{l}$, dans l'ordre choisi. On ne considère donc pas les polygones qui ont cotés avec extrémités coïncidentes.

Définition 4.1. L'espace de modules des n-gones dans l'espace euclidien à cotés de longueurs $\mathbf{l}$ est l'ensemble des n-gones dans $\mathcal{P}_{n,\mathbf{l}}$ à isométries positives près.
On le note $\mathcal{M}_{n,\mathbf{l}}$, ou simplement $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ en oubliant le nombre des cotés.

Un élément de $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ est donc une classe $[P]$, avec $P \in \mathcal{P}_{n,\mathbf{l}}$, où la relation d'équivalence est donnée par l'action de SO(3) sur $\mathbb{E}^3$: P est équivalent à son image par n'importe quel élément $g \in \mathrm{SO}(3)$.

Pour définir une topologie sur $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$, on va le présenter comme un espace quotient par une SO(3)-action.

On note $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$ le produit $\mathbb{S}^2_{l_1} \times \cdots \times \mathbb{S}^2_{l_n}$ des sphères centrés en $0 \in \mathbb{E}^3$ de rayon indiqué en indice inférieur. Si $P \in \mathcal{P}_{n,\mathbf{l}}$, la n-uple de ses cotés définit bien un élément de $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$, et pas un élément quelconque. En fait, les cotés des n-gones définissent un élément $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n) \in \mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$ tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = 0 \tag{4.1}$$

On pose $\widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}} := \left\{(e_1, \ldots, e_n) \in \mathbb{S}^2_{\mathbf{l}} \mid \sum_{i=1}^n e_i = 0\right\}$.

C'est alors clair qu'une classe $[P] \in \mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ définit une classe dans le quotient $\widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}/\operatorname{SO}(3)$, où l'on considère la restriction de l'action diagonale de $\operatorname{SO}(3)$ sur le produit $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$. On note $\varepsilon([P])$ cette classe, et on appelle $\varepsilon : \mathcal{M}_{\mathbf{l}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}/\operatorname{SO}(3)$ l'*application de Gauss*.

Cette application est bijective. En effet, considérer l'image d'un polygone $P \in \mathcal{P}_{n,\mathbf{l}}$ par une transformation $g \in \operatorname{SO}(3)$ revient à considérer les images des cotés de P, qui sont bien vecteur dans $\mathbb{E}^3$.

Par définition, on met sur $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ la (seule) topologie pour laquelle ε est un homéomorphisme. Bien entendu, on met sur $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$ la topologie produit de la topologie standard, sur $\widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}$ la topologie de sous-espace et sur $\widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}/\operatorname{SO}(3)$ la topologie quotient.

On discutera la topologie de $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ en détails dans la suite.

4.2 Longueurs admissibles

Discutons les choix possibles pour $\mathbf{l} \in (\mathbb{R}_{>0})^n$.

Déjà, si $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$, on remarque que l'on a un homéomorphisme $\varphi : \mathcal{M}_{\mathbf{l}} \longrightarrow \mathcal{M}_{\lambda\mathbf{l}}$ simplement donné par la dilatation de tous les cotés.
On a donc par exemple le droit de fixer le périmètre de nos polygones sans influencer la topologie de l'espace de modules. Un choix usuel est :

$$\sum_{i=1}^n l_i = 2 \tag{4.2}$$

que l'on va sous-entendre dans la suite.

Il y a puis la question moins triviale de savoir quelles n-uples de réels positifs peuvent être les longueurs des cotés d'un polygone.

Considérons alors l'espace de tous les n-gones à sommets numérotés dans $\mathbb{E}^3$ (de périmètre 2), qu'on note $\mathcal{P}_n = \coprod_{\mathbf{l}\in(\mathbb{R}_{>0})^n} \mathcal{P}_{n,\mathbf{l}}$.
On définit $\pi : \mathcal{P}_n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ comme étant l'application qui à un n-gone associe la n-uple des longueurs de ses cotés. On veut comprendre quand on a $\pi^{-1}(\mathbf{l}) = \mathcal{P}_{n,\mathbf{l}} \neq \varnothing$.
D'après nos hypothèses, on a bien

$$\operatorname{Im}(\pi) \subseteq \left\{\mathbf{l} \in \mathbb{R}^n \middle| \sum_{i=1}^n l_i = 2\right\} \cap (\mathbb{R}_{>0})^n \tag{4.3}$$

qui est l'intersection d'un espace affine avec le premier octante.

On a de plus n conditions nécessaires évidentes :

$$l_j \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n l_i = 1 \quad \text{pour tout} \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{4.4}$$

où l'égalité vient de l'hypothèse (4.2).
Ces inégalités sont en fait équivalentes aux suivantes :

$$l_j \leq \sum_{i \neq j} l_i \quad \text{pour tout} \quad j \in \{1, \ldots, n\},$$

qui généralisent le critère classique de constructibilité des triangles.

Proposition 3. *Les condition* (4.3) *et* (4.4) *caractérisent l'image de* π.

Démonstration. On peut démontrer le résultat par récurrence sur n, et on peut se contenter de le faire pour $n \geq 3$.

Supposons $n = 3$. Les conditions (4.4) expriment alors le critère classique de constructibilité des triangles : trois nombres réels positifs sont les longueurs des cotés d'un triangle si et seulement si chacun est mineur de la somme des autres deux. On voit donc que ces condition sont suffisantes dans ce cas-ci.

Passons à l'étape de récurrence, et supposons le résultat vrai au rang $n-1$. Soit $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur qui satisfait les conditions (4.3) et (4.4).
Si l'on avait $l_i + l_{i+1} > 1$ pour $1 \leq i \leq n-1$ alors on aurait $\sum_{i=1}^n l_i > 2$, car $n \geq 4$. Quitte à permuter les l_i on peut donc supposer que $l_{n-1} + l_n \leq 1$.
La $(n-1)$-uple $\mathbf{l}' := (l_1, \ldots, l_{n-2}, l_{n-1} + l_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ satisfait alors les conditions (4.3) et (4.4) au rang $n-1$. L'hypothèse de récurrence permet de conclure qu'il existe un polygone P' à $n-1$ cotés de longueurs données par $\mathbf{l}'$.
On coupe alors le dernier coté de P' en deux arêtes de longueurs l_{n-1} et l_n, en rajoutant un n-ième sommet, et on construit bien un polygone $P \in \mathcal{P}_n$ tel que $\pi(P) = \mathbf{l}$. □

On note maintenant :

$$\Delta_{2,n} := \mathrm{Im}(\pi) = \left\{ (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, 0 < l_k \leq 1 \text{ pour tout } 1 \leq k \leq n \text{ et } \sum_{i=1}^n l_i = 2 \right\} \tag{4.5}$$

qui est un ouvert d'un n-simplexe de $\mathbb{R}^n$.

Pour des raison qui seront évidentes après le théorème 20, on a envie de considérer les sous-ensembles $W_J \subseteq \Delta_{2,n}$ suivants, qu'on appelle *murs*. Si $\varnothing \subsetneq J \subsetneq \{1, \ldots, n\}$ est un sous-ensemble (propre, non vide) de $\{1, \ldots, n\}$, on pose :

$$W_J := \left\{ (l_1, \ldots, l_n) \in \Delta_{2,n} \,\middle|\, \sum_{i \in J} l_i = 1 \right\}$$

On appelle puis *chambre* de $\Delta_{2,n}$ la clôture de toute composante connexe de

$$\Delta_{2,n} \setminus \left(\bigcup_{\varnothing \subsetneq J \subsetneq \{1, \ldots, n\}} W_J \right)$$

4.3 Premiers exemples

Voyons à quoi ressemble l'espace de modules de polygones si l'on a peu de cotés.

Exemple 4.1 (cas $n = 1$)**.** Dans ce cas-ci, on a un seul coté $e_1 \in \mathbb{E}^3$ de longueur $\mathbf{l} = l_1 \in \mathbb{R}_{>0}$, qui satisfait la condition de clôture (4.1) : $e_1 = 0$.
On a deux conditions incompatibles, d'où $\mathcal{M}_{1_1,\mathbf{l}} = \varnothing$ pour tout $\mathbf{l} \in \mathbb{R}_{>0}$.

Exemple 4.2 (cas $n = 2$)**.** Dans ce cas-ci, on a deux cotés $\mathbf{e} = (e_1, e_2) \in (\mathbb{E}^3)^2$ de longueurs $\mathbf{l} = (l_1, l_2) \in (\mathbb{R}_{>0})^2$. La condition (4.1) devient $e_1 = -e_2$, d'où forcément $l_1 = l_2$.
Notre 2-gone n'est alors rien d'autre qu'un segment de $\mathbb{E}^3$ parcouru 2 fois avec deux vers différents. Comme l'action de SO(3) est transitive sur $\mathbb{E}^3$, on conclut que $\mathcal{M}_{2,\mathbf{l}}$ est réduit à un singleton $\{*\}$.

En synthèse :

$$\mathcal{M}_{2,\mathbf{l}} = \begin{cases} \varnothing, & \text{si } l_1 \neq l_2 \\ \{*\}, & \text{si } l_1 = l_2 \end{cases}$$

Exemple 4.3 (cas $n = 3$)**.** Dans ce cas-ci, on a trois cotés $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3) \in (\mathbb{E}^3)^3$ de longueurs $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3) \in (\mathbb{R}_{>0})^3$.
Supposons les conditions (4.4) vérifiées pour $\mathbf{l}$, car sinon $\mathcal{M}_{3,\mathbf{l}} = \varnothing$.

Maintenant on peut montrer que tous les triangles dont les cotés ont longueurs données par $\mathbf{l}$ sont dans la même SO(3)-orbite ; ceci est en fait une conséquence d'un des critères de congruence classiques pour les triangles.

Pour le voir, choisissons deux triangles $T_1, T_2 \in \mathcal{P}_{3,\mathbf{l}}$. Comme l'action de SO(3) sur $\mathbb{E}^3$ est transitive, il existe une isométrie positive qui envoie le premier coté de T_1 sur le premier coté de T_2. Ces deux sont maintenant deux segments coïncident dans l'espace euclidien. Quitte à translater les triangles, on peut supposer que leur premier sommet soit dans l'origine. Considérons alors les rotations d'axe la droite contenante le premier coté de T_1, qui sont éléments de SO(3). Il en existe une qui ramène T_1 dans le plan de $\mathbb{E}^3$ qui contient T_2.
On a alors deux triangles dans un plan $\Pi \subseteq \mathbb{E}^3$ avec un coté en commun et avec cotés de même longueurs. On a deux possibilités :

1. ils coïncident
2. la réflexion du plan Π d'axe passant par le coté commun aux deux triangles transforme l'un en l'autre

Bien sûr, la réflexion de Π est un élément de O(2) de déterminant négatif, mais on peut la réaliser par une rotation de $\mathbb{E}^3$ de π radiants autour du même axe de tout à l'heure.

En synthèse :

$$\mathcal{M}_{3,\mathbf{l}} = \begin{cases} \{*\}, & \text{si } \mathbf{l} \quad \text{satisfait (4.4)} \\ \varnothing, & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 4.4 (cas $n = 4$)**.** C'est le premier cas intéressant.
Pour un choix de longueurs $\mathbf{l} \in (\mathbb{R}_{>0})^4$ qui satisfait (4.4) on peut maintenant distinguer au moins deux cas :

1. il existe $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ tel que $\sum_{j \neq i} l_j = l_i$

2. ceci n'arrive pas

Dans le premier cas, l'espace de module est réduit à un seul point, puisque les seuls polygones qu'on peut construire correspondent au choix d'un segment de $\mathbb{E}^3$ (de longueur égale à celle du coté plus long).

Dans le deuxième cas, on peut montrer que l'espace de module est homéomorphe à $\mathbb{C}\,P^1$. Une façon intuitive pour justifier ce fait est la suivante, mais seulement dans un cas particulier.

Prenons un 4-gone P avec cotés $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de longueurs $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3, l_4)$. On suppose que P ait un *coté long*, c'est à dire un coté e_i dont la longueur l_i satisfait

$$l_i + l_j > \sum_{k \notin \{i,j\}} l_k \quad \text{pour tout} \quad j \in \{1, 2, 3, 4\} \tag{4.6}$$

Cette condition exprime le fait qu'on ne peut pas avoir de cotés parallèles à e_i afin que P puisse se fermer, et elle est par exemple satisfaite par la 4-uple $(5, 2, 2, 2)$, où le long coté est bien sûr e_1.

Supposons que e_1 soit le coté long de P : cette hypothèse n'est pas restrictive par 4. Notons $d_1 := e_1 + e_2$ la diagonale de P sortant de son premier sommet. La longueur de cette diagonale varie dans un intervalle contenu dans $[l_1 - l_2, l_1 + l_2) \subseteq \mathbb{R}$.
Il faut penser à l'application $\lambda_1 : \mathcal{M}_{4,\mathbf{l}} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui envoie $[P]$ dans $|d_1| = (< d_1, d_1 >)^{\frac{1}{2}}$ comme la fonction hauteur sur $\mathbb{S}^2$.

Pour tout choix de $|d_1| \in \mathrm{Im}(\lambda_1)$, on a maintenant un degré de liberté pour les polygones dans notre espace de module, qui revient à considérer une rotation du quatrième sommet de P autour de d_1. Ceci permet de définir une deuxième fonction $\theta_1 : \mathcal{M}_{4,\mathbf{l}} \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\,\mathbb{Z}$ qui à $[P]$ associe l'angle diédral entre les plans de $\mathbb{E}^3$ qui contiennent $\{e_1, e_2, d_1\}$ et $\{d_1, e_3, e_4\}$ respectivement.
Il faut penser à cette fonction comme à la paramétrisation d'un parallèle de $\mathbb{S}^2$.

Finalement, on trouve les pôles en correspondance des points de maximum et minimum de λ_1. Pour le minimum $|d_1| = l_1 - l_2$, la diagonale est parallèle à e_1 et e_2, qui sont antiparallèles. La rotation autour de cette diagonale ne change pas la classe de P dans l'espace de module, et donc on trouve un seul point dans $\mathcal{M}_{4,\mathbf{l}}$.

De même, si $|d_1|$ est maximale, alors e_3 et e_4 sont parallèles. Encore une fois, la rotation du sommet qui les séparés autour de d_1 ne change pas la classe dans l'espace de modules.

Cette discussion heuristique deviendra plus claire après avoir introduit les coordonnées action-angle sur $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$.

Ce dernier exemple soulève une question : est-ce que $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ est muni d'une structure de variété différentielle pour un choix de $\mathbf{l}$ convenable ?
Dans le cas d'un 4-gone avec un coté long, on a même trouvé des fonctions sur $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ qui pourraient définir des coordonnées locales.

La réponse à la question est positive : il se trouve que $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ est une variété lisse pour des choix génériques de $\mathbf{l}$. Dans ce cas-là il admet même une structure symplectique naturelle, car il peut être réalisé comme un quotient de Marsdem-Weinstein lisse.
La justification de cette dernière proposition est le contenu du chapitre 5.

4.4 Autres propriétés

On énonce ici des autres propriétés de $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ utilisées dans la suite.

Proposition 4. *Soit $\sigma \in \Sigma_n$ une permutation de $\{1, \dots, n\}$.*
Les espaces $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ et $\mathcal{M}_{\sigma(\mathbf{l})}$ sont homéomorphes, où l'on note $\sigma(\mathbf{l}) := (l_{\sigma(1)}, \dots, l_{\sigma(n)})$.

Démonstration. La démonstration suit du fait que σ induit un homéomorphisme $\tilde{\sigma} : \mathbb{S}^2_{\mathbf{l}} \longrightarrow \mathbb{S}^2_{\sigma(\mathbf{l})}$ défini par $(e_1, \dots, e_n) \longmapsto (e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$.
En effet, $\tilde{\sigma}$ est continue d'inverse $\tilde{\tau}$, si $\tau \in \Sigma_n$ est la permutation inverse à σ.

On remarque que $\tilde{\sigma}$ envoie $\widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}$ dans $\widetilde{\mathcal{M}_{\sigma(\mathbf{l})}}$, et qu'elle est SO(3)-invariante :

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}(g.(e_1, \dots, e_n)) = \tilde{\sigma}(g.e_1, \dots, g.e_n) = (g.e_{\sigma(1)}, \dots, g.e_{\sigma(n)}) = \\ = g.(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = g.(\tilde{\sigma}(e_1, \dots, e_n))\end{aligned}$$

et donc elle induit une application continue aux quotients $\mathcal{M}_{\mathbf{l}} \longrightarrow \mathcal{M}_{\sigma(\mathbf{l})}$. C'est facile de voir que $\tilde{\tau}$ induit l'application inverse. □

Dans la suite on pourra donc ordonner les longueurs des cotés de nos polygones comme on veut.

Il y puis deux propriétés beaucoup moins élémentaires qui portent sur la topologie de $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$, et qu'on ne démontrera pas.

Théorème 5. *Si $\mathbf{l}, \mathbf{l}'$ sont deux multi-longueurs dans la même chambre de $\Delta_{2,n}$ alors les espaces de modules $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ et $\mathcal{M}_{\mathbf{l}'}$ sont homéomorphes.*

Notons Δ_i l'unique chambre maximale de $\Delta_{2,n}$ contenante le mur $W_{\{i\}} = \{l_i = 1\}$.
On remarque que dans le mur considéré l_i est toujours la longueur d'un long coté.

Théorème 6. *Si $\mathbf{l}$ est dans l'intérieur de Δ_i alors $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ est homéomorphe à $\mathbb{C}P^{n-3}$.*

Ce résultat contient l'exemple 4.4 comme cas particulier.

Des références possibles pour ces résultats sont les articles de Yi Hu : [**Hu95**] et [**Hu98**]. Ces articles très avancés relient l'espace de module de polygones $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ à la compactification de Deligne-Mumford de l'espace de module $\mathcal{M}_{0,n}$ de n points distincts sur $\mathbb{C}P^1$ modulo l'action de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$. On n'entrera pas dans les détails de cette correspondance.

Chapitre 5

Réduction Symplectique

Dans ce chapitre on rappelle la construction des quotients de Marsdem-Weinstein de variétés symplectiques par actions hamiltoniennes de groupes de Lie, et on réalise $\mathcal{M}_{\mathfrak{l}}$ comme un tel quotient.
Une référence utilisée pour ce chapitre est [**Audin**].

5.1 Actions hamiltoniennes et moments

Dans cette section on considérera une variété symplectique de dimension finie (M, ω). Fixons aussi un groupe de Lie G d'élément neutre e et de dimension finie, agissant sur M à gauche de façon lisse, dont on note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie. On écrit $(g, x) \longmapsto g.x$ l'action de G.

Définition 5.1. On dit que l'action de G est *symplectique* si $G^*\omega = \omega$.

Dans la suite on ne considérera que des actions symplectiques.

À toute G-action sur M on peut associer une action (dite *action infinitésimale*) de $\mathfrak{g}$ sur M par des champs de vecteurs, comme suit.

On note $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ l'application exponentielle de G, et pour $\xi \in \mathfrak{g}$ on définit $\xi^M \in C^\infty(M, TM)$ par :

$$\xi^M(x) := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathrm{t}=0} \exp(t\xi).x, \quad \text{pour } x \in M \tag{5.1}$$

Remarque 6. Ceci revient en fait a différentier le morphisme de groupe de Lie $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(M)$ qui définit l'action de G. La discussion est délicate puisque $\mathrm{Aut}(M)$ a en général dimension infinie.
Déjà, il faudrait montrer que l'algèbre de Lie de $\mathrm{Aut}(M)$ est $C^\infty(M, TM)$, ce qui se justifie intuitivement comme suit dans le cas où M est compacte.

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle contenant 0 dans son intérieur, et soit $\{\varphi_t\}_{t \in I}$ une famille d'automorphismes de M lisse en t, avec $\varphi_0 = \mathrm{Id}_M$. On définit alors un champ de vecteur sur M par la formule

$$X(x) := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathrm{t}=0} \varphi_t(x)$$

Ceci exprime le fait que le vecteur tangent à la courbe $\{\varphi_t\}_{t\in I} \subseteq \mathrm{Aut}(M)$ au point Id_M est le champ de vecteur lisse X, d'où l'inclusion $T_{\mathrm{Id}_M}\mathrm{Aut}(M) \subseteq C^\infty(M, TM)$.

Pour la réciproque, soit X un champ de vecteur lisse sur M. On note $\varphi_t^X \in \mathrm{Aut}(M)$ le flot de X au temps t. Comme M est compacte X est complet, c'est à dire qu'il existe un temps d'existence minimal $\varepsilon > 0$ pour φ_t^X valide pour tout point de M.
Le champ X est alors la dérivée en zéro de la courbe $\{\varphi_t^X\}_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}$, d'où l'inclusion opposée.

On peut alors essayer de calculer $d\rho_e : \mathfrak{g} \longrightarrow C^\infty(M, TM)$. Si $\xi \in \mathfrak{g}$, on a bien

$$d\rho_e(\xi) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathrm{t}=0} \rho \circ \gamma(t)$$

où $t \longmapsto \gamma(t)$ est une courbe dans G avec $\gamma(0) = e$ et $\dot\gamma(0) = \xi$.
Bien sûr, la courbe $t \longmapsto \exp(t\xi)$ convient, et donc on retrouve la formule (5.1).

On rappelle que sur une variété symplectique (M, ω) on a deux sous-algèbres remarquables de $C^\infty(M, TM)$, à savoir les *champs symplectiques* (où *localement hamiltoniens*) et les *champs hamiltoniens*.

Définition 5.2. On pose :

1. $\mathrm{symp}(M, \omega) := \{X \in C^\infty(M, TM) \mid \mathcal{L}_X\omega = 0\}$
2. $\mathrm{ham}(M, \omega) := \{X_H \mid H \in C^\infty(M, \mathbb{R})\}$

où l'on a noté avec X_H le *champ hamiltonien* associé à la fonction lisse H.

La convention de signe utilisé pour le champ hamiltonien d'une fonction lisse est la suivante :

$$\iota_{X_H}\omega = dH \tag{5.2}$$

Remarque 7. On remarque que l'isomorphisme $\flat : X \longmapsto \iota_X\omega : C^\infty(M, TM) \longrightarrow \Omega^1(M, \mathbb{R})$ entre les sections lisses de TM et T^*M permet de décrire les relations entre les sous-algèbres $\mathrm{ham}(M, \omega) \subseteq \mathrm{symp}(M, \omega) \subseteq C^\infty(M, TM)$ avec une suite exacte de $\mathbb{R}$-algèbres de Lie :

$$0 \longrightarrow H^0_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{symp}(M, \omega) \longrightarrow H^1_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{R}) \longrightarrow 0$$

Ici les flèches non triviales sont, dans l'ordre :
— L'inclusion des fonctions localement constantes dans $C^\infty(M\,\mathbb{R})$.
— Le morphisme $F \longmapsto -X_F$ d'algèbres de Lie.
— La flèche induite par l'isomorphisme $\flat$.
En effet, $\flat$ identifie $\mathrm{symp}(M, \omega)$ à $Z^1_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{R})$ et $\mathrm{ham}(M, \omega)$ à $B^1_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{R})$.

Revenons maintenant à notre G-action symplectique à gauche sur (M, ω) : son action infinitésimale associée est à valeurs dans $\mathrm{symp}(M, \omega)$.

On veut maintenant considérer le cas où l'action soit à valeurs dans $\mathrm{ham}(M, \omega)$. Dans ce cas-là, pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$ il existe une fonction lisse $\mu(\xi)$ sur M telle que $\xi^M = X_{\mu(\xi)}$. On remarque qu'une application $\mu : \mathfrak{g} \longrightarrow C^\infty(M\ \mathbb{R})$ peut se caractériser de façon duale comme étant définie de M vers $\mathfrak{g}^*$, par :

$$< \mu(x), \xi >:= \mu(\xi)(x) \quad \text{pour} \quad x \in M, \xi \in \mathfrak{g}$$

où $<,>: \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la dualité standard entre $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$.

En choisissant une $\mathbb{R}$-base de $\mathfrak{g}$ on peut demander à ce que $\xi \longmapsto \mu(\xi)$ soit $\mathbb{R}$-linéaire, mais c'est standard de demander aussi une propriété d'équivariance en plus.

Définition 5.3. L'action symplectique de G sur (M, ω) est *hamiltonienne* s'il existe une application $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ qui satisfait les propriétés suivantes :

1. $\iota_{\xi^M}\omega = d(<\mu, \xi>)$
2. $\mu(g.x) = \mathrm{Ad}_g^*(\mu(x))$

où $\mathrm{Ad}^* : G \longrightarrow GL_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}^*)$ est la *représentation coadjointe* de G.
On appelle μ un *moment* pour la G-action.
On dit aussi que (M, ω) est une *variété G-hamiltonienne.*

Exemple 5.1. Soit $G = V$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel agissant sur $M := T^*V = V \times V^*$ par translations.
Si l'on identifie $\mathfrak{g} \cong V$ et $\mathfrak{g}^* \cong V^*$, alors la projection verticale $\mu : M \longrightarrow V^*$ sur le deuxième facteur est un moment pour l'action.

Dans le contexte de la mécanique classique, on aurait les coordonnées *position-moment* (q, p) sur T^*V, et donc l'application μ se lirait $\mu(q, p) = p$, c'est à dire le moment usuel.

Cet exemple est censé motiver la terminologie pour la définition plus générale.

Exemple 5.2. Ceci sera crucial dans la suite.

Considérons l'action canonique de SO(3) sur $\mathbb{S}_l^2 \subseteq \mathbb{E}^3$ donnée par la restriction des automorphismes de SO(3) à la sphère de rayon $l > 0$.
Munissons $\mathbb{S}_l^2$ de la forme volume Vol^l, définie par la formule :

$$\mathrm{Vol}_p^l(v, w) := \frac{1}{l^2} < p, v \wedge w > \quad \text{pour} \quad p \in S_l^2, v, w \in T_pS_l^2 \tag{5.3}$$

où $\wedge : \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^3$ est le *produit vectoriel* standard. Cette 2-forme est partout non dégénérée, et elle est fermée pour des questions de dimension.

L'action de SO(3) est donnée par restriction d'isométries de $\mathbb{E}^3$. D'autre part, la forme Vol^l sur S_l^2 est (un multiple de) la restriction de la forme volume standard sur $\mathbb{E}^3$, qui est donnée par le déterminant.
Ceci signifie que l'action de SO(3) est symplectique. La proposition suivante montre qu'elle est de plus hamiltonienne.

Proposition 7. *L'inclusion canonique $\mu : \mathbb{S}_l^2 \hookrightarrow \mathbb{E}^3$ est un moment pour l'action canonique de SO(3) sur $\mathbb{S}_l^2$, où l'on a identifié $\mathfrak{so}(3)^*$ à $\mathbb{E}^3$.*

Remarque 8. L'identification $\mathfrak{so}(3) \cong \mathbb{E}^3$ est donnée par l'isomorphisme $\varphi : \mathbb{E}^3 \longrightarrow so(3)$ défini par :

$$\varphi : (x, y, z) \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

Puis on identifie $\mathbb{E}^3$ à $(\mathbb{E}^3)^*$ par la dualité standard induite par $<,>$.

Démonstration. On commence en calculant explicitement l'action infinitésimale de $\mathfrak{so}(3)$ sur S_l^2. On peut montrer qu'elle est donnée par :

$$A^{\mathbb{S}_l^2}(p) = v \wedge p$$

où $p \in \mathbb{S}_l^2$, $A \in \mathfrak{so}(3)$ et $v \in \mathbb{E}^3$ correspond à A par l'isomorphisme (5.4).
En effet on a :

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathrm{t}=0} \exp(tA).p = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathrm{t}=0} e^{tA}p = Ap$$

où la juxtaposition dénote le produit matrice fois vecteur.
On remarque que $< p, Ap >=< A^t p, p >= - < Ap, p >= - < p, Ap >$, car $\mathfrak{so}(3)$ est l'espace des matrices antisymétriques, d'où $< p, Ap >= 0$. Ceci montre que $Ap \in T_p\,\mathbb{S}^2$, comme il fallait.

Pour montrer que $A^{\mathbb{S}_l^2}(p) = v \wedge p$, il suffit alors de prouver la formule suivante, pour $w, q \in \mathbb{E}^3$:

$$\varphi(w)q = w \wedge q$$

ce que l'on peut faire directement. On note $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ la $\mathbb{R}$-base canonique de $\mathbb{E}^3$.

Si $w = (w_1, w_2, w_3)$ et $q = (q_1, q_2, q_3)$ on a alors :

$$\varphi(w)q = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w_3q_2 + w_2q_3 \\ w_3q_1 - w_1q_3 \\ -w_2q_1 + w_1q_2 \end{pmatrix}$$

et

$$w \wedge q = \det \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_2q_3 - w_3q_2 \\ w_3q_1 - w_1q_3 \\ w_1q_2 - w_2q_1 \end{pmatrix}$$

ce qui conclut.

Pour terminer il faut alors démontrer la formule suivante :

$$l^2 < v, w >=< p, (v \wedge p) \wedge w > \quad \text{pour} \quad p \in \mathbb{S}_l^2, v \in \mathbb{E}^3, w \in T_p\,\mathbb{S}_l^2 \tag{5.5}$$

En effet l'inclusion canonique μ de $\mathbb{S}_l^2$ dans $\mathbb{E}^3$ est la restriction de l'identité, et donc la différentielle de $q \longmapsto < \mu(q), v >$ au point $p \in \mathbb{S}_l^2$ est la forme linéaire dans $T_p^*\,\mathbb{S}_l^2$ donnée par $w \longmapsto < v, w >$.
De même, on a :

$$\iota_{A^{\mathbb{S}_l^2}(p)} \mathrm{Vol}_p^l(w) = \mathrm{Vol}_p^l(A^{\mathbb{S}_l^2}(p), w) = \frac{1}{l^2} < p, (v \wedge p) \wedge w >$$

Démontrons donc (5.5).

On remarque que la formule est $\mathbb{R}$-linéaire en p, v, w, et que donc il suffit de la montrer pour $p \in \{l\epsilon_1, l\epsilon_2, l\epsilon_3\}$. On détaille les calculs pour le cas où $p = l\epsilon_1$, et on remarque que la condition $w \in T_p\,\mathbb{S}_l^2$ équivaut à $< p, w >= 0$.

Écrivons $v = (v_1, v_2, v_3), w = (0, w_2, w_3)$. On a bien $w \in \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\epsilon_2, \epsilon_3\}$ car ce plan est l'orthogonal de la droite $\mathbb{R}\,\epsilon_1$ engendrée par ϵ_1. On va montrer que :

$$(v \wedge p) \wedge w =< v, w > p$$

Ceci conclut, car alors :

$$< p, (v \wedge p) \wedge w >=< p, < v, w > p >=< p, p >< v, w >= l^2 < v, w >$$

Calculons :

$$v \wedge p = \det \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ l & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, lv_3, -lv_2)$$

et de même :

$$(0, lv_3, -lv_2) \wedge (0, w_2, w_3) = \det \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 \\ 0 & lv_3 & -lv_2 \\ 0 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = (lv_2w_2 + lv_3w_3, 0, 0)$$

On a donc $(v \wedge p) \wedge w = l < v, w > \epsilon_1 =< v, w > p$, comme on voulait. □

Pour la suite on aura aussi besoin de la propriété suivante.

Proposition 8. *Soit G un groupe de Lie qui agit sur les variétés symplectiques (M, ω_M) et (N, ω_N) de façon hamiltonienne, avec moments $\mu_M : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ et $\mu_N : N \longrightarrow \mathfrak{g}^*$. L'action diagonale $G \times (M \times N) \longrightarrow M \times N$ est hamiltonienne par rapport à la forme symplectique somme directe $\omega_M \oplus \omega_N$, avec la somme $\mu_M + \mu_N$ comme moment.*

Démonstration. On considère ici la G-action $g.(m, n) := (g.m, g.n)$ sur $M \times N$. Si $(m, n) \in M \times N$, on a $T_{(m,n)}M \times N = T_mM \oplus T_nN$, et par définition :

$$\omega_M \oplus \omega_N((v_1 \oplus w_1), (v_2 \oplus w_2)) := \omega_M(v_1, v_2) + \omega_N(w_1, w_2)$$

pour $v_1, v_{\in}T_mM$ et $w_1, w_2 \in T_nN$.

Si $\xi \longmapsto \xi^M$ et $\xi \longmapsto \xi^N$ sont les actions infinitésimales de G sur M et N, alors l'action diagonale infinitésimale est $\xi \longmapsto \xi^M \oplus \xi^N$, car l'opérateur de dérivation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Big|_{\mathrm{t}=0}$ est linéaire :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Big|_{\mathrm{t}=0} \exp(t\xi).(m, n) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Big|_{\mathrm{t}=0} (\exp(t\xi).m) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Big|_{\mathrm{t}=0} (\exp(t\xi).n) \quad \text{pour} \quad \xi \in \mathfrak{g}$$

Le résultat suit alors de la linéairité de la différentielle de de Rham :

$$d(< \mu_M + \mu_N, \xi >) = d(< \mu_M, \xi >) + d(< \mu_N, \xi >) = \omega_M(\xi^M, .) + \omega_N(\xi^N, .) =$$

$$= \iota_{\xi^{M \times N}} \omega_M \oplus \omega_N$$

□

Exemple 5.3. Considérons l'action diagonale de SO(3) sur $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$, pour $\mathbf{l} \in (\mathbb{R}_{>0})^n$. Ceci est l'exemple qui nous intéressera dans la suite.
Notons $\Omega_{\mathbf{l}} \in \Omega^2(\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}, \mathbb{R})$ la 2-forme définie par :

$$\Omega_{\mathbf{l}} := \bigoplus_{k=1}^{n} \pi_k^* \operatorname{Vol}^{l_k} \tag{5.6}$$

où $\operatorname{Vol}^{l_k} \in \Omega^2(\mathbb{S}^2_{l_k}, \mathbb{R})$ est la forme volume sur la sphère définie par (5.3), et $\pi_k : \mathbb{S}^2_{\mathbf{l}} \longrightarrow \mathbb{S}^2_{l_k}$ est la projection canonique.
Ceci est une forme symplectique sur le produit des sphères.

En effet, elle est fermée puisque le pull-back par π_i commute avec la différentielle de de Rham, et Vol^{l_i} est fermée.

La non dégénérescence suit du fait que $d\pi_i$ est la projection canonique de $\bigoplus_{k=1}^n T_{e_k} \mathbb{S}^2_{l_k}$ sur $T_{e_i} \mathbb{S}^2_{l_i}$, pour $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n) \in \mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$.

Pour le voir explicitement, prenons un vecteur tangent $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ à $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$ en $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$, et supposons que $\iota_{\mathbf{v}} \Omega_{\mathbf{l}} = 0$.
Fixons $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pour montrer que $v_i = 0$, on choisit une $\mathbb{R}$-base (w_1, w_2) de $T_{e_i} \mathbb{S}^2_{l_i}$, on pose $\mathbf{u}_j := (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1 \text{ zéros}}, w_j, 0, \ldots, 0)$ et on calcule pour $j = 1, 2$:

$$\begin{aligned} 0 = \Omega_{\mathbf{l}}(\mathbf{v}, \mathbf{u}_j) &= \sum_{k=1}^{n} \pi_k^* \operatorname{Vol}^{l_k}(\mathbf{v}, \mathbf{u}_j) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Vol}^{l_k}(d\pi_k(\mathbf{v}), d\pi_k(\mathbf{u}_j)) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Vol}^{l_k}(v_k, (\mathbf{u}_j)_k) = \operatorname{Vol}^{l_i}(v_i, w_j) \end{aligned}$$

où l'on a sous-entendu les évaluations aux points corrects.
Le résultat suit de la non dégénérescence de Vol^{l_i}.

D'après les proposition 7 et 5.3, on sait alors que le moment $\mu_{\mathbf{l}}$ pour l'action diagonale de SO(3) sur la variété symplectique $(\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}, \Omega_{\mathbf{l}})$ est la somme des inclusions canoniques $\mu_k : \mathbb{S}^2_{l_k} \hookrightarrow \mathbb{E}^3$, c'est à dire :

$$\mu_{\mathbf{l}}(e_1, \ldots, e_n) = \sum_{k=1}^{n} e_k \tag{5.7}$$

5.2 Actions lisses de groupes de Lie

Dans cette section on considère un groupe de Lie compact de dimension finie G qui agit de façon lisse sur la variété de dimension finie M.
On rappel un certain nombres de résultats qui portent sur les singularités de l'espace quotient M/G, dont le plus important est le *slice theorem*.

On commence avec un peu de terminologie autour des G-actions.

Notation 1. Si $x \in M$, on note $G.x := \{g.x \mid g \in G\}$ sa G-orbite et $G_x := \{g \in G \mid g.x = x\}$ son stabilisateur.

Définition 5.4. La G-action sur M est dite :
- *propre*, si l'application $G \times M \longrightarrow M \times M$ qui envoie $(g, x) \in G \times M$ sur $(x, g.x)$ est propre.
- *fidèle*, si $\bigcap_{x \in M} G_x = \{e\}$.
- *libre*, si G_x est trivial pour tout $x \in M$.
- *localement libre*, s'il existe un voisinage $U \subseteq G$ de e qui agit librement.
- *transitive*, si $G.x = M$ pour tout $x \in M$.

Remarque 9. Toute G-action peut être remplacée par une action fidèle, quitte à quotienter G par le sous-groupe distingué fermé $\bigcap_{x \in M} G_x$.
En effet cet ensemble est un sous-groupe fermé en tant qu'intersection de sous-groupes fermés, et les calculs suivants montrent qu'il est distingué :

$$(ghg^{-1}).x = g.(h.(g^{-1}.x)) = g.(g^{-1}.x) = x, \quad \text{pour tout } x \in M, g \in G, h \in \bigcap_{x \in M} G_x.$$

Si G est *simple*, ce qui est le cas de SO(3), toute G-action est alors soit fidèle soit triviale.

La propreté de la G-action sera toujours automatique, grâce au fait suivant.

Proposition 9. *Si G est compact toute G-action est propre.*

Démonstration. On peut utiliser la caractérisation de la compacité avec suites convergentes, car G et M sont espaces métriques.

Soit donc $\{(g_n, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $G \times M$ telle que la suite image $\{(x_n, g_n.x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $M \times M$. Le but est de montrer qu'alors $\{(g_n, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente.

Quitte à extraire, on peut supposer que $(x_n, g_n.x_n) \longrightarrow (x, y)$ pour $n \longrightarrow +\infty$. Ceci entraîne en particulier que $x_n \longrightarrow x$.
Comme G est compact, on peut supposer que $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément $h \in G$, à une extraction près, et donc on a bien $(g_n, x_n) \longrightarrow (h, x)$ pour $n \longrightarrow +\infty$. □

Remarque 10. On rappel que si H est un sous-groupe fermé de G alors il est un sous-groupe de Lie, d'après le théorème de Cartan. De plus, l'espace quotient G/H est une variété lisse (compacte).

Dans le cas d'une G-action, tous les stabilisateurs G_x pour $x \in M$ sont fermés.
En effet, si l'on a une suite $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans G_x qui converge vers $g \in G$, alors on a bien

$$x = \lim_{n \longrightarrow +\infty} x = \lim_{n \longrightarrow +\infty} g_n.x = g.x$$

où la dernière égalité utilise la continuité de l'action $G \times M \longrightarrow M$.

Le quotient G/G_x est donc lisse.

On rappel encore un résultat qui porte sur les stabilisateurs.
Pour $x \in M$, on note $\mathfrak{g}_x := \{\xi \in \mathfrak{g} \mid \xi^M(x) = 0\}$, et $\mathrm{Lie}(G_x)$ l'algèbre de Lie de G_x.

Proposition 10. $\mathrm{Lie}(G_x) = \mathfrak{g}_x$.

Démonstration. Montrons les deux inclusion qu'il faut.

Supposons $\xi \in \mathrm{Lie}(G_x)$. Alors on sait que $t \longmapsto \exp(t\xi)$ est contenue dans G_x pour tout $t \in \mathbb{R}$.
On calcule $\xi^M(x)$ directement :

$$\xi^M(x) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathrm{t}=0} \exp(t\xi).x = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathrm{t}=0} x = 0$$

Réciproquement, soit $\xi \in \mathfrak{g}_x$. On a alors $\xi^M(x) = 0$, ce qui signifie que x est un point singulier du champ de vecteur $\xi^M \in C^\infty(M, TM)$. On sait alors que le flot de ξ^M préserve x, autrement dit que $\{x\}$ est une orbite dégénérée de ξ^M.
Il suffit alors de montrer que le flot $\varphi_t^{\xi^M}$ est donné par la formule :

$$\varphi_t^{\xi^M}(x) = \exp(t\xi).x$$

D'autre part, ceci suit de la définition même de ξ^M.
Ceci montre que ξ^M est complet, et que $\exp(t\xi).x = x$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'où $\xi \in \mathrm{Lie}(G_x)$. □

Le quotient M/G n'est rien d'autre que l'espace des G-orbites dans M. La dernière proposition permet de montrer qu'elle sont des sous-espaces réguliers de M.

Proposition 11. *Toute G-orbite dans M est une sous-variété (plongée) de M.*

Démonstration. Fixons $x \in M$, et considérons l'application orbitale $f_x : G \longrightarrow M$, qui envoie $g \in G$ sur $g.x \in G.x$: on va montrer que f_x induit un plongement de G/G_x dans M, d'image $G.x$.

C'est clair que f_x induit une application lisse surjective

$$\overline{f_x} : G/G_x \longrightarrow G.x$$

par la propriété universelle du quotient, car f_x est constante à x sur G_x. De plus, cette application est injective, par la définition du stabilisateur.

Si l'on montre que $\overline{f_x}$ est une immersion on a conclut, car la compacité de G/G_x entraîne que $\overline{f}_x$ est propre.
Finalement, par G-équivariance, il suffit de montrer que la différentielle de $\overline{f_x}$ est injective en $[e] \in G/G_x$.

Pour faire ça, montrons que le noyau de la différentielle de f_x en e est donné par :

$$\mathrm{Ker}(df_x)_e = \left\{ \xi \in \mathfrak{g} \,\middle|\, \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathrm{t}=0} \exp(t\xi).x = 0 \right\}$$

En effet, si $\xi \in \mathfrak{g}$, la courbe lisse $\gamma : t \longmapsto \exp(t\xi)$ définie sur un voisinage de $0 \in \mathbb{R}$ est telle que $\gamma(0) = e$ et $\dot{\gamma}(0) = \xi$, d'où :

$$(df_x)_e(\xi) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathrm{t}=0} f_x \circ \gamma(t) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathrm{t}=0} \exp(t\xi).x$$

La proposition 10 dit alors que $\mathrm{Ker}(df_x)_e = \mathfrak{g}_x$, l'algèbre de Lie de G_x.

D'autre part l'espace tangent en $[e]$ au quotient G/G_x est $\mathfrak{g} \,/\, \mathfrak{g}_x$, ce qui entraîne que $\overline{f}_x$ est immersive en $[e]$, car $\mathrm{Ker}(d\overline{f_x})_e = \mathrm{Ker}(df_x)_e / \mathfrak{g}_x$. □

Remarque 11. On peut donc bien considérer l'espace tangent $T_x(G.x)$ à une G-orbite dans M. La dernière proposition montre de plus que $T_x(G_x) \cong \mathfrak{g} \,/\, \mathfrak{g}_x$, avec l'identification donnée par l'isomorphisme $d(\overline{f_x})_{[e]}$.

Explicitement, c'est l'application linéaire $\xi \longmapsto \xi^M(x) : \mathfrak{g} \longrightarrow T_x(G.x)$ qui induit l'isomorphisme ci-dessus.

Une première propriété qui porte sur la régularité du quotient M/G pour G compact est la suivante.

Proposition 12. *Si G est compact, le quotient M/G est séparé.*

Démonstration. Soient $G.x$ et $G.y$ deux G-orbites distinctes dans M. Elles sont compactes, en tant qu'images des application continues $f_x, f_y : G \longrightarrow M$, dont le domaine est compact.

Comme M est séparée, il existe un voisinage ouvert U de x tel que $\overline{U} \cap G.y = \varnothing$: on peut séparer les compactes et les points.
De plus, on peut supposer que $\overline{U}$ est compact, car M est localement compacte.

Considérons l'ouvert saturé $V := \pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g\in G}(g.U)$ contenant x. On veut montrer que $\overline{V} \cap G.y = \varnothing$.

Pour le prouver, il suffit de voir que $\overline{V} = \bigcup_{g\in G}(g.\overline{U})$, c'est à dire que la clôture du saturé de U est le saturé de la clôture de U.
Montrons les deux inclusions.

Comme $g.\overline{U} \subseteq \overline{V}$ pour tout $g \in G$, on a bien $\bigcup_{g\in G}(g.\overline{U}) \subseteq \overline{V}$.

Pour la réciproque, il suffit de montrer que $\bigcup_{g\in G}(g.\overline{U})$ est fermé.
En effet, comme on sait que $V \subseteq \bigcup_{g\in G}(g.\overline{U})$, la clôture de V serait encore contenue dans le fermé $\bigcup_{g\in G}(g.\overline{U})$ contenant V.

Pour montrer que $\bigcup_{g\in G}(g.\overline{U})$ est fermé, on peut utiliser la caractérisation par suites : soit $\{g_n.u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans la réunion convergente vers $w \in M$. On a donc $g_n \in G$ et $u_n \in \overline{U}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Comme G et $\overline{U}$ sont compacts, quitte à extraire on peut supposer que $g_n \longrightarrow g \in G$ et $u_n \longrightarrow u \in \overline{U}$ pour $n \longrightarrow +\infty$. Par continuité de l'action on a alors $g_n.u_n \longrightarrow g.u$ pour $n \longrightarrow +\infty$, d'où $w = g.u \in \bigcup_{g\in G}(g.\overline{U})$ par l'unicité de la limite.

Considérons maintenant la projection canonique au quotient $\pi : M \longrightarrow M/G$, qui est une application ouverte.

On regarde les deux voisinages ouverts $\pi(V), \pi(M \setminus \overline{V}) \subseteq M/G$ de $[x] = G.x, [y] = G.y \in M/G$, respectivement. Pour conclure, il suffit de montrer qu'ils sont disjoints.
Par l'absurde, supposons d'avoir un point $[z]$ dans l'intersection. On aurait alors $G.z = G.p = G.q$ pour deux points $p \in V, q \in M \setminus \overline{V}$. Ceci est absurde, car par construction toute G-orbite qui part d'un point de V reste dans V. □

Finalement, il se trouve que pour trouver des cartes sur M/G c'est suffisant d'avoir une G-action libre.

Ce résultat est un corollaire du *slice theorem*, qu'on va énoncer dans le cadre des actions de groupes de Lie (compacts), après avoir introduit un peu de notation.

Remarque 12. Si $x \in M$ et $g \in G_x$, la différentielle dg_x de $g : M \circlearrowleft$ en x est un automorphisme $\mathbb{R}$-linéaire de T_xM. Ceci définit une représentation de G_x dans T_xM, qu'on appelle *représentation d'isotropie* :

$$\rho_x : G_x \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(T_xM) \tag{5.8}$$

De plus, le sous-espace $T_x(G.x)$ est bien un sous-G_x-module de T_xM.
En effet, soit $\xi^M(x)$ un vecteur tangent à la G-orbite de x en x. On calcule :

$$dg_x(\xi^M(x)) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathrm{t}=0} g.(\exp(t\xi).x)$$

car $t \longmapsto \exp(t.\xi)$ est une courbe dans $G.x$ qui vaut x en $t = 0$ et dont la dérivée en zéro est égale à $\xi^M(x)$.

Maintenant :

$$g.(\exp(t\xi).x) = (g\exp(t\xi)g^{-1}).(g.x) = C_g(\exp(t\xi)).(g.x)$$

où l'on a noté le produit de G par juxtaposition, et la conjugaison par g avec C_g.
On a bien $C_g(\exp(t\xi)).(g.x) = C_g(\exp(t\xi)).x$, car $g \in G_x$.

D'autre part, la théorie générale des groupes de Lie nous dit que :

$$C_g \circ \exp = \exp \circ \mathrm{Ad}_g$$

car $\mathrm{Ad}_g : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ est par définition la différentielle de C_g en e.
De plus, l'action adjointe étant linéaire :

$$\exp(\mathrm{Ad}_g(t\xi)) = \exp(t\,\mathrm{Ad}_g\,\xi)$$

On en tire :

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathrm{t}=0} g.(\exp(t\xi).x) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathrm{t}=0} \exp(t\,\mathrm{Ad}_g\,\xi).x = (\mathrm{Ad}_g\,\xi)^M(x)$$

et on a bien $dg_x(\xi^M(x)) \in T_x(G.x)$.

On peut donc considérer la représentation quotient de ρ_x sur $V_x := T_xM/T_x(G.x)$.

On note $G \times_{G_x} V_x$ l'espace défini par :

$$G \times_{G_x} V_x := G \times V_x/\sim$$

où l'on déclare que $(g, v) \sim (h, w)$ s'il existe $s \in G_x$ tel que :

$$\begin{cases} gs = h \\ (ds_x)^{-1}v = w \end{cases}$$

Ceci est bien une relation d'équivalence sur $G \times V_x$, et on a une identification naturelle

$$G \times_{G_x} \{0\} \cong G/G_x \tag{5.9}$$

En fait, $G \times_{G_x} V_x$ est un fibré vectoriel sur G/G_x de fibre générique l'espace V_x. La construction qu'on vient de faire revient à considérer le fibré vectoriel associé au G_x-fibré principal $G \longrightarrow G/G_x$, via la représentation d'isotropie $\rho_x : G_x \longrightarrow GL_{\mathbb{R}}(V_x)$.
L'identification (5.9) est donc celle de la section nulle de $G \times_{G_x} V_x \longrightarrow G/G_x$ avec l'espace de base du fibré vectoriel.

On peut maintenant énoncer le slice theorem.

Théorème 13. *Il existe un C^∞-difféomorphisme G-équivariant d'un voisinage de la section nulle $G/G_x \subseteq G \times_{G_x} V_x$ avec un voisinage de $G.x$ dans M. La restriction de ce difféomorphisme à G/G_x envoie la section nulle sur l'orbite $G.x$, et c'est l'application $\overline{f_x}$ de 11.*

Remarque 13. La G-action sur $G \times_{G_x} V_x$ est définie par la multiplication dans G sur le premier facteur, tandis qu'elle est triviale sur le deuxième.
On remarque aussi que les dimensions sont celles correctes :

$$\mathrm{Dim}_{\mathbb{R}}(G \times_{G_x} V_x) = \mathrm{Dim}_{\mathbb{R}} G + \mathrm{Dim}_{\mathbb{R}} V_x - \mathrm{Dim}_{\mathbb{R}} G_x = \mathrm{Dim}_{\mathbb{R}} M$$

Démonstration. On ne donnera pas tous les détails de la preuve, qui utilise des résultats de géométrie riemannienne, mais on fera attention à expliquer les idées fondamentales.

Soit ν la *mesure de Haar* du groupe de Lie compact G de masse 1. Si R_0 est une métrique riemannienne quelconque sur M, alors

$$R := \int_G g^* R^0 d\nu(g)$$

est une métrique riemannienne G-invariante sur M.

On note $\exp_x : B(0,r) \longrightarrow M$ l'exponentielle riemannienne de la variété riemannienne (M,R) en x, où $B(0,r) \subseteq T_xM$ est la boule de rayon r (assez petit) centrée en zéro. On sait que l'on a par définition $\exp_x(v) := \gamma_{x,v}(1)$, si $\gamma_{x,v}$ est la géodésique sur M qui part avec vecteur vitesse v en x : elle est bien unique par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Pour $0 < r' \leq r$, on définit l'application :

$$\varphi_{r'} : G \times B(0,r') \longrightarrow M, \quad (g,v) \longmapsto g.\exp_x(v)$$

Comme R est G-invariante, la G_x-action sur V_x préserve les boules $B(0,r')$. On peut maintenant montrer que $\varphi_{r'}$ induit une application au quotient $G \times_{G_x} V_x$, c'est à dire que :

$$\varphi_{r'}(gs, (ds_x)^{-1}v) = \varphi_{r'}(g,v) \quad \text{pour} \quad g \in G, s \in G_x, v \in B(0,r')$$

Ceci suit du fait que la G-action sur M préserve les géodésiques, car elle est par isométries :

$$g.\exp_x(v) = \exp_{g.x}(dg_x(v)) \quad \text{pour} \quad g \in G, v \in T_xM$$

On obtient donc une famille d'applications lisses :

$$\overline{\varphi_{r'}} : G \times_{G_x} B(0,r') \longrightarrow M, \quad [(g,v)] \longmapsto g.\exp_x(v)$$

On voit bien que $\overline{\varphi_{r'}}([g,0]) = g.\exp_x(0) = g.x = \overline{f_x}(g)$.

Pour terminer la preuve, il faut montrer deux choses :

1. $\overline{\varphi_{r'}}$ est G-équivariante.
2. $\overline{\varphi_{r'}}$ est un difféomorphisme (sur son image) pour r' assez petit.

Ceux-ci sont les détails qu'on omet. □

Remarque 14. Ce résultat fournit des modèles locaux pour le système dynamique $G : M \circlearrowleft$. Plus précisément, il décrit la dynamique autour d'une G-orbite fixée.
Une autre manière de l'énoncer est que l'on peut trouver des *voisinages tubulaires* des G-orbites dans M, dont la composante orthogonale est linéairisée par le fibré normal au fibré tangent des orbites.

En fait, on a bien une identification $V_x \cong (T_x(G.x))^{\perp_{R_x}}$, par rapport à la métrique riemannienne G-invariante fixée sur M dans la trace de la preuve.

On est surtout intéresse au cas où l'action est libre. Dans ce contexte-là, le théorème 13 peut être utilisé pour définir des cartes locales sur le quotient M/G.

Corollaire 14. *Si G agit librement sur M alors le quotient M/G est une variété lisse.*

Démonstration. Déjà, on sait que le quotient est séparé par 12. Il faut plutôt construire un atlas lisse pour l'espace topologique M/G.

Fixons un point $x \in M$.
D'après 13, il existe un voisinage U_x de $G.x \subseteq M$ et un réel positif $r_x > 0$ tels que l'on ait un C^∞-difféomorphisme G-équivariant :

$$\overline{\varphi_{r_x}} =: \varphi_x : G \times B(0, r_x) \longrightarrow U_x, \quad (g, v) \longmapsto g.\exp_x(v)$$

avec les notations ci-dessus.

Ceci induit un homéomorphisme aux quotients, par rapport aux respectives G-actions :

$$\widetilde{\varphi_x} : B(0, r_x) \longrightarrow U_x/G =: W_x, \quad v \longmapsto [\varphi_x((e, v))]$$

Les espaces $W_x \subseteq M/G$ sont ouverts, car les U_x le sont et la projection $\pi : M \longrightarrow M/G$ est ouverte.

On conclut maintenant en montrant que $\{(W_x, \widetilde{\varphi_x}^{-1})\}_{x \in M}$ est un atlas lisse sur M/G, c'est à dire que $\widetilde{\varphi_y}^{-1} \circ \widetilde{\varphi_x} : \widetilde{\varphi_x}(W_x \cap W_y) \longrightarrow \widetilde{\varphi_y}(W_x \cap W_y)$ est lisse pour $W_x \cap W_y \neq \varnothing$.

Pour montrer ça, on utilise le fait que l'on sait déjà que $\varphi_y^{-1} \circ \varphi_x$ est lisse où elle est définie, et que si $v \in \widetilde{\varphi_x}^{-1}(W_x \cap W_y)$ alors :

$$\varphi_y^{-1} \circ \varphi_x((e, v)) = (g, \widetilde{\varphi_y}^{-1} \circ \widetilde{\varphi_x}(v))$$

où $g = g(v) \in G$ dépend de v.
En effet, $\widetilde{\varphi_y}(w) = [\varphi_x(e, v)]$ si et seulement si $[\varphi_x(e, v)] = [\varphi_y(e, w)]$, c'est à dire si et seulement s'il existe un élément $g = g(v) \in G$ tel que $\varphi_x(e, v) = g.\varphi_y(e, w) = \varphi_y(g, w)$.
Finalement, ceci équivaut à $\varphi_y^{-1} \circ \varphi_x(e, v) = (g, w)$, avec $w = \widetilde{\varphi_y}^{-1} \circ \widetilde{\varphi_x}(v)$.

La composée qui nous intéresse est donc la deuxième composante d'une application lisse, et elle bien lisse. □

Remarque 15. En général, il se trouve que $(G \times_{G_x} B(0, r_x))/G \cong B(0, r_x)/G_x$, et donc M/G est localement homéomorphe au quotient d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($n = \mathrm{Dim}_{\mathbb{R}} M$).

L'homéomorphisme $(G \times_{G_x} B(0, r_x))/G \cong B(0, r_x)/G_x$ suit du fait que la G-action $g.[g', v] = [gg', v]$ et la G_x-action $g.[g', v] = [g'g, (dg_x^{-1})v]$ commutent, et donc on peut prendre les deux quotients possibles de $G \times B(0, r_x)$ en n'importe quel ordre.

Si G est compact et l'action est localement libre, on sait alors que $|G_x| < +\infty$ pour tout $x \in M$, et M/G est localement le quotient de $\mathbb{R}^n$ par l'action d'un groupe fini. C'est ce que l'on appelle un *orbifold*.
Malheureusement, les singularités qu'on va obtenir sur nos espaces de modules sont pires que ça : elle correspondent à des points avec SO(2) par stabilisateur.

5.3 Réduction symplectique

Dans cette section on veut définir un quotient dans la catégorie des variétés G-hamiltoniennes.
La définition du quotient naïf ne peut pas marcher. Par exemple, même si l'action était propre et libre, le quotient n'aurait aucun raison d'être de dimension réelle paire.
La construction qu'on va présenter est due à Marsdem, Weinstein et Meyer, et date du 1974.

Dans la suite on considère un groupe de Lie de dimension finie G qui agit sur la variété symplectique de dimension finie (M, ω) avec moment $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$.

Pour $\xi^* \in \mathfrak{g}^*$, on note $\mathcal{O}_{\xi^*} \subseteq \mathfrak{g}^*$ la G-orbite de ξ^* par l'action coadjointe. La G-équivariance de μ assure que $\mu^{-1}(\mathcal{O}_{\xi^*}) \subseteq M$ soit G-invariante, et on peut donc considérer le quotient $\mu^{-1}(\mathcal{O}_{\xi^*})/G$.

Il y a bien sûr la question (difficile en général) de savoir quand cet espace quotient est lisse, et quels types de singularités peuvent apparaître. Dans la suite on pensera toujours à l'orbite dégénérée $\mathcal{O}_0 = \{0\}$, c'est à dire au quotient $\mu^{-1}(0)/G$.

Le premier problème est que l'ensemble de niveau $\mu^{-1}(0) \subseteq M$ n'est par forcément une sous-variété. Un condition suffisante serait que $0 \in \mathfrak{g}^*$ est une valeur régulière de μ.

Proposition 15. $0 \in \mathfrak{g}^*$ *est une valeur régulière de* μ *si et seulement si* G *agit localement librement sur* $\mu^{-1}(0)$.

Démonstration. Supposons que G agit localement librement sur $\mu^{-1}(0)$.

Par hypothèse, les stabilisateurs des points de M sont discrets dans G, comme le neutre est un point isolé de tout stabilisateur.

Par l'absurde, supposons que $d\mu_x : T_xM \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ soit non surjective pour un certain point $x \in \mu^{-1}(0)$. Il existe alors un vecteur non nul ξ dans le perpendiculaire de l'image de $d\mu_x$, c'est à dire dans

$$(d\mu_x(T_xM))^\perp = \{\chi \in \mathfrak{g} \mid \varphi(\chi) = 0 \text{ pour tout } \varphi \in d\mu_x(T_xM)\} \subseteq \mathfrak{g}$$

Pour ce vecteur $\xi \in \mathfrak{g}$, et pour tout $w \in T_xM$, on a :

$$0 =< d\mu_x(w), \xi >= d(< \mu, \xi >)_x(w) = \iota_{\xi^M(x)}\omega_x(w) = \omega(\xi^M(x), w)$$

où l'on a utilisé le fait que $<,>: \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$-linéaire pour calculer la différentielle.

La non dégénérescence de $\omega_x : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ permet de conclure que $\xi^M(x) = 0$.

D'après la proposition 10, ceci entraîne que $\mathfrak{g}_x = \mathrm{Lie}(G_x)$ a dimension positive, ce qui contredit le fait que $\mathrm{Dim}_{\mathbb{R}}(G_x) = 0$.

Supposons maintenant que $0 \in \mathfrak{g}^*$ soit une valeur régulière de μ.

On peut montrer que l'application $\xi \longmapsto \xi^M(x) : \mathfrak{g} \longrightarrow T_x(G.x)$ est injective.
En effet, si $v \in T_xM$, alors :

$$< d\mu_x(v), \xi >= d(< \mu, \xi >)_x(v) = \omega_x(\xi^M(x), v)$$

et donc $\xi^M(x) = 0$ entraîne que $\xi \in (d\mu_x(T_xM))^\perp = (\mathfrak{g}^*)^\perp = \{0\}$.

D'après la proposition 10, on a alors $\mathrm{Lie}(G_x) = \{0\}$. Ceci signifie que cette sous-variété est discrète. □

Remarque 16. On a de plus montré que si $0 \in \mathfrak{g}^*$ est une valeur régulière alors $T_x(G.x) \subseteq T_x(\mu^{-1}(0))^{\perp_\omega}$, car si $v \in T_x(\mu^{-1}(0)$ alors $d\mu_x(v) = 0$: v est tangent à une sous-variété où μ est constante.

D'autre part, on a $\mathrm{Dim}_{\mathbb{R}}(T_x(G.x)) = \mathrm{Dim}_{\mathbb{R}}(G)$, qui est égale à la codimension de $\mu^{-1}(0)$ dans M. De même, $\mathrm{Dim}_{\mathbb{R}}(T_x(\mu^{-1}(0))^{\perp_\omega}) = \mathrm{Dim}_{\mathbb{R}} M - \mathrm{Dim}_{\mathbb{R}}(\mu^{-1}(0))$, et donc on obtient :

$$T_x(G.x) = T_x(\mu^{-1}(0))^{\perp_\omega} \tag{5.10}$$

qui sera utile dans la suite.

Supposons pour un instant que G soit compact et qu'il agit librement sur $\mu^{-1}(0)$. Ceci entraîne que $\mu^{-1}(0)$ est lisse d'après 15, et le corollaire 14 du slice theorem permet de conclure que le quotient $\mu^{-1}(0)/G$ est une variété lisse.
La construction du quotient de Marsdem-Weinstein se termine avec la construction d'une forme symplectique sur ce quotient, qui se relève à la forme ω de M.

On admet le résultat suivant.

Proposition 16. *Soit G un groupe de Lie compact agissant libre sur la variété lisse M. La variété quotient M/G est un G-fibré principal avec la projection canonique $\pi : M \longrightarrow M/G$.*

On a maintenant besoin d'un lemme technique pour lequel on rappel un peu de terminologie et notation.
Si $\pi : P \longrightarrow M$ est un G-fibré principal, on note $\Omega^k(P, \mathbb{R})^G$ l'espace des k-formes réelles G-invariantes sur P.
Une k-forme $\alpha \in \Omega^k(P, \mathbb{R})$ sur P est dite *horizontale* si elle s'annule sur tout vecteur *vertical*, c'est à dire si elle s'annule sur le sous-fibré $\mathrm{Ker}(d\pi)$ du fibré tangent TP à P.

Lemme 17. *Soit $\pi : P \longrightarrow M$ un G-fibré principal, et soit $\alpha \in \Omega^k(P)^G$ une k-forme G-invariante horizontale.*
Il existe une unique k-forme $\overline{\alpha} \in \Omega^k(M, \mathbb{R})$ sur M telle que $\pi^*\overline{\alpha} = \alpha$. De plus :

1. *α est fermée si et seulement si $\overline{\alpha}$ l'est.*

2. *si* $\alpha, \overline{\alpha}$ *sont des* 2*-formes, alors* $\overline{\alpha}$ *est non-dégénérée si et seulement si* $\mathrm{Ker}(\alpha) = \mathrm{Ker}(d\pi)$.

Démonstration. La définition de $\overline{\alpha}$ est presque forcée.
En effet, si $\overline{\alpha}$ existe, $p \in P$, $\pi(p) = x$ et $v_1, ..., v_k \in T_xM$, alors il faut avoir :

$$\bar{\alpha}_x(v_1, ..., v_k) = \alpha_p(w_1, ..., w_k)$$

où $w_1, ..., w_k \in T_pP$ satisfont $d\pi_p(w_i) = v_i$ pour $1 \leq i \leq k$.
Réciproquement, si la formule a un sens alors elle définie $\overline{\alpha}$ uniquement car π est une submersion surjective. En effet, la formule entraîne bien que $\pi^*\overline{\alpha} = \alpha$, et l'injectivité de $\pi^* : \Omega^k(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \Omega^k(P, \mathbb{R})$ conclut.

Commençons en fixant une préimage $p \in P_x =: \pi^{-1}(x)$, et montrons que la valeur de $\alpha_p(w_1, ..., w_k)$ ne dépend pas des relevés $w_1, ..., w_k$ de $v_1, ..., v_k$. Il suffit pour ça de montrer que si $d\pi_p(w_i) = d\pi_p(w_i') = v_i$ alors $\alpha_p(w_1, ..., w_{i-1}, w_i - w_i', w_{i+1}, ..., w_k) = 0$, pour tout $i \in \{1, ..., k\}$.
Ceci suit de l'hypothèse d'horizontalité de α : on aurait $d\pi(w_i - w_i') = 0$, d'où $\iota_{w_i - w_i'}\alpha = 0$.

Continuons en choisissant deux points distincts $p, p' \in P_x$. On veut montrer que $\alpha_p(w_1, ..., w_k) = \alpha_{p'}(u_1, ..., u_k)$ si $d\pi_{p'}(u_i) = v_i$ pour $1 \leq i \leq k$.
Par définition, il existe un (unique) élément $g \in G$ tel que $g.p = p'$. On remarque puis que $d\pi_{p'}(dg_p(w_i)) = v_i$ pour tout $i \in \{1, ..., k\}$, car $d\pi_{p'} \circ dg_p = d(\pi \circ g)_p = d\pi_p$. On utilise ici le fait que $\pi \circ g = \pi$ pour tout $g \in G$.
D'après ce qu'on vient de montrer, on peut prendre $u_i := dg_p(w_i)$ pour tout i. Calculons :

$$\alpha_{p'}(u_1, ..., u_k) = \alpha_{g.p}(dg_p(w_1), ..., dg_p(w_k)) = g^*\alpha_p(w_1, ..., w_k) = \alpha_p(w_1, ..., w_k)$$

Dans le dernier passage on a utilisé la G-invariance de α.

Notons maintenant d^P et d^M les différentielles de de Rham sur P et M respectivement. On veut montrer que $d^P\alpha = 0$ si et seulement si $d^M\overline{\alpha} = 0$.

On sait que π^* est un morphisme d'algèbres graduées différentielles qui commute aux différentielles extérieures : $d^P \circ \pi^* = \pi^* \circ d^M$.
Mais alors on a $d^P\alpha = d^P(\pi^*\overline{\alpha}) = \pi^*(d^M\overline{\alpha})$, et donc $d^P\alpha = 0$ si et seulement si $\pi^*(d^M(\overline{\alpha})) = 0$. Comme π^* est injective, on a bien ce qu'on veut.

Pour le dernier point, on observe que $\overline{\alpha}$ est non-dégénérée si et seulement si $\iota_v\overline{\alpha} = 0$ entraîne $v = 0$, pour $v \in TM$. Mais on a maintenant $\iota_w\pi^*\overline{\alpha} = \iota_{d\pi(w)}\overline{\alpha}$ pour tout $w \in TP$, et donc la condition donnée équivaut à la suivante : si $w \in TP$ est dans $\mathrm{Ker}(\alpha)$, alors $w \in \mathrm{Ker}(d\pi)$.
Ceci donne l'inclusion $\mathrm{Ker}(\alpha) \subseteq \mathrm{Ker}(d\pi)$, d'où l'égalité car α est horizontale. □

On peut maintenant présenter la réduction symplectique en zéro d'une variété symplectique par rapport à une action hamiltonienne d'un groupe de Lie compact, sous la forme du théorème suivant.

Théorème 18. *Soit G un groupe de Lie compact qui agit sur la variété symplectique (M, ω) avec moment $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$.*
Supposons que G agit libre sur $\mu^{-1}(0)$.

Le quotient $M//G := \mu^{-1}(0)/G$ est lisse, et il existe une unique forme symplectique $\omega_G \in \Omega^2(M//G, \mathbb{R})$ qui satisfait $\iota^*\omega = \pi^*\omega_G$, où $\iota : \mu^{-1}(0) \hookrightarrow M$ est l'inclusion canonique et $\pi : M \longrightarrow M//G$ la projection canonique.

On appelle la variété symplectique $(M//G, \omega_G)$ le quotient de Marsdem-Weinstein de (M, ω) en $0 \in \mathfrak{g}^*$ par rapport à l'action $G \times M \longrightarrow M$ et au moment μ.

Une expression aussi utilisée est *réduction symplectique*, qui donne le nom à ce chapitre.

Démonstration. On a déjà remarqué que $M//G$ est lisse avec ces hypothèses.
D'après 16, $\pi : M \longrightarrow M//G$ est un G-fibré principal, et la forme $\iota^*\omega$ est G-invariante car G agit symplectiquement.

Pour conclure il suffit de montrer que $\iota^*\omega \in \Omega^2(\mu^{-1}(0), \mathbb{R})^G$ est horizontale et que $\mathrm{Ker}(\iota^*\omega) = \mathrm{Ker}(d\pi)$, en utilisant 17 : on pourrait alors poser $\omega_G := \overline{\iota^*\omega}$, avec les notations du lemme.

Il s'agit donc de montrer que $\mathrm{Ker}(d\pi) = \mathrm{Ker}(\iota^*\omega)$.
D'autre part, si $x \in \mu^{-1}(0)$, on sait que $\mathrm{Ker}(d\pi_x) = T_x(G.x)$, et $\mathrm{Ker}(\iota^*\omega) = T_x(\mu^{-1}(0))^{\perp_\omega}$.
La conclusion suit alors de la relation (5.10). □

Exemple 5.4. L'espace projectif complexe peut se présenter comme une réduction symplectique.

Considérons l'action de $U(1) = \mathbb{S}^1$ sur $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ par multiplication :

$$\theta.(z_1, \ldots, z_n) := (\theta z_1, \ldots, \theta z_n)$$

On peut munir $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ de la structure symplectique canonique $\omega := \sum_{k=0}^n dx_k \wedge dy_k$, si l'on a pris les coordonnées réelles définies par $z_k = x_k + iy_k$, pour $0 \leq k \leq n$.

L'action de $\mathbb{S}^1$ est alors symplectique, et pour tout $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ on a un moment donné par :

$$\mu_c : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathfrak{u}(1) \cong \mathbb{R}, \quad \mu_c(z_1, \ldots, z_n) := -\left(\sum_{k=0}^n \frac{|z_k|^2}{2}\right) + c$$

La réduction symplectique $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} // \mathbb{S}^1$ par rapport à ce moment est alors le quotient $\left(\mathbb{S}^{2n+1}_{\sqrt{2c}}\right) / \mathbb{S}^1$.

Si $c = 0$ on ne trouve rien, puisque $\mu_0(z_1, \ldots, z_n) \neq 0$ toujours.
Si $c > 0$ alors on trouve le quotient d'une $(2n+1)$-sphère par l'action de $\mathbb{S}^1$ de multiplication, ce qui définit l'espace projectif complexe de dimension (complexe) n.

La forme réduite $\omega_{\mathbb{S}^1}$ sur $\mathbb{C}\,P^n$ est la forme de Kähler de Fubini-Study.

5.4 Retour à l'espace de module de polygones

Fixons $\mathbf{l} \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ qui satisfait les conditions (4.4). On considère l'action diagonale de SO(3) sur $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$ comme dans 5.3, dont on a calculé explicitement le moment $\mu_{\mathbf{l}}$ en (5.7).

On voit bien que $\mu_{\mathbf{l}}^{-1}(0) = \widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}$, d'où $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}} \,//\, \mathrm{SO}(3) = \widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}/\,\mathrm{SO}(3) \cong \mathcal{M}_{\mathbf{l}}$.

Une question se soulève : quand est-ce que $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ est lisse, en tant que réduction symplectique de $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$ par SO(3) ?
La réponse fait intervenir de la nouvelle terminologie.

Définition 5.5. Un n-gone $P \in \mathcal{P}_n$ est dit *dégénéré* s'il est contenu dans une droite affine de $\mathbb{E}^3$.

Bien sûr la possibilité de construire un tel polygone dépend des longueurs de ses cotés. Si $P \in \mathcal{P}_{n,\mathbf{l}}$ est dégénéré, avec cotés $\mathbf{e} = (e_1, ..., e_n) \in \mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$, alors il existe un vecteur $v \in \mathbb{S}^2$ tel que $e_i = \eta_i l_i v$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, où les $\eta_i \in \{\pm 1\}$ sont des signes : tout coté de P est soit parallèle soit anti-parallèle à v.
On trouve en particulier une relation de dépendance parmi les l_i à coefficients dans $\{\pm 1\}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i l_i = 0 \tag{5.11}$$

Définition 5.6. Une n-uple $\mathbf{l} \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ est dite *générique* s'il n'existe pas de relation du type (5.11) parmi les l_i.

On voit alors que $\mathcal{P}_{n,\mathbf{l}}$ (donc $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$) ne contient pas de polygones dégénérés si et seulement si $\mathbf{l}$ est générique.
On va montrer que dans ce cas-ci $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ est lisse.

Lemme 19. *Supposons $n \geq 2$.*
L'action diagonale de SO(3) sur $\mu_{\mathbf{l}}^{-1}(0)$ est libre si et seulement si $\mathbf{l} \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ est générique.

Démonstration. Il suffit de montrer que si une isométrie $g \in \mathrm{SO}(3)$ fixe deux vecteurs linéairement indépendants alors $g = \mathrm{Id}_{\mathbb{E}^3}$.

Pour ceci, on utilise le fait géométrique bien connu suivant : si $g \in \mathrm{SO}(3)$ fixe $v \in \mathbb{E}^3$ alors g est une rotation d'axe v.

Supposons alors que g fixe v et w, qui sont linéairement indépendants. Alors g équivaut à une rotation du plan $\Pi := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{v\}^{\perp}$. D'autre part ce plan contient la projection orthogonale de w sur Π le long de v, et cette projection est fixée par la rotation.

On conclut en considérant qu'une rotation du plan avec un point fixe est l'identité. □

On peut finalement donner un critère sur les longueurs $\mathbf{l}$ afin que $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ soit une variété lisse.

Théorème 20. *Si $\mathbf{l}$ est générique alors $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ est une variété lisse.*

Démonstration. D'après 19, la SO(3)-action sur $\widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}$ est libre si et seulement si $\mathbf{l}$ est générique.
Maintenant, le quotient de Marsdem-Weinstein $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}} \,//\, \mathrm{SO}(3)$ est lisse si SO(3) agit libre sur $\mu_{\mathbf{l}}^{-1}(0) = \widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}$, par 15 et 14.
L'homéomorphisme de Gauss $\varepsilon : \mathcal{M}_{\mathbf{l}} \longrightarrow \mathbb{S}^2_{\mathbf{l}} \,//\, \mathrm{SO}(3)$ identifie alors $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ à la réduction symplectique lisse de $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$ par SO(3). □

Remarque 17. On a en fait montré un peu plus.
Si $\mathbf{l}$ est générique, on a $\mathcal{M}_{\mathbf{l}} \cong (\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}} \,//\, \mathrm{SO}(3), (\Omega_{\mathbf{l}})_{\mathrm{SO}(3)})$, où $\Omega_{\mathbf{l}}$ a été définie dans 5.6. Notre espace de module est alors muni d'une forme symplectique qui se relève aux produit des formes volumes sur les sphères $\mathbb{S}^2_{l_i}$.
On utilisera cette structure dans la suite pour discuter les singularités de $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ lorsque $\mathbf{l}$ n'est pas générique.

On déduit aussi la dimension de $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ dans les cas favorables.

Corollaire 21. *Si $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ est lisse, sa dimension réelle est $2(n-3)$.*

Démonstration. Avec 20, il s'agit de montrer que $\mathrm{Dim}_{\mathbb{R}}(\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}} \,//\, \mathrm{SO}(3)) = 2n-6$.

On a $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}} \,//\, \mathrm{SO}(3) = \mu_{\mathbf{l}}^{-1}(0)/\,\mathrm{SO}(3)$, et donc sa dimension est celle de $\mu_{\mathbf{l}}^{-1}(0)$, moins 3. Finalement, la dimension de la fibre de 0 par $\mu_{\mathbf{l}}$ est égale à la codimension de $\{0\}$ dans $\mathbb{E}^3$, à savoir 3. □

Remarque 18. On peut penser la construction qu'on vient de faire de façon différente.

Avec l'identification $\mathfrak{so}(3)^* \cong \mathbb{R}^3$ qu'on vient de donner, on a vu que le moment pour l'action de SO(3) sur $\mathbb{S}^2_l$ est l'inclusion canonique de la sphère dans $\mathbb{R}^3$.
On peut pousser un peu plus, et constater qu'avec la même identification l'action de SO(3) sur $\mathbb{S}^2_l$ n'est rien d'autre que l'action coadjointe sur une orbite coadjointe $\mathcal{O}_{\xi^*} \subseteq \mathfrak{so}(3)^*$. La théorie générale nous dit alors que le moment doit être l'inclusion $\mathcal{O}_{\xi^*} \hookrightarrow \mathfrak{so}(3)^*$, ce qu'ici on a préféré montrer directement.

On peut alors généraliser cette construction comme suit. On choisit un groupe de Lie (disons compact) K et n orbites coadjointes $\mathcal{O}_{\xi_1^*}, \ldots, \mathcal{O}_{\xi_n^*} \subseteq \mathfrak{k}^*$, et puis on considère l'action coadjointe diagonale de K sur le produit $\mathcal{O}_{\xi_1^*} \times \cdots \times \mathcal{O}_{\xi_n^*} \subseteq (\mathfrak{k}^*)^n$ des orbites.

Cette action sera hamiltonienne avec moment $\mu : \mathcal{O}_{\xi_1^*} \times \cdots \times \mathcal{O}_{\xi_n^*} \longrightarrow \mathfrak{k}^*$ donné par :

$$\mu(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Bien sûr, chaque orbite coadjointe est une variété symplectique de façon naturelle : elles sont feuilles symplectiques du feuilletage de la variété de Poisson $\mathfrak{k}^*$.

On peut donc considérer le quotient de Marsdem-Weinstein $\mathcal{O}_{\xi_1^*}, \ldots, \mathcal{O}_{\xi_n^*} \,//\, K$, et par exemple essayer de comprendre quand il est lisse (i.e. une variété symplectique).

Voici donc un procédé pour construire espaces de modules.

Dans le prochaine chapitre on s'intéressera aux singularités de $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$.

Chapitre 6

Singularités

Dans ce chapitre on se demande se que se passe avec $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ si $\mathbf{l}$ n'est pas générique. Choisissons donc $\mathbf{l} \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ tel qu'il existe des signes $(\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \{\pm 1\}^n$ pour lesquels on a une relation du type 5.11.

6.1 Énoncé sur les singularités et remarques préliminaires

En utilisant les résultats du chapitre précédent, si l'on note avec $\Sigma_{\mathbf{l}} \subseteq \mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ l'ensemble des classes des polygones dégénérés, alors $\mathcal{M}_{\mathbf{l}} \setminus \Sigma_{\mathbf{l}}$ est une variété symplectique.

Pour le voir, notons $\pi : \widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}/\operatorname{SO}(3)$ la projection canonique, et posons $\widetilde{\Sigma}_{\mathbf{l}} := \pi^{-1}(\epsilon(\Sigma_{\mathbf{l}}))$. Cet ensemble correspond aux n-gones dégénérés de $\mathcal{P}_{n,\mathbf{l}}$.

On remarque que $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}} \setminus \widetilde{\Sigma}_{\mathbf{l}}$ est un ouvert de la variété symplectique $(\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}, \Omega_{\mathbf{l}})$ définie en 5.3.
En effet, se donner une suite convergente de polygones dégénérés revient à se donner une suite convergente de vecteurs dans $\mathbb{S}^2$, dont le vecteur limite définit les cotés d'un polygone dégénéré.

On sait maintenant que l'action diagonale de SO(3) sur $\widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}} \setminus \widetilde{\Sigma}_{\mathbf{l}}$ est libre, sans modifier la preuve de 19. Le fait que cet espace soit SO(3)-invariant est assez clair.
On a donc l'identification

$$\mathcal{M}_{\mathbf{l}} \setminus \Sigma_{\mathbf{l}} \cong (\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}} \setminus \widetilde{\Sigma}_{\mathbf{l}}) // \operatorname{SO}(3)$$

et la réduction symplectique à droite est lisse d'après les résultat du chapitre précédent.

Le but est maintenant de trouver des voisinages des points singuliers de $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ qui permettent de décrire le type de singularités qui arrivent : on verra que ces singularités correspondent à des *cônes quadratiques homogènes* dans $\mathbb{C}^{n-2}$.
Plus précisément, considérons la classe d'un polygone dégénéré $[P]$ avec cotés de longueurs $\mathbf{l}$. Supposons que dans la relation 5.11 on ait $p+1$ plus et $q+1$ moins, avec $p+q = n-2$. On a alors le résultat suivant.

Théorème 22. *Il existe un voisinage de* $[P]$ *qui est homéomorphe à* $U//\,\mathrm{SO}(2)$*, où* $U \subseteq (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q, \sum_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq q} dz_i \wedge dw_j)$ *est un voisinage (*$\mathrm{SO}(2)$*-invariant) de zéro, l'action de* $\mathrm{SO}(2) = \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}^\times$ *est donnée par*

$$\lambda.(z_1, \ldots, z_p, w_1, \ldots, w_q) := (\lambda z_1, \ldots, \lambda z_p, \lambda^{-1} w_1, \ldots, \lambda^{-1} w_q)$$

et le moment est donné par l'hamiltonienne

$$h : \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q \longrightarrow \mathbb{R} \cong \mathfrak{so}(2)^*, \quad (z_1, \ldots, z_p, w_1, \ldots, w_q) \longmapsto \sum_{i=1}^{p} |z_i|^2 - \sum_{j=1}^{q} |w_j|^2$$

Remarque 19. Pour la preuve, il nous faut rappeler qu'est-ce qu'un *slice* dans un contexte plus général de 13. On rappelle qu'on considérait un groupe de Lie compact G agissant de façon lisse sur une variété M, toujours en dimension finie.
On a été capable de décrire un voisinage d'une G-orbite $G.x$ dans M en utilisant une fibration sur le quotient G/G_x (en fait un fibré vectoriel). La fibre générique était $V_x = T_xM/T_x(G.x)$, que l'on identifie au *fibré normal* à l'orbite grâce une métrique G-invariante sur M.
En conclusion, la G-action autour de $G.x$ est séparée en deux morceaux :

1. Le quotient G/G_x qui agit (libre) sur $G.x$
2. Le sous-groupe G_x qui agit sur un espace normal à $G.x$

La décomposition de G en G_x et G/G_x se reflet donc en une décomposition d'un voisinage de $G.x$

Ici on a utilisé un espace vectoriel comme espace normal à $G.x$. D'autre part, l'exponentielle riemannienne de M par rapport à une métrique G-invariante envoie un petit disque dans cet espace sur un sous-espace de M contenant x, et de façon G-équivariante. De tels espaces seront justement appelés des *slices* pour la G-action sur M en x.

Voyons une définition plus précise.

Définition 6.1. Considérons un groupe de Lie compact G qui agit lisse sur la variété M. Un sous-espace $S \subseteq M$ est un *slice* pour la G-action en $x \in S$ si l'on a les axiomes suivants sont vérifiés :

1. $G_x.S \subseteq S$ (G_x agit sur S).
2. $U := \bigcup_{s\in S} G.s$ est un voisinage ouvert de $G.x$ (c'est le saturé de S).
3. Si $G \times_{G_x} S \longrightarrow G/G_x$ est la fibration localement triviale de G/G_x de fibre S, il existe un C^∞-difféomorphisme G-équivariant de $G \times_{G_x} S$ sur U.
   De plus, ce difféomorphisme est donné par l'application naturelle $[g, s] \longmapsto g.s$.

Remarque 20. On rappelle que $G \times_{G_x} S := (G \times S)/G_x$, où G_x agit comme suit :

$$h.(g, s) := (gh, h^{-1}.s) \quad \text{pour} \quad g \in G, s \in S, h \in G_x$$

Bien sûr, l'action de G sur $G \times_{G_x} S$ est donné par la multiplication de G sur le premier facteur.

On remarque aussi que l'on pourrait donner cette définition avec hypothèses plus générales, de nature purement topologique. Il suffirait une action propre d'un groupe topologique localement compact sur un espace topologique séparé.

Si S est un slice pour la G-action en x, on a alors un homéomorphisme $S/G_x \cong U/G$, et on a décrit un voisinage ouvert de $[x] \in M/G$ comme on disait : la dynamique de $G : M \circlearrowleft$ autour de x équivaut à l'action du stabilisateur de x sur un slice en x.

On admet le fait suivant.

Proposition 23. *Avec les notations de 6.1, un espace $S \subseteq$ qui satisfait les propriétés 1, 2 et les deux propriétés suivantes est un slice pour la G-action en x :*

4. *S est fermé dans U.*
5. *si $g.S \cap S \neq \varnothing$ alors $g \in G_x$*

Ceci signifie que l'on peut montrer 1, 2, 4 et 5 pour déduire l'existence du difféomorphisme qu'on veut.

Remarque 21. Se donner un *slice theorem* pour une G-action sur une variété M revient donc à se donner des conditions suffisantes afin qu'il existe un slice en correspondance d'un point $x \in M$. Le théorème 13, dont la première formulation revient à Koszul (1953), s'énonce alors en disant qu'il existe un slice pour la G-action sur M pour tout point $x \in M$. La construction donnée pour monter l'existence est quand même non constructive.

Dans la preuve de 22 on commencera plutôt par construire un slice *explicite* pour un point de $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$ qui relève un polygone dégénéré de $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$. L'action de SO(3) autour de ce point sera alors équivalente à une action de son stabilisateur sur le slice.
Avant de donner la preuve, à laquelle on consacre la section suivante, on énonce et démontre un lemme qu'y sera utilisée.

Lemme 24. *Soit G un groupe de Lie agissant sur la variété symplectique (M, ω) avec moment $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$. Supposons que G agit aussi sur la variété lisse N, et que l'on ait un C^∞-difféomorphisme G-équivariant $\varphi : N \longrightarrow M$.*
Si l'action de G est symplectique sur $(N, \varphi^*\omega)$, alors elle est hamiltonienne avec moment donné par $\mu \circ \varphi : N \longrightarrow \mathfrak{g}^*$.

Démonstration. L'application $\mu \circ \varphi$ est bien G-équivariante, car φ et μ les sont.
Il s'agit donc de montrer la formule suivante :

$$d(< \mu \circ \varphi, \xi >) = \iota_{\xi^N} \varphi^* \omega \quad \text{pour} \quad \xi \in \mathfrak{g}$$

Fixons un point $x \in N$ et un vecteur tangent $v \in T_x N$. Notons $y := \varphi(x) \in M$.
À droite on lit :

$$\iota_{\xi^N(x)} \varphi^* \omega_x(v) = \varphi^* \omega_x(\xi^N(x), v) = \omega_y(d\varphi_x(\xi^N(x)), d\varphi_x(v))$$

Tandis qu'à gauche :

$$d(< \mu \circ \varphi, \xi >)_x(v) =< d(\mu \circ \varphi)_x(v), \xi >=< d\mu_y(d\varphi_x(v)), \xi >$$

Maintenant $d\varphi_x(v) \in T_y M$, et comme μ est un moment sur M on obtient :

$$< d\mu_y(d\varphi_x(v)), \xi > = d(< \mu, \xi >)_y(d\varphi_x(v)) = \iota_{\xi^M(y)} \omega_y(d\varphi_x(v)) =$$

$$= \omega_y(\xi^M(y), d\varphi_x(v))$$

Pour conclure, il faut montrer que $\xi^M(y) = d\varphi_x(\xi^N(x))$. Ceci suit de la G-équivariance de φ :

$$\xi^M(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\bigg|_{\mathrm{t}=0} \exp(t\xi).(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\bigg|_{\mathrm{t}=0} \varphi(\exp(t\xi).x) = d\varphi_x\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\bigg|_{\mathrm{t}=0} \exp(t\xi).x\right) =$$

$$= d\varphi_x(\xi^N(x))$$

où l'on a noté de même façon les G-actions sur M et N. □

6.2 Preuve de 22

Fixons une classe $[P] \in \mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ correspondante à un polygone dégénéré P, et choisissons un élément $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in \widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}$ qui relève $[P]$. On a donc un vecteur $v \in \mathbb{S}^2$ tel que $u_i = \eta_i l_i v$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.
On peut supposer sans perte de généralité que $v = \epsilon_1$, où $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ dénote la base canonique de $\mathbb{E}^3$, orthonormale pour $<,>$.

D'après 4, on peut aussi supposer que $\eta_1 = \cdots = \eta_{p+1} = -1$, $\eta_{p+2} = \cdots = \eta_n = 1$.
Ceci revient à supposer que P ait $p+1$ *back-tracks* suivis par $q+1$ *forward-tracks*.
On a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \eta_k l_k = -l_n$$

Le fait que $[P]$ soit un point singulier de $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ revient au fait que le stabilisateur de $SO(3)_{\mathbf{u}}$ de $\mathbf{u}$ soit non trivial. Ce stabilisateur est le sous-groupe de SO(3) qui fixe ϵ_1, c'est à dire le groupe des rotations de $\mathbb{E}^3$ d'axe ϵ_1. Il est naturellement isomorphe au cercle $\mathrm{SO}(2) \cong \mathbb{S}^1$ par l'isomorphisme :

$$SO(2) \longrightarrow \mathrm{SO}(3)_{\mathbf{u}}, \quad \theta \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

qu'on sous-entendra dans la suite.

La preuve de 22 s'articule en trois parties :

1. La construction d'un slice en $\mathbf{u}$ pour la SO(3)-action sur $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$.
2. La linéarisation de l'action autour de $\mathbf{u}$.
3. La conclusion.

Construction d'un slice

Construisons un slice pour la SO(3)-action sur $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$ en $\mathbf{u}$.
On pose :

$$S := \{\mathbf{s} \in \mathbb{S}^2_{\mathbf{l}} \mid s_n = l_n \epsilon_1\}$$

Cet espace S est bien une sous-variété lisse fermée de $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$ de codimension réelle égale à deux.
En effet, $S = \pi_n^{-1}(l_n\epsilon_1)$, et $\pi_n : \mathbb{S}^2_{\mathbf{l}} \longrightarrow \mathbb{S}^2_{l_n}$ est une submersion lisse.
Montrons que l'on a les axiomes 1, 2, 4 et 5 d'un slice.

1. Si $g \in \mathrm{SO}(2)$, alors $g.\epsilon_1 = \epsilon_1$, car g est une rotation autour de ϵ_1, d'où $\mathrm{SO}(2).S \subseteq S$.
2. Considérons $U := \bigcup_{\mathbf{s}\in S} \mathrm{SO}(3)\mathbf{s}$. On peut montrer que $U = \mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$.
   Ceci revient en fait à montrer que toute $\mathrm{SO}(3)$-orbite dans $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$ rencontre S, ce qui est vrai puisque l'action de $\mathrm{SO}(3)$ sur $\mathbb{S}^2_{l_n}$ est transitive.
4. On a déjà remarqué que S est fermée dans $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}} = U$.
5. Supposons $g.S \cap S \neq \varnothing$ pour $g \in \mathrm{SO}(3)$.
   Ceci signifie qu'il existe $\mathbf{s}' = (s'_1, \ldots, s'_n) \in S$ tel que $\mathbf{s}' = g.\mathbf{s}$ pour un $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in S$. L'action diagonale donne donc la condition $g.s_i = s'_i$ pour $1 \leq i \leq n$, d'où en particulier $g.s_n = s'_n$. D'après la définition de S, ceci signifie que g fixe ϵ_1, et donc il est une rotation d'axe ϵ_1, c'est à dire un élément de $\mathrm{SO}(2)$.

On en déduit l'existence d'un C^∞-difféomorphisme $\mathrm{SO}(3)$-équivariant

$$\alpha : \mathrm{SO}(3) \times_{\mathrm{SO}(2)} S \longrightarrow \mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$$

où l'on considère la fibration localement triviale $\mathrm{SO}(3)\times_{\mathrm{SO}(2)}S \longrightarrow \mathrm{SO}(3)/\mathrm{SO}(2)$ de fibre S.

Ce qui est mieux, ici on peut voir directement que α est donné par l'application naturelle :

$$\alpha([g, \mathbf{s}]) := g.\mathbf{s}$$

On a quand même montré les autres propriétés du slice S puisque on va les utiliser pour montrer que α est un difféomorphisme.

C'est clair que la formule ci-dessus définit une application lisse $\mathrm{SO}(3)$-équivariante :

$$\alpha(g.[g', \mathbf{s}]) = \alpha([gg', \mathbf{s}]) = gg'.\mathbf{s} = g.(g'.\mathbf{s}) = g.\alpha([g', \mathbf{s}])$$

La vérification de 4 montre qu'elle est surjective. Pour l'injectivité, supposons $g.\mathbf{s} = g'.\mathbf{s}'$ dans $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$, c'est à dire $g^{-1}g'.\mathbf{s}' = \mathbf{s}$.
Ceci signifie que $g^{-1}g' \in \mathrm{SO}(2)$, d'après la vérification de 5, car $g^{-1}g'.S \cap S \neq \varnothing$.
Mais alors $[g, \mathbf{s}] = [g', \mathbf{s}']$ dans $\mathrm{SO}(3) \times_{\mathrm{SO}(2)} S$, car on a $g' = g(g^{-1}g')$, et $(g^{-1}g')^{-1}\mathbf{s} = \mathbf{s}'$.

Pour conclure, il suffit de voir que α est un difféomorphisme local. La $\mathrm{SO}(3)$-équivariance de α nous permet de se restreindre au voisinage des points $[e, \mathbf{s}] \in \mathrm{SO}(3) \times_{\mathrm{SO}(2)} S$, car $\alpha([g, \mathbf{s}]) = g.\alpha([e, \mathbf{s}])$ pour tout $g \in \mathrm{SO}(3)$, et l'action de $\mathrm{SO}(3)$ est par automorphismes de $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$.
On remarque que l'on a une identification $T_{[e,\mathbf{s}]}(\mathrm{SO}(3) \times_{\mathrm{SO}(2)} S) \cong (\mathfrak{so}(3)/\mathfrak{so}(2)) \oplus T_{\mathbf{s}}S$ pour tout $\mathbf{s} \in S$, car la fibration est localement triviale : on a un voisinage de $[e, \mathbf{s}]$ dans $\mathrm{SO}(3) \times_{\mathrm{SO}(2)} S$ qui est difféomorphe au produit $U \times S$, où $U \subseteq \mathrm{SO}(3)/\mathrm{SO}(2)$ est ouvert.

On considère maintenant que α est l'application induite au quotient par $\tilde{\alpha} : \mathrm{SO}(3) \times S \longrightarrow \mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$, qui envoie $(g, \mathbf{s})$ dans $g.\mathbf{s}$; la définition de la SO(2) action sur $\mathrm{SO}(3) \times S$ est donnée justement pour que ceci soit vrai :

$$\tilde{\alpha}(gh, h^{-1}.\mathbf{s}) = gh.(h^{-1}.\mathbf{s}) = g.\mathbf{s} \quad \text{pour} \quad g \in \mathrm{SO}(3), \mathbf{s} \in S, h \in \mathrm{SO}(2)$$

On peut alors essayer de montrer que le noyau de $d\tilde{\alpha}_{(e,\mathbf{s})} : \mathfrak{so}(3) \oplus T_{\mathbf{s}}S \longrightarrow T_{\mathbf{s}}\,\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$ est $\mathfrak{so}(2) \oplus \{0\}$ pour tout $\mathbf{s} \in S$.
En effet, la restriction de $\tilde{\alpha}$ à la fibre $\{e\} \times S$ n'est rien d'autre que le plongement de S dans $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$, et donc la différentielle est bijective sur $\{0\} \oplus T_sS$.
Par contre, la restriction de $\tilde{\alpha}$ à $\mathrm{SO}(3) \times \{s\}$ est l'application orbitale $g \longmapsto g.\mathbf{s}$. On sait bien qu'elle induit un plongement de $\mathrm{SO}(3)/\,\mathrm{SO}(2)$ dans $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$ d'image la SO(3)-orbite de $\mathbf{s}$, et on a bien $\mathrm{Ker}(d\tilde{\alpha}_{(e,\mathbf{s})}) = \mathfrak{so}(2) \oplus \{0\}$.

Ceci signifie que $d\alpha_{[e,\mathbf{s}]}$ est injectif, puisque en fait :

$$d\alpha_{[e,\mathbf{s}]} = d\tilde{\alpha}_{(e,\mathbf{s})}/(\mathfrak{so}(2) \oplus \{0\})$$

$d\alpha_{[e,\mathbf{s}]}$ est donc un isomorphisme pour questions de dimension :

$$\begin{aligned}\mathrm{Dim}_{\mathbb{R}}(\mathrm{SO}(3) \times_{\mathrm{SO}(2)} S) &= \mathrm{Dim}_{\mathbb{R}}\,\mathrm{SO}(3) + \mathrm{Dim}_{\mathbb{R}}\,S - \mathrm{Dim}_{\mathbb{R}}\,\mathrm{SO}(2) = \\ &= 3 + (2n-2) - 1 = 2n = \mathrm{Dim}_{\mathbb{R}}\,\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}\end{aligned}$$

Maintenant on transfère la forme symplectique $\Omega_{\mathbf{l}}$ sur $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$ à $\mathrm{SO}(3) \times_{\mathrm{SO}(2)} S$ par *pull-back*. L'action de SO(3) sur $(\mathrm{SO}(3) \times_{\mathrm{SO}(2)} S, \alpha^*\Omega_{\mathbf{l}})$ est alors hamiltonienne, avec moment μ donné par :

$$\mu([g, \mathbf{s}]) = g.\left(\sum_{i=1}^{n} s_i\right) = \mu_{\mathbf{l}} \circ \alpha([g, \mathbf{s}])$$

où $\mu_{\mathbf{l}} : \mathbb{S}^2_{\mathbf{l}} \longrightarrow \mathbb{E}^3$ est le moment défini dans 5.3.
La preuve de ce fait-ci est le contenu du lemme 24.

On définit maintenant deux autres fermés $S_0 \subseteq S_1 \subseteq S$:

$$S_1 := \left\{ \mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in S \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} s_i \in \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\epsilon_1\} \right\}$$

$$S_0 := \left\{ \mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in S \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} s_i = 0 \right\} = \widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}} \cap S$$

On voit tout de suite que SO(2) préserve S_1.

On remarque que l'on a $\alpha(\mu^{-1}(0)) = \mu_{\mathbf{l}}^{-1}(0) = \widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}$, car $\mu = \mu_{\mathbf{l}} \circ \alpha$.

De plus, on a $\mu^{-1}(0) = \mathrm{SO}(3) \times_{\mathrm{SO}(2)} S_0$.
En effet, $g.\,(\sum_{i=1}^{n} s_i) = 0$ si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} s_i = 0$, car g est inversible.

On déduit que α induit un homéomorphisme :

$$\overline{\alpha} : S_0/\,\mathrm{SO}(2) \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbf{l}}$$

Où l'on a utilisé l'homéomorphisme $(\mathrm{SO}(3) \times_{\mathrm{SO}(2)} S_0)/\,\mathrm{SO}(3) \cong S_0/\,\mathrm{SO}(2)$, qui vient du fait que la SO(3) action sur $\mathrm{SO}(3) \times S_0$ commute à la SO(2) sur cet espace.

On a exploité le slice S autour de $\mathbf{u} \in S_0$ avec succès : l'action entière de SO(3) sur $\widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}$ se ramène à une action du stabilisateur SO(2) de $\mathbf{u}$ sur un sous-espace fermé $S_0 \subseteq \widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}$.

On peut maintenant essayer de trouver un voisinage V de $\mathbf{u}$ dans S_0 tel que $V/\,\mathrm{SO}(2)$ soit isomorphe à un voisinage de zéro dans le quotient symplectique $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q\,//\,\mathrm{SO}(2)$ décrit dans l'énoncé du théorème.

Linéarisation

On note $f : S \longrightarrow \mathbb{E}^3$ la restriction du moment $\mu_{\mathbf{l}}$ à S :

$$f(\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^{n} s_i$$

Soient f_1, f_2, f_3 les composantes de f, et posons $g := (f_2, f_3) : S \longrightarrow \mathbb{E}^2$. On a alors $g^{-1}(0) = S_1$.

On peut montrer que $dg_{\mathbf{u}} : T_{\mathbf{u}}S \longrightarrow \mathbb{E}^2$ est surjective, et donc il existe un voisinage V de $\mathbf{u}$ tel que $V \cap S_1$ soit une sous-variété lisse de codimension 4 dans $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$. On peut même supposer que ce voisinage soit SO(2)-invariant.

On a alors :

$$V \cap S_0 = \{\mathbf{s} \in V \cap S_1 \mid f_1(\mathbf{s}) = 0\}$$

car $f_1(\mathbf{s}) = 0$ et $f(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}\,\epsilon_1$ impliquent que $\mathbf{s} \in S_0$.

On remarque puis que $f_1 =< \mu_{\mathbf{l}}, \epsilon_1 >$ est le moment pour la SO(2)-action sur S.
En effet, on a l'inclusion canonique $\iota : \mathrm{SO}(2) \hookrightarrow \mathrm{SO}(3)$ qui définit l'application duale $\iota^* : \mathfrak{so}(3)^* \longrightarrow \mathfrak{so}(2)^*$, et le moment de la SO(2)-action sur S n'est rien d'autre que $\iota^* \circ f$. D'autre part, l'identification de SO(2) avec les rotations d'axe ϵ_1 donne l'identification $\mathfrak{so}(2) \cong \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\epsilon_1\}$, et ι^* est alors la projection orthogonale par rapport à $<,>$.

Tout ceci signifie que $(V \cap S_1)//SO(2) \cong (V \cap S_0)/\,\mathrm{SO}(2)$: le but maintenant est de montrer que le voisinage $V \cap S_0/SO(2)$ de $[P]$ a les propriétés qu'on veut.

Pour faire ça, on travaille directement avec la réduction symplectique $V \cap S_1//\,\mathrm{SO}(2)$, et on approxime $(V \cap S_1, \Omega_{\mathbf{l}})$ par l'espace tangent $(T_{\mathbf{u}}(V \cap S_1), (\Omega_{\mathbf{l}})_{\mathbf{u}})$.

On considère la représentation d'isotropie de SO(2) sur $T_{\mathbf{u}}(V \cap S_1)$, comme dans 5.8, donnée par :

$$\rho_{\mathbf{u}} : \mathrm{SO}(2) \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(T_{\mathbf{u}}(V \cap S_1)), \quad \rho_{\mathbf{u}} : \theta \longmapsto d\theta_{\mathbf{u}}$$

elle est bien définie puisque $\theta(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ pour $\theta \in \mathrm{SO}(2)$.
Comme la SO(2)-action est déjà linéaire, on a bien $\rho_{\mathbf{u}}(\theta)(\mathbf{v}) = (\theta.v_1, \ldots, \theta.v_n)$, si $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in T_{\mathbf{u}}(V \cap S_1)$.

Ce sera utile dans la suite d'avoir caractérisé les espaces tangents en $\mathbf{u}$ à S et S_1. On a :

$$T_{\mathbf{u}}S = \{\mathbf{v} \in T_{\mathbf{u}}\,\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}} \mid v_n = 0\}$$

$$T_{\mathbf{u}}S_1 = \left\{\mathbf{v} \in T_{\mathbf{u}}S \middle| \sum_{i=1}^{n} v_i = 0\right\}$$

où bien sûr $T_{\mathbf{u}}\,\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}} = \{\mathbf{v} \in (\mathbb{E}^3)^n \mid < v_i, \epsilon_1 >= 0 \text{ pour } 1 \leq i \leq n\}$.

La condition qui définit le tangent à S est assez claire. Pour ce qui concerne S_1, la condition infinitésimale serait à priori :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) \in \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\epsilon_1\}$$

mais la condition d'orthogonalité donne :

$$< \sum_{i=1}^{n} v_i, \epsilon_1 >= \sum_{i=1}^{n} < v_i, \epsilon_1 >= 0$$

et on y est.

On a maintenant une structure complexe canonique sur $T_{\mathbf{u}}(V \cap S_1)$, à savoir :

$$J : T_{\mathbf{u}}(V \cap S_1) \circlearrowleft, \quad J : (\mathbf{v}) \longmapsto \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \left(\frac{1}{l_1}u_1 \wedge v_1, \ldots, \frac{1}{l_n}u_n \wedge v_n\right) \tag{6.1}$$

On a bien $J^2 = -\operatorname{Id}$, car l'application $v_i \longmapsto u_i \wedge v_i$ définit une rotation de v_i de $\frac{\pi}{2}$ radiants dans le plan orthogonal à ϵ_1 : le produit vectoriel est orthogonal à u_i et v_i, et le module de $\frac{1}{l_i}u_i$ est 1.
Donc J^2 revient à considérer une rotation de π radiants, c'est à dire que $u_i \wedge (u_i \wedge v_i) = -v_i$.

De plus, cette structure complexe est préservée par $\rho_{\mathbf{u}}$. Ceci est évident avec la caractérisation géométrique de J qu'on vient de donner, car deux rotations du plan orthogonal à ϵ_1 commutent toujours entre elles.

On a encore plus de structure, à savoir la forme bilinéaire alternée non dégénérée $(\Omega_{\mathbf{l}})_{\mathbf{u}}$. On peut la penser comme une forme symplectique sur le tangent, en identifiant $T(T_{\mathbf{u}}(V \cap S_1))$ avec $T_{\mathbf{u}}(V \cap S_1) \times T_{\mathbf{u}}(V \cap S_1)$.
Cette forme est aussi préservée par la représentation d'isotropie, car l'action de SO(2) est symplectique dès le début.

Une version du théorème de Darboux équivariant nous permet alors de conclure que, quitte à rétrécir V, il existe un voisinage $U \subseteq T_{\mathbf{u}}(V \cap S_1)$ de zéro tel que l'exponentielle riemannienne $\exp_{\mathbf{u}} : T_{\mathbf{u}}(V \cap S_1) \longrightarrow V \cap S_1$ induit un isomorphisme symplectique SO(2)-équivariant $U \longrightarrow V \cap S_1$ qui envoie 0 sur $\mathbf{u}$.
Ceci entraîne que l'on a un isomorphisme symplectique de quotients symplectiques $U//\operatorname{SO}(2) \cong (V \cap S_1)//\operatorname{SO}(2)$, et on a effectivement réduit le problème au cas linéaire.

Conclusion

Considérons maintenant la représentation d'isotropie *infinitésimale* :

$$(d\rho_{\mathbf{u}})_{\mathrm{Id}} : \mathfrak{so}(2) \longrightarrow C^\infty(T_{\mathbf{u}}(V \cap S_1), T(T_{\mathbf{u}}(V \cap S_1)))$$

Dans ce contexte si, on a identifié $\mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(T_{\mathbf{u}}(V \cap S_1))$ à un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(T_{\mathbf{u}}(V \cap S_1))$, et donc on a aussi une inclusion naturelle $\mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(T_{\mathbf{u}}(V \cap S_1)) \subseteq C^\infty(T_{\mathbf{u}}(V \cap S_1), T(T_{\mathbf{u}}(V \cap S_1)))$. En effet, si A est un endomorphisme de $T_{\mathbf{u}}(V \cap S_1)$, et $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{u}}(V \cap S_1)$, alors $A(\mathbf{v}) \in T_{\mathbf{u}}(V \cap S_1)$ s'identifie à un vecteur tangent en v, via $T_{\mathbf{v}}(T_{\mathbf{u}}(V \cap S_1)) \cong T_{\mathbf{u}}(V \cap S_1)$.
On appelle ça un champ de vecteurs *linéaire* sur $T_{\mathbf{u}}(V \cap S_1)$.

On peut montrer que le champ de vecteur linéaire qui définit $(d\rho_{\mathbf{u}})_{\mathrm{Id}}$ est donné par l'endomorphisme suivant :

$$F(\mathbf{v}) := (\epsilon_1 \wedge v_1, \ldots, \epsilon_1 \wedge v_n)$$

En effet, ceci n'est rien d'autre que $(d\rho_{\mathbf{u}})_{\mathrm{Id}}(\frac{\partial}{\partial\theta})(\mathbf{v})$.

On veut maintenant calculer l'hamiltonienne h de F sur $T_{\mathbf{u}}(V \cap S_1)$, et voir qu'elle est une forme quadratique hermitienne de signature $(2p, 2q)$ sur l'espace complexe $T_{\mathbf{u}}(V \cap S_1) \cong \mathbb{C}^{n-2}$.
On commence en calculant l'hamiltonienne de F sur l'espace plus grand $T_{\mathbf{u}}S$.

On va montrer que h est donnée par :

$$h(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\eta_i}{l_1}|v_i|^2$$

En effet, si $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\mathbf{u}}S$:

$$dh_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\eta_i}{l_i} < v_i, w_i >$$

De même :

$$\iota_{F(\mathbf{v})}(\Omega_{\mathbf{l}})_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{l_i^2} < \eta_i l_i \epsilon_1, (\epsilon_1 \wedge v_i) \wedge w_i >= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\eta_i}{l_i} < \epsilon_1, (\epsilon_1 \wedge v_i) \wedge w_i >=$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\eta_i}{l_i} < \epsilon_1, < v_i, w_i > \epsilon_1 >= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\eta_i}{l_i} < v_i, w_i >$$

où l'on a utilisé l'identité déjà démontrée :

$$(\epsilon_1 \wedge v_i) \wedge w_i =< v_i, w_i > \epsilon_1$$

On remarque que h est une forme quadratique de signature (réelle) $(2p, 2q+2)$, car on a supposé que $\eta_n = 1$, et ici il n'apparaît pas.

Si J dénote l'extension de la structure complexe sur $T_{\mathbf{u}}(V \cap S_1)$ au tangent à S, on a alors :

$$h(J(.), J(.)) = h(., .)$$

où l'on à séparé les variables de h par polarisation.
En effet on a :

$$h(J(\mathbf{v}), J(\mathbf{w})) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\eta_i}{l_i} < \eta_i \epsilon_1 \wedge v_i, \eta_i \epsilon_1 \wedge w_i >= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\eta_i}{l_i} < \epsilon_1 \wedge v_i, \eta_i \epsilon_1 \wedge w_i >=$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\eta_i}{l_i} < v_i, w_i >= h(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

où l'on a utilisé que $\eta_i^2 = 1$ pour tout i, ainsi que l'identité déjà démontrée $< \epsilon_1 \wedge v_i, \epsilon_1 \wedge w_i >=< v_i, w_i >$.

Donc h est une forme hermitienne sur $T_{\mathbf{u}}S \cong \mathbb{C}^{n-1}$.

On va maintenant montrer que la signature de sa restriction à $T_{\mathbf{u}}(V \cap S_1)$ est $(2p, 2q)$. Pour faire ça, c'est suffisante de montrer que h est définie négative sur le complément orthogonal $W \subseteq T_{\mathbf{u}}S$ de $T_{\mathbf{u}}(V \cap S_1)$.

On peut montrer que W est engendré par les vecteurs linéairement indépendants :

$$w_2 := (\eta_1 l_1 \epsilon_2, \eta_2 l_2 \epsilon_2, \ldots, \eta_{n-1} l_{n-1} \epsilon_2, 0)$$

$$w_3 := (\eta_1 l_1 \epsilon_3, \eta_2 l_2 \epsilon_3, \ldots, \eta_{n-1} l_{n-1} \epsilon_3, 0)$$

En effet, si $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{u}}(V \cap S_1)$, et $k \in \{2, 3\}$, alors :

$$h(w_k, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\eta_i}{l_i} < \eta_i l_i \epsilon_k, v_i >= \sum_{i=1}^{n-1} < \epsilon_k, v_i >=< \epsilon_k, \sum_{i=1}^{n-1} v_i >= 0$$

Pour montrer que $h_{|W \times W} < 0$, on calcule $h(w_2, w_3)$ et $h(w_k, w_k)$ pour $k \in \{2, 3\}$; on trouve :

$$h(w_2, w_3) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\eta_i}{l_i} < \eta_i l_i \epsilon_2, \eta_i l_i \epsilon_3 >= 0$$

car $< \epsilon_2, \epsilon_3 >= 0$.
De même :

$$h(w_k, w_k) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\eta_i}{l_i} |\eta_i l_i \epsilon_k|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i l_i = -l_n < 0$$

Tout ceci montre bien que $h : T_{\mathbf{u}}(V \cap S_1) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme quadratique de signature $(2p, 2q)$.
On a une identification $T_{\mathbf{u}}(V \cap S_1) \cong \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$ donnée par notre structure complexe, et quitte à changer de base on peut supposer que h soit donnée par :

$$h(z_1, \ldots, z_p, w_1, \ldots, w_q) = \sum_{i=1}^{p} |z_i|^2 - \sum_{j=1}^{q} |w_j|^2$$

L'action de SO(2) est par rapport à ce moment est alors celle donnée dans l'énoncé du théorème, et on a achevé la preuve de 22.

Remarque 22. On remarque que ceci montre que les singularités de $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ sont isolées, car le voisinage $U//\,\mathrm{SO}(2)$ est lisse hors de zéro. Elles sont donc en nombre fini, puisque $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ est compact.

Dans le chapitre suivant on expliquera en quel sens la singularité en $[P]$ est de type cône homogène quadratique, où l'on donnera aussi une structure complexe au voisinage trouvé.
Après cet approche local, on essaiera de définir une structure complexe globale pour $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$, peut-être avec singularités

Chapitre 7

Structure Complexe

Le but du chapitre est de décrire une structure d'espace complexe sur $\mathcal{M}_{\mathfrak{l}}$.
Dans le cas lisse il n'y a pas grandes choses à dire.

Dans le cas singulier, on essayera de caractériser notre espace de module comme un quotient complexe au sens de Mumford. La théorie générale permet de définir des quotients de variétés (algébriques) complexes projectives par actions de groupes algébriques (affines) complexes réductifs. On supposera toujours de travailler avec variétés lisses, pour rester dans la catégorie analytique.
1 Des outils techniques assez avancés de ce que l'on appelle *théorie géométrique des invariants* permettent de relier ces quotients de Mumford aux quotients de Marsdem-Weinstein. Le résultat central dans ce cadre-ci est le théorème de Kirwan-Kempf-Ness.
Dans la suite on essayer de rester élémentaires, sans utiliser trop de techniques de la géométrie algébrique. Le but est toujours de montrer que $\mathcal{M}_{\mathfrak{l}}$ est un exemple parfait pour effectuer explicitement des construction abstraites qui sont étudiées pour espaces de modules bien plus complexes.

7.1 Structure kählerienne

Supposons d'abord que $\mathcal{M}_{\mathfrak{l}}$ soit lisse.
D'après les résultats du chapitre 5, ceci signifie qu'il est un quotient symplectique lisse.

La variété symplectique $(\mathbb{S}^2_{\mathfrak{l}}, \Omega_{\mathfrak{l}})$ est bien kählerienne avec la structure (presque-)complexe SO(3)-invariante J définie dans (6.1), et donc sa sous-variété fermée $\widetilde{\mathcal{M}_{\mathfrak{l}}}$ l'est aussi. On a aussi montré que J est $\Omega_{\mathfrak{l}}$-compatible.
Pour conclure qu'il existe une structure complexe sur $\mathcal{M}_{\mathfrak{l}}$ il suffira de rappeler quand la réduction symplectique lisse d'une variété kälerienne est kählerienne.

Soit (M, J, ω) une variété kählerienne munie d'une action hamiltonienne du groupe de Lie compact connexe G, avec moment $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$. Supposons que G agit librement sur $\mu^{-1}(0)$, de façon que $M//G = \mu^{-1}(0)/G$ soit lisse, et que J soit G-invariante.
La G-invariance de J s'exprime par l'identité $G^*J = J$, c'est à dire que :

$$J_x(v) = (g^*J)_x(v) = J_{g.x}(dg_x(v)), \quad \text{pour tout } x \in M, v \in T_xM, g \in G$$

Dans la preuve de 13 on a montré que l'on peut identifier $T_{[x]}(M//G)$ au complément orthogonal de $T_x(G.X)$ dans $T_x(\mu^{-1}(0))$ par rapport à n'importe quelle métrique riemannienne R sur $\mu^{-1}(0)$. Dans ce contexte-ci on a un choix de métrique naturel, c'est à dire :

$$R_x := \omega_x(J_x(.), .)$$

que l'on restreint à $T(\mu^{-1}(0))$.

On peut maintenant montrer qu'avec ce choix le complément orthogonal de $T_x(G.x)$ dans $T_x(\mu^{-1}(0))$, qu'on note désormais $(T_x(G.x))^{\perp R_x}$ avec un petit abus, est J-invariant.

En effet, on a vu dans (5.10) que l'on a $T_x(\mu^{-1}(0)) = (T_x(G.x))^{\perp\omega}$, d'où :

$$T(\mu^{-1}(0)) \cap T(\mu^{-1}(0))^{\perp\omega} = T_x(G.x)$$

Donc $(T_x(G.x))^{\perp R_x}$ est un sous-espace symplectique de T_xM, et on a une décomposition orthogonale pour ω :

$$T_xM = (T_x(G.x))^{\perp R_x} \oplus ((T_x(G.x))^{\perp R_x})^{\perp\omega}$$

Ceci est juste un résultat de géométrie symplectique linéaire, si l'on veut.
De plus, cette décomposition est bien G-invariante, car ω l'est.

Pour conclure on pourrait montrer que J_x préserve le deuxième facteur de cette décomposition, car alors il préserve aussi $(T_x(G.x))^{\perp R_x}$ par ω-invariance.
Ceci permet de définir $(J_G)_{[x]}$ comme étant le seul endomorphisme de $T_{[x]}(M//G)$ qui se relève à J_x par rapport à la projection canonique $\pi : \mu^{-1}(0) \longrightarrow M//G$, qui est un G-fibré principal.

Cette définition montre bien J_G est une structure presque-complexe ω_G-compatible sur $M//G$, car ω_G se relève à $\omega_{|\mu-1(0)}$ par définition. L'intégralité de J_G suit aussi de celle de J et du fait que $d\pi : T(\mu^{-1}(0)) \longrightarrow T(M//G)$ est compatible aux commutateurs de champs de vecteurs.

La traduction de tout ça pour l'espace de module de polygones est immédiate, et on a donc presque montré la proposition suivante.

Proposition 25. *Si $\mathcal{M}_1$ est lisse, c'est une variété kählerienne.*

Passons maintenant au cas où il y des singularités, pour lequel on introduira les quotients de Mumford.

7.2 Le cas affine

Soit X une variété algébrique affine lisse définie sur $\mathbb{C}$, et G un groupe de Lie complexe agissant (à gauche) sur X par automorphismes de X. On sait alors que X est aussi une variété analytique complexe (de Stein).
On veut définir un quotient de X par l'action de G, noté $X//G$ (et les liens avec les quotients symplectiques sont déjà suggérés par cette notation).

Pour le faire, on commence en fixant un peu de notation.
Supposons que le fermé de Zariski $X \subseteq \mathbb{C}^n$ soit défini par les polynômes $F_1, \ldots, F_k \in \mathbb{C}[Z_1, \ldots, Z_n]$. L'anneau des fonctions régulières de X est alors par définition $\mathcal{A}_X := \mathbb{C}[Z_1, \ldots, Z_n]/I(X)$, où $I(X) := (F_1, \ldots, F_k)$ est l'idéal engendré par les équations de X.

D'après la *nullstellensatz*, on sait que X est en correspondance avec l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathcal{A}_X$, qu'on note $\mathrm{Max}(\mathcal{A}_X)$.

Maintenant, on remarque que l'action de G sur X induit une G-action sur $\mathcal{A}_X$ donnée par :

$$(g.f)(x) := g.f(g^{-1}.x) \quad \text{pour} \quad f \in \mathcal{A}_X, g \in G$$

et on peut donc considérer l'*anneau des invariants* :

$$\mathcal{A}_X^G := \{f \in \mathcal{A}_X \mid g.f = f \text{ pour tout } g \in G\}$$

Cet ensemble est bien un anneau, car l'action de G est par morphismes de variétés algébriques.

On peut finalement considérer la variété affine $\mathrm{Max}(\mathcal{A}_X^G)$ associée à cet anneau d'invariants, et on pose :

$$X//G := \mathrm{Max}(\mathcal{A}_X^G)$$

On appelle ceci le *quotient de Mumford* de la variété affine X par rapport à l'action de G : c'est le quotient de la théorie géométrique des invariants dans le cas affine.

Remarque 23. On aurait pu partir d'une action de G sur une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini $\mathcal{A}_X$ par automorphismes d'anneaux. On sait alors que G agit aussi sur $\mathrm{Max}(\mathcal{A}_X)$, c'est à dire sur la variété affine complexe définie par $\mathcal{A}_X$.

Construire un quotient de $\mathrm{Max}(\mathcal{A}_X)$ par G revient alors à se donner une $\mathbb{C}$-algèbre de type fini, dont le spectre maximal sera la variété affine recherchée. Sans l'hypothèse de finitude on ne pourrait pas plonger la variété dans un espace affine de dimension finie.

Toutefois, ce n'est pas dit en général que $\mathcal{A}_X^G$ soit de type fini, ni qu'il existe une identification $\mathrm{Max}(\mathcal{A}_X)/G \cong X//G$. Une hypothèse qu'on peut faire sur G pour avoir au moins la finitude est qu'il soit *réductif*.
On reviendra sur cette propriété dans la section suivante.

On remarque maintenant que $\mathcal{M}_1$ est en fait le quotient d'une variété algébrique projective complexe, à savoir le fermé $\widetilde{\mathcal{M}_1}$ dans un produit de copies de $\mathbb{C}\,P^1$. Il faudrait donc étudier la théorie qui permet de définir les quotients de variétés projectives.
Dans la section prochaine on donnera une idée de cette construction générale, et on énoncera le théorème de Kirwan-Kempf-Ness.

Pour terminer, voyons des exemples de quotients de Mumford affines. On verra en fait trois variations sur un même exemple.

Exemple 7.1. Considérons $X := \mathbb{C}^2$, et $G := \mathbb{C}^\times$, avec action définie par :

$$\lambda.(z_1, z_2) := (\lambda.z_1, \lambda^{-1}.z_2)$$

On trouve trois types d'orbites :

1. Si $z_1 \neq 0 \neq z_2$ alors on a orbites du type $\{z_1 z_2 = c\}$, pour $c \in \mathbb{C}^\times$.
2. Si $z_1 = 0, z_2 \neq 0$, on trouve l'orbite dégénérée à l'axe $\{(0, z) \mid z \in \mathbb{C}\}$, et symétriquement pour $z_1 \neq 0, z_2 = 0$.
3. Si $(z_1, z_2) = (0, 0)$ on trouve l'orbite dégénérée à l'origine $\{(0, 0)\}$.

Le quotient "standard" $\mathbb{C}^2 / \mathbb{C}^\times$ n'est donc même pas séparé. Essayons plutôt de construire $\mathbb{C}^2 // \mathbb{C}^\times$.

Déjà, on a $\mathcal{A}_{\mathbb{C}^2} = \mathbb{C}[Z_1, Z_2]$, car $\mathbb{C}^2$ est définie par le polynôme nul : les fonctions régulières sont seulement les polynômes.

On peut montrer que $\mathcal{A}_{\mathbb{C}^2}^{\mathbb{C}^\times} \cong \mathbb{C}[Z]$, où $Z := Z_1 Z_2$.
En effet, soit $F = \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} Z_1^i Z_2^j$ un polynôme invariant dans $\mathbb{C}[Z_1, Z_2]$, avec donc les $a_{ij} \in \mathbb{C}$ presque tous nuls. On trouve alors la condition :

$$\sum_{i,j \geq 0} a_{ij} \lambda^i \lambda^{-j} Z_1^i Z_2^j = \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} Z_1^i Z_2^j \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{C}^\times .$$

Si l'on avait un monôme $a_{ij} Z_1^i Z_2^j$ de coefficient non nul avec $i \neq j$, on trouverait alors $a_{ij} \lambda^i \lambda^j \neq a_{ij}$, ce qui est absurde. Ceci signifie précisément que F est un polynôme en la nouvelle variable $Z_1 Z_2$.
Finalement :

$$\mathbb{C}^2 // \mathbb{C}^\times = \mathrm{Max}(\mathcal{A}_{\mathbb{C}^2}^{\mathbb{C}^\times}) = \mathrm{Max}(\mathbb{C}[Z]) \cong \mathbb{C}$$

Ce qui s'est passé est que l'on a identifié les orbites dégénérées.
En général, la construction de la théorie géométrique des invariants identifie les orbites dont les clôtures s'intersectent.

Exemple 7.2. Considérons encore $X := \mathbb{C}^2$ et $G := \mathbb{C}^\times$, mais cette fois-ci avec action :

$$\lambda.(z_1, z_2) := (\lambda_1, \lambda_2)$$

On a encore $\mathcal{A}_X = \mathbb{C}[Z_1, Z_2]$, mais cette fois-ci les seuls polynômes invariants sont les constantes, car la condition d'invariance devient (avec les notations de l'exemple précédent) :

$$a_{ij} \lambda^{i+j} = a_{ij} \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in \mathbb{C}^\times$$

ce qui donne $a_{ij} = 0$ si $i + j > 0$.

On trouve donc :

$$\mathbb{C}^2 // \mathbb{C}^\times = \mathrm{Max}(\mathbb{C}) = \{*\}$$

le singleton donné par l'idéal nul, le seul maximal de $\mathbb{C}$.

Ceci nous gêne, puisque le quotient naturel serait été $\mathbb{C}\,P^1$, et nous montre aussi que le cas projective est plus compliqué à traiter.

Exemple 7.3. Considérons $X := \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$, $G := \mathbb{C}^\times$, et l'action donnée par :

$$\lambda.(z_1, \ldots, z_p, w_1, \ldots, w_q) := (\lambda z_1, \ldots, \lambda z_p, \lambda^{-1} w_1, \ldots, \lambda^{-1} w_q)$$

On a ici $\mathcal{A}_X = \mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_P, W_1, \dots, W_q]$, et on peut présenter la $\mathbb{C}$-algèbre des invariants comme le quotient :

$$\mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_P, W_1, \dots, W_q]^{\mathbb{C}^\times} \cong \frac{\mathbb{C}\left[(T_{ij})_{1\le i\le p, 1\le j\le q}\right]}{(T_{ij}T_{ji} - T_{ii}T_{jj})_{1\le i\le p, 1\le j\le q}}$$

où les variables T_{ij} sont définies par $T_{ij} := Z_i W_j$.

Pour justifier ça, écrivons

$$F = \sum_{I\in\mathbb{N}^p, J\in\mathbb{N}^q} a_{IJ} Z^I W^J$$

un polynôme invariant, où $Z^I := Z_1^{I_1} \dots Z_p^{I_p}$ et $W^J := W_1^{J_1} \dots W_q^{J_q}$, pour $I = (I_1, \dots, I_p)$ et $J = (J_1, \dots, J_q)$.
Ses coefficients a_{IJ} satisfont alors :

$$a_{IJ}\lambda^{|I|}\lambda^{-|J|} = a_{IJ} \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{C}^\times$$

où $|I| := \sum_{i=1}^p I_i, |J| := \sum_{j=1}^q J_j$ sont les longueurs des multi-indices I, J.
Ceci signifie donc que si $a_{IJ} \neq 0$ alors il faut avoir $|I| = |J|$. Dans ce cas-ci, on peut toujours écrire le monôme $Z^I W^J$ comme un produit du type

$$\prod_{1\le i\le p, 1\le j\le q} T_{ij}^{\alpha_{ij}}$$

où l'entier α_{ij} compte le nombre de fois que le couple $Z_i W_j$ apparaît dans $Z^I W^J$.

Il faudrait maintenant montrer que l'on n'a que les relations $T_{ii}T_{jj} = T_{ij}T_{ji}$ parmi les générateurs T_{ij} de l'anneau des invariants, ce que l'on ne fait pas.

On a donc :

$$\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q \,//\, \mathbb{C}^\times = \mathrm{Max}\left(\frac{\mathbb{C}\left[(T_{ij})_{1\le i\le p, 1\le j\le q}\right]}{(T_{ij}T_{ji} - T_{ii}T_{jj})_{1\le i\le p, 1\le j\le q}}\right)$$

D'après la nullstellensatz, ceci revient à considérer le fermé de Zariski suivant, dans $\mathbb{C}^{pq}$:

$$\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q \,//\, \mathbb{C}^\times \cong \{(z_{ij}) \in \mathbb{C}^{pq} \mid z_{ij}z_{ji} - z_{ii}z_{jj} = 0\}$$

qui est défini par des équations homogènes de degré 2.
Cet ensemble est donc un *cône homogène quadratique* : on l'appelle un cône puisque il est fermé par homothéties.

Remarque 24. Revenons à l'énoncé 22, qui décrit un voisinage d'une classe $[P] \in \mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ d'un polygone dégénéré. On a montré que ce voisinage est donné par la réduction symplectique $U//\,\mathrm{SO}(2)$, où $U \subseteq \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$ est un voisinage de zéro et le moment h est donné en énoncé. On a donc le quotient $(U \cap h^{-1}(0))/\,\mathrm{SO}(2)$, c'est à dire le quotient d'un sous-espace de $\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q$ par la restriction de l'action de tout à l'heure à $\mathrm{SO}(2)$.

On peut maintenant définir une application bijective canonique $\varphi : U//\mathbb{C}^\times \longrightarrow (U \cap h^{-1}(0))/\operatorname{SO}(2)$, qui donne au quotient symplectique (non lisse) à droite une structure d'espace complexe : c'est celle induite par l'inclusion $(U \cap h^{-1}(0)) \hookrightarrow U$.

En effet, supposons d'avoir $\operatorname{SO}(2).(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \operatorname{SO}(2)(\mathbf{z}', \mathbf{w}')$ pour $(\mathbf{z}, \mathbf{w}), (\mathbf{z}', \mathbf{w}')$ dans $U \cap h^{-1}(0)$. La bonne définition de φ suit alors du simple fait que $\mathbb{C}^\times .(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \mathbb{C}^\times(\mathbf{z}', \mathbf{w}')$, car $\operatorname{SO}(2) \subseteq \mathbb{C}^\times$.

La bijectivité est moins triviale, et suit de la décomposition $\mathbb{C}^\times \cong \mathbb{R}_{>0} \times \operatorname{SO}(2)$, ce qui nous permet de décomposer l'action de $\mathbb{C}^\times$ en deux morceaux : $\mathbb{R}_{>0}$ agit par homothéties, et $\operatorname{SO}(2)$ par rotations.
D'autre part la condition qui caractérise $h^{-1}(0)$ porte justement sur les modules carrés de $\mathbf{z}$ et $\mathbf{w}$: il doivent coïncider. Ceci signifie précisément que si l'on a une $\operatorname{SO}(2)$-orbite $\operatorname{SO}(2).(\mathbf{z}, \mathbf{w})$ dans $(U \cap h^{-1}(0))/\operatorname{SO}(2)$ alors il existe une et une seule $\mathbb{C}^\times$-orbite dans $U/\mathbb{C}^\times$ qui la contient.

On remarque que $\operatorname{SO}(2)$ est un compact maximal dans $\mathbb{C}^\times$. On a donc était capable de construire une bijection explicite (à posteriori une équivalence d'espaces complexes) entre un quotient de Mumford par un groupe de Lie complexe et un quotient symplectique par un sous-groupe compact maximal de ce groupe complexe.
Dans la section suivante on discutera sans preuves en quel sens cet exemple est universel.

7.3 GIT

Une référence très exhaustive pour toute cette section est [**DOL03**].

On considère cette fois-ci une variété algébrique projective lisse définie sur $\mathbb{C}$, notée encore X, et un groupe de Lie complexe G qui agit sur X par automorphismes. On sait que X est aussi une variété analytique complexe.
On expliquera de façon heuristique la construction du quotient $X//G$ de la théorie géométrique des invariants, qui est censé être une variété projective.

Pour commencer, on remarque que dans où X était affine on a utilisé un plongement explicite $X \hookrightarrow \mathbb{C}^n$. Ceci était donné par les fonctions régulières $X \longrightarrow \mathbb{C}$, qui nous font défaut dans le cas projectif : une fonction régulière sur une variété projective est constante. La construction standard d'un plongement $X \hookrightarrow \mathbb{C}\,P^n$ utilise plutôt des fibrés en droites holomorphes $\pi : L \longrightarrow X$, dont les sections globales n'ont pas raison d'être constantes. On note $H^0(X, L)$ l'espace des sections holomorphes globales du fibré.

Définition 7.1. Un fibré en droites $\pi : L \longrightarrow X$ est *très ample* si l'application

$$\varphi_L : X \longrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, L)^*), \quad \varphi_L : x \longmapsto \{s \in H^0(X, L) \mid s(x) = 0\}$$

est un plongement fermé.

Dans la suite on supposera ça.

Remarque 25. On rappelle que le projectivisé du dual de $H^0(X, L)$ s'identifie à l'ensemble des hyperplans de $H^0(X, L)$, ce qui explique la définition de φ_L. De plus, le fait que l'on a

supposé que le domaine de φ_L soit X toute entière signifie que pour tout point $x \in X$ on a une section holomorphe de L qui s'annule pas en x : on dit que le fibré est *sans points base*.

Il nous faut maintenant un hypothèse supplémentaire sur l'action, qui permet de faire agir G sur les sections de L.

Définition 7.2. Supposons que l'action de G sur X se soulève en une G-action sur L qui est $\mathbb{C}$-linéaire fibre à fibre, et que $g \in G$ envoie L_x sur $L_{g.x}$ pour tout $x \in X$.
On dit alors que cette G-action sur L *linéarise* la G-action sur X, et que le fibré L est *linéarisé*.

On en tire une action sur les sections de L, d'où une action sur $\mathbb{P}(H^0(X, L)^*)$ tel que le plongement φ_L soit G-équivariant. L'action sur les sections est la même que dans le cas affine :

$$(g.s)(x) := g.(s(g^{-1}.x)), \quad \text{pour } x \in X, s \in H^0(X, L)$$

Si l'on note $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, L)^*)$ la projection canonique, alors $\pi^{-1}(X) \cup \{0\}$ est une variété affine invariante par dilations. L'action de G se soulève en une action sur le cône $\pi^{-1}(X) \cup \{0\}$, et on peut répéter la construction du cas affine en considérant l'anneau des invariants homogènes : ceci définit $X//G$.

Il y a une autre façon pour définir le quotient qu'on souhaite, qui passe par la notion de *stabilité*.

Les définitions et notations utilisées varient beaucoup avec les auteurs. De plus, il y a deux approches pour la définition des points stables d'une action réductive sur une variété projective ; la première utilise encore les fibrés en droites linéarisés, et la deuxième les complexifications des groupes et des actions.

Commençons par les fibrés. On considère alors un fibré en droites très ample $\pi : L \longrightarrow X$ avec une G-action qui linéarise celle sur X.

Définition 7.3. Un point $x \in X$ est dit :

1. *Semi-stable*, s'il existe $m \in \mathbb{N}$ et une section G-invariante $s \in H^0(X, L^{\otimes m})^G$ avec $s(x) \neq 0$ et telle que $X_s := \{s \neq 0\} \subseteq X$ soit affine.
2. *Stable*, s'il est semi-stable et si la G-orbite de x est fermée.
3. *Instable*, s'il n'est pas semi-stable.

Cette définition dépend bien sûr du fibré L. On notera quand même X^{sst} (respectivement $X^{\text{st}}, X^{\text{ist}}$) les points semi-stables (respectivement stables, instables), sans référence à L.

Pour construire $X//G$ on prend l'ouvert (de Zariski, peut être vide)$X^{\text{sst}} \subseteq X$, et on le recouvre par des ensembles affines X_{s_i}, où les s_i sont sections convenables. On peut maintenant définir les quotients de Mumford affines de ces sous-variétés affines comme dans la section précédente, et puis les recoller ensemble de façon convenable pour définir un quotient $X^{\text{sst}}//G$. Ceci est par définition notre quotient de Mumford $X//G$.
Cette construction, dont on ne discutera pas le détails, transforme les G-orbites de points

stables en points de $X//G$, tandis que les G-orbites de points dans $X^{\mathrm{sst}} \setminus X^{\mathrm{st}}$ sont identifiées si leurs clôtures s'intersectent. On appelle $X^{\mathrm{sst}} \setminus X^{\mathrm{st}}$ l'ensemble des points de *cuspide*.

Passons maintenant à la définition par *actions complexifiées*. On considère alors notre groupe de Lie complexe G, sur lequel on va rajouter une hypothèse.

Définition 7.4. G est dit *réductif* si tout G-module (complexe) se décompose en somme directe de G-modules irréductibles.

Cette définition vient de la théorie des représentations, mais on est surtout intéressé à une propriété équivalente qui porte sur les complexifications de groupes de Lie.

On va présenter la complexification d'un groupe de Lie compact sous la forme de proposition.

Proposition 26. *Soit G un groupe de Lie compact.*
Il existe un groupe de Lie complexe réductif $G_{\mathbb{C}}$ qui contient G en tant que sous-groupe compact maximal, et qui satisfait la propriété universelle suivante.

Si H est un groupe de Lie complexe et $\varphi : G \longrightarrow H$ un morphisme de groupes de Lie alors il existe un et un seul morphisme de groupes de Lie complexes $\Phi : G_{\mathbb{C}} \longrightarrow H$ qui étend φ.

On appelle $G_{\mathbb{C}}$ la complexification de G.

Remarque 26. La complexification $G_{\mathbb{C}}$ de G est unique à isomorphisme unique près, étant la solution à un problème universel. Ce procédé est assez typique en théorie des catégories.

De plus, si l'on note $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ l'algèbre de Lie de $G_{\mathbb{C}}$, alors on a une décomposition :

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{g} \times i\,\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

Finalement, on a une décomposition de $G_{\mathbb{C}}$ dite *polaire*, ou *de Cartan*, qui s'exprime en un C^{∞}-difféomorphisme :

$$G \times \mathfrak{g} \longrightarrow G_{\mathbb{C}}, \quad (g, \xi) \longmapsto g \exp(i\xi) \tag{7.1}$$

Ceci montre en particulier que G est une rétractation de $G_{\mathbb{C}}$ par déformation.

Exemple 7.4. Les exemples de couples $(G, G_{\mathbb{C}})$ à retenir sont les suivants :

1. $((\mathbb{S}^1)^k, (\mathbb{C}^{\times})^k)$
2. $(\mathrm{SU}(k), \mathrm{SL}(k, \mathbb{C}))$
3. $(\mathrm{U}(k), \mathrm{GL}(k, \mathbb{C}))$
4. $(\mathrm{SO}(3), \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}))$

pour $k \geq 1$.

On reconnaît alors la décomposition polaire usuelle dans ces exemples comme un cas particulier de 7.1.

Le lien avec les groupes réductif est le suivant.

Proposition 27. *Le groupe de Lie complexe G est réductif si et seulement s'il est la complexification d'un groupe de Lie compact.*

Démonstration. Voyons seulement une flèche.

Supposons $G = K_{\mathbb{C}}$, où K est un groupe de Lie compact. C'est un résultat élémentaire en théorie des représentations qu'un G-module (complexe) $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ est *totalement réductible* si et seulement si tout sous-G-représentation admet un supplémentaire G-invariant.
Fixons un tel sous-G-module $W \subseteq V$.

Comme K est compact, il existe sur V un produit hermitien K-invariant, obtenu en moyennant n'importe quel produit hermitien sur V avec la mesure de Haar de K de masse 1.
Le complément orthogonal de W par rapport à ce produit hermitien est alors K-invariant.

D'autre part, comme la décomposition est en sous-espaces complexes de V, elle est aussi G-invariante. □

On peut finalement introduire la notion de stabilité par actions complexifiées.
Dans ce cas-ci on part en considérant un groupe de Lie compact K qui agit sur X de façon hamiltonienne, avec moment $\mu : X \longrightarrow \mathfrak{k}^*$.
Supposons que $0 \in \mathfrak{k}^*$ soit une valeur régulière de μ.

On remarque que l'action de K s'étend en une action holomorphe du complexifié $G := K_{\mathbb{C}}$, qui est un groupe réductif.
En effet, l'action de K revient à se donner un morphisme de groupes de Lie $\rho_K : K \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$, et le groupes des automorphismes de X est un groupe de Lie complexe puisque X l'est. La propriété universelle de G assure alors qu'il existe un morphisme de groupes de Lie complexes $\rho_G : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ qui prolonge ρ_k, mais un tel morphisme est par définition une application holomorphe.

Définition 7.5. L'ensemble des *points stables de l'action complexifiée* $G : X \circlearrowleft$ est le G-saturé de $\mu^{-1}(0)$:

$$X_s := G.\mu^{-1}(0)$$

On peut montrer les choses suivantes :

1. X_s est un ouvert de X.
2. L'action de G sur X est propre.
3. Si l'action de K est libre sur $\mu^{-1}(0)$, alors celle de G est libre sur X_s.
4. Toute G-orbite intersecte $\mu^{-1}(0)$ dans une et une seule K-orbite.

Le deuxième et troisième point assurent que le quotient X_s/G soit une variété complexe, et on définit ceci comme étant le quotient de Mumford de X par G.
Le quatrième point, par contre, entraîne que l'on a une bijection $\varphi : X//K \longrightarrow X_s/G$. On pourrait même montrer que X_s est un G-fibré principal sur $X//G$.
Le théorème de Kirwan-Kempf-Ness, qu'on énonce pour terminer cette section, dit que cette bijection existe toujours, même si on utilise des autres construction du quotient de la GIT. De plus, cette bijection est aussi régulière que possible, en fonction de la régularité du quotient de Mumford et du quotient symplectique.

Remarque 27. Essayons de résumer ce que l'on a fait jusqu'à ici.

On est parti avec une variété complexe projective lisse X, munie d'une action d'un groupe de Lie complexe G.

Pour construire le quotient de Mumford de X par G, on a besoin d'une hypothèse en plus :

1. Soit on suppose d'avoir un fibré en droite très ample $\pi : L \longrightarrow X$ qui linéarise l'action de G.
2. Soit on suppose que $G = K_{\mathbb{C}}$ soit réductif, que la K-action sur X soit hamiltonienne et que $0 \in \mathfrak{k}^*$ soit une valeur régulière pour le moment de la K-action.

Dans ces deux cas, on peut définir un lieu de points semi-stables X^{sst} et un lieu de points stables X_s, respectivement.
L'espace final qu'on on va construire est soit un quotient de X^{sst} par G, soit un quotient de X_s par G.

Si l'on suppose que l'action de K soit libre sur $\mu^{-1}(0)$, ce qui entraîne que la réduction symplectique $X//K$ soit lisse, alors on peut montrer que toutes les conditions de stabilité sont équivalentes. Malheureusement, on ne travaille pas toujours avec cet hypothèse dans $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$.

On conclut cette section en énonçant le théorème de Kirwan-Kempf-Ness. Pour l'énoncer, on a choisi d'utiliser la caractérisation du quotient de la GIT avec fibrés en droites.

Théorème 28. *Soit $G = K_{\mathbb{C}}$ un groupe de Lie complexe réductive qui agit sur la variété (complexe) projective lisse X.*

Supposons que X soit munie de la forme symplectique ω, et supposons d'avoir un fibré en droites très ample linéarisé $\pi : L \longrightarrow X$ tel que $c_1(L) = [\frac{\omega}{2\pi}]$.
Supposons de plus que la K-action sur X soit hamiltonienne avec moment $\mu : X \longrightarrow \mathfrak{k}^*$.
Alors :

1. *$\mu^{-1}(0) \subseteq X^{\mathrm{sst}}$.*
2. *L'inclusion $\mu^{-1}(0) \hookrightarrow X^{\mathrm{sst}}$ induit un homéomorphisme $\varphi : \mu^{-1}(0)/K \longrightarrow X^{\mathrm{sst}}//G$.*

De plus, si le quotient symplectique $\mu^{-1}(0)/K$ est lisse alors φ est un C^∞-difféomorphisme, et s'il est complexe analytique alors c'est un biholomorphisme.

Remarque 28. Dans l'énoncé on a noté avec $c_1(L)$ la première classe de Chern réelle de L : dans le chapitre 9 on reviendra sur ce genre de questions.

Pour plus de détails sur l'énoncé du théorème et sur sa preuve on peut lire [**WOOD10**] et [**THO06**].
Une autre référence possible pour ces deux dernières sections est [**Knuts**].

7.4 Retour à l'espace de modules de polygones

Dans cette section on va justifier l'existence d'une équivalence d'espaces complexes :

$$\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}} \,//\, \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \cong \widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}/\,\mathrm{SO}(3)$$

Le deuxième est bien sûr notre espace de module de polygones.

Bien sûr, d'après 25, le cas intéressant est celui où le quotient symplectique est singulier.

On commence par quelques remarques.
Déjà, si $l \in \mathbb{R}_{>0}$, alors $\mathbb{S}^2_l \cong \mathbb{C}\,P^1$, et donc $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ agit bien sur cette sphère. Il agit donc aussi de façon diagonale sur le produit $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$.

Remarque 29. Pour munir le quotient d'une structure de variété algébrique il faut supposer que $\mathbf{l} \in (\mathbb{Q}_{>0})^n$, ce que l'on va faire, même si ceci est en fait un détails technique dans la construction du quotient de Mumford que l'on n'a pas traité. De toute façon, les chambres de $\Delta_{2,n}$, qui est défini dans (4.5), sont ouvertes, et donc elles contiennent toujours des points rationnels. Le théorème 5 assure alors que le choix d'un point rationnel n'influence pas la topologie de $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$.

On remarque aussi que l'inclusion $\mathrm{SO}(3) \hookrightarrow \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ réalise $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ comme la complexification de $\mathrm{SO}(3)$:

$$\mathrm{SO}(3)_{\mathbb{C}} = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$$

Plutôt qu'appliquer Kirwan-Kempf-Ness dans ce contexte-ci, on peut essayer de démonter le résultat qui nous intéresse directement.
Il faut donc d'abord construire explicitement le quotient $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}} \,//\, \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ de la GIT. On commence en adaptant les conditions de stabilités, en suivant [**KMspace**].

Définition 7.6. Un point $\mathbf{s} \in \mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$ est *stable* (respectivement *semi-stable*) si l'on a

$$\sum_{l_j v = s_j} l_j < 1 \quad (\text{respectivement} \leq 1)$$

pour tout $v \in \mathbb{S}^2$.

On note $(\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}})^{\mathrm{st}}$ et $(\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}})^{\mathrm{sst}}$ les ensembles des points stables et semi-stables, et on pose aussi :

$$(\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}})^{\mathrm{cusp}} := (\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}})^{\mathrm{sst}} \setminus (\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}})^{\mathrm{st}}$$

On remarque que l'on obtient ces points de *cuspide* comme suit.

Considérons une partition $\{1,\dots,n\} = S_1 \amalg S_2$ en deux sous-ensembles non vides (donc propres) $S_1 = \{i_1,\dots,i_k\}, S_2 = \{j_1,\dots,j_{n-k}\}$ tels que $\sum_{i\in S_1} l_i = 1 = \sum_{i \in S_2} l_i$. Un point $\mathbf{s}$ est alors dans $(\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}})^{\mathrm{cusp}}$ si l'on a soit $\frac{1}{l_{i_1}} s_{i_1} = \cdots = \frac{1}{l_{i_k}} s_{i_k}$ soit $\frac{1}{l_{j_1}} s_{j_1} = \cdots = \frac{1}{l_{j_{n-k}}} s_{j_{n-k}}$.

On comprend bien que si $\mathbf{s} \in \widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}} \cap (\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}})^{\mathrm{cusp}}$ satisfait les deux ensembles d'équations ci-dessus alors il correspond par l'application de Gauss à un n-gone dégénéré. Il aura *forward-tracks* donnés par S_1 et *back-tracks* donnés par S_2.

On sait que le quotient de Mumford qu'on veut construire est un quotient de $(\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}})^{\mathrm{sst}} = (\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}})^{\mathrm{st}} \amalg (\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}})^{\mathrm{cusp}}$ par une relation d'équivalence telle que :

1. Est la relation usuelle pour la $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$-action sur $(\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}})^{\mathrm{st}}$.
2. Identifie deux $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$-orbites de points dans $(\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}})^{\mathrm{cusp}}$ si elles sont adhérentes.

On peut montrer que la relation d'équivalence correcte, c'est à dire celle qui donne le quotient de la théorie géométrique des invariants, est la relation $\sim$ sur $(\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}})^{\mathrm{sst}}$ définie par :

$$\mathbf{s} \sim \mathbf{t} \text{ si } \begin{cases} \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}).\mathbf{s} = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}).\mathbf{t}, & \text{pour } \mathbf{s},\mathbf{t} \in (\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}})^{\mathrm{st}} \\ \text{les partitions de } \mathbf{s} \text{ et } \mathbf{t} \text{ coïncident}, & \text{pour } \mathbf{s},\mathbf{t} \in (\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}})^{\mathrm{cusp}} \end{cases}$$

On pose puis $Q^{\mathrm{sst}} := (\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}})^{\mathrm{sst}}/\sim$.

Il s'agit maintenant de montrer que l'on a un homéomorphisme $Q^{\mathrm{sst}} \cong \widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}/\,\mathrm{SO}(3)$.

Comme tout à l'heure, l'homéomorphisme sera obtenue grâce à l'inclusion $\widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}} \hookrightarrow (\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}})^{\mathrm{sst}}$; il n'y a pas besoin de Kirwan-Kempf-Ness pour voir ça dans notre contexte.
En effet, la condition 4.1 implique celle de semi-stabilité. Si l'on avait $\sum_{l_j v = s_j} l_j > 1$ pour un $v \in \mathbb{S}^2$ alors on aurait un n-gone avec des cotés parallèles dont la longueur somme à un nombre plus grand que 1. On suppose toujours que nos polygone aient périmètre égal à 2, d'après 4.2, et donc ceci est absurde.

Pour rendre le lien entre les polygones et la $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$-action sur $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$ plus fort, on introduit une autre classe de points, en suivant [**KMspace**].
On dira que $\mathbf{s} \in \mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$ est *nice semi-stable* s'il est soit stable, soit semi-stable avec $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$-orbite fermée dans $(\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}})^{\mathrm{sst}}$. On note $(\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}})^{\mathrm{nsst}}$ l'ensemble de ces points. On remarque qu'un n-gone dégénéré correspond à un point dans $(\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}})^{\mathrm{cusp}} \cap (\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}})^{\mathrm{nsst}} \cap \widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}$.
En effet, si $\{i_1,\dots,i_k\} \amalg \{j_1,\dots,j_{n-k}\} = \{1,\dots,n\}$ est une partition comme ci-dessus, alors on a $\mathbf{s} \in (\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}})^{\mathrm{cusp}} \cap (\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}})^{\mathrm{nsst}}$ si et seulement si $\frac{1}{l_{i_1}} s_{i_1} = \cdots = \frac{1}{l_{i_k}} s_{i_k}$ et $\frac{1}{l_{j_1}} s_{j_1} = \cdots = \frac{1}{l_{j_{n-k}}} s_{j_{n-k}}$.

On peut maintenant montrer que l'inclusion $(\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}})^{\mathrm{nsst}} \subseteq (\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}})^{\mathrm{sst}}$ induit un homéomorphisme $Q^{\mathrm{nsst}} := ((\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}})^{\mathrm{nsst}}/\sim) \cong Q^{\mathrm{sst}}$.
En effet, on a $\mathbf{s} \sim \mathbf{t}$ pour $\mathbf{s},\mathbf{t} \in (\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}})^{\mathrm{nsst}}$ si et seulement si $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}).\mathbf{s} = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}).\mathbf{t}$. Ceci est clair si les deux points sont stables, et donc il suffit de le montrer pour $\mathbf{s},\mathbf{t} \in (\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}})^{\mathrm{cusp}} \cap (\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}})^{\mathrm{nsst}}$. Dans ce cas-là, on a une seule partition $\{i_1,\dots,i_k\} \amalg \{j_1,\dots,j_{n-k}\} = \{1,\dots,n\}$ telle que $\frac{1}{l_{i_1}} s_{i_1} = \cdots = \frac{1}{l_{i_k}} s_{i_k}, \frac{1}{l_{j_1}} s_{j_1} = \cdots = \frac{1}{l_{j_{n-k}}} s_{j_{n-k}}, \frac{1}{l_{i_1}} t_{i_1} = \cdots = \frac{1}{l_{i_k}} t_{i_k}$ et $\frac{1}{l_{j_1}} t_{j_1} = \cdots = \frac{1}{l_{j_{n-k}}} t_{j_{n-k}}$. Il suffit alors de choisir un élément de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ qui envoie s_{i_1} sur t_{i_1} et s_{j_1} sur t_{j_1}.
Un tel élément existe toujours puisque l'action de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ par homographies sur $\mathbb{C}\,P^1$ est (strictement) tri-transitive.

Si l'on note aussi $Q^{\mathrm{cusp}} := (\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}})^{\mathrm{cusp}}/\sim$, c'est alors clair que cet ensemble est fini : une classe dans Q^{cusp} est uniquement déterminée par une partition d'un ensemble fini en deux sous-ensembles non vides. Ceci montrera une fois de plus que les singularités de $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ sont en nombre fini, si elles arrivent.

Pour conclure que l'application naturelle $Q^{\mathrm{nsst}} \longrightarrow Q^{\mathrm{sst}}$ est bijective, il suffit de remarquer que tout classe d'un point de cuspide contient une et une seule $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$-orbite d'un point dans $(\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}})^{\mathrm{nsst}}$.
En effet, à la partition $\{i_1,\dots,i_k\} \amalg \{j_1,\dots,j_{n-k}\} = \{1,\dots,n\}$ correspond par exemple un point $\mathbf{s}$ défini par $\frac{1}{l_{i_1}} s_{i_1} = \cdots = \frac{1}{l_{i_k}} s_{i_k} = u, \frac{1}{l_{j_1}} s_{j_1} = \cdots = \frac{1}{l_{j_{n-k}}} s_{j_{n-k}} = v$, pour $u, v \in \mathbb{S}^2$,

et sa $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$-orbite contient tous les points de $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$ donnés par un couple de points dans $\mathbb{S}^2$.

On peut maintenant terminer en montrant que l'application naturelle $\mathcal{M}_{\mathbf{l}} \longrightarrow Q^{\mathrm{nsst}}$ préserve les points singuliers et non singuliers. De plus, elle est bijective et continue, et donc un homéomorphisme dans ce cadre-ci. Il faut puis travailler encore pour montrer que c'est une équivalence d'espaces complexes.
Pour les détails on peut lire [**KMspace**].

Remarque 30. On peut reprendre et continuer la discussion faite en 18.

On a vu que l'on peut construire des espaces de modules en considérant des quotients symplectiques de produits d'orbites coadjointes de groupes de Lie compacts.
D'après les résultats de ce chapitre, on a aussi une façon naturelle pour munir ces espaces de modules d'une structure complexe, avec le quotients de Mumford et le théorème de Kirwan-Kempf-Ness.

En fait, si l'on a le groupe de Lie compact K et l'espace de modules $\mathcal{O}_{\xi_1^*}, \ldots, \mathcal{O}_{\xi_n^*} //K$, où les $\mathcal{O}_{\xi_i^*}$ sont orbites coadjointes de K, alors on peut considérer le complexifié $G := K_{\mathbb{C}}$, l'espace des points stables $(\mathcal{O}_{\xi_1^*}, \ldots, \mathcal{O}_{\xi_n^*})_s$ et le quotient de la GIT $(\mathcal{O}_{\xi_1^*}, \ldots, \mathcal{O}_{\xi_n^*})_s/G$. Le théorème de Kirmwan-Kempf-Ness nous donne alors un homéomorphisme

$$\mathcal{O}_{\xi_1^*}, \ldots, \mathcal{O}_{\xi_n^*} //K \longrightarrow (\mathcal{O}_{\xi_1^*}, \ldots, \mathcal{O}_{\xi_n^*})_s/G$$

qui permet de transporter toute la structure qu'on peut d'un quotient à l'autre.

Dans le chapitre suivant on étudiera la dynamique d'un système intégrable sur la variété symplectique $(\mathcal{M}_{\mathbf{l}}, (\Omega_{\mathbf{l}})_{\mathrm{SO}(3)})$.

Chapitre 8

Bending flows et coordonnées action-angle

Dans ce chapitre on décrit un système de coordonnées réelles sur un ouvert dense de $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}{}' \subseteq \mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ qu'on définira. La construction de ces coordonnées généralise l'idée intuitive de l'exemple 4.4 : on fixe $n-3$ diagonales sans intersection dans nos polygones, en les divisant en $n-2$ triangles, et pour tout $n-3$-uple de longueurs admissibles de ces diagonales on "plie" les triangles autour des diagonales.

On obtient ainsi $2(n-3)$ fonctions lisses définies sur $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}{}'$, que l'on montre être des *coordonnées action-angle* sur un ouvert plus petit $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}{}^o \subseteq \mathcal{M}_{\mathbf{l}}{}'$. On rappellera la définitions nécessaires dans les sections suivantes. La référence classique ici est [**Duist**].

Dans la suite du chapitre on travaillera avec espaces de modules lisses. D'après 20, il suffit de supposer que $\mathbf{l}$ soit générique.

8.1 Bending flows

Dans cette section on étudie le flot hamiltonien de certaines fonctions définies sur $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$.

Soit $[P] \in \mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ la classe d'un polygone $P \in \mathcal{P}_{n,\mathbf{l}}$, avec cotés $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n) \in \mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$. On définit les $n-3$ *diagonales principales* de P comme étant les vecteurs :

$$d_k := \sum_{i=1}^{i+1} e_i \quad \text{pour} \quad 1 \leq k \leq n-3$$

Ce sont simplement les $n-3$ diagonales du n-gone P qu'on peut tracer sortantes de son premier sommet.

On pose puis, pour $k \in \{1, \ldots, n-3\}$:

$$f_k : \widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (e_1, \ldots, e_n) \longmapsto \frac{1}{2}|d_k|^2 = \frac{1}{2}|e_1 + \cdots + e_{k+1}|^2$$

Remarque 31. C'est assez clair que les fonctions f_k sont lisses et SO(3)-invariantes, et donc elles définissent des fonctions lisses sur $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$. Dans la suite on pensera toujours aux f_k comme fonctions sur $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$, même si on travaillera avec les notations propres à $\widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}$.

Proposition 29. *Le champ hamiltonien* $X_{f_k} \in C^\infty(\widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}, T\widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}})$ *par rapport à la forme* $\Omega_{\mathbf{l}}$ *est donné par :*

$$X_{f_k}(e_1, \dots, e_n) = (d_k \wedge e_1, \dots, d_k \wedge e_{k+1}, 0, \dots, 0)$$

où $\wedge : \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{E}^3$ *dénote toujours le produit vectoriel.*

Bien sûr, on muni $\widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}$ de la restriction de $\Omega_{\mathbf{l}} \in \Omega^2(\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}, \mathbb{R})$ (définie en 5.6). On note la restriction avec le même symbole.

Démonstration. Comme f_k ne dépend pas des dernières $n-k-1$ composantes, il suffit de montrer le résultat pour l'application f donnée par :

$$f(e_1, \dots, e_n) := \frac{1}{2}|e_1 + \dots + e_n|^2 = |\mu_{\mathbf{l}}(\mathbf{e})|^2 =< \mu_{\mathbf{l}}(\mathbf{e}), \mu_{\mathbf{l}}(\mathbf{e}) >$$

où $\mu_{\mathbf{l}} : \widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}} \longrightarrow \mathbb{E}^3$ est le moment défini en 5.3.

Le champ hamiltonien X_f satisfait par définition :

$$\Omega_{\mathbf{l}}(X_f, .) = d(< \mu_{\mathbf{l}}, \mu_{\mathbf{l}} >)$$

D'autre part, le moment $\mu_{\mathbf{l}}$ satisfait de sa part :

$$d(< \mu_{\mathbf{l}}, \mu_{\mathbf{l}} >) = \Omega_{\mathbf{l}}(\mu_{\mathbf{l}}^{\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}}, .)$$

où $\mu_{\mathbf{l}}^{\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}}$ est l'action infinitésimale de $\mu_{\mathbf{l}}$ sur $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$: $\mu_{\mathbf{l}}(\mathbf{e}) \in \mathbb{E}^3 \cong \mathfrak{so}(3)$ pour tout $\mathbf{e} \in \widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}$.

La non dégénérescence de $\Omega_{\mathbf{l}}$ entraîne alors $X_f = \mu_{\mathbf{l}}^{\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}}$.

Pour conclure, on remarque que l'action infinitésimale de $\mathfrak{so}(3)$ pour l'action diagonale de SO(3) sur $\widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}$ est donnée par :

$$A^{\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}}(e_1, \dots, e_n) = (A^{\mathbb{S}^2_{l_1}}(e_1), \dots, A^{\mathbb{S}^2_{l_n}}(e_n)) \quad \text{pour} \quad A \in \mathfrak{so}(3)$$

c'est à dire par l'action infinitésimale diagonale.

On a montré dans 7 que $A^{\mathbb{S}^2_l} p = v \wedge p$, si $v \in \mathbb{E}^3$ correspond à $A \in \mathfrak{so}(3)$ par l'isomorphisme 5.4, et donc on a bien :

$$X_f(e_1, \dots, e_n) = (\mu_{\mathbf{l}}(\mathbf{e}) \wedge e_1, \dots, \mu_{\mathbf{l}}(\mathbf{e}) \wedge e_n)$$

ce qu'il fallait montrer. □

On va maintenant montrer que les fonctions f_k Poisson-commutent.

Proposition 30.

$$\{f_k, f_l\} = 0 \quad \textit{pour} \quad k, l \in \{1, \dots, n-3\}$$

Démonstration. Supposons sans perte de généralité $k < l$, et fixons un point $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n) \in \widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}$.

Calculons directement le crochet de Poisson de f_k et f_l :

$$\{f_k, f_l\}(\mathbf{e}) = (\Omega_{\mathbf{l}})_{\mathbf{e}}(X_{f_k}(\mathbf{e}), X_{f_l}(\mathbf{e})) = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{l_i^2} < e_i, (d_k \wedge e_i) \wedge (d_l \wedge e_i) >=$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} < e_i, d_k \wedge d_l >=< \sum_{i=1}^{k+1} e_i, d_k \wedge d_l >=< d_k, d_k \wedge d_l >= 0$$

Dans ces calculs on a utilisé, dans l'ordre :

— la définition de $\{,\}$ via $\Omega_{\mathbf{l}}$.
— le fait que les dernières $n-k+1$ composantes de X_{f_k} sont nulles.
— une petite formule concernant le *produit mixte* $(u,v,w) \longmapsto < u, v \wedge w >$ de $\mathbb{E}^3$.
— la linéarité de $<,>$.
— la définition de $d_k = \sum_{i=1}^{k+1} e_i$.
— le fait que $d_k \wedge d_l$ est orthogonal à d_k.

Le fait moins évident est le passage concernant la formule sur le produit mixte : on utilise le fait que sa valeur est invariante par permutations cycliques des variables.

Voyons en détails comment l'on a utilisé ça dans les calculs précédents.
Il faut montrer la formule suivante, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\frac{1}{l_i^2} < e_i, (d_k \wedge e_i) \wedge (d_l \wedge e_i) >=< e_i, d_k \wedge d_l >$$

Dans la preuve de 7 on a montré que l'on a :

$$(v \wedge p) \wedge w =< v, w > p \quad \text{pour} \quad p \in \mathbb{S}_l^2, v \in \mathbb{E}^3, w \in T_p \mathbb{S}_l^2$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{l_i^2} < e_i, (d_k \wedge e_i) \wedge (d_l \wedge e_i) > &= \frac{1}{l_i^2} < e_i, < d_k, d_l \wedge e_i > e_i >= \\ &= \frac{1}{l_i^2} < e_i, e_i >< d_k, d_l \wedge e_i >=< d_k, d_l \wedge e_i > \end{aligned}$$

Finalement, la cyclicité du produit mixte donne $< d_k, d_l \wedge e_i >=< e_i, d_k \wedge d_l >$, comme on voulait. □

On peut passer à l'étude des flots hamiltoniens associés à $f_1, \dots, f_{n-3}$. On note $\varphi_t^{f_k} : \widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}} \circlearrowleft$ le flot hamiltonien de f_k au temps $t \in \mathbb{R}$ (où il est défini), c'est à dire le flot du champ de vecteur X_{f_k}.
On remarque que ces champs sont complets puisque $\widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}$ est compact.

Calculer $\varphi_t^{f_k}$ revient à résoudre le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{de_i}{dt} = d_k \wedge e_i, & \text{si} \quad 1 \leq i \leq k+1 \\ \frac{de_i}{dt} = 0, & \text{si} \quad k+2 \leq i \leq n \end{cases} \tag{8.1}$$

Pour exprimer les solutions de ce système, on considère la représentation adjointe de $\mathfrak{so}(3)$, c'est à dire le morphisme d'algèbres de Lie $ad : \mathfrak{so}(3) \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{so}(3))$ défini par :

$$ad_A(B) := v \wedge w$$

où v, w correspondent à A, B (respectivement) avec l'identification 5.4. Cette identification donne aussi $\mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{so}(3)) \cong \mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(\mathbb{E}^3)$, et donc $\mathrm{ad}(\mathfrak{so}(3))$ s'identifie à une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}_{\mathbb{R}}(\mathbb{E}^3)$.
C'est pas surprenant que $\mathrm{ad}(\mathfrak{so}(3)) \subseteq \mathfrak{so}(3)$. En effet, si $u, v, w \in \mathbb{E}^3$:

$$< \mathrm{ad}_u(v), w >=< u \wedge v, w >= - < v, u \wedge w >= - < v, \mathrm{ad}_u(w) >$$

On a donc $\exp(\mathrm{ad}_u) \in \mathrm{SO}(3)$ pour tout $u \in \mathbb{E}^3$, où :

$$\exp(\mathrm{ad}_u) = \sum_{k\geq 0} \frac{(\mathrm{ad}_u)^k}{k!}$$

Lemme 31. *Soit Π le plan orienté de $\mathbb{E}^3$ orthogonal à u.*
$\exp(\mathrm{ad}_u)$ *est la rotation dans Π d'un angle de $|u|$ radiants.*

Démonstration. Déjà, $\exp(\mathrm{ad}_u)$ fixe u :

$$\exp(\mathrm{ad}_u)(u) = \sum_{k\geq 0} \frac{(\mathrm{ad}_u)^k(u)}{k!} = \frac{(\mathrm{ad}_u)^0(u)}{0!} = \mathrm{Id}_{\mathbb{E}^3}(u) = u$$

car $(\mathrm{ad}_u)^k(u) = (\mathrm{ad}_u)^{k-1}(\mathrm{ad}_u(u)) = (\mathrm{ad}_u)^{k-1}(u \wedge u) = 0$, si $k \geq 1$.
On sait donc que $\exp(\mathrm{ad}_u)$ est une rotation dans Π ; il s'agit de calculer de quel angle.

Par linéarité, il suffit de le faire pour la base canonique $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ de $\mathbb{E}^3$. On détails le cas de ϵ_1.

Il s'agit donc de montrer que :

$$\begin{cases} \exp(\mathrm{ad}_{\epsilon_1})(\epsilon_2) = (0, \cos 1, -\sin 1) \\ \exp(\mathrm{ad}_{\epsilon_1})(\epsilon_2) = (0, \sin 1, \cos 1) \end{cases}$$

c'est à dire que la matrice de $\exp(\mathrm{ad}_{\epsilon_1})$ dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 1 & \sin 1 \\ 0 & -\sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}$.

On sait que $\mathrm{ad}_{\epsilon_1}(\epsilon_2) = \epsilon_3$, et que $\mathrm{ad}_{\epsilon_1}(\epsilon_3) = -\epsilon_2$, d'où :

$$(\mathrm{ad}_{\epsilon_1})^k(\epsilon_2) = \begin{cases} \epsilon_2, & \text{si} \quad k \equiv 0 \pmod 4 \\ \epsilon_3, & \text{si} \quad k \equiv 1 \pmod 4 \\ -\epsilon_2, & \text{si} \quad k \equiv 2 \pmod 4 \\ -\epsilon_3, & \text{si} \quad k \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\sum_{k\geq 0} \frac{(\mathrm{ad}_{\epsilon_1})^k(\epsilon_2)}{k!} = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k \epsilon_2}{(2k)!} + \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k \epsilon_3}{(2k+1)!} =$$

$$= \left(\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \right) \epsilon_2 + \left(\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \right) \epsilon_3 = (\cos 1)\epsilon_2 - (\sin 1)\epsilon_3$$

comme on voulait.
Les calculs pour $\exp(\mathrm{ad}_{\epsilon_1})(\epsilon_3)$ sont tout à fait analogues. □

En particulier, la courbe $t \longmapsto \exp(t\,\mathrm{ad}_u)$ dans SO(3) a période $\frac{2\pi}{|u|}$.

On résout maintenant le système (8.1).

Proposition 32. *Soit $P \in \mathcal{P}_{n,\mathbf{l}}$ un polygone de cotés $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n) \in \widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}$. Si l'on note $\varphi_t^{f_k}(e_1, \ldots, e_n) = (e_1(t), \ldots, e_n(t))$, alors on a :*

$$e_i(t) = \begin{cases} \exp(t\,\mathrm{ad}_{d_k})e_i, & si \quad 1 \leq i \leq k+1 \\ e_i, & si \quad k+2 \leq i \leq n \end{cases}$$

Démonstration. On peut se concentrer sur les composantes $e_1, ..., e_{k+1}$ car les autres sont constantes d'après 29.

On considère les nouvelles fonctions (inconnues) $\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_{k+1}}$ définies par :

$$\overline{e_i(t)} := \begin{cases} e_1(t) + \ldots e_{k+1}(t), & \text{si} \quad i = 1 \\ e_i(t), & \text{si} \quad 2 \leq i \leq k+1 \end{cases}$$

$\overline{e_1}(t)$ est donc la diagonale du polygone $P(t) := \varphi_t^{f_k}(P)$.

On peut montrer que ces fonctions satisfont le nouveau système différentiel :

$$\begin{cases} \frac{d\overline{e_1}}{dt} = 0 \\ \frac{d\overline{e_i}}{dt} = \overline{e_1} \wedge \overline{e_i}, & \text{si} \quad \leq i \leq k+1 \end{cases}$$

En effet on a :

$$\frac{d\overline{e_1}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{k+1} e_i\right) = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{de_i}{dt} = \sum_{i=1}^{k+1} d_k \wedge e_i = d_k \wedge \left(\sum_{i=1}^{k+1} e_i\right) = d_k \wedge d_k = 0$$

et de même, pour $i \in \{2, \ldots, k+1\}$:

$$\frac{d\overline{e_i}}{dt} = \frac{de_i}{dt} = d_k \wedge e_i = \overline{e_1} \wedge \overline{e_i}$$

On découvre donc que la diagonale d_k est invariante par le flot de f_k :

$$\sum_{i=1}^{k+1} e_i(t) = \sum_{i=1}^{k+1} e_i \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{C}^\times .$$

Ceci nous permet de dériver les fonctions $t \longmapsto t^l(\mathrm{ad}_{d_k})^l(e_i)$ pour $l \geq 0$ en toute simplicité, car ad_{d_k} est indépendante de t.

Calculons alors la dérivée de $t \longmapsto \exp(t\,\mathrm{ad}_{d_k})e_i$, pour $2 \leq i \leq k+1$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\exp(t\,\mathrm{ad}_{d_k})e_i) &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{l\geq 0}\frac{t^l(\mathrm{ad}_{d_k})^l e_i}{l!}\right) = \frac{d}{dt}\left(e_i + t(d_k\wedge e_i) + \sum_{l\geq 2}\frac{t^l(\mathrm{ad}_{d_k})^l e_i}{l!}\right) = \\ &= d_k\wedge e_i + \sum_{l\geq 2}\frac{t^{l-1}(\mathrm{ad}_{d_k})^l e_i}{(l-1)!} = d_k\wedge e_i + \sum_{l\geq 1}\frac{t^l(\mathrm{ad}_{d_k})^{l+1} e_i}{l!} = \\ &= d_k\wedge e_i + \sum_{l\geq 1} d_k\wedge\frac{t^l(\mathrm{ad}_{d_k})^l e_i}{l!} = d_k\wedge\left(\sum_{l\geq 0}\frac{t^l(\mathrm{ad}_{d_k})^l e_i}{l!}\right) = \\ &= d_k\wedge\exp(t\,\mathrm{ad}_{d_k})e_i\end{aligned}$$

ce qui montre que $t\longmapsto\exp(t\,\mathrm{ad}_{d_k})e_1$ satisfait le système (8.1) pour $2\leq i\leq k+1$.

Il nous reste à trouver $e_1(t)$.

On remarque que $\exp(t\,\mathrm{ad}_{d_k})d_k = d_k$ pour tout t, d'où :

$$e_1(t) = d_k - \sum_{i=2}^{k+1} e_i(t) = \exp(t\,\mathrm{ad}_{d_k})d_k - \sum_{i=2}^{k+1}\exp(t\,\mathrm{ad}_{d_k})e_i = \exp(t\,\mathrm{ad}_{d_k})\left(d_k - \sum_{i=2}^{k+1} e_i\right) =$$

$$= \exp(t\,\mathrm{ad}_{d_k})e_1$$

□

Corollaire 33. *La courbe intégrale $t\longmapsto\varphi_t^{f_k}(e_1,\ldots,e_n)$ de X_{f_k} par $(e_1,\ldots,e_n)$ est périodique, avec période $\frac{2\pi}{\lambda_k}$, où $\lambda_k := |d_k|$.*

Démonstration. Ceci suit de la caractérisation 31 de $t\longmapsto\exp(t\,\mathrm{ad}_{d_k})e_i$: elle est une rotation d'axe d_k et d'angle $|d_k|$. □

Remarque 32. On voit finalement que $\varphi_t^{f_k}$ est le bending flow dont on parlait dans l'introduction du chapitre : il plie une partie des polygones autour de la k-ième diagonale, avec vitesse angulaire donnée par la longueur de la diagonale.

On voit aussi que si le polygone $P\in\mathcal{P}_{n,\mathbf{l}}$ à sa k-ième diagonale principale nulle, alors il est un point fixe du flot de f_k.
En effet, on a bien $\exp(t\,\mathrm{ad}_0) = \mathrm{Id}_{\mathbb{E}^3}$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.

Pour pouvoir normaliser les flots des f_k il faut donc travailler sur l'espace des polygones qui ont toutes les diagonales principales non nulles. Comme ça, on aura des flots périodiques avec période 2π, c'est à dire une action d'un $n-3$ tore sur $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$.

On pose alors :

$$\mathcal{M}_{\mathbf{l}}' := \{[P]\in\mathcal{M}_{\mathbf{l}} \mid d_k\neq 0 \quad \text{pour} \quad 1\leq k\leq n-3\}$$

Cet ensemble est ouvert dans $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$, étant l'intersection $\bigcap_{k=1}^{n-3}\{f_k\neq 0\}$.

Considérons les fonctions $|d_k| = \lambda_k : \mathcal{M}_{\mathbf{l}}' \longrightarrow \mathbb{R}$, pour $k \in \{1, \dots, n-3\}$.
Elles sont lisses sur $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}'$ puisque $v \longmapsto |v| = \sqrt{< v, v >} : \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ est lisse sur $\mathbb{E} \backslash \{0\}$.

De plus, elles satisfont $\lambda_k^2 = 2f_k$, d'où $2\lambda_k d\lambda_k = 2df_k$, c'est à dire $d\lambda_k = \frac{df_k}{\lambda_k}$.
On en déduit alors qu'elle Poisson-commutent, et que $X_{\lambda_k} = X_{f_k}/\lambda_k$.

En effet, on a :

$$0 = 4\{f_k, f_l\} = \{\lambda_k^2, \lambda_l^2\} = 2\lambda_k\{\lambda_k, \lambda_l^2\} = 4\lambda_k\lambda_l\{\lambda_k, \lambda_l\}$$

d'où $\{\lambda_k, \lambda_l\} = 0$ car $\lambda_k \neq 0 \neq \lambda_l$ sur $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$.
Ici on a utilisé l'égalité $\{FG, H\} = F\{G, H\} + G\{F, H\}$ valide pour n'importe quelles fonctions lisses F, G, H sur n'importe quelle variété de Poisson.

Pour le flot, on voit que :

$$\iota_{(X_{f_k}/\lambda_k)}\Omega_{\mathbf{l}} = \frac{1}{\lambda_k}\iota_{X_{f_k}}\Omega_{\mathbf{l}} = \frac{1}{\lambda_k}df_k = d\lambda_k$$

En modifiant légèrement la preuve de 32, et en notant avec $\varphi_t^{\lambda_k}$ les flot de λ_k sur $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}'$, on obtient la proposition suivant.

Proposition 34. *Soit $[P] \in \mathcal{M}_{\mathbf{l}}'$ la classe d'un polygone de cotés $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n) \in \widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}$. Si l'on note $\varphi_t^{\lambda_k}(e_1, \dots, e_n) = (e_1(t), \dots, e_n(t))$, alors on a :*

$$e_i(t) = \begin{cases} \exp(t\,\mathrm{ad}_{d_k}/\lambda_k)e_i, & si \quad 1 \leq i \leq k+1 \\ e_i, & si \quad k+2 \leq i \leq n \end{cases}$$

On en déduit que $\varphi_t^{\lambda_k}$ est une rotation d'une partie de $[P]$ autour de $d_k \neq 0$, avec vitesse angulaire constante à 1.
Les flots $\varphi_t^{\lambda_k}$ sont donc 2π-périodiques, et on a montré le résultat suivant.

Théorème 35. *L'ouvert $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}' \subseteq \mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ admet une action hamiltonienne libre d'un $n-3$-tore.*

On remarque que $n - 3 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Dim}_{\mathbb{R}}\,\mathcal{M}_{\mathbf{l}}'$ d'après 21, comme il est un ouvert de $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$.

Démonstration. On définit $\rho : \mathbb{T}^{n-3} \times \mathcal{M}_{\mathbf{l}}' \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbf{l}}'$ comme suit :

$$\rho((\theta_1, \dots, \theta_{n-3}), [P]) := \varphi_{\theta_1}^{\lambda_1} \circ \cdots \circ \varphi_{\theta_{n-3}}^{\lambda_{n-3}}[P]$$

avec $\mathbb{T}^{n-3} := \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n-3 \text{ fois}} = \mathbb{R}^{n-3} / \mathbb{Z}^{n-3}$.

Les flots des λ_k commutent puisque les λ_k Poisson-commutent, et donc :

$$\begin{aligned} &\rho((\theta_1 + \theta_1', \dots, \theta_{n-3} + \theta_{n-3}'), [P]) = \varphi_{\theta_1+\theta_1'}^{\lambda_1} \circ \cdots \circ \varphi_{\theta_{n-3}+\theta_{n-3}'}^{\lambda_{n-3}}[P] = \\ &= (\varphi_{\theta_1}^{\lambda_1} \circ \varphi_{\theta_1'}^{\lambda_1}) \circ \cdots \circ (\varphi_{\theta_{n-3}}^{\lambda_{n-3}} \circ \varphi_{\theta_{n-3}'}^{\lambda_{n-3}})[P] = (\varphi_{\theta_1}^{\lambda_1} \circ \cdots \circ \varphi_{\theta_{n-3}}^{\lambda_{n-3}}) \circ (\varphi_{\theta_1'}^{\lambda_1} \circ \cdots \circ \varphi_{\theta_{n-3}'}^{\lambda_{n-3}})[P] = \\ &= \rho((\theta_1, \dots, \theta_{n-3}), \rho((\theta_1', \dots, \theta_{n-3}'), [P])) \end{aligned}$$

ce qui montre bien que $\mathbb{T}^{n-3}$ agit à gauche sur $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}'$.

C'est clair que l'action est par automorphismes de $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}'$, puisque $\varphi_{\theta_k}^{\lambda_k} : \mathcal{M}_{\mathbf{l}}' \circlearrowleft$ est un automorphisme pour tout $k \in \{1, \dots, n-3\}$.

L'action est bien libre, puisque les polygones $P \in \widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}$ et $\varphi_{\theta_k}^{\lambda_k}(P)$ ne sont pas dans la même classe par rapport à l'action diagonale de SO(3) si $\theta_k \neq 0$.
Écrivons $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ les cotés de P. Si l'on avait $g.\mathbf{e} = \varphi_{\theta_k}^{\lambda_k}(\mathbf{e})$, alors on aurait $g.e_i = \exp(t \operatorname{ad}_{d_k}) e_i$ pour tout $1 \leq i \leq k+1$, et $g.e_i = e_i$ pour tout $k+2 \leq i \leq n$. Or, l'angle entre e_{k+1} et e_{k+2} est différent de celui entre $\exp(t \operatorname{ad}_{d_k}) e_{k+1}$ et e_{k+2}, ce qui est absurde puisque $g \in \mathrm{SO}(3)$ respecte les angles.
De plus, si l'on applique maintenant un automorphisme $\varphi_{\theta_l}^{\lambda_l}$ pour $k \neq l$, on trouvera forcément une classe différente de celle de P, puisque l'action est autour d'une diagonale différente.

Finalement, il nous faut un moment $\mu : \mathcal{M}_{\mathbf{l}}' \longrightarrow \mathfrak{t}^*$ pour l'action de $\mathbb{T}^{n-3}$, si $\mathfrak{t} \cong \mathbb{R}^{n-3}$ est l'algèbre de Lie du tore (avec crochet trivial).
Posons :

$$\mu([P]) := (\lambda_1([P]), \dots, \lambda_{n-3}([P]))$$

avec l'identification naturelle $\mathfrak{t}^* \cong \mathbb{R}^{n-3}$ donnée par la dualité standard de $\mathbb{R}^{n-3}$. On va montrer que cette définition convient.

L'action coadjointe de $\mathbb{T}^{n-3}$ sut $\mathfrak{t}^*$ est triviale, car $\mathbb{T}^{n-3}$ est abélien. La $\mathbb{T}^{n-3}$-équivariance de μ s'exprime alors par :

$$\mu(\theta.[P]) = \mu([P]) \quad \text{pour tout} \quad \theta \in \mathbb{T}^{n-3}$$

Il faut donc montrer que les λ_k sont $\mathbb{T}^{n-3}$-invariantes.
D'autre part, dans la preuve de 32 on a montré que les diagonales d_k étaient invariantes par les flots des fonctions f_k. Elles sont donc aussi invariantes par le flots des λ_k, puisque leurs flots sont des renormalisations des flots des f_k.

Il faut puis montrer que l'on a :

$$d(< \mu, \xi >) = \iota_{\xi^{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}'}} \Omega_{\mathbf{l}} \quad \text{pour} \quad \xi \in \mathfrak{t}$$

Écrivons $\xi = (t_1, \dots, t_{n-3})$.

On a $d\mu = (d\lambda_1, \dots, d\lambda_{n-3})$, et donc $d(< \mu, \xi >) = \sum_{i=1}^{n-3} t_i d\lambda_i$.
On peut alors montrer que la formule est vraie en prouvant que $\xi^{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}'} = \sum_{i=1}^{n-3} t_i X_{\lambda_i}$, car alors :

$$\iota_{\xi^{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}'}} \Omega_{\mathbf{l}} = \sum_{i=1}^{n-3} t_i \left(\iota_{X_{\lambda_i}} \Omega_{\mathbf{l}} \right) = \sum_{i=1}^{n-3} t_i d\lambda_i$$

par définition des champs hamiltoniens X_{λ_i}.

D'autre part $\xi^{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}'}([P])$ est par définition :

$$\xi^{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}'}([P]) = \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \right|_{t=0} \varphi_{tt_1}^{\lambda_1} \circ \dots \circ \varphi_{tt_{n-3}}^{\lambda_{n-3}}([P]) = \sum_{i=1}^{n-3} t_i X_{\lambda_i}([P])$$

□

On veut maintenant montrer que les fonctions λ_k se complètent en un système de coordonnées action-angle sur un ouvert ${\mathcal{M}_1}^o \subseteq {\mathcal{M}_1}'$. Elles seront en particulier les actions.

Dans la section suivante on rappelle le contexte général où l'on travaille.

8.2 Systèmes intégrables et coordonnées action-angle

Dans cette section on fixe une variété symplectique (M, ω) de dimension finie $2n$.

Définition 8.1. Une famille de fonctions lisses $F_1, \ldots, F_n \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ est un *système intégrable* si $\{F_i, F_j\} = 0$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

$\{F_1, \ldots, F_n\}$ est un *système totalement intégrable* si de plus la famille des différentielles $\{dF_i \mid 1 \leq i \leq n\} \subseteq \Omega^1(M, \mathbb{R})$ est libre sur un ouvert dense de M.

On remarque que l'ensemble où les 1-formes $dF_1, \ldots, dF_n \in \Omega^1(M, \mathbb{R})$ sont indépendantes est toujours un ouvert de M.

Remarque 33. Historiquement, cette notion est née pour la solution de systèmes dynamiques. La formulation hamiltonienne de la mécanique classique considère un système dynamique comme étant une variété symplectique (M, ω) muni d'une fonction lisse $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$, dite l'hamiltonienne du système (souvent l'énergie mécanique totale). Les équations de Hamilton assurent alors que les trajectoires du système sont les orbites du gradient hamiltonien X_H de H : il faut donc calculer le flot hamiltonien φ_t^H de H.

Pour faire ça, on peut essayer de restreindre le problème à certaines sous-variétés $N \subseteq M$ qui sont invariants par le flot de H ; ceci revient à résoudre un système dynamique avec des contraints supplémentaires (donnés par exemples par des lois de conservations différentes de la conservation de l'énergie, c'est à dire de H).

Une façon pour trouver de telles sous-variétés est de considérer des fonctions lisses $F : M \longrightarrow \mathbb{R}$ qui Poisson-commutent avec H. En effet la condition $\{F, H\} = 0$ équivaut à $X_H(F) = 0$, ce qui dit que F est constante le long des curbes intégrales de X_H, i.e. le long des trajectoires du système. On l'appelle une *intégrale* du système.

La condition sur F entraîne que $\{F = c\} = F^{-1}(c) \subseteq M$ est réunion d'orbites de X_H pour tout $c \in \mathbb{R}$. Si c est une valeur régulière de F alors $M_c := \{F = c\}$ est une sous-variété de M de codimension 1, et on peut essayer de résoudre le système dynamique restreint $(M_c, \omega_{|M_c})$, avec hamiltonienne $H_{|M_c} : M_c \longrightarrow \mathbb{R}$.

À priori, il faut trouver $2n - 1$ fonctions $F_1, \ldots, F_{2n-1}$ qui commutent avec H pour résoudre le système de départ. On aimerait aussi que

$$\{F_1 = c_1, \ldots, F_{2n-1} = c_{2n-1}\} = \bigcap_{i=1}^{2n-1} \{F_i = c_i\}$$

soit une sous-variété de M pour un choix convenables de $(c_1, \ldots, c_{2n-1}) \in \mathbb{R}^{2n-1}$. Si par exemple on sait que la famille des différentielles des F_i est libre sur l'ouvert $U \subseteq M$, alors $U \cap \{F_1 = c_1, \ldots, F_{2n-1} = c_{2n-1}\}$ est bien une sous-variété, car $(F_1, \ldots, F_{2n-1}) : U \longrightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$ est alors submersive.

En fait $n-1$ fonctions suffisent, et ceci explique l'origine de la notion d'un système intégrable 8.1. Si l'on prend $H := F_1$ on retrouve bien la discussion physique qu'on vient de faire, mais dans la définition mathématique on considère les F_i sur le même niveau.

On définit finalement les coordonnées action-angle pour un système intégrable.

Définition 8.2. Soit $\{F_1, \dots, F_n\}$ un système intégrable sur (M, ω).
Considérons un point $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ tel que l'ensemble de niveau commun $M_{\mathbf{c}} := \{F_1 = c_1, \dots, F_n = c_n\}$ soit difféomorphe à un n-tore.
Un *système de coordonnées action-angle* pour $\{F_1, \dots, F_n\}$ autour de $M_{\mathbf{c}}$ est un système de coordonnées canoniques $\{\theta_1, \dots, \theta_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ défini sur un voisinage U de $M_{\mathbf{c}}$ tel que :

1. $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ envoie U sur le n-tore $\mathbb{T}^n$.
2. les F_i ne dépendent que des λ_i.

Plus précisément, les θ_i sont les angles, et les λ_i sont les actions.

Remarque 34. On rappelle que les coordonnées $\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$ sur la variété symplectique (M, ω) sont dites *canoniques* si en ces coordonnées ω s'écrit dans la forme normale du lemme de Darboux :

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i$$

Le résultat qui nous intéresse sur les systèmes intégrables de dimension finie, parfois appelés *systèmes de Liouville*, est le théorème de Liouville-Arnold.
Il permet de montrer que tout système intégrable admet des coordonnées action-angle autour de fibres favorables, et il montre aussi que la condition topologique donnée pour les fibres de $F = (F_1, \dots, F_n)$ n'est pas très restrictive.

Théorème 36. *Considérons un système intégrable $\{F_1, \dots, F_n\}$ sur (M, ω).*
Pour $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, posons encore $M_{\mathbf{c}} := \{F_1 = c_1, \dots, F_n = c_n\}$.

1. *Si $M_{\mathbf{c}}$ est lisse, compacte et connexe alors il existe un difféomorphisme $\varphi : M_{\mathbf{c}} \longrightarrow \mathbb{T}^n$ avec le n-tore.*
2. *Le difféomorphisme φ s'étend en un difféomorphisme Φ d'un voisinage $U \subseteq M$ de $M_{\mathbf{c}}$ invariant par les flots hamiltoniens des F_i avec un voisinage $\mathbb{T}^n \times V \subseteq T^* \mathbb{T}^n \cong \mathbb{T}^n \times \mathfrak{t}^*$ de la section nulle du cotangent du tore.*

Écrivons $\Phi(x) = (\theta(x), \lambda(x))$, où $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ sont coordonnées sur $\mathbb{T}^n$ et $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sur $\mathfrak{t}^*$. Elles définissent donc des coordonnées locales sur V par pull-back, qu'on écrit encore (θ, λ).

3. *$\omega_{|V} = \Phi^* \left(\sum_{i=1}^{n} d\theta_i \wedge d\lambda_i\right)$.*
4. *$\frac{\partial F_i}{\partial \theta_j} = 0$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$.*

Avant de donner une trace de la preuve, essayons de décrire en deux mots ce qu'il dit.
Déjà, le théorème caractérise la classe de difféomorphisme des ensemble de niveau communs du système intégrable $F_1, \dots, F_n$, dans les cas plus favorables. De plus, il donne un modèle local pour la dynamique du système totalement intégrable $F_1, \dots, F_n$ autour

d'un tore invariant $M_{\mathbf{c}}$.
Finalement, le résultat démontre aussi l'existence de coordonnées action-angle pour $\{F_1, \ldots, F_n\}$ autour de $M_{\mathbf{c}}$. La forme symplectique ω est en fait localement équivalente à la forme symplectique canonique sur $T^* \mathbb{T}^n$, c'est à dire la différentielle de la 1-forme de Liouville $(-\sum_{i=1}^n \lambda_i d\theta_i) \in \Omega^1(T^* \mathbb{T}^n, \mathbb{R})$.

Démonstration. On démontrera seulement que $M_{\mathbf{c}}$ est difféomorphe à un tore, ce qui est déjà assez compliqué.

Notons $W \subseteq M$ l'ouvert où les différentielles des F_i définissent une famille libre.

On sait que le gradient hamiltonien de F_i est tangent à $\{F_i = c_i\}$ pour tout valeur régulière $c_i \in \mathbb{R}$ de F_i.
En effet, on a $0 = \{F_i, F_i\} = X_{F_i}(F_i)$, et donc F_i est constante le long des orbites de X_{F_i}. Donc, si $x \in \{F_i = c_i\}$, la courbe $t \longmapsto \varphi_t^{F_i}(x)$ est contenue dans $\{F_i = c_i\}$, et $X_{F_i}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\big|_{\mathrm{t}=0} \varphi_t^{F_i}(x)$ est dans $T_x\{F_i = c_i\}$.

Choisissons $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ tel que $M_{\mathbf{c}}$ soit lisse, compact et connexe.
Supposer $M_{\mathbf{c}}$ lisse équivaut à supposer $M_{\mathbf{c}} \subseteq W$, ce qui entraîne que

$$\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{X_{F_1}(x), \ldots, X_{F_n}(x)\} = T_x M_{\mathbf{c}} \quad \text{pour tout} \quad x \in M_{\mathbf{c}}$$

pour des questions de dimension. En effet, la famille $\{X_{F_1}(x), \ldots, X_{F_n}(x)\} \subseteq T_x M_{\mathbf{c}}$ corresponde à la famille duale $\{(dF_1)_x, \ldots, (dF_n)_x\} \subseteq T_x^* M$ par l'isomorphisme $v \longmapsto \omega_x(v, .) : T_x M \longrightarrow T_x^* M$, par définition des champs hamiltoniens X_{F_i}.
Les hypothèses faites assurent que la famille $\{(dF_1)_x, \ldots, (dF_n)_x\}$ soit libre, et donc $\{X_{F_1}(x), \ldots, X_{F_n}(x)\}$ l'est aussi.

Comme $M_{\mathbf{c}}$ est compact, les champs de vecteurs X_{F_i} sont complets une fois restreints à $M_{\mathbf{c}}$.
On en tire une $\mathbb{R}^n$-action sur $M_{\mathbf{c}}$:

$$\rho : \mathbb{R}^n \times M_{\mathbf{c}} \longrightarrow M_{\mathbf{c}}, \quad \rho : ((t_1, \ldots, t_n), x) \longmapsto \varphi_{t_1}^{F_1} \circ \cdots \circ \varphi_{t_n}^{F_n}(x)$$

Les remarques ci-dessus assurent que ρ soit une action à gauche bien définie et lisse. Encore une fois, les axiomes d'action à gauche se vérifient en utilisant le fait que les flots des F_i commutent, par l'hypothèse d'intégrabilité.

On peut montrer que cette action est transitive et localement libre.

En effet, fixons un point $x \in M_{\mathbf{c}}$, et considérons son orbite $\mathbb{R}^n .x \subseteq M_{\mathbf{c}}$. On veut montrer qu'elle est ouverte et fermée dans $M_{\mathbf{c}}$, ce qui entraîne que $\mathbb{R}^n .x = M_{\mathbf{c}}$ puisque $M_{\mathbf{c}}$ est connexe par hypothèse.
D'autre part $M_{\mathbf{c}}$ est réunion disjointe des $\mathbb{R}^n$-orbites de ses points, et donc il suffit de montrer que $\mathbb{R}^n .x$ est ouverte, car alors le complémentaire de $\mathbb{R}^n .x$ serait une réunion (disjointe) d'ouverts :

$$M_{\mathbf{c}} \setminus \mathbb{R}^n .x = \coprod_{y \notin \mathbb{R}^n .x} \mathbb{R}^n .y$$

Finalement, on montre que l'orbite de x est ouverte en montrant que l'application orbitale $f_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow M_{\mathbf{c}}$ qui envoie $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ dans $\rho(\mathbf{t}, x)$ est un difféomorphisme local. Comme $f_x(\mathbf{s}+\mathbf{t}) = f_{f_x(\mathbf{s})}(\mathbf{t})$, il suffit de le montrer en $\mathbf{t} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$.

On a donc $(df_x)_{\mathbf{0}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_x M_{\mathbf{c}}$, avec l'identification naturelle $T_{\mathbf{0}}\,\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$. On va montrer que l'image de cette différentielle contient $X_{F_i}(x)$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Ceci montre que $(df_x)_{\mathbf{0}}$ est surjective d'après la remarque ci-dessus, et donc elle est un $\mathbb{R}$-isomorphisme pour questions de dimension.

L'idée maintenant est que $(df_x)_{\mathbf{0}}(\epsilon_i) = X_{F_i}(x)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, si $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ est la $\mathbb{R}$-base canonique de $\mathbb{R}^n$.
On détails les calculs pour $i = 1$:

$$(df_x)_{\mathbf{0}}(\epsilon_1) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\bigg|_{\mathrm{t}=0} f_x((t, 0, \ldots, 0)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\bigg|_{\mathrm{t}=0} \varphi_t^{F_1} \circ \varphi_0^{F_2} \cdots \circ \varphi_0^{F_n}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\bigg|_{\mathrm{t}=0} \varphi_t^{F_1}(x) =$$

$$= X_{F_1}(x)$$

On a bien montré que $\mathbb{R}\,.x = M_{\mathbf{c}}$, c'est à dire que l'action est transitive.

On sait maintenant que le stabilisateur $\mathbb{R}^n_x \subseteq \mathbb{R}^n$ de x est un sous-groupe discret, puisque l'application orbitale est un difféomorphisme local, qui a donc fibres discrètes.

En définitive on a un difféomorphisme $\mathbb{R}^n / \mathbb{R}^n_x \longrightarrow M_{\mathbf{c}}$. Comme $M_{\mathbf{c}}$ est compact par hypothèse, le rang du sous-groupe $\mathbb{R}^n_x$ doit être n. On remarque que ceci est le rang le plus grand possible pour un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^n$.

En effet, supposons d'avoir un sous-$\mathbb{Z}$-module $G \subseteq \mathbb{R}^n$ de rang plus grand de n. Ceci signifie qu'il existent $n+1$ élément $v_1, \ldots, v_{n+1} \in G$ qui sont $\mathbb{Z}$-linéairement indépendants, et donc aussi $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants.
D'autre part il ne peuvent pas être $\mathbb{R}$-linéairement indépendants pour questions de dimension, et donc il existe un automorphisme $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R}^n)$ qui envoie deux parmi les v_i dans une même droite vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Cette transformation respecte la topologie de G, ainsi que sa structure de $\mathbb{Z}$-module : $A(G)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}^n$, et s'il n'est pas discret alors G ne l'était pas.

On peut supposer sans perte de généralité que v_1 et v_2 soient dans la même droite par l'origine de $\mathbb{R}^n$. Le sous-$\mathbb{Z}$-module de $A(G)$ qu'ils engendrent est contenu dans cette droite. C'est maintenant un résultat classique que si l'on a deux points $\mathbb{Q}$-linéairement indépendants dans $\mathbb{R}$ (i.e. dont le rapport n'est pas rationnel) alors le sous-groupe qu'ils engendrent est dense dans $\mathbb{R}$. En particulier, il n'est pas discret.

Notons alors $k := \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R}^n_x) \in \{1, \ldots, n\}$, et montrons que $k = n$.
On peut trouver une $\mathbb{Z}$-base du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{R}^n_x$, car il est un module de type fini sans torsion sur le PID $\mathbb{Z}$. Si l'on note $(v_1, \ldots, v_k)$ cette base, on a alors :

$$\mathbb{R}^n / \mathbb{R}^n_x \cong \mathbb{R}/v_1\,\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{R}/v_k\,\mathbb{Z} \times \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-k \text{ fois}}$$

Il faut bien avoir $n - k = 0$ par compacité, et donc $M_{\mathbf{c}}$ est le quotient de $\mathbb{R}^n$ par un

réseau, c'est à dire un n-tore.

La preuve continue en étendant le difféomorphisme $\varphi : M_{\mathbf{c}} \longrightarrow \mathbb{T}^n$ ainsi construit, mais on ne donnera pas de détails. □

On énonce encore un dernier résultat sur les tores invariants, en préservant les mêmes notations.

Proposition 37. *Si $M_{\mathbf{c}}$ est lisse, elle est une sous-variété lagrangienne de (M, ω).*

Démonstration. Il suffit de montrer que la restriction $\omega_{|M_{\mathbf{c}}}$ est nulle, pour questions de dimension.

Soit donc $x \in M_{\mathbf{c}}$ un point, et $v, w \in T_x M_{\mathbf{c}}$ deux vecteurs tangents.
Dans la trace de la preuve de 36 on a montré que $T_x M_{\mathbf{c}} = \bigoplus_{i=1}^n X_{F_i}(x)\,\mathbb{R}$. Il existent donc des scalaires $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$, avec $1 \leq i \leq n$, tels que :

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_{F_i}(x) \quad \text{et} \quad w = \sum_{j=1}^n \mu_j X_{F_j}(x)$$

On calcule alors $\omega_x(v, w)$ directement :

$$\omega_x(v, w) = \omega_x\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i X_{F_i}(x), \sum_{j=1}^n \mu_j X_{F_j}(x)\right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \lambda_i \mu_j \omega_x(X_{F_i}(x), X_{F_j}(x)) =$$

$$= \sum_{1 \leq i,j \leq n} \lambda_i \mu_j \{F_i, F_j\}(x) = 0$$

□

8.3 Retour à l'espace de modules de polygones

On a envie d'appliquer les résultats de la section précédente aux espaces de modules de polygones.

Plus précisément, on veut définir $n-3$ fonctions $\theta_1, \ldots, \theta_{n-3}$ sur un ouvert $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}{}^o \subseteq \mathcal{M}_{\mathbf{l}}{}'$ pour obtenir un système de coordonnées action-angle avec les fonctions λ_k déjà définies sur $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}{}'$.

L'idée géométrique derrière les angles θ est la suivante.

Après avoir tracé les $n-3$ diagonales principales d'un polygone P, on l'a divisé en $n-2$ triangles, qu'on note $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-2}$. On a envie de considérer les plans affines $\Pi_1, \ldots, \Pi_{n-2} \subseteq \mathbb{E}^3$ qui contiennent ces triangles, mais ceci a un sens seulement s'ils sont tous non-dégénérés. On va donc exprimer une condition ouverte qui assure ça.

Si $P \in \widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}$ a cotés $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$, on note $d_{n-2} := \sum_{i=1}^{n-1} e_i = -e_n$. Ce segment n'est par une vraie diagonale du polygone P, mais la notation est commode pour donner la condition dont on parlait.

On pose :

$$\widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}^o := \{\mathbf{e} \in \widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}} \mid d_k \text{ n'est pas colinéaire à } e_{k+1} \text{ pour } 1 \leq k \leq n-2\}$$

et puis $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}{}^o := \widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}^o / \mathrm{SO}(3)$.
On voit bien que $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}{}^o$ est ouvert dans $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}{}'$. De plus, le triangle Δ_k a toujours d_k et e_{k+1} parmi ses cotés, pour tout $k \in \{1, \ldots, n-2\}$, et donc il est bien non dégénéré.

On définit alors $\theta_k : \mathcal{M}_{\mathbf{l}}{}^o \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\,\mathbb{Z}$ comme étant l'angle diédrale orienté entre Δ_k et Δ_{k+1}, pour $1 \leq k \leq n-3$, et on veut montrer que $\{\theta_1, \ldots, \theta_{n-3}, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-3}\}$ est un système de coordonnées action-angle pour les intégrales $\{f_1, \ldots, f_{n-3}\}$.
Encore une fois, on travaillera dans $\widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}$ avec fonctions SO(3)-invariantes, ce qui permet d'exprimer tous les résultats dans $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$.

Le théorème 36 nous permet de conclure qu'un système de coordonnées action-angle pour les f_k existe autour de toute ensemble de niveau commun qui soit lisse, compact et connexe, mais le fait intéressant ici est plutôt que l'on peut donner un système de coordonnées action-angle explicite.

Commençons en caractérisant l'ouvert où les différentielles des f_k donnent une famille libre.

Proposition 38. *La famille de 1-formes $\{df_1, \ldots, df_{n-3}\}$ est libre sur $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}{}^o$.*

Démonstration. C'est équivalent de montrer que la famille de champs de vecteurs $\{X_{f_1}, \ldots, X_{f_{n-3}}\}$ est libre sur $\widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}^o$, car $\Omega_{\mathbf{l}}$ induit un isomorphisme de $T^*\widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}$ sur $T\widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}$ qui envoie une famille dans l'autre.

D'autre part, dans 29 on a montré que :

$$X_{f_k}(\mathbf{e}) = (d_k \wedge e_1, \ldots, d_k \wedge e_{k+1}, 0, \ldots, 0)$$

pour $1 \leq k \leq n-3$.

La condition qui définit $\widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}^o$ nous assure que $d_k \wedge e_{k+1}$ soit non nul, et donc la famille de vecteurs $\{X_{f_1}(\mathbf{e}), \ldots, X_{f_{n-3}}(\mathbf{e})\} \in T_{\mathbf{e}}\widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}$ est libre si $\mathbf{e} \in \widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}^o$. □

Corollaire 39. *$\{f_1, \ldots, f_n\}$ est un système totalement intégrable sur $(\widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}, \Omega_{\mathbf{l}})$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}^o$ est dense dans $\widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}$.
En effet, tout polygone P peut s'écrire comme limite d'une suite de polygones qui satisfont les propriétés qui définissent $\widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}$. □

Énonçons maintenant le résultat qui nous intéresse.

Théorème 40. *Les fonctions $\theta_1, \ldots, \theta_{n-3}, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-3}$ donnent un système de coordonnées action-angle pour le système (totalement) intégrable $\{f_1, \ldots, f_{n-3}\}$ autour de toute fibre lisse, compacte et connexe de $F := (f_1, \ldots, f_{n-3})$.*

On remarque que $F : \widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-3}$ est une application propre, puisque $\widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}$ est compact. En effet, il est fermé dans le compact $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$.

Si donc une fibre de F est connexe et contenue dans $\widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}^o$ alors elle est un $n-3$-tore, d'après 38 et 36.

Démonstration. On sait déjà que $(\theta_1, \ldots, \theta_{n-3})$ est à valeur dans le $n-3$-tore, et aussi que les f_k ne dépendent que des λ_k, car $f_k = \frac{1}{2}\lambda_k^2$.

Il s'agit donc de montrer que $\{\theta_1, \ldots, \theta_{n-3}, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-3}\}$ est un système de coordonnées canoniques, selon la définition 8.2.

Le lemme 41 qui suit dit alors que c'est suffisant de montrer les relations de Poisson-commutativité suivantes :

1. $\{\theta_i, \lambda_j\} = \delta_{ij}$
2. $\{\theta_i, \theta_j\} = \{\lambda_i, \lambda_j\} = 0$

pour $i, j \in \{1, \ldots, n-3\}$.

On sait déjà que les λ_k Poisson-commutent. Montrons plutôt les autres deux familles de relations.

Commençons par démontrer que $\{\theta_i, \lambda_j\} = \delta_{ij}$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n-3\}$.

Pour le faire, on utilise la description qu'on a donné des flots hamiltoniens des λ_k dans 34. Précisément, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n-3\}$ on a :

$$\theta_i(\varphi_t^{\lambda_j}(\mathbf{e})) \equiv \theta_i(\mathbf{e}) + t\delta_{ij} \pmod{2\pi\,\mathbb{Z}}$$

pour tout $\mathbf{e} \in \widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}^o$.

En effet, le flot de λ_j plie le polygone de cotés $\mathbf{e}$ autour de la diagonale d_j, avec vitesse angulaire constante à 1. Donc il modifie seulement l'angle diédrale θ_j entre les plans Π_j et Π_{j+1}, et d'un angle de t radiants au temps t.
En dérivant cette relation par rapport à t, et en évaluant en zéro, on obtient ce qu'on veut :

$$\delta_{ij} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathrm{t}=0} (\theta_i(\mathbf{e}) + t\delta_{ij}) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathrm{t}=0} \theta_i(\varphi_t^{\lambda_j}(\mathbf{e})) = (d\theta_i)_{\mathbf{e}} \left(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathrm{t}=0} \varphi_t^{\lambda_j}(\mathbf{e}) \right) =$$

$$= (d\theta_i)_{\mathbf{e}}(X_{\lambda_j}(\mathbf{e})) = X_{\lambda_j}(\theta_i)(\mathbf{e}) = \{\theta_i, \lambda_j\}(\mathbf{e})$$

Il faut finalement montrer que $\{\theta_i, \theta_j\} = 0$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n-3\}$. Pour le faire, on utilise le plongement de l'espace de modules des polygones planaires $\mathcal{N}_{\mathbf{l}}$ dans $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$: voir [**KMplane**] pour les détails.

Pour ce qui nous intéresse ici, il suffira de connaître les propriétés suivantes :

1. $\mathcal{N}_{\mathbf{l}} \subseteq \mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ est une sous-variété isotrope.

2. Si $[P] \in \mathcal{M}_{\mathbf{l}}$, il existe une suite de pliages autour des diagonales de P qui le transforment en un polygone planaire.

Pour montrer le premier point, on rappelle que $\mathcal{N}_{\mathbf{l}}$ se caractérise comme ensemble des points fixes d'une involution de $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$.
Précisément, on fixe un plan affine $\Pi \subseteq \mathbb{E}^3$, et on considère la réflexion σ de $\mathbb{E}^3$ par rapport à Π. Celle-ci induit une involution $[P] \longmapsto [\sigma(P)]$ de $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$, et $\mathcal{N}_{\mathbf{l}}$ s'identifie à ${\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}^{\sigma}$, qui est l'ensemble des polygones contenus dans Π.

En effet, si $[P] = [\sigma(P)]$, alors il existe $g \in \mathrm{SO}(3)$ telle que $g(P) = \sigma(P)$. Si les sommets de P engendraient $\mathbb{E}^3$ alors on aurait $\sigma = g$, ce qui est absurde puisque $\det(\sigma) = -1$.

On a de plus $\sigma^*((\Omega_{\mathbf{l}})_{\mathrm{SO}(3)}) = -(\Omega_{\mathbf{l}})_{\mathrm{SO}(3)}$, et donc $\mathcal{N}_{\mathbf{l}}$ est l'ensemble des points fixes d'une involution qui renverse la forme symplectique de $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$. Ceci entraîne que la restriction de la forme symplectique à $\mathcal{N}_{\mathbf{l}}$ soit nulle :

$$((\Omega_{\mathbf{l}})_{\mathrm{SO}(3)})_{|\mathcal{N}_{\mathbf{l}}} = (\sigma^*(\Omega_{\mathbf{l}})_{\mathrm{SO}(3)})_{|\mathcal{N}_{\mathbf{l}}} = -((\Omega_{\mathbf{l}})_{\mathrm{SO}(3)})_{|\mathcal{N}_{\mathbf{l}}}$$

$\mathcal{N}_{\mathbf{l}}$ est donc isotrope.

Pour montrer le deuxième point, on remarque qu'il est évident pour les 4-gones, et qu'on peut après le montrer par récurrence sur le nombre des cotés de façon assez simple.

Revenons aux fonctions θ_i. On remarque que $\sigma^*\theta_i = -\theta_i$ pour $1 \leq i \leq n-3$, car les θ_i sont des angles *orientés*.
Ceci donne $\sigma^* d\theta_i = -d\theta_i$, et comme $\sigma^*(\Omega_{\mathbf{l}})_{\mathrm{SO}(3)} = -(\Omega_{\mathbf{l}})_{\mathrm{SO}(3)}$ on en tire $\sigma^* X_{\theta_i} = X_{\theta_i}$.

On voit donc que les champs de vecteurs X_{θ_i} sont tangents à $\mathcal{N}_{\mathbf{l}}$ pour tout i : $X_{\theta_i}([P]) \in T_{[P]}\mathcal{N}_{\mathbf{l}}$ pour $[P] \in \mathcal{N}_{\mathbf{l}}$.

Prenons maintenant un élément quelconque dans ${\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}^o$. Il existe une suite de pliages qui transforment P en un polygone planaire Q.
Si l'on note avec $b : {\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}^o \circlearrowleft$ cette suite de pliages, on a alors $Q = bP$, et $[Q] \in \mathcal{N}_{\mathbf{l}}$.

On sait maintenant que $(\Omega_{\mathbf{l}})_{\mathrm{SO}(3)}$ est invariante par b, car b est un automorphisme symplectique donné par la composition de flots d'applications lisses sur $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$.
De même, le fait que $\{\theta_i, \lambda_j\} = 0$ (qu'on vient de montrer) implique que les champs hamiltoniens des θ_i sont aussi invariants par b :

$$X_{\theta_i}([Q]) = X_{\theta_i}([bP]) = db(X_{\theta_i}([P]))$$

On peut finalement conclure avec un dernier calcul, où l'on sous-entend l'évaluation de la forme symplectique points corrects (parfois $[P]$, parfois $[Q] = [bP]$) :

$$\{\theta_i, \theta_j\}([P]) = (\Omega_{\mathbf{l}})_{\mathrm{SO}(3)}(X_{\theta_i}([P]), X_{\theta_j}([P])) = b^*(\Omega_{\mathbf{l}})_{\mathrm{SO}(3)}(X_{\theta_i}([P]), X_{\theta_j}([P])) =$$

$$= (\Omega_{\mathbf{l}})_{\mathrm{SO}(3)}(db(X_{\theta_i})([P]), db(X_{\theta_j})([P])) = (\Omega_{\mathbf{l}})_{\mathrm{SO}(3)}(X_{\theta_i}([Q]), X_{\theta_j}([Q])) = 0$$

Dans le dernier passage on a utilisé que les X_{θ_i} sont tangents à $\mathcal{N}_{\mathbf{l}}$, et que $\mathcal{N}_{\mathbf{l}}$ est isotrope. □

Lemme 41. *Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension $2n$.*
Les coordonnées $\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\}$ sur (M, ω) sont canoniques si l'on a les relations de Poisson-commutativité suivantes :

1. $\{x_i, y_j\} = \{y_i, y_j\} = 0$

2. $\{x_i, y_j\} = \delta_{ij}$

pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Démonstration. Localement, ω s'écrit :

$$\omega = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \omega_{i,j} dx_i \wedge dy_j$$

pour des fonctions lisses $\omega_{i,j}$ convenables. Il s'agit de montrer que $\omega_{i,j} = \delta_{ij}$ pour tout i, j.

Soient X_{x_i}, X_{y_j} les gradients hamiltoniens des coordonnées choisies.
On a alors, pour $1 \leq k \leq n$:

$$\begin{aligned} dx_k = \omega(X_{x_k}, .) &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} \omega_{i,j} dx_i \wedge dy_j(X_{x_k}, .) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \omega_{i,j}(dx_i(X_{x_k}) dy_j - dy_j(X_{x_k}) dx_i) = \\ &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} \omega_{i,j}(X_{x_k}(x_i) dy_j - X_{x_k}(y_j) dx_i) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \omega_{i,j}(\{x_i, x_k\} dy_j - \{y_j, x_k\} dx_i) = \\ &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} \omega_{i,j}(\delta_{jk} dx_i) = \sum_{i=1}^{n} \omega_{i,k} dx_i \end{aligned}$$

D'où $\omega_{i,k} = \delta_{ik}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Comme $k \in \{1, \ldots, n\}$ était arbitraire, on a bien terminé. □

Dans le prochain et dernier chapitre on essaiera de quantifier $\mathcal{M}_1$ de façon géométrique, ainsi que de quantifier une version généralisée des coordonnées action-angle qu'on vient de construire.

Chapitre 9

Quantification

Le but de ce chapitre est de quantifier $\mathcal{M}_1$ de façon géométrique.
On rappellera le minimum de théorie nécessaire pour pouvoir attacher le problème de quantifier une variété kählérienne quelconque, mais on posera l'accent sur la solution explicite du problème dans le cas de $\mathcal{M}_1$.

On décrira une généralisation des coordonnées action-angle du chapitre précédente qui est décrite dans [**CHAquant**], et on essayera de quantifier ces observables classiques.

9.1 La motivation physique

Dans la suite on va présenter une construction purement mathématique qui s'est imposée à partir des années $'60$ comme une des solutions possibles au problème purement physique de la quantification. Sans entrer dans les détails, on peut encadrer la question comme suit.

Étant donné un système physique classique, la mécanique quantique nous indique certaines conditions que, si vérifiées, permettent de conclure qu'il admet un système quantique sous-jacent. Ceci signifie que notre système de départ est en fait la limite classique d'un système qui suit les lois de la mécanique quantique, où le passage à la limite consiste souvent à faire tendre la constant de Planck $\hbar$ vers zéro. Ce principe est connu en mécanique quantique avec le nom de *principe de correspondance*, dont la formulation revient à Bohr.
On aimerait donc être capables de reconstruire ce système quantique, en définissant au moins une correspondance entre les états des deux systèmes et les observables qu'on peut mesurer sur les deux systèmes.

L'énoncé du problème est pour l'instant trop imprécis pour chercher des solutions : il faudrait commencer par donner un sens mathématique plus précis à tous les termes qu'on vient d'utiliser, ce qui amène à plusieurs formalisation possibles.
Ces formalisations conduisent bien sûr à des approches différents pour traiter le problème, et historiquement on en a eu beaucoup. On cite les suivants :

1. Quantification canonique.
2. Quantification de Feynman (via path-integrals).

3. Quantification de Moyal.
4. Quantification de Weyl-Wigner.
5. Quantification géométrique.

On ne va discuter que le dernier.

Le dictionnaire entre physique et mathématiques qu'on va utiliser, dont la motivation vient des du formalisme hamiltonien en mécanique classique et des axiomes de la mécanique quantique, est le suivant :

— Un système classique est une variété symplectique.
— Un état d'un système classique est un point de sa variété symplectique correspondante.
— Une observable classique est une fonction réelle lisse sur sa variété symplectique correspondante.
— Un système quantique est un espace de Hilbert complexe séparable.
— Un état quantique est un vecteur de son espace de Hilbert correspondant.
— Une observable quantique est un opérateur hermitien sur son espace de Hilbert associé.

Le but sera le suivant.
Si on se donne une variété symplectique (M, ω), on veut construire un espace de Hilbert complexe $\mathcal{H}_M$ avec une application

$$Q : (C^\infty(M, \mathbb{C}), \{,\}) \longrightarrow (\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_M), [,]), \quad Q : F \longmapsto Q_F \tag{9.1}$$

qui satisfait aux axiomes suivants :

1. Q est $\mathbb{C}$-linéaire.
2. si F est réelle, Q_F est un endomorphisme autoadjoint de $\mathcal{H}_M$
3. $Q_1 = Id_{\mathcal{H}_M}$: Q préserve les constantes.
4. $Q_{\{F,G\}} = i\hbar[Q_F, Q_G]$
5. Si $\{F_1, \ldots, F_n\} \subseteq C^\infty(M, \mathbb{C})$ est un ensemble complet d'observables classiques, alors $\{Q_{F_1}, \ldots, Q_{F_n}\} \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_M)$ est un ensemble complet d'observable quantiques.

Ceci sont parfois appelés les axiomes de Dirac pour la quantification. L'axiome 4 exprime bien sur l'indétermination de Heisenberg.
On rappelle que $\{F_1, ..., F_n\} \subseteq C^\infty(M, \mathbb{C})$ est un ensemble complet d'observables classiques si les seules fonctions qui Poisson-commutent avec toutes les F_i sont les constantes. Par contre, $\{Q_{F_1}, ..., Q_{F_n}\} \subseteq \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}_M)$ est un ensemble complet d'observables quantiques s'il agit de façon irréductible sut $\mathcal{H}_M$. Grâce au lemme de Schur, ceci signifie que tout endomorphisme de $\mathcal{H}_M$ qui commute avec les Q_{F_i} est un multiple de l'identité, en analogie avec le cas classique.

En fait, il n'existe pas une construction générale pour une telle application. Les axiomes 4 et 5 donnent des problèmes, et expriment peut-être des obstructions intrinsèques à la quantification. Les soucis arrivent dès que l'on essaie de quantifier l'algèbre $C^\infty(M, \mathbb{C})$ toute entière, et donc en général il faut se restreindre à des sous-algèbres particulières.

La suite du chapitre présente l'approche dit géométrique pour une solution partielle de problème ci.
On travaillera avec les unités de mesure dites *naturelles*, pour lesquelles $\hbar := 1$.

9.2 Préquantification

Fixons une variété symplectique (M, ω). Dans cette section-ci on essaiera une construction naïve de l'application (9.1).

L'idée est de construire $\mathcal{H}_M$ comme espace de sections d'un fibré en droites complexes $\pi : L \longrightarrow M$ sur M. L'action des fonctions lisses de M sur cet espace utilisera puis une connexion ∇ sur L. Afin d'obtenir les axiomes 9.1, il nous faudra une condition de compatibilité entre la courbure de ∇ et la structure symplectique de M, ce qui donne déjà une première obstruction à la quantification de M.

Définition 9.1. La variété symplectique (M, ω) est *préquantifiable* si la forme $\frac{\omega}{2\pi}$ est *entière*.

Cette définition est bien sûr suivie par la suivante.

Définition 9.2. Une k-forme $\alpha \in \Omega^k(M, \mathbb{R})$ est dite *entière* si elle est dans l'image de l'application canonique $\varphi : H^k(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^k_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{R})$.

où l'on note avec $H^*(M, \mathbb{Z})$ la *cohomologie singulière* de M à coefficients entiers, et avec $H^*_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{R})$ la *cohomologie de de Rham* de M.

Remarque 35. L'application canonique dont on parle utilise l'isomorphisme canonique $H^*(M, \mathbb{R}) \cong H^*_{\mathrm{dR}}(M, \mathbb{R})$ donné par l'isomorphisme de de Rham. On la construit alors considérant que l'inclusion canonique $\iota : C^k(M, \mathbb{Z}) \longrightarrow C^k(M, \mathbb{R})$ sur les k-cochaînes singulières de M commute aux différentielles respectives, et induit donc un morphisme en cohomologie singulière.
Ici on a bien $C^k(M, A) := \mathrm{Hom}_A(C_k(M), A)$, où $C_k(M)$ est l'ensemble des k-chaînes singulières de M et A un $\mathbb{Z}$-module quelconque.

Définition 9.3. La variété préquantifiable (M, ω) est *préquantifiée* par le fibre en droites complexes hermitien avec connexion $(\pi : L \longrightarrow M, h, \nabla)$ si l'on a :

$$\Theta(\nabla) = -i\omega \tag{9.2}$$

où $\Theta(\nabla) \in \Omega^2(M, \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(L)) \cong \Omega^2(M, \mathbb{C})$ dénote le tenseur de courbure de ∇.

On ne rappellera pas la définition d'un fibré en droites complexes hermitien avec connexion, ni de la courbure de sa connexion.
On rappelle seulement que la compatibilité entre ∇ et h entraîne que $\Theta(\nabla)$ soit une forme imaginaire pure :

$$\overline{\Theta(\nabla)} = -\,\Theta(\nabla)$$

Remarque 36. La condition (9.2) entraîné que $\frac{\omega}{2\pi}$ soit entière, car la forme réelle $\frac{i}{2\pi}\,\Theta(\nabla)$ l'est. En effet, celle-ci n'est rien d'autre que (un représentant de) la première classe de Chern réelle du fibré L.
Le fait que l'on peut soulever $[\frac{\omega}{2\pi}]$ de $H^2_{\mathrm{dR}}(M,\mathbb{R})$ à $H^2(M,\mathbb{Z})$, c'est à dire du continu au discret, est une des raisons pour la terminologie utilisée.

Ce qui n'est pas évident est que la condition d'intégralité pour la forme soit suffisante pour l'existence d'un fibré préquantifiant. Ce résultat non trivial est devenu le théorème de Konstant-Souriau-Weyl.

Théorème 42. *Soit N une variété lisse, et $\alpha \in \Omega^2(N,\mathbb{R})$ une 2-forme fermée et entière. Il existe alors un fibré en droites complexes hermitien avec connexion $(\pi : L \longrightarrow N, h, \nabla)$ tel que*

$$\frac{1}{2\pi}\,\Theta(\nabla) = -i\alpha$$

Considérons maintenant le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{H}_0 := \Omega^0(M,L)$ des sections lisses de L. Une fonction $F \in C^\infty(M,\mathbb{C})$ agit sur $\mathcal{H}_0$ par (au moins) deux opérateurs. Si l'on note s une section globale lisse de L :

1. $m_F : s \longmapsto Fs$
2. $i\nabla_{X_F} : s \longmapsto i\nabla_{X_F} s$

Ce sont les opérateurs de multiplication par F et de *dérivée covariante* par rapport au champ hamiltonien de F (multipliée par i).

Remarque 37. Ces deux opérateurs généralisent les opérateurs quantiques usuellement associés aux observables classiques de position et moment sur un espace des phases plat. À titre d'exemple, considérons la variété symplectique $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*, dq\wedge dp)$, où q est une coordonnée sur $\mathbb{R}$ et p sur $\mathbb{R}^*$. C'est alors usuelle de quantifier q et p avec les opérateurs :

1. $m_q : f \longrightarrow qf$
2. $i\frac{\partial}{\partial x} : f \longrightarrow i\frac{\partial f}{\partial x}$

qui sont définis sur $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, où l'on a noté avec x la variable sur $\mathbb{R}$. Bien sûr, on prend la mesure et l'intégrale de Lebesgue pour définir $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

Pour définir notre application (9.1) on utilisera la somme des deux opérateurs m_F et $i\nabla_{X_F}$:

$$Q_F(s) := m_F(s) + i\nabla_{X_F} s$$

Elle est bien $\mathbb{C}$-linéaire. On peut voir que l'axiome 4 est vérifié aussi.

Proposition 43.

$$Q_{\{F,G\}} = i[Q_F, Q_G] \quad \textit{pour tout} \quad F,G \in C^\infty(M,\mathbb{C}).$$

Démonstration. Calculons $Q_{\{F,G\}}s$ et $[Q_F,Q_G]s$, en fixant une section $s \in \mathcal{H}_0$.

À gauche on lit :

$$Q_{\{F,G\}}(s) = \{F,G\}s + i\nabla_{X_{\{F,G\}}} s$$

Calculons maintenant l'autre coté. On a :

$$Q_F(Q_G(s)) = Q_F(Gs + i\nabla_{X_G} s) = F(Gs + i\nabla_{X_G} s) + i\nabla_{X_F}(Gs + i\nabla_{X_G} s) =$$

$$= FGs + iF\nabla_{X_G} s + i\mathcal{L}_{X_F}(G)s + iG\nabla_{X_F} s - \nabla_{X_F}\nabla_{X_G} s$$

où l'on a noté avec $\mathcal{L}_{X_F}(G)$ la dérivée de G par rapport au champ de vecteurs X_F. C'est un cas très particulier d'une dérivée de Lie (pour une 0-forme) : la notation est versatile, et sera utilisée après dans un contexte plus général.

On rappel que la dérivée covariante satisfait la règle de type Leibnitz :

$$\nabla_X(fs) = X(f)s + f\nabla_X s, \quad \text{pour} \quad s \in \Omega^0(M, L), f \in C^\infty(M, \mathbb{C}).$$

De même :

$$Q_G(Q_F(s)) = GFs + iG\nabla_{X_F}s + i\mathcal{L}_{X_G}(F)s + iF\nabla_{X_G}s - \nabla_{X_G}\nabla_{X_F}s$$

Donc, à quelques simplifications près :

$$[Q_F, Q_G]s = Q_F(Q_G(s)) - Q_G(Q_F(s)) = -[\nabla_{X_F}, \nabla_{X_G}]s - 2i\mathcal{L}_{X_G}(F)s$$

où l'on a utilisé que $\mathcal{L}_{X_F}(G) = -\mathcal{L}_{X_G}(F)$.

D'autre part, on a :

$$[\nabla_{X_F}, \nabla_{X_G}]s = \Theta(\nabla)(X_F, X_G)s + \nabla_{[X_F, X_G]}s = -i\omega(X_F, X_G)s - \nabla_{X_{\{F,G\}}}s$$

où l'on a utilisé la définition du tenseur de courbure et le fait que $F \longmapsto X_F : C^\infty(M, \mathbb{C}) \longrightarrow C^\infty(M, TM)$ soit un antimorphisme d'algèbre de Lie avec la convention choisie dès le début.

Alors, en se rappelant que par définition $\omega(X_F, X_G) = \{F, G\} = \mathcal{L}_{X_G}(F)$:

$$[Q_F, Q_G]s = i\{F, G\}s + \nabla_{X_{\{F,G\}}}s - 2i\{F, G\} = -i\{F, G\}s + \nabla_{X_{\{F,G\}}}s =$$

$$= -iQ_{\{F,G\}}s$$

□

Il faut maintenant donner à $\mathcal{H}_0$ la structure d'un espace de Hilbert.

Pour introduire un produit hermitien sur $\mathcal{H}_0$ on utilisera la métrique h et la *forme volume de Liouville* sur (M, ω) :

$$\mu := \frac{1}{n!}\omega^{\wedge n}$$

où $n := \frac{1}{2}\operatorname{Dim}_{\mathbb{R}} M$.

On considère maintenant le sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel

$$\mathcal{H}_1 := \left\{ s \in \mathcal{H}_0 \middle| \int_M h(s, s)\mu < \infty \right\} \subseteq \mathcal{H}_0$$

des sections lisses à *carré intégrable.*
Pour $s, t \in \mathcal{H}_1$ on pose alors :

$$< s, t >_{L^2} := \int_M h(s, t)\mu$$

et on a bien que $<,>_{L^2}: \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-sesquilinéaire hermitien et positif, car h l'est en tout point de M.

On peut voir aussi que l'axiome 2 est vérifié.

Proposition 44. *Considérons $F \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ et $s, t \in \mathcal{H}_1$ telles que $Q_F(s), Q_F(t) \in \mathcal{H}_1$. Alors :*

$$< Q_F(s), t >_{L^2} - < s, Q_F(t) >_{L^2} = 0$$

Démonstration. Fixons F, s, t comme dans l'énoncé.

Déjà, on a $< Fs, t >_{L^2} - < s, Ft >_{L^2} = 0$ par la sesqui-linéarité de $<,>_{L^2}$, car $\overline{F} = F$ par hypothèse.

Il s'agit donc de montrer que $< i\nabla_{X_F} s, t >_{L^2} - < s, i\nabla_{X_F} t >_{L^2} = 0$, c'est à dire que $< \nabla_{X_F} s, t > + < s, \nabla_{X_F} t > = 0$, par la sesquilinéaire de $<,>_{L^2}$.
La formule s'écrit :

$$\int_M h(\nabla_{X_F} s, t)\mu + \int_M h(s, \nabla_{X_F} t)\mu = 0$$

Comme ∇ est métrique, on a bien

$$\int_M h(\nabla_{X_F} s, t)\mu + \int_M h(s, \nabla_{X_F} t)\mu = \int_M \mathcal{L}_{X_F}(h(s,t))\mu$$

car ceci est vrai pour les formes dans les intégrales.

On remarque puis que l'on a $\mathcal{L}_{X_F}\omega = 0$, d'où $\mathcal{L}_{X_F}\mu = 0$.
Ceci suit de la formule $\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_X\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X\beta$, vraie pour tout champ de vecteur $X \in C^\infty(M, TM)$ et toute forme différentielle $\alpha, \beta \in \Omega^*(M, \mathbb{C})$.

De plus, avec la même formule, on a :

$$\mathcal{L}_{X_F}(h(s,t)\mu) = \mathcal{L}_{X_F}(h(s,t))\mu + h(s,t)\mathcal{L}_{X_F}\mu$$

car le produit $\wedge$ entre fonctions et formes différentielles est le produit ordinaire dans $\mathbb{C}$.

On trouve donc $\mathcal{L}_{X_F}(h(s,t)\mu) = \mathcal{L}_{X_F}(h(s,t))\mu$ par la remarque ci-dessus.

D'autre part, avec la formule de Cartan :

$$\mathcal{L}_{X_F}(h(s,t)\mu) = (d \circ \iota_{X_F} + \iota_{X_F} \circ d)(h(s,t)\mu) = d \circ \iota_{X_F}(h(s,t)\mu)$$

car $h(s,t)\mu \in \Omega^{top}(M, \mathbb{C})$ est forcément fermée.

En conclusion on a $\mathcal{L}_{X_F}(h(s,t))\mu = d \circ \iota_{X_F}(h(s,t)\mu)$, d'où :

$$\int_M h(\nabla_{X_F} s, t)\mu + \int_M h(s, \nabla_{X_F} t)\mu = \int_M \mathcal{L}_{X_F}(h(s,t))\mu = \int_M d \circ \iota_{X_F}(h(s,t)\mu) =$$

$$= \int_{\partial M} \iota_{X_F}(h(s,t)\mu) = 0$$

Dans l'avant-dernier passage on a utilisé la formule de Stokes, et puis le fait que $\partial M = \varnothing$. □

On note finalement $\widetilde{\mathcal{H}_M} := L^2(M, L)$ le *complété* de $\mathcal{H}_1$ par rapport à la norme $s \longmapsto |s| := (< s, s >_{L^2})^{\frac{1}{2}}$. Ceci est par définition un espace de Hilbert.

On pourrait essayer d'étendre la définition de Q à $\widetilde{\mathcal{H}_M}$, mais ceci donne des problèmes techniques qu'on n'est pas tellement intéressés à résoudre, puisque de tout façon l'axiome 5 de la quantification selon Dirac ne vaut pas.

Remarque 38. Du point de vue physique, il y a un problème que l'on peut exemplifier comme suit.

Considérons une particule libre dans $\mathcal{Q} := \mathbb{R}^3$. Son espace des phases associé est $M := T\mathcal{Q} \cong \mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^3)^*$, avec la forme symplectique canonique ω qui s'écrit en coordonnées :

$$\omega = \sum_{i=1}^{3} dq_i \wedge dp_i$$

On peut appliquer la construction vue dans cette section avec des données préquantifiants $(\pi : L \longrightarrow M, h, \nabla)$ qu'on va construire.

Déjà, on sait que $[\omega] = 0 \in H^2_{dR}(M, \mathbb{R})$, car ω admet le potentiel de Liouville $\lambda \in \Omega^1(M, \mathbb{R})$. Donc (M, ω) est préquantifiable.

On prend $L := M \times \mathbb{C}$: le fibré trivial.
Dans ce cas-ci, ce donner une connexion ∇ revient à se donner une 1-forme globale $\alpha \in \Omega^1(M, \mathbb{C})$. On prend alors $\alpha := i\lambda$, de façon que $\Theta(\nabla) = -i\omega$: en effet, $\omega = d\lambda = i\,\Theta(\nabla)$.

Finalement, on prend la métrique triviale h sur L, qui est constante au produit hermitien standard sur $\mathbb{C}$ en toute fibre.
La condition de compatibilité est vérifiée, en utilisant que $\alpha + \overline{\alpha} = 0$.

L'espace de Hilbert de la préquantification est alors $L^2(\mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^3)^*, \mathbb{C})$ le complété de l'espace des section lisses à carré intégrable, qui est contenu dans $C^\infty(\mathbb{R}^3 \times (\mathbb{R}^3)^*, \mathbb{C})$, par rapport à la norme induite par le produit scalaire qu'on a défini précédemment.

Voici le problème : l'espace de Hilbert construit est trop grand. Plus précisément, les axiomes de la mécanique quantique demandent qu'il n'y ait pas dépendance en les variables moment. Il aurait fallu trouver $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$.

Il faut donc choisir un sous-espace convenable de notre espace préquantifiant, pour couper le nombre de variables en deux.
Une façon possible de faire ça, qui présente d'autres difficultés techniques, est l'introduction d'une polarisation sur (M, ω).

9.3 Polarisations complexes et quantification de variété kähleriennes

On peut introduire (au moins) deux type de polarisations sur une variété symplectique, à savoir des polarisations réelles ou des polarisations complexes. Dans la suite on va utiliser des polarisations complexes, qui sont plus générales. Par exemple, $(\mathbb{S}^2_l, \mathrm{Vol}^l)$ n'admet pas

de polarisations réelles, car une telle polarisation donnerait un champ de vecteur jamais nul sur la sphère.
Toutefois, il faut savoir qu'il existe des variétés symplectiques qui n'admettent aucun type de polarisation. Dans ces cas-ci, le procédé de quantification géométrique comme on est en train de le présenter ne peut pas être achevé : l'analogie physique serait avec des systèmes classiques qui n'ont pas d'analogue en mécanique quantique.

Commençons avec des rappels sur les distributions de plans et les feuilletages.

Définition 9.4. Soit M une variété lisse.
Une *distribution de plans* Δ dans M est la donnée pour tout point $x \in M$ d'un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel $\Delta_x \in T_xM$.
Si la dimension de Δ_x est constante à $p \in \{0, ..., dim_{\mathbb{R}}(M)\}$ alors on appelle Δ une *distribution de p-plans*, et on dit qu'elle est de rang constant.

On est surtout intéressé aux distributions lisses de plans. Dans le cas de rang constant à l'entier p, la lissité peut s'exprimer en considérant le fibré grassmannien des p-plans du fibré tangent de M : une distribution de plans est lisse si elle est une section lisse de ce fibré au dessus de M.
On va utiliser une caractérisation équivalente moins technique.

Définition 9.5. Soit Δ une distribution de plans dans la variété lisse M.
On dit que Δ est lisse si pour tout point $x \in M$ il existe des champ de vecteurs lisses $X_1, ..., X_k$ sur M tels que $X_i(y) \in \Delta_y$ pour tout $y \in M$ et $(X_1(x), ..., X_k(x))$ soit une $\mathbb{R}$-base de Δ_x.

Avec les notations du dernier énoncé, un champ de vecteurs $X \in C^\infty(M, TM)$ est dit *tangent* à Δ si son image est dans $\bigcup_{x \in M} \Delta_x \subseteq TM$.

Remarque 39. Si Δ est une distribution de plans lisse, il se peut bien qu'elle ne soit pas de rang constant. Toutefois, la fonction $dim^\Delta : M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ qui envoie $x \in M$ sur $dim_{\mathbb{R}}(\Delta_x)$ est semi-continue inférieurement sur M.
En effet, si les champs de vecteurs lisses $X_1, ..., X_k$ sont une base de Δ_x, alors ils sont en particulier $\mathbb{R}$-linéairement indépendants en x. Ils vont donc encore engendrer des sous-$\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension k dans les espaces tangents à M, au voisinage de x. Par hypothèse, ces espaces sont contenus dans la distribution Δ, et on a donc $dim^\Delta(y) \geq \dim^\Delta(x)$ pour y dans un voisinage convenable de x.

Pour arriver aux feuilletages, il faut encore savoir qu'est-ce qu'une feuille de Δ, et puis il y des questions d'intégrabilité.

Définition 9.6. Soit Δ une distribution de plans lisse dans M.
On dit que deux points $x, y \in M$ sont *dans la même feuille* de Δ s'il existe un chemin lisse $\gamma : I \longrightarrow M$ reliant x à y tel que $\dot{\gamma}(t) \in \Delta_{\gamma(t)}$ pour tout $t \in I$.
Un tel chemin est dit tangent à Δ.

On a donc définit une partition de M en feuilles de Δ.

Finalement, la notion d'intégralité qu'on va donner généralise celle d'une courbe intégrale d'un champ de vecteurs (qui définit bien une distribution de 1-plans où il est non singulier).

Définition 9.7. Soit Δ une distribution de plans lisse dans M.
On dit que Δ est *intégrable* si pour tout $x \in M$ les champs de vecteurs $X_1, ..., X_k$ tangents à Δ qui donnent une base de Δ_x peuvent être choisis de sorte que leurs flots préservent Δ.

Ceci signifie que $d(\varphi_t^{X_i})_x(\Delta_x) = \Delta_{\varphi_t^{X_i}(x)}$ pour tout $i \in \{1, ..., k\}$.
On a (au moins) trois autres caractérisations possibles d'intégrabilité.

Théorème 45. *Soit Δ une distribution de plans lisse dans M.*
Sont équivalentes :

1. *Δ est intégrable.*
2. *Le flot de tout champ de vecteur tangent à Δ préserve Δ.*
3. *Il existe un ensemble de champs de vecteurs tangents à Δ dont les flots préservent Δ et tel que Δ est engendrée par ces champs de vecteurs en tout point.*
4. *Toute feuille $\mathcal{F}$ de Δ est une sous-variété immergée de M, et on a $T_x\mathcal{F} = \Delta_x$ pour tout $x \in \mathcal{F}$*

Ce résultat est parfois appelé le *théorème de Frobenius général*. Le théorème de Frobenius *classique* porte par contre sur les distributions de rang constant.

On rappelle qu'une distribution de plans Δ est dite *involutive* si pour tout champs de vecteurs X, Y tangent à Δ leur crochet de Lie $[X, Y]$ l'est aussi.
De plus, cette condition est nécessaire pour l'intégrabilité.

En effet, soit $\Delta \subseteq TM$ est une distribution de plans intégrable, et soient $X, Y \in C^\infty(M, TM)$ deux champs de vecteurs sur M tangents à Δ.
Comme le flot de X préserve Δ, on a bien $((\varphi_t^X)^*Y)_x \in \Delta_x$, car $Y(\varphi_t^X(x)) \in \Delta_{\varphi_t^X(x)}$. Mais alors :

$$[X, Y](x) = \mathcal{L}_X(Y)(x) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathrm{t}=0} ((\varphi_t^X)^*Y)_x \in \Delta_x$$

Le théorème de Frobenius classique dit que la réciproque est vraie si Δ est de rang constant.

Théorème 46. *Une distribution lisse de rang constant est intégrable si et seulement si elle est involutive.*

Finalement, on appelle *feuilletage* une distribution de plans lisse de rang constant et intégrable. Avec cette terminologie à disposition, revenons aux polarisations.

On commence en rappelant que si M est une variété lisse alors on peut considérer son fibré tangent complexifié $T^{\mathbb{C}}M := TM \otimes \mathbb{C}$. Ceci est un fibré vectoriel complexe sur M dont la fibre au point $x \in M$ est la complexification $T_x^{\mathbb{C}}M = T_xM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ de l'espace tangent de M en x. Cette complexification est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel avec une conjugaison naturelle :

$$\overline{(v \otimes \lambda)} := (v, \overline{\lambda})$$

pour $v \in T_xM, \lambda \in \mathbb{C}$.

Maintenant, si (M, ω) est une variété symplectique, on peut étendre de façon unique ω en une 2-forme complexe définie sur $T^{\mathbb{C}}M$, qu'on note encore ω. Elle est donnée par :

$$\omega_x(v \otimes \lambda, w \otimes \mu) := \lambda\mu\omega_x(v, w)$$

où $x \in M, v, w \in T_xM, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Définition 9.8. Soit (M, ω) une variété symplectique.
Une *polarisation complexe* pour M est la donnée d'un feuilletage lagrangien $P \subseteq T^{\mathbb{C}}M$ tel que $dim_{\mathbb{C}}(P \cap \overline{P})$ soit constante.

On a donc une distribution de plans lisse, intégrable et de rang constante. Une telle distribution est *lagrangienne* si $P_x \subseteq T_x^{\mathbb{C}}M$ est un sous-espace lagrangien de $(T_x^{\mathbb{C}}M, \omega_x)$ pour tout point $x \in M$, c'est à dire si $(T_x^{\mathbb{C}}M)^{\perp_\omega} = T_x^{\mathbb{C}}M$ pour $x \in M$. On sait alors que $dim_{\mathbb{C}}P_x = \frac{1}{2}dim_{\mathbb{C}}T_x^{\mathbb{C}}M = \frac{1}{2}dim_{\mathbb{R}}M$.

On a deux cas extrémaux :
— $P \cap \overline{P} = \{0\}$ partout, ce qu'on appelle une *polarisation kählerienne.*
— $P = \overline{P}$ partout, ce qu'on appelle une *polarisation réelle.*
On remarque que si P est réelle alors il existe un et un seul feuilletage lagrangien $Q \subseteq TM$ tel que P soit la complexification de Q. C'est pour ça qu'on considère les polarisations réelles comme un cas particulier de celles complexes.

Exemple 9.1. Considérons une variété Kählerienne (M, ω, J). On pose, pour $x \in M$:

$$P_x := \{v \in T_x^{\mathbb{C}}M | J_x(v) = -iv\}$$

On a simplement considéré le fibré tangent anti-holomorphe $T_{(0,1)}M \subseteq T^{\mathbb{C}}M$, qui est celui où les deux multiplications par i qu'on peut définir sont opposées.

Pour comprendre ça, fixons un point $x \in M$. On a l'endomorphisme $J_x : T_xM \longrightarrow T_xM$ qui satisfait $J_x^2 = -\operatorname{Id}_{T_xM}$, ainsi que l'espace tangent complexifié $T_x^{\mathbb{C}}M = T_xM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Ce complexifié admet une multiplication par $i \in \mathbb{C}$ naturelle, à savoir :

$$i(v \otimes \mu) := (v \otimes i\mu)$$

pour $v \in T_xM, \mu \in \mathbb{C}$.

De même, on peut étendre J_x en un endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de $T_x^{\mathbb{C}}M$ dont le carré est encore l'opposé de l'identité. Cet endomorphisme admet les valeurs propres $\pm i$, et $(T_{(0,1)}M)_x$ est justement défini comme l'espace propre de cette extension de J_x pour la valeur propre $-i$.
On a donc une décomposition naturelle $T^{\mathbb{C}}M = T_{(1,0)}M \otimes T_{(0,1)}M$, si $T_{(1,0)}M$ est l'espace propre de l'extension de J par la valeur propre i.

On a bien défini une polarisation complexe pour la variété symplectique (M, ω), en oubliant pour un instant sa structure complexe. Pour le voir il suffit de montrer que P est une distribution de plans isotropes, pour questions de dimension.

Soient alors $v \otimes \lambda, w \otimes \mu \in P_x$, et montrons que $\omega_x(v \otimes \lambda, \otimes \mu) = 0$.

On sait que la formule $(y, z) \longmapsto \omega_x(J(y), z)$ définit une forme $\mathbb{C}$-bilinéaire symétrique sur $T^{\mathbb{C}}M$, d'où :

$$\omega_x(J(v \otimes \lambda), w \otimes \mu) = \omega_x(J(w \otimes \mu), v \otimes \lambda)$$

D'autre part, on a $J(v \otimes \lambda) = -i(v \otimes \lambda) = v \otimes -i\lambda$, par définition de P_x, et de même pour $J(w \otimes \mu)$.
Donc on a :

$$\begin{aligned} -i\lambda\mu\omega_x(v, w) &= \omega(v \otimes -i\lambda, w \otimes \mu) = \omega_x(J(v \otimes \lambda), w \otimes \mu) = \\ &= \omega_x(J(w \otimes \mu), v \otimes \lambda) = \omega_x(w \otimes -i\mu, v \otimes \lambda) = \\ &= -i\mu\lambda\omega_x(w, v) = i\lambda\mu\omega_x(v, w) \end{aligned}$$

qui donne ce qu'on veut.

De plus, on a $T^{\mathbb{C}}M = T_{(0,1)}M \oplus \overline{T_{(0,1)}M}$ par définition du complexifié du fibré tangent, ce qui signifie que $P \cap \overline{P} = \{0\}$ partout. Ceci explique la notation dans 9.3.
Dans la suite on supposera toujours d'avoir muni une variété kählerienne de cette polarisation naturelle.

Remarque 40. On peut se demander quand une variété symplectique (M, ω) admet des polarisations kähleriennes. Une telle polarisation P donne un splitting de $T^{\mathbb{C}}M$ en tout point, ce qui permet de définir une structure presque complexe $J \in C^\infty(M, TM \otimes T^*M)$ sur M en déclarant que les vecteurs du type $(v + \frac{1}{2}J_x(v))$ engendrent P_x pour tout $x \in M$, où $v \in T_xM$.
On a alors $P_x = (T_{(0,1)}M)_x$ pour tout $x \in M$, si $T^{\mathbb{C}}M = T_{(1,0)}M \oplus T_{(0,1)}M$ est la décomposition donnée par la structure presque-complexe J.

Le fait que P soit un feuilletage lagrangien signifie que ω est une $(1, 1)$-forme. Ceci signifie en particulier que $\omega(J(.), .)$ définie une forme bilinéaire symétrique en tout point.

Le théorème de Newlander-Nirenberg assure que J est intégrable si et seulement si $T_{(0,1)}M$ l'est, ce qu'ici vaut par hypothèse. La variété (M, ω, J) est alors complexe, et si $\omega(J(.), .) > 0$ alors elle est kählerienne (par définition).

Exemple 9.2. Soit Q une variété lisse, et posons $M := T^*Q$. On muni le fibré cotangent de sa structure symplectique canonique ω. On note $\pi : M \longrightarrow Q$ la projection canonique, et M_q la fibre de π au-dessus de $q \in Q$.
La *polarisation verticale* de (M, ω) est défini par :

$$P_x := T_x(M_{\pi(x)}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

On prend en tout point $x \in M$ la complexification de la fibre de π au-dessus de $\pi(x)$. Ceci définit bien une polarisation complexe de M.

De plus, on a $P_x = \overline{P_x}$ pour tout $x \in M$, et cette polarisation est donc réelle.

On peut maintenant corriger l'espace $\widetilde{\mathcal{H}_M}$ construit dans la section précédente.
Considérons une variété symplectique préquantifiable (M, ω) préquantifiée par $(\pi : L \longrightarrow M, h, \nabla)$. Supposons (M, ω) munie d'une polarisation complexe $P \subseteq T^{\mathbb{C}}M$.

Définition 9.9. Une section $s \in \Omega^0(M, L)$ est *polarisée* si l'on a $\nabla_X s = 0$ pour tout champ de vecteur tangent à P.

Le dernier résultat de la théorie générale de la quantification géométrique qu'on rappelle est le suivant.

Proposition 47. *Soit (M, ω, J) une variété kählerienne préquantifiable préquantifiée par $(\pi : L \longrightarrow M, h, \nabla_L)$, où L est holomorphe et ∇_L est la connexion de Chern du fibré holomorphe hermitien (L, h). Soit $P := T_{(0,1)}M \subseteq T^{\mathbb{C}}M$ la polarisation kählerienne naturelle de l'exemple 9.1.*
L'espace des sections lisses polarisées de L est l'espace des sections holomorphes globales $H^0(M, L)$.

Démonstration. Soit $s \in \Omega^0(M, L)$ une section polarisée. Il faut montrer que $\overline{\partial}_L s = 0$, où $\overline{\partial}_L : \Omega^0(M, L) \longrightarrow \Omega^1(M, L)$ est l'opérateur différentiel de Dolbeault pour $\pi : L \longrightarrow M$.

On rappelle que si $e : U \longrightarrow L_{|U}$ est un repère holomorphe local de L au-dessus de l'ouvert trivialisant $U \subseteq M$ alors $\overline{\partial}_L$ coïncide avec l'opérateur de dérivé anti-holomorphe $\overline{\partial}$ sur les ouverts de $\mathbb{C}^n$. Cette propriété caractérise en fait $\overline{\partial}_L$.

Si l'on écrit $s = fe$ pour $f \in C^\infty(U, \mathbb{C})$ alors la condition $\overline{\partial}_L s = 0$ signifie que $\overline{\partial} f = 0$, c'est à dire que f satisfait les équations de Cauchy-Riemann, et elle est donc holomorphe.

On rappelle encore que la connexion de Chern ∇_L de (L, h) est par définition la seule qui soit compatible avec h et avec la structure holomorphe de L au même temps. La compatibilité avec la structure holomorphe s'exprime en disant que la partie $(0, 1)$ de ∇_L coïncide avec $\overline{\partial}_L$.
On a donc, pour $X \in C^\infty(M, P)$:

$$0 = (\nabla_L)_X s = (\nabla^{(0,1)})_X s = \overline{\partial}_L s$$

ce qu'on voulait. □

Avec ce résultat on considérera d'avoir la solution au problème de la quantification d'une variété kählerienne.
Si on se donne (M, ω, J) kählerienne préquantifiable, on notera $\mathcal{H}_M := H^0(M, L)$, où $(\pi : L \longrightarrow M, h, \nabla_L)$ est un fibré préquantifiant holomorphe muni de sa connexion de Chern. Ceci revient à considérer l'espace des sections lisses polarisées de L par rapport à la polarisation kählerienne naturelle de (M, ω, J).

Remarque 41. Il y aurait encore un certain nombre d'étapes avant de pouvoir construire la quantification 9.1 qu'on voulait, mais on préfère s'arrêter ici avec la théorie générale, pour revenir à l'espace de module des polygones. On se content de remarquer les problèmes techniques qu'il faudrait encore résoudre.

Pour commencer, les sections polarisées sont constantes le long des feuilles de P, et donc elle ne sont jamais intégrables par rapport à l'élément de volume de Liouville si

ces feuilles ne sont pas compactes. Une solution possible serait d'intégrer les sections sur l'espace des feuilles $M/(P \cap \overline{P})$.
Il faut donc supposer que la distribution réelle $P \cap \overline{P} = P \cap TM$ soit un feuilletage, et que l'espace des feuilles soit lisse. Ceci amène à la définition d'une polarisation *fortement admissible*.

Maintenant la difficulté technique est qu'il n'existe pas de forme volume canonique sur l'espace $M/(P \cap \overline{P})$. Pour la surmonter, on peut travailler avec *demi-densités* ou *demi-formes*, ce qui amène aussi à la définition d'une *structure métaplectique* sur M. Il y a une obstruction topologique en plus pour l'existence d'une telle structure métaplectique, à savoir la deuxième classe de cohomologie de Stiefel-Whitney de M, qui vit dans $H^2(M, \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2)$.

Avec un fibré de demi-formes $\delta := \Omega^{\frac{1}{2}}(M/P \cap \overline{P})$ on peut finalement considérer les sections polarisées du produit tensoriel $L \otimes \delta$, par rapport à une connexion convenable sur le fibré δ. Deux telles sections peuvent être multipliées pour obtenir une forme volume qu'on peut intégrer sur $M/(P \cap \overline{P})$, ce qui nous donne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel à produit hermitien (pre-hilbert) : sa complétion nous donne l'espace de hilbert de la quantification qu'on souhaite, et avec un peut de travail en plus on peut définir une action de $C^\infty(M, \mathbb{C})$ sur cet espace.

Il y a puis des complications liées au fait que les feuilles de $P \cap \overline{P}$ peuvent être non simplement connexes. Plus précisément, toute feuille doit avoir holonomie triviale. L'idée est que si une section $s \otimes v$ de $L \otimes \delta$ est constante le long des feuilles de $P \cap \overline{P}$, alors elle ne pas prendre une phase non triviale par l'action d'un élément du groupe d'holonomie d'une feuille.
Il faut donc que cette section soit nulle, où que la représentation d'holonomie du groupe fondamental de la feuille soit triviale.
On se restreint alors à la sous-variété M_{B-S} de M définie comme la réunion des feuilles de $P \cap \overline{P}$ à holonomie triviale. On l'appelle la *sous-variété de Bohr-Sommerfeld* de M.

Pour conclure, il se peut à priori que l'espace de hilbert construit soit nul.

Tous ces problèmes ont amené à chercher une construction géométrique plus naturelle pour la quantification. Un approche plus récent utilise des *structures spin* et des *opérateurs de Dirac* sur les variétés symplectiques, mais on ne s'en intéressera pas.

9.4 [Q,R] = 0

Dans cette section on discute les liens entre quantification géométrique et réduction symplectique. On est intéressé à montrer des résultats de commutativité parmi les deux opérations.
Des références classiques sont [**GS82**] et [**V00**].

On considérera ici une variété symplectique préquantifiable (M, ω), préquantifiée par $(\pi : L \longrightarrow M, h, \nabla)$. On supposera de plus d'avoir un groupe de Lie compact connexe G qui agit de façon hamiltonienne sur M avec moment $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, et librement sur $\mu^{-1}(0)$.

On peut alors définir la réduction symplectique (lisse) $M//G$, et l'espace de hilbert de la quantification $\mathcal{H}_M$.
Le but est de quantifier $M//G$ aussi, et de décrire les liens entre $\mathcal{H}_{M//G}$ et $\mathcal{H}_M$.

Pour l'instant on essayer de construire les données préquantifiantes pour la variété symplectique $(M//G, \omega_G)$, en utilisant ceux de (M, ω).

Il faudra tout de suite supposer qu'il existe une G-action sur L qui linéarise celle sur M, tout comme dans 7.2. Ceci nous permet de faire agir G sur :
— Les sections lisses de L.
— Les métriques hermitiennes sur L.
— Les connexions sur L.
L'action sur $\Omega^0(M, L)$ est donnée par la formule (7.3).

L'action sur les métriques est la suivante.
Si h est une métrique hermitienne sur L et $g \in G$, on définit g^*h par :

$$g^*h_x(u, v) := h_{g.x}(g.u, g.v)$$

où $x \in M$, $u, v \in L_x$.

L'action sur les connexions est la suivante.
Si ∇ est une connexion sur L et $g \in G$, on définit ∇^g par :

$$\nabla^g_X s := g.\Big(\nabla_{g^*X}(g^{-1}.s)\Big)$$

où $X \in C^\infty(M, TM)$ et $s \in \Omega^0(M, L)$.
Ce n'est pas tout à fait évident que cette formule donne une deuxième connexion sur L. Montrons à titre d'exemple que $\nabla^g_{fX} s = f\nabla^g_X s$ pour $s \in \Omega^0(M, L), X \in C^\infty(M, TM)$ et $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$, c'est à dire la $\mathbb{C}^\infty(M, \mathbb{C})$-linéairité en X.

Pour commencer, on a bien $g^*(fX) = (g^*f)(g^*X)$. En effet, si $x \in M$:

$$(g^*(fX))(x) = dg_x^{-1}(fX(g.x)) = dg_x^{-1}(f(g.x)X(g.x)) = f(g.x)dg_x^{-1}(X(g.x)) =$$

$$= ((g^*f)(x))(g^*X(x))$$

Donc :

$$\nabla^g_{fX} s = g.\Big(\nabla_{g^*(fX)}(g^{-1}.s)\Big) = g.\Big(\nabla_{(g^*f)(g^*X)}(g^{-1}.s)\Big) =$$

$$= g.\Big((g^*f)\nabla_{g^*X}(g^{-1}.s)\Big) = f\nabla^g_X s$$

Le dernier passage se comprend en évaluant les deux sections considérées en un point $x \in M$. Si l'on note $s' := \nabla_{g^*X}(g^{-1}.s)$ alors :

$$(g.(g^*fs'))(x) = g.(g^*fs'(g^{-1}.x)) = g.(g^*f(g^{-1}.x)s'(g^{-1}.x)) = g.(f((gg^{-1}).x)s'(g^{-1}.x)) =$$

$$= f(x)g.(s'(g^{-1}.x)) = (f(g.s))(x)$$

comme on voulait.

Pour construire un fibré préquantifiant pour $M//G$ on commence en choisissant des données préquantifiantes G-invariantes pour (M, ω).

Proposition 48. *Il existe une métrique hermitienne G-invariante h' sur L et une connexion hermitienne G-invariante ∇' pour (L, h') telles que :*

$$\Theta(\nabla') = -i\omega$$

Démonstration. On ne donnera pas tous les détails. L'idée est toujours de construire les objets qui nous intéressent en prenant des barycentres, i.e. en moyennant par rapport à la mesure de Haar de G de masse 1, qu'on notera ν comme dans 13.

Déjà, la formule

$$h' := \int_G g^* h d\nu(g)$$

définit bien une métrique hermitienne G-invariante sur L, à partir de la métrique h.

On pose puis :

$$\widetilde{\nabla} := \int_G \nabla^g d\nu(g)$$

ce qui définit bien une connexion G-invariante sur L.
Le problème est qu'il n y a pas de raison pour que $\widetilde{\nabla}$ soit h'-hermitienne.

La preuve se termine en corrigeant $\widetilde{\nabla}$ pour obtenir la connexion qu'on veut. □

Dans la suite on supposera donc que (M, ω) soit préquantifiée par $(\pi : L \longrightarrow M, h, \nabla)$, avec h et ∇ qui sont G-invariantes.

Pour l'instant on n'a pas utilisé le moment $\mu : G \longrightarrow \mathfrak{g}^*$, mais seulement la G-invariance de ω (c'est à dire le fait que la G-action est symplectique) et le relèvement de l'action à L. On va voir qu'il y a toujours un choix canonique pour le moment avec ces hypothèses.

Il nous faut maintenant introduire l'action infinitésimale de G sur les sections de L, c'est à dire une action de $\mathfrak{g}$ sur $\Omega^0(M, L)$.
Pour $\xi \in \mathfrak{g}, s \in \Omega^0(M, L)$ et $x \in M$ on pose :

$$\mathcal{L}_\xi s(x) := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathrm{t}=0} (\exp^{-t\xi} .s)(x) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\right|_{\mathrm{t}=0} \exp^{-t\xi} .(s(\exp(t\xi).x)$$

On appelle $\mathcal{L}_\xi s$ la *dérivée de Lie* de la section s par rapport au vecteur ξ. Elle est simplement la différentielle en e de l'action de G sur $\Omega^0(M, L)$ définie avant.

On peut vérifier que si $\xi \in \mathfrak{g}$ alors l'opérateur

$$(\mathcal{L}_\xi - \nabla_{\xi^M}) : \Omega^0(M, L) \circlearrowleft \tag{9.3}$$

est $C^\infty(M, \mathbb{C})$-linéaire. On l'appelle l'*opérateur de Konstant-Souriau* de l'action soulevée $G : L \circlearrowleft$.

La $C^\infty(M,\mathbb{C})$-linéairité entraîne que la valeur de $(\mathcal{L}_\xi - \nabla_{\xi^M})s(x)$ ne dépend que de la valeur de la section s en x : on a un opérateur ponctuel, et pas un opérateur local. Ceci suit du principe de tensorialité, essentiel en géométrie différentielle pour définir des tenseurs.

Dans notre cas, on a bien $(\mathcal{L}_\xi - \nabla_{\xi^M}) \in C^\infty(M, L \otimes L^*) \cong C^\infty(M,\mathbb{C})$. De plus, l'endomorphisme $(\mathcal{L}_\xi - \nabla_{\xi^M})(x) : L_x \longrightarrow L_x$ est bien antihermitien par rapport à h_x, car ∇_{ξ^M} et $\mathcal{L}_\xi$ le sont.

Pour ∇ c'est le cas puisque elle est une connexion hermitienne par hypothèse.
Pour $\mathcal{L}_\xi$, le fait que $G^*h = h$ signifie que G agit par automorphismes h-unitaires fibre à fibre. L'action de son algèbre de Lie est alors à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe unitaire de (L_x, h_x) pour tout $x \in M$, et cette algèbre de Lie est justement

$$\mathfrak{u}(L_x, h_x) = \{\varphi : L_x \circlearrowleft | h_x(\varphi(.), .) + h_x(., \varphi(.)) = 0\}$$

En conclusion, avec les identifications naturelles on a $(\mathcal{L}_\xi - \nabla_{\xi^M}) \in C^\infty(M, i\,\mathbb{R})$, et on peut donc penser à cet opérateur comme une fonction réelle sur M.

On énonce alors le théorème de Konstant, qui donne un moment canonique pour une G-action symplectique qui se relève à L en préservant h et ∇.

Théorème 49. *Considérons l'application lisse $\mu : M \longrightarrow \mathbb{R}$ définie comme suit, pour $\xi \in \mathfrak{g}$:*

$$< \mu, \xi >= i(\mathcal{L}_\xi - \nabla_{\xi^M}) \tag{9.4}$$

Cette application est un moment pour la G-action symplectique sur M.

Passons finalement à construire les données préquantifiantes pour la rèduction symplectique $(M//G, \omega_G)$, où l'on peut supposer de travailler avec le moment (9.4). On note $\pi_G : \mu^{-1}(0) \longrightarrow M//G$ le G-fibré principal donné par la projection canonique au quotient.

Commençons avec la définition d'un fibré en droites complexes $\pi : L_G \longrightarrow M//G$.
L'idée est de le construire en utilisant les sections G-invariantes de L. Pour $x \in M//G$ on pose :

$$(L_G)_x := \Omega^0(\pi_G^{-1}(x), L_{|\pi_G^{-1}(x)})^G$$

Ceci est l'espace des sections lisses G-invariantes de L au-dessus de $\pi_G^{-1}(x) \subseteq M$.
On peut montrer que $\mathrm{Dim}_{\mathbb{C}}((L_G)_x) = 1$ pour tout $x \in M//G$.

En effet, on a une identification naturelle $L_y \cong (L_G)_x$ pour tout $y \in \pi_G^{-1}(x)$, qui au vecteur $v \in L_y$ associe l'application lisse $g \longmapsto g.v$, en utilisant que $G \cong \pi_G^{-1}(x)$ car la G-action sur $\mu^{-1}(0)$ est libre.
Le fait que π_G soit une fibration localement triviale entraîne alors que $L_G \longrightarrow M//G$ le soit aussi, et on a donc bien un fibré en droites complexes sur le réduction symplectique.
On a de plus une identification naturelle entre les sections lisses de L_G et les sections lisses G-invariantes de L au-dessus de $\mu^{-1}(0)$:

$$\varphi : \Omega^0(M//G, L_G) \longrightarrow \Omega^0(\mu^{-1}(0), L_{|\mu^{-1}(0)})^G, \quad (\varphi(s))(x) := (s(\pi_G(x)))(x)$$

Comme h est G-invariante, elle induit une métrique G-invariante h_G sur L_G.
Maintenant il faut construire une connexion hermitienne pour (L_G, h_G).

Soit $Y \in T_x(M//G)$ un vecteur tangent à $M//G$ en x. On choisit une section lisse X du fibré tangent de $\mu^{-1}(0)$ au-dessus de $\pi_G^{-1}(x)$ telle que $d\pi_G(X) = Y$, et si $s \in \Omega^0(M//G, L_G)$ on pose :

$$(\nabla_G)_X s := \nabla_Y s$$

Il faudrait montrer que ceci définit bien une connexion hermitienne sur (L_G, h_G).
On a terminé la construction des données préquantifiantes qu'on voulait.

On va terminer cette section avec trois résultats dont on donnera pas la preuve. Le premier confirme ce qu'on vient d'écrire.

Proposition 50. *La variété symplectique $(M//G, \omega_G)$ est préquantifiée par $(\pi : L_G \longrightarrow M//G, h_G, \nabla_G)$.*

On est prêts pour passer au cadre qui nous intéresse, c'est à dire la quantification de variétés kähleriennes. Faisons toutes les hypothèses de 47.
On a déjà vu que la réduction symplectique d'une variété kählerienne (M, ω, J) avec structure presque-complexe G-invariante est kählerienne, pour montrer 25.
Si l'on suppose de plus que l'action de G soit holomorphe, les données préquantifiantes qu'on vient de construire sur la réduction symplectique satisfont toutes les relations de compatibilité qu'il faut.

Proposition 51. *Supposons que G agit de façon symplectique et holomorphe sur (M, ω, J), et que l'action de relève à $(\pi : L \longrightarrow M, h, \nabla)$ en préservant h et ∇.*
Alors (L_G, h_G) est un fibré en droites holomorphe hermitien et ∇_G est sa connexion de Chern.

Le résultat suivant, qu'on utilisera de façon cruciale dans la prochaine et dernière section, est un cas particulier des résultats de commutativité entre quantification et réduction.

Théorème 52. *Soient (M, ω, J) et $(\pi : L \longrightarrow M, h, \nabla_L)$ comme dans 47, et $G, \mu, M//G, L_G$ comme ci-dessus.*
On a alors :

$$H^0(M//G, L_G) \cong H^0(M, L)^G$$

Dans le contexte de la quantification géométrique ceci signifie donc que $\mathcal{H}_{M//G} \cong \mathcal{H}_M^G$, et on a bien trouvé une relation du type souhaité.

Démonstration. L'idée est de considérer l'application naturelle $\varphi_1 : H^0(M, L)^G \longrightarrow H^0(M//G, L_G)$ qui a une section holomorphe G-invariante $s : M \longrightarrow L$ associe la section holomorphe globale de L_G induite par la restriction $s_{|\mu^{-1}(0)}$.
Cette application est bien $\mathbb{C}$-linéaire.

La partie difficile de la preuve est montrer qu'elle admet une inverse, ce qui revient à montrer qu'une section holomorphe G-invariante $s : \mu^{-1}(0) \longrightarrow L_{|\mu^{-1}(0)}$ peut toujours s'étendre en une section holomorphe G-invariante globale (de façon unique).
Pour les détails on peut lire [**GS82**]. □

Remarque 42. L'application naturelle φ_1 qu'on vient de décrire peut en fait se définir pour n'importe quelle puissance tensorielle $L^{\otimes k}$ du fibré préquantifiant. On en tire des isomorphismes $\mathbb{C}$-linéaires :

$$\varphi_k : H^0(M, L^{\otimes k})^G \longrightarrow H^0(M//G, L_G^{\otimes k})$$

Le paramètre entier k joue ici le rôle de l'inverse de la constante de Planck $\hbar$, et donc la limite $k \longrightarrow +\infty$ est la limite *semi-classique* $\hbar \longrightarrow 0$.

Toutefois, ces applications naturelles ne sont pas unitaires par rapport aux produits scalaires standard sur les espaces des sections holomorphes (qui sont aisement définis si M est compacte) : elles ne sont même pas asymptotiquement unitaires.
L'introduction d'un fibré de demi-formes, dont on parlait dans 41, permet de corriger nos isomorphismes pour les avoir unitaires. Pour les détails on peut lire [**HK07**].

On remarque que dans le contexte de la quantification géométrique de variété kählériennes, un fibré de demi-formes est une racine carrée $\sqrt{K}$ du fibré canonique $K := \Lambda^{\text{top},0}T^*M$ de M.

On rappelle finalement que Teleman et Zhang ont étendu le dernier théorème aux groupes de cohomologie de Dolbeault supérieurs :

$$H^k(M//G, L_G) \cong H^k(M, L)^G, \quad \text{pour tout } k \geq 0$$

9.5 Retour à l'espace de modules de polygones

Dans cette dernière section on quantifie $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ de façon géométrique.
Il faut tout de suite supposer que $\mathbf{l}$ soit non générique, c'est à dire sans relations du type (5.11). On sait alors que $(\mathcal{M}_{\mathbf{l}}, (\Omega)_{\mathrm{SO}(3)}, J_{\mathrm{SO}(3)})$ est une variété kählerienne d'après 25.

On peut utiliser les résultats de la section précédente pour la quantifier, en trouvant d'abord un fibré préquantifiant sur $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$, ce qui déjà nous amène à caractériser les longueurs $\mathbf{l}$ pour lesquelles $\Omega_{\mathbf{l}}$ est entière.

Proposition 53. *Si les l_i sont entiers (positifs) alors la forme $\Omega_{\mathbf{l}} \in H^2_{\mathrm{dR}}(\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}, \mathbb{R})$ de* (5.6) *est entière.*

Démonstration. C'est assez clair que $\Omega_{\mathbf{l}}$ sera entière si et seulement si chaque facteur Vol^{l_k} sur $\mathbb{S}^2_{l_k}$ l'est. On va donner directement un fibré préquantifiant sur $(\mathbb{S}^2_{l_k}, \mathrm{Vol}^{l_k})$, ce qui suffit.

Si l'on suppose $l_k \in \mathbb{N}_{>0}$, alors on peut considérer le fibré en droites $\mathscr{O}(l_k) := \mathscr{O}(1)^{\otimes l_k}$ sur $\mathbb{S}^2_{l_k} \cong \mathbb{C}\,P^1$.
Ici on a noté avec $\mathscr{O}(1)$ le fibré dual du *fibré tautologique* $\mathscr{O}(-1)$ sur $\mathbb{C}\,P^1$. On rappelle que le fibré tautologique a les fibres suivantes :

$$\mathscr{O}(-1)_{[v]} := \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{v\}$$

où $v \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$.

Ce fibré est muni de la métrique canonique h, qui est pour tout $[v] \in \mathbb{C}\,P^1$ la restriction du produit hermitien canonique de $\mathbb{C}^2$ à la droite complexe $\mathscr{O}(-1)_{[v]}$.
On muni donc $\mathscr{O}(1)$ de la métrique duale h^{-1}, et $\mathscr{O}(l_k)$ de la métrique produit h^{-l_k}.

Les fibrés ainsi construits sont bien holomorphes, et on peut donc considérer leur connexion de Chern ∇_{l_k}. La théorie générale de la courbure des connexions sur fibrés en droites nous dit que l'on a $\nabla_{l_k} = l_k \nabla_1$.
À priori, on aurait

$$\nabla_{l_k} = \sum_{i=1}^{l_k} \underbrace{\mathrm{Id}_{\mathscr{O}(1)} \otimes \cdots \otimes \mathrm{Id}_{\mathscr{O}(1)}}_{k-1 \text{ fois}} \otimes \big(\nabla_1\big) \otimes \mathrm{Id}_{\mathscr{O}(1)} \otimes \cdots \otimes \mathrm{Id}_{\mathscr{O}(1)}$$

Mais cette somme s'identifie bien à $l_k \nabla_1$ car on est en dimension complexe 1.

Ceci nous dit que $c_1(\mathscr{O}(l_k)) = l_k c_1(\mathscr{O}(1))$, mais on sait de plus que $c_1(\mathscr{O}(1)) = [\frac{i}{2\pi}\omega_{FS}]$, si ω_{FS} est la $(1,1)$-forme de Fubini-Study, c'est à dire la forme de Kähler standard de $\mathbb{C}\,P^1$.
Elle coincide bien avec la forme volume Vol^1 sur $\mathbb{S}^2$, qui est un cas particulier de (5.3).

Pour conclure que $(\mathscr{O}(l_k), h^{-l_k}, \nabla_{l_k})$ préquantifie $(\mathbb{S}^2_{l_k}, \mathrm{Vol}_k)$, il suffit alors de montrer que $\lambda^*(\mathrm{Vol}^{l_k}) = l_k\,\mathrm{Vol}^1$, où $\lambda : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2_{l_k}$ est l'homothétie de facteur l_k.
On a en effet, pour $p \in \mathbb{S}^2$ et $v, w \in T_p\,\mathbb{S}^2$:

$$(\lambda^*(\mathrm{Vol}^{l_k}))_p(v,w) = (\mathrm{Vol}^{l_k})_{\lambda(p)}(d\lambda_p(v), d\lambda_p(w)) = \mathrm{Vol}^{l_k}_{l_k p}(l_k v, l_k w) =$$

$$= \frac{1}{l_k^2} < l_k p, l_k v \wedge l_k w >= l_k < p, v \wedge w >= l_k\,\mathrm{Vol}^1_p(v,w)$$

□

Remarque 43. Dans la suite on supposera donc $\mathbf{l} \in (\mathbb{N}_{>0})^n$. On remarque qu'il suffit donc de supposer d'avoir longueurs rationnelles, quitte à chasser les dénominateurs, ce qui ne change pas le type topologique de $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$.

La construction d'un fibré préquantifiant sur $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$ se fait alors par un produit tensoriel avec poids, tout comme $\Omega_{\mathbf{l}}$ était une somme avec poids.
Si $\pi_k : \mathbb{S}^2_{\mathbf{l}} \longrightarrow \mathbb{S}^2_{l_k}$ est la projection canonique, on pose :

$$L_{\mathbf{l}} := \bigotimes_{k=1}^{n} \pi_i^*\,\mathscr{O}(l_k)$$

ce que l'on note aussi par un *produit tensoriel exterieur* :

$$L_{\mathbf{l}} = \boxtimes_{k=1}^{n} \mathscr{O}(l_k)$$

Sur ce fibré on met bien sûr la métrique produit $h_{\mathbf{l}}$ et la connexion (de Chern) :

$$\nabla_{\mathbf{l}} := \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\mathrm{Id}_{\mathscr{O}(l_1)} \otimes \cdots \otimes \mathrm{Id}_{\mathscr{O}(l_{k-1})}}_{k-1 \text{ fois}} \otimes \big(\pi_k^* \nabla_{l_k}\big) \otimes \mathrm{Id}_{\mathscr{O}(l_{k+1})} \otimes \cdots \otimes \mathrm{Id}_{\mathscr{O}(l_n)}$$

On rappelle la propriété suivante qui porte sur les sections de produits tensoriels externes.

Proposition 54. *Soient $\pi : L \longrightarrow M$ et $\pi : L' \longrightarrow N$ deux fibrés en droites holomorphes sur les variété lisses M, N.*
L'espace des sections holomorphes du produit tensoriel externe $L \boxtimes L' \longrightarrow M \times N$ satisfait :

$$H^0(M \times N, L \boxtimes L') \cong H^0(M, L) \otimes H^0(N, L')$$

Démonstration. On donnera seulement l'idée de la preuve.

Il s'agit de considérer l'application $\mathbb{C}$-bilinéaire naturelle $\varphi : H^0(M, L) \times H^0(N, L') \longrightarrow H^0(M \times N, L \boxtimes L')$, donnée par :

$$\varphi((s,t))(m,n) := s(x) \otimes t(x)$$

où $(m, n) \in M \times N$.

Elle est bien définie, car la fibre de $L \boxtimes L'$ au-dessus de $(m, n) \in M \times N$ est identifiée à $L_m \otimes L'_n$.

φ induit donc une application $\mathbb{C}$-linéaire $H^0(M, L) \otimes H^0(N, L') \longrightarrow H^0(M \times N, L \boxtimes L')$, d'après la propriété universelle du produit tensoriel.

On conclut en montrant directement que cette application est bijective. □

On a maintenant envie d'appliquer le cas particulier du résultat $[Q, R] = 0$ de Guillemin et Sternberg avec lequel on a terminé la section précédente. Toutefois, on préfère changer le groupe de Lie qu'on considère, en passant de SO(3) à SU(2).
Ce choix est fait pour au moins trois raisons :

1. Le groupe SU(2) est lié de façon au *spin* des particules en mécanique quantique : une raison physique.
2. SU(2) est le revêtement universel de SO(3), et donc il est simplement connexe : une raison topologique.
3. Les espaces $H^0(\mathbb{S}^2_{l_k}, \mathscr{O}(l_k))$ s'identifient à des SU(2)-modules irréductibles : une raison algébrique.

Remarque 44. On peut argumenter un peu mieux la troisième motivation.

SU(2) admet un représentation $\mathbb{C}$-linéaire naturelle sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[Z_1, Z_2]$ des polynômes à coefficients complexes en deux variables, $\rho : \mathrm{SU}(2) \longrightarrow GL_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[Z_1, Z_2])$, donnée par la formule suivante :

$$\rho\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, P(Z_1, Z_2)\right) := P(aZ_1 + bZ_2, cZ_1 + dZ_2)$$

Il se trouve que les sous-$\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\mathbb{C}_k[Z_1, Z_2]$ des polynômes homogènes de degré k sont des sous-représentations irréductibles de SU(2).
On notera $\rho_k : \mathrm{SU}(2) \longrightarrow GL_{\mathbb{C}}(V_k)$ ce SU(2)-module irréductible, qui est de dimension complexe $\binom{n+k}{n}$. C'est ce que les physiciens appellent la représentation de *spin* $\frac{k}{2}$ de SU(2).

De plus, il se trouve aussi que l'on a un isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire $H^0(\mathbb{C}P^k, \mathscr{O}(l)) \cong \mathbb{C}_l[Z_1, \ldots, Z_k]$, ce qui donne $H^0(\mathbb{S}^2_{l_k}, \mathscr{O}(l_k)) \cong V_{l_k}$ pour tout $l_k \in \mathbb{N}_{>0}$.

D'après 54 on a donc un isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire :

$$H^0(\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}, L_{\mathbf{l}}) \cong V_{l_1} \otimes \cdots \otimes V_{l_n} =: V_{\mathbf{l}}$$

Si l'on note $\pi : \mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{SO}(3)$ le revêtement universel à deux feuillets de $\mathrm{SO}(3)$, qui est un morphisme de groupes de Lie surjectif, on définit alors l'action diagonale de $\mathrm{SU}(2)$ sur $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$ par composition :

$$g.\mathbf{s} := \pi(g).\mathbf{s} \quad \text{pour } g \in \mathrm{SU}(2), \mathbf{s} \in \mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$$

Topologiquement, π est le revêtement de $\mathbb{R}P^3$ par la sphère $\mathbb{S}^3$, qu'on peut penser comme la sphère unité des quaternions.
Dans cette action donc la matrice $-\mathrm{Id}$ agit trivialement. Réciproquement, toute $\mathrm{SU}(2)$-action où $-\mathrm{Id}$ agit trivialement factorise par une $\mathrm{SO}(3)$-action via π, car le noyau de π est justement $\{\pm \mathrm{Id}\} \subseteq \mathrm{SU}(2)$.

C'est clair que l'action diagonale de $\mathrm{SU}(2)$ reste hamiltonienne sur $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}$ avec le même moment (5.7). En effet $\mathfrak{su}(2)$ est isomorphe à $\mathfrak{so}(3)$ car π est un difféomorphisme local, et induit donc un isomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire entre les algèbres de Lie des deux groupes.
Ceci nous assure que la réduction symplectique $\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}} /\!/ \mathrm{SU}(2)$ soit encore lisse, et de plus difféomorphe à $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$.

On peut finalement appliquer Guillemin-Sternberg.
Le groupe de Lie compact connexe $\mathrm{SU}(2)$ agit sur la variété kählerienne $(\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}, \Omega_{\mathbf{l}}, J)$ de façon hamiltonienne. Cette variété est préquantifiée par $(\pi : L_{\mathbf{l}} \longrightarrow \mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}, h, \nabla_{\mathbf{l}})$, qui est un fibré en droite hermitien holomorphe avec sa connexion de Chern.
De plus, l'action de $\mathrm{SU}(2)$ se linéarise en une $\mathrm{SU}(2)$-action sur $L_{\mathbf{l}}$ tel que l'action sur l'espace $V_{\mathbf{l}}$ de ses sections holomorphes corresponde au produit tensoriel des représentations irréductibles $\rho_{l_k} : \mathrm{SU}(2) \longrightarrow GL_{\mathbb{C}}(V_{l_k})$ décrites ci-dessus. L'action linéarisante préserve $h_{\mathbf{l}}$ et $\nabla_{\mathbf{l}}$.

Les deux dernières propositions de la section précédente nous assurent alors qu'il existent des données préquantifiantes $(\pi : (L_{\mathbf{l}})_{\mathrm{SU}(2)} \longrightarrow \mathbb{S}^2_{\mathbf{l}} /\!/ \mathrm{SU}(2), (h_{\mathbf{l}})_{\mathrm{SU}(2)}, (\nabla_{\mathbf{l}})_{\mathrm{SU}(2)})$ sur la variété kählerienne $(\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}} /\!/ \mathrm{SU}(2), (\Omega_{\mathbf{l}})_{\mathrm{SU}(2)}, J_{\mathrm{SU}(2)})$ telles que l'on ait :

$$H^0(\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}} /\!/ \mathrm{SU}(2), (L_{\mathbf{l}})_{\mathrm{SU}(2)}) \cong H^0(\mathbb{S}^2_{\mathbf{l}}, L_{\mathbf{l}})^{\mathrm{SU}(2)}$$

c'est à dire :

$$H^0(\mathcal{M}_{\mathbf{l}}, (L_{\mathbf{l}})_{\mathrm{SU}(2)}) \cong (V_{\mathbf{l}})^{\mathrm{SU}(2)}$$

Avec les notations de la théorie de la quantification géométrique, on pose alors :

$$\mathcal{H}_{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}} := (V_{\mathbf{l}})^{\mathrm{SU}(2)}$$

et ceci sera l'espace de Hilbert de la quantification de l'espace de modules de polygones $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$.

Remarque 45. On remarque que l'on peut maintenant étudier ces espaces de façon purement algébrique, en considérant les *règles de fusion* pour produit tensoriels de $\mathrm{SU}(2)$-modules irréductibles. Pour cette raison c'est aussi raisonnable de supposer que $\sum_{i=1}^n l_i$ soit paire. Cette condition est liée à celle de Clebsch-Gordan, qui permet de décomposer un produit tensoriel $V_k \otimes V_l$ en somme directe de représentations irréductibles.

La dernière étape consiste maintenant à quantifier des observables classiques sur $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$, c'est à dire des fonctions lisses $F : \mathcal{M}_{\mathbf{l}} \longrightarrow \mathbb{R}$. En suivant [**CHAquant**], quantifier F revient à construire un *opérateur de Toeplitz* qui ait F comme *symbole principal.*
On ne se plongera pas dans la théorie des opérateurs de Toeplitz, qui est centrale en *analyse semi-classique*, mais on essayera d'expliquer les étapes principales de la construction.

On commence en rappelant une extension des coordonnées action-angle introduites dans 8 : celles-ci sont les observables classiques qu'on veut quantifier.
On avait introduit les actions comme étant les longueurs des diagonales principales d'un polygone, i.e. celles sortant de son premier sommet, ce qui divise le polygone en triangles. On a puis considéré les angles diédrales orientés entre deux triangles adjacents pour trouver les coordonnées angle.

L'idée est que n'importe quelle décomposition d'un n-gone en $n-2$ triangles marcherait aussi. De plus, cet approche est plus naturel dès que l'on considère des autres espaces de modules importants en TQFT (*théorie quantique topologique des champs*) : dans ce cas-là, on divise une surface Σ en *pantalons*, et l'espace de modules considéré est celui des SU(2)-fibré principaux plats sur Σ avec holonomie fixée au bord.
On ne dira pas plus que ça sur cet argument, sur lequel on peut lire [**JW92**].

En revenant aux décompositions en triangles, on a une façon combinatoire agréable pour les classifier, en utilisant un peu de terminologie empruntée par la théorie des graphes.

Définition 9.10. Un graphe simple fini à demi-arêtes $\Gamma = (V, E_{\text{int}} \amalg E_{\text{half}})$ est dit *admissible* s'il est un arbre trivalent.
E_{half} est l'ensemble des *demi-arêtes*, et E_{int} celui des *arêtes intérieures.*

Remarque 46. On rappelle qu'un graphe est simple s'il n'a ni d'arêtes parallèles ni boucles, et qu'arbre est un graphe connexe sans cycles. De plus, les demi-arêtes dans E_{half} sont définies comme étant des singletons $\{v\}$, pour $v \in V$.

On peut maintenant associer à un n-gone décomposé en $n-2$ triangles un graphe admissible à n demi-arêtes et $n-2$ sommets : les sommets corresponds aux triangles, les demi-arêtes aux cotés, et les autres arêtes relient deux sommets entre eux si et seulement si les triangles correspondants partagent un coté. On aura alors forcément $n-3$ arêtes intérieures. Réciproquement, un graphe admissible comme ça identifie uniquement une décomposition en triangles.

Dans la suite on écrira simplement $E_{\text{half}} = \{1, \dots, n\}$, en supposant d'avoir numéroté les demi-arêtes.

Les nouvelles fonctions d'action qu'on considère sur $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ sont définies comme suit.
Si on se donne un graphe admissible Γ, on suppose d'avoir orienté les arêtes E_{int}. Si $a \in E_{\text{int}}$ est une arête intérieure, on note $I(a) \subseteq \{1, \dots, n\}$ l'ensemble de demi-arêtes qui peuvent être reliées à a par un chemin dans Γ qui ne rencontre pas le sommet terminal de a.
On remarque tout de suite que $I(-a) = \{1, \dots, n\} \setminus I(a)$, si $-a$ dénote l'arête a avec orientation opposée.

On définit la fonction de longueur $\lambda_a : \mathcal{M}_{\mathbf{l}} \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\lambda_a([\mathbf{s}]) := \left| \sum_{i \in I(a)} s_i \right|$$

où $\mathbf{s} \in \widetilde{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}$, et $[\mathbf{s}]$ est sa classe modulo l'action diagonale de SU(2). On remarque que $\lambda_a = \lambda_{-a}$, car la condition $\sum_{i=1}^n s_i = 0$ donne $\sum_{i \in I(a)} s_i = -\sum_{i \notin I(a)} s_i$, et donc les normes euclidiennes de ces deux vecteurs coïncident. Donc λ_a ne dépend pas de l'orientation de a.

On notera ${\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}^*$ le sous-espace ouvert de $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$ où les λ_a sont toutes non nulles, qui est dense dans $\mathcal{M}_{\mathbf{l}}$. Sur ${\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}^*$ les fonctions λ_a sont aussi lisses.

Si l'on note $f_a := \frac{1}{2}\lambda_a^2$, on obtient alors un système intégrable $\{f_a\}_{a \in E_{\text{int}}}$ sur ${\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}^*$, car on peut voir que $\{f_a, f_b\} = 0$ pour tout $a, b \in E_{\text{int}}$. La preuve est tout à fait similaire à celle du chapitre 8, et utilise encore le fait que les flots hamiltoniens des f_a donnent des pliages autour des arêtes intérieures de la triangulation.

Avec les notations de 34, si l'on note $\varphi^{\lambda_a}([(e_1, \ldots, e_n)]) = [(e_1(t), \ldots, e_n(t))]$ le flot de λ_a, alors on a :

$$e_i(t) = \begin{cases} \exp(t \operatorname{ad}_{\tilde{a}} / \lambda_a) e_i, & i \in I(a) \\ e_i, i \notin I(a) \end{cases}$$

où $\tilde{a} := \sum_{i \in I(a)} e_i$ est le segment dans $\mathbb{E}^3$ qui correspond à l'arête intérieure a de la triangulation.

En restreignant encore le domaine des λ_a, on peut les coupler avec $n-3$ fonctions angle $\{\theta_a\}_{a \in E_{\text{int}}}$ pour obtenir un nouveau système de coordonnées action-angle sur un ouvert dense ${\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}^\Gamma \subseteq {\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}^*$. L'ouvert ${\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}^\Gamma$ à considérer dépend bien sûr du graphe Γ, ce qui signifie que l'on a des domaines différents pour tout choix de coordonnées action-angle.
Cette fois-ci θ_a sera l'angle diédrale entre (les plans affines contenants) les deux triangles qui ont le segment correspondant à $a \in E_{\text{int}}$ comme coté commun.

On n'entrera pas dans les détails de cette construction, mais on remarque que finalement on pourra écrire

$$(\Omega_{\mathbf{l}})_{\text{SO}(3)} = \sum_{a \in E_{\text{int}}} d\lambda_a \wedge \theta_a$$

sur ${\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}^\Gamma$.

Pour quantifier nos actions λ_a il nous faut introduire des *opérateur de Casimir* sur $\mathcal{H}_{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}$.

On rappelle que si l'on a une représentation de dimension finie $\rho : \text{SU}(2) \longrightarrow \text{GL}_{\mathbb{C}}(V)$, alors son opérateur de Casimir $Q_\rho : V \circlearrowleft$ est l'endomorphisme autoadjoint donné par :

$$Q_\rho := -(\rho(\xi_1)^2 + \rho(\xi_2)^2 + \rho(\xi_3)^2)$$

où $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \subseteq \mathfrak{su}(2)$ est une $\mathbb{R}$-base orthogonale pour le produit scalaire standard de $\mathfrak{su}(2)$, et où l'on a noté avec un petit abus $\rho : \mathfrak{su}(2) \longrightarrow \mathfrak{gl}_{\mathbb{C}}(V)$ la représentation infinitésimale

associée à ρ.
On choisit la normalisation suivant pour le produit scalaire invariant sur $\mathfrak{su}(2)$:

$$< \xi, \eta >:= -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\xi\eta)$$

On admettra le lemme suivant.

Lemme 55. *Considérons une représentation produit de dimension finie* $\rho_1 \times \rho_2 : \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$. *Notons* $\rho := (\rho_1 \times \rho_2) \circ \iota$ *la représentation de SU(2) donnée par l'inclusion diagonale* $\iota : \mathrm{SU}(2) \hookrightarrow \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$.
Alors :

1. *Les opérateurs de Casimir* Q_{ρ_1} *et* Q_{ρ_2} *commutent.*
2. *Les restrictions de* Q_{ρ_1} *et* Q_{ρ_2} *à la partie* ρ*-invariante* $V^\rho \subseteq V$ *coïncident.*

Revenons maintenant aux SU(2)-modules invariants $\rho_k : \mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V_k)$.

Pour tout $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ on considère la représentation $\rho_{I,\mathbf{l}} : \mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbf{l}})$ donnée par :

$$\rho_{I,\mathbf{l}}(g)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = w_1 \otimes \cdots \otimes w_n, \quad \text{où } w_i := \begin{cases} \rho_k(g)(v_i), & i \in I \\ v_i, & i \notin I \end{cases}$$

En particulier, $\rho_{\{1,\dots,n\},\mathbf{l}}$ est la représentation diagonale sur $V_{\mathbf{l}}$, d'où $V_{\mathbf{l}}^{\rho_{\{1,\dots,n\},\mathbf{l}}} = \mathcal{H}_{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}$ par définition.

On note note maintenant $Q_{I,\mathbf{l}}$ l'opérateur de Casimir de la représentation $\rho_{I,\mathbf{l}}$.
D'après le lemme, les restrictions de $Q_{I,\mathbf{l}}$ et $Q_{\{1,\dots,n\}\setminus I,\mathbf{l}}$ à $\mathcal{H}_{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}}$ coïncident, car $\rho_{I,\mathbf{l}} \times \rho_{\{1,\dots,n\}\setminus I,\mathbf{l}} = \rho_{\{1,\dots,n\},\mathbf{l}}$. On note $H_{I,\mathbf{l}}$ cette restriction.

Pour $a \in E_{\mathrm{int}}$ on a en particulier nos ensembles d'indices $I(a) \subseteq \{1, \dots, n\} = E_{\mathrm{half}}$, qui nous donnent des opérateurs auto-adjoints $H_{I(a),\mathbf{l}} : \mathcal{H}_{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}} \circlearrowleft$. La remarque ci-dessus assure que leur définition de dépend pas de l'orientation de a.

Finalement, on peut montrer qu'une modification de ces opérateurs quantifie les observables classiques λ_a au sens des opérateurs de Toeplitz.
Jusqu'à ici, on a utilisé l'existence d'un isomorphisme $\mathcal{H}_{\mathcal{M}_{\mathbf{l}}} \cong H^0(\mathcal{M}_{\mathbf{l}}, (L_{\mathbf{l}})_{\mathrm{SU}(2)})$, mais on peut aussi définir des isomorphismes $\mathbb{C}$-linéaires pour des puissances tensorielles du fibré préquantifiant :

$$V_{k,\mathbf{l}} : (V_{kl_1} \otimes \cdots \otimes V_{kl_n})^{\mathrm{SU}(2)} \longrightarrow H^0(\mathcal{M}_{\mathbf{l}}, (L_{\mathbf{l}})^{\otimes k}_{\mathrm{SU}(2)})$$

On arrive finalement au résultat suivant.

Théorème 56. *La suite d'opérateurs suivante est un opérateur de Toeplitz dont le symbole principal est* λ_a *:*

$$\left\{ \frac{1}{k^2} V_{k,\mathbf{l}} \circ Q_{I(a),k\mathbf{l}} \circ V_{k,\mathbf{l}}^{-1} : H^0(\mathcal{M}_{\mathbf{l}}, (L_{\mathbf{l}})^{\otimes k}_{\mathrm{SU}(2)}) \circlearrowleft \right\}_{k \geq 1}$$

Pour les détails de la preuve, voir [**CHAquant**].

Une introduction à la théorie des feuilletages

Exposé de M1

Chapitre 10

Feuilletages : Définition et premières propriétés

10.1 Définitions

On Considérera toujours une n-variété différentielle M de classe C^r, avec $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$. On fixe $0 \leq p \leq n$ un entier.

Définition 10.1. Un *atlas de cartes feuilletées* de dimension p et de classe C^k, $k \leq r$, sur M est un atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ de classe C^k sur M tel que :

— on a $\varphi_\alpha(U_\alpha) = V \times T$ pour tout $\alpha \in A$, avec $V \subseteq \mathbb{R}^p$ et $T \subseteq \mathbb{R}^{n-p}$ ouverts

— on a des changements de coordonnées du type

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : (x, y) \longmapsto (f_{\alpha,\beta}(x, y), g_{\alpha,\beta}(y))$$

pour tout $\alpha, \beta \in A$ et pour tout $(x, y) \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$.

Un *feuilletage* $\mathcal{F}$ de dimension p et de classe C^k sur M est un atlas *maximal* de cartes feuilletées de dimension p et de classe C^k. Si M est de dimension n, on appelle l'entier $n - p$ la *codimension* du feuilletage. Une *variété feuilletée* de classe C^k est une couple $(M, \mathcal{F})$, où M est une variété C^r et $\mathcal{F}$ un feuilletage C^k sur M.

On remarque que si $\varphi : U \longrightarrow V \times T$ est une carte feuilletée C^k alors $\varphi^{-1} : V \times \{y\} \longrightarrow U$ est un *plongement* pour tout $y \in T$; de même pour $\varphi^{-1} : \{x\} \times T \longrightarrow U$, $x \in V$.

On introduit encore quelques notats.

Définition 10.2. Si $\varphi : U \longrightarrow V \times T$ est une carte locale d'un feuilletage $\mathcal{F}$ alors les sous-variétés de classe C^k de U données par $\varphi^{-1}(V \times \{y\})$ sont appelés les *feuilles locales*, ou *plaques locales*, de $\mathcal{F}$ dans cette carte. Les sous-variétés $\varphi^{-1}(\{x\} \times T)$ sont les *transverses locales* de $\mathcal{F}$.

Remarque 47. Les feuilles locales sont indépendantes des cartes, dans le sens suivant : si $(U, \varphi), (U', \varphi')$ sont deux cartes feuilletées de $\mathcal{F}$ et si $x, y \in U \cap U'$, alors x, y sont dans une même feuille locale pour la carte (U, φ) si et seulement s'ils le sont pour la carte (U', φ').

Cela suit directement de la définition du feuilletage. Supposons par exemple $x, y \in \varphi^{-1}(V \times \{t\})$, où $\varphi : U \longrightarrow V \times T$ et $t \in T$. On aura donc $x = \varphi^{-1}(x', t)$, $y = \varphi^{-1}(y', t)$, pour $x', y' \in V$ convenables.
Alors :

$$\varphi'(x) = \varphi'(\varphi^{-1}(x', t)) = \varphi' \circ \varphi^{-1}(x', t) = (f(x', t), g(t))$$

où f, g sont des fonctions données par l'atlas de cartes feuilletées.
De même :

$$\varphi'(y) = \varphi'(\varphi^{-1}(y', t)) = \varphi' \circ \varphi^{-1}(y', t) = (f(y', t), g(t))$$

On voit donc que $x, y \in \varphi'^{-1}(V' \times (g(t)))$, où l'on a supposé $\varphi' : U' \longrightarrow V' \times T'$. Ici f est à valeurs dans V', et g à valeurs dans T'.
Réciproquement, avec un raisonnement similaire, si x, y sont dans des feuilles locales différent selon φ alors le même est vrai pour φ'.
On peut dire que la définition du feuilletage $\mathcal{F}$ est donnée afin que les feuilles locales soient bien définie, c'est à dire indépendantes de la carte locale choisie.
On remarque en passant que deux feuilles locales différentes sont *disjointes*.

Maintenant on a une façon naturelle, purement topologique, pour définir les feuilles globales d'une variété feuilletée.

Remarque 48. L'espace topologique $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ est muni de la topologie standard (euclidienne), en tant que variété topologique. Cette topologie coïncide avec le produit de cette topologie standard sur $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^{n-p}$.
On peut quand même définir une deuxième topologie sur notre espace produit, qui résulte plus fine de l'originelle, afin de "séparer" le feuilles $\mathbb{R}^p \times \{y\}$ du notre feuilletage : l'idée est de considérer le produit de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^p$ et de la topologie *discrète* sur $\mathbb{R}^{n-p}$ (l'espace des *paramètres* des feuilles).
On remarque que cette topologie est *strictement* plus fine de celle usuelle si $0 < p < n$, et que ses composantes connexes sont les sous-espaces affines $\mathbb{R}^p \times \{y\}$, pour $y \in \mathbb{R}^{n-p}$.
La remarque cruciale est que les homéomorphismes locaux de $\mathbb{R}^n$ de la forme

$$(x, y) \longmapsto (f(x, y), g(y))$$

sont aussi des homéomorphismes locaux pour cette nouvelle topologie sur $\mathbb{R}^n$.
Cela va devenir le modèle local d'une variété feuilletée $(M, \mathcal{F})$, en modifiant de façon convenable la topologie naturelle de M.

Définition 10.3. Soit $(M, \mathcal{F})$ une variété feuilletée.
La variété M admet une seule topologie telle que les cartes feuilletées de $\mathcal{F}$ soient des homéomorphismes entre des ouverts de M et des ouverts de $\mathbb{R}^n$, muni de la nouvelle topologie qu'on vient d'introduire. On appelle *topologie des feuilles* cette nouvelle topologie sur M.
Si $A \subseteq M$ est une partie de notre variété, on appelle encore *topologie des feuilles* sur A la topologie induite sur A par la topologie des feuilles sur M.

Remarque 49. La topologie des feuilles est plus fine de la topologie originelle sur M ; de plus, si $0 < p < n$ alors elle est strictement plus fine.
Comme la topologie de M était séparée, la topologie des feuilles l'est encore.
Les feuilles locales sont ouvertes pour la topologie des feuilles. En effet, si $\varphi : U \longrightarrow V \times T$ est une carte feuilletée, alors $V \times \{y\}$ est un élément de la base de la topologie produit de $V \times T$, car on a la topologie discrète sur T.

Remarque 50. Cette dernière définition contient en effet une petite prop, qu'on admettra, et que décrit la topologie des feuilles comme une particulière *topologie faible* sur M ; on peut donner une précision.

Proposition 57. *Soit X un ensemble, et $\{X_i\}_{i\in I}$ une famille de parties de X. On suppose chaque X_i munie d'une topologie.*
L'ensemble X admet une unique topologie vérifiant la propriété suivante :
— *un sous-ensemble $O \subseteq X$ de X est ouvert si et seulement si $O \cap X_i$ est ouvert pour la topologie de X_i, pour tout $i \in I$*
Cette unique topologie est appelée la topologie faible *de X définie par la famille $\{X_i\}_{i\in I}$.*

Remarque 51. La propriété de la prop entraîne les deux suivantes :

1. une partie $F \subseteq X$ est fermée pour la topologie faible sur X si et seulement si $F \cap X_i$ l'est pour la topologie de X_i, pour tout $i \in I$
2. pour tout espace topologique Y et toute application $f : X \longrightarrow Y$, f est continue pour la topologie faible sur X si et seulement si la restriction $f_{|X_i} : X_i \longrightarrow Y$ est continue pour la topologie de X_i, pour tout $i \in I$

Exemple 10.1. Un espace topologique X est discret si et seulement si sa topologie est la topologie faible définie par la famille des singletons $\{\{x\}\}_{x\in X}$.

Dans notre contexte, on considère la variété feuilletée $(M, \mathcal{F})$, où l'on suppose $\mathcal{F} = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$, et $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha \times T_\alpha$. On a défini sur $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^p$ la topologie induite par celle euclidienne, et sur $T_\alpha \subseteq \mathbb{R}^{n-p}$ la topologie discrète (induite par la topologie discrète).
Fixons $\alpha \in A$. On peut définir sur U_α l'unique topologie tel que φ_α soit un homéomorphisme avec le produit de ces topologies à l'arrivée : on déclare que $\varphi^{-1}(O)$ est ouvert pour tout $O \subseteq V_\alpha \times T_\alpha$ ouvert dans cette topologie produit, et que rien d'autre n'est ouvert.
Alors on peut définir la topologie des feuilles sur M comme la topologie faible définie par la famille $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, avec les topologies ci-dessus.

Définition 10.4. Soit $(M, \mathcal{F})$ une variété feuilletée, et $x \in M$ un point.
On appelle *feuille* du feuilletage $\mathcal{F}$ *passant pour* x la composante connexe de x dans la topologie des feuilles de M. On la note $\mathcal{F}_x$.

10.2 Champs de p-plans

On introduit maintenant les champs de $p-$plans, objets que l'on peut penser comme généralisation des champs de vecteurs. Ils seront utilisés dans la suite pour donner une autre définition de feuilletage, en utilisant le théorème 64.
Si V est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n, et si $k \in \{0, ..., n\}$, on note $\mathcal{G}_k(V)$ la

variété compacte de dimension $n(n-k)$ des sous-espaces vectoriels de dimension k de V. On l'appelle la *variété grassmannienne* de rang k de V.
On introduit la fibration grassmannienne d'une variété, en admettant la prop suivante.

Proposition 58. *Soit $p : E \longrightarrow B$ un fibré vectoriel C^r de rang n, et soit $k \in \{1, ..., n\}$. On note $\mathcal{G}_k E := \coprod_{b \in B} \mathcal{G}_k(p^{-1}(b))$ la somme disjointe des variétés grassmanniennes de rang k des fibres de p. On note aussi $\mathcal{G}_k p : \mathcal{G}_k E \longrightarrow B$ l'application qui à un élément de $\mathcal{G}_k(p^{-1}(b))$ associe le point $b \in B$.*
Cette projection admet une unique structure de fibration C^r telle que, pour toute inverse de trivialisation locale $h : U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow p^{-1}(U)$ de p au dessus d'un ouvert U de B, l'application $(x, A) \longmapsto h(x, A)$ de $U \times \mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n)$ dans $(\mathcal{G}_k p)^{-1}(U)$ soit l'inverse d'une trivialisation locale de $\mathcal{G}_k(p)$ au dessus de U.
Cette fibration s'appelle la fibration grassmannienne de rang k du fibré vectoriel E, ou fibré des $k-$plans de E.

Définition 10.5. Soit M une variété C^{r+1}. On appelle *fibration grassmannienne* de M da rang k la fibration grassmannienne de rang k de son fibré tangent $\pi : TM \longrightarrow M$, qui est de classe C^r.
Précisément, on a donné un nom à la fibration $\mathcal{G}_k \pi : \mathcal{G}_k TM \longrightarrow M$, qui à un sous-espace de dimension k de $T_x M$ associe le point x, pour tout $x \in M$.

Définition 10.6. Un *champ de p-plans* de classe C^k sur M est une section C^k de la fibration grassmannienne de rang p de M.

Remarque 52. En termes intuitifs, un champ de p-plans de classe C^k sur M, qu'on note Δ, est la donnée, pour tout point x de M, d'un sous-espace vectoriel Δ_x de dimension p de l'espace tangent $T_x M$ qui "dépend de manière C^k de x". L'écriture $\Delta_x \subseteq T_x M$ a un sens. En raisonnant dans un ouvert de carte $U \subseteq M$, notre champ de p-plans s'identifie à une application $\Delta_{|U} : U \longrightarrow \mathcal{G}_p(\mathbb{R}^n)$ de classe C^k.

Un feuilletage C^k définit de façon naturelle un champ de p-plans de classe C^{k-1} dans une variété feuilletée.
Si $(M, \mathcal{F})$ est une variété feuilletée C^k, il suffit de poser $\Delta_x := T_x \mathcal{F}_x$: on associe à tout point x de M l'espace tangent de dimension p à la feuille $\mathcal{F}_x$, qu'on démontrera être une p-variété.

10.3 Orientation transverse

On définit ici la notion de feuilletage transversalement orientable, qui sera utilisée dans le démonstration du théorème de Novikov.
On considère Δ un champ de p-plans C^r sur M.
On dit qu'un deuxième champ de p-plans δ' sur M est *complémentaire* à Δ (où *transverse* à Δ) si l'on a $T_x M = \Delta_x \oplus \Delta'_x$ pour tout $x \in M$. Simplement, on veut qu'ils soient complémentaires en tout point de M.
Évidemment, Δ' est alors un champ de $n-p$-plans sur M.

Remarque 53. Supposons Δ soit de classe C^r sur M. On peut fabriquer un complémentaire de Δ de même régularité comme suit.
Tout d'abord, on fixe une *métrique Riemannienne* $<,>$ sur M, que l'on peut définir grâce à une partition de l'unité : il suffit de recoller les pull-backs de la métrique euclidienne standard sur les images des ouverts de carte d'un atlas de M. On note $<,>_{|x}$: $T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ le produit scalaire sur T_xM défini par $<,>$ au point $x \in M$.
Posons, pour $x \in M$:

$$\Delta_x^{\perp} := \{v \in T_xM | < u, v >_{|x} = 0 \quad \text{pour tout} \quad u \in \Delta_x\}$$

On a alors $T_xM = \Delta_x \oplus \Delta_x^{\perp}$ pour tout $x \in M$, et on peut vérifier que $\Delta^{\perp}$ est un champs de plans C^r de codimension p sur M.

On peut maintenant donner notre notion d'orientation par champs de plans transverses.

Définition 10.7. Soit Δ un champ de p-plans continu sur la $n-$variété M.
On dit que Δ est *transversalement orientable* s'il admet un complémentaire orientable.

On aurait pu demander que *tous* les champs de plans complémentaires étaient orientables, grâce à la prop suivante.

Proposition 59. *Si Δ est transversalement orientable, tout champ de plans continu complémentaire à Δ est orientable.*

Si M était orientable, avoir champs de plans orientables ou transversalement orientable est la même chose.

Théorème 60. *Soit Δ un champ de $p-$plans C^r sur une variété M.*
On a alors les propriétés suivantes :

1. *si Δ est orientable et transversalement orientable, alors M est orientable*
2. *si M est orientable, alors Δ est orientable si et seulement si il est transversalement orientable*

Revenons aux feuilletages.

Définition 10.8. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage C^r de dimension p sur une variété M.
On dit que $\mathcal{F}$ est *orientable* si le champs de p-plans tangents à $\mathcal{F}$ l'est.
On dit que $\mathcal{F}$ est *transversalement orientable* si le champs de p-plans tangents à $\mathcal{F}$ l'est.

10.4 Revêtement double d'orientation

Le *revêtement double d'un champ* de p-plans Δ est défini comme suit. Posons :

$$\tilde{M} := \{(x, \mathcal{O}) | x \in M, \mathcal{O} \text{ orientation de } \Delta_x\}$$

Considérons la projection naturelle $\pi : \tilde{M} \to M$, avec $\pi(x, \mathcal{O}) := x$.
Avec cette donnée, il existe un et un seul atlas sur $\tilde{M}$ qui fait de $\tilde{M}$ une variété différentiable

et de π un revêtement à deux feuillet.
Le revêtement double de Δ est par définition son tiré-en-arrière $\pi^*(\Delta)$, défini par :

$$\pi^*(\Delta)_x := D(\pi)_{|x}^{-1}(\Delta_{\pi(x)})$$

On a alors la prop suivante, qu'on ne démontrera pas.

Proposition 61. *Supposons M connexe, et soit Δ un champ de p-plans sur M. Soit puis $(\tilde{M}, \pi, \pi^*(\Delta))$ le revêtement double d'orientation de Δ.*
Alors :

1. *$\pi^*(\Delta)$ est orientable*
2. *$\tilde{M}$ est connexe si et seulement si Δ n'était pas orientable*

10.5 Autres propriétés

Voici quelques propriétés immédiates des feuilletages :

Remarque 54. Les feuilles de $\mathcal{F}$, étant les composantes connexes de M pour la topologie des feuilles, définissent une partition de M.
En général, l'ensemble des feuilles sera non dénombrable.
De plus, on peut montrer que l'espace topologique $\mathcal{F}_x$, muni de la topologie des feuilles induite par celle de M, est séparé et a base dénombrable. Elles sont donc des variétés différentiables, grâce à l'atlas défini par le feuilletage. La séparation a déjà été mentionnée.

Le fait que $\mathcal{F}_x$ soit à base dénombrable suit du fait que l'on peut choisir $\mathcal{F}$ de façon que $\mathcal{F}_x$ soit réunion dénombrable de feuilles locales, pour tout $x \in M$.
Pour montrer ça, on va choisir un atlas convenable pour la variété M. On sait que toute variété différentiable M admet une *exhaustion* en compact, c'est à dire une famille $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de parties compactes de M telle que $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ et $K_n \subseteq \mathrm{Int}(K_{n+1})$ pour tout $n \leq 1$.
On dit aussi que M est *dénombrable à l'infini.*
On peut alors choisir un atlas feuilleté $(U_\lambda, \varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de M tel que :

1. $card(\Lambda) = \aleph_0$
2. les U_λ sont relativement compacts
3. pour tout $\lambda \in \Lambda$, on a $U_\lambda \cap U_{\lambda'} = \varnothing$ sauf pour un nombre fini de $\lambda' \in M$

Disons : le graphe des intersections des domaines de carte de notre atlas a tous les *sommets* de degré fini.
Fixons un point $x \in M$, et soit $\mathcal{F}_x$ le feuille passant par x. On veut l'écrire comme réunion dénombrable de feuilles locales.
On commence en choisissant un indice $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que $x \in U_{\lambda_0}$, et on prend la plaque locale contenant x dans U_{λ_0}, à savoir $\mathcal{F}_x \cap U_{\lambda_0}$. Puis, pour tout $\lambda \in \Lambda$ tels que $U_{\lambda_0} \cap U_\lambda \neq \varnothing$, on prend la feuille locale dans U_λ d'un point quelconque de l'intersection $U_{\lambda_0} \cap U_\lambda$. La famille $\Lambda_0 := \{\lambda \in \Lambda | \lambda_0 \cap \lambda \neq \varnothing\}$ est finie par hypothèse, et on numérote ses éléments ainsi : $\Lambda_0 = \{\lambda_{0,1}, ..., \lambda_{0,i_0}\}$.
Maintenant on fait de même pour tout indice $\lambda_{0,k}$, où $1 \leq k \leq i_0$, en obtenant des familles finies $\Lambda_{0,k} := \{\lambda \in \Lambda | U_{\lambda_{0,k}} \cap U_\lambda \neq \varnothing\}$, et en choisissant toujours la feuille locale d'un point

quelconque de $U_{\lambda_{0,k}} \cap U_\lambda$.
On peut continuer comme ça, et comme $card(\Lambda) = \aleph_0$ on ne peut construire qu'une infinité dénombrable de parties finies de Λ (voir figure 10.1). De plus, le cardinal de la réunion disjointe de ces parties finies est encore $\aleph_0$.
Enfin, la réunion de toutes ces feuilles locales donne $\mathcal{F}_x$, car on ne peut trouver une feuille locale qui lui correspond si l'on ne suit pas un *parcours* de plaques parmi les domaines de carte de notre atlas feuilleté. C'est la définition de feuille globale comme composante connexe pour la topologie des feuilles qui entraîne ça.

Notons encore qu'une feuille rencontre un domaine de carte feuilletée en une réunion (disjointe) au plus dénombrable de feuilles locales ; cela peut se montrer directement avec le même raisonnement qu'on vient de faire, en utilisant un atlas qui a cette bonne propriété d'intersections finies.
Remarquons enfin que cette famille au plus dénombrable de plaques peut s'accumuler dans le domaine de carte considéré.

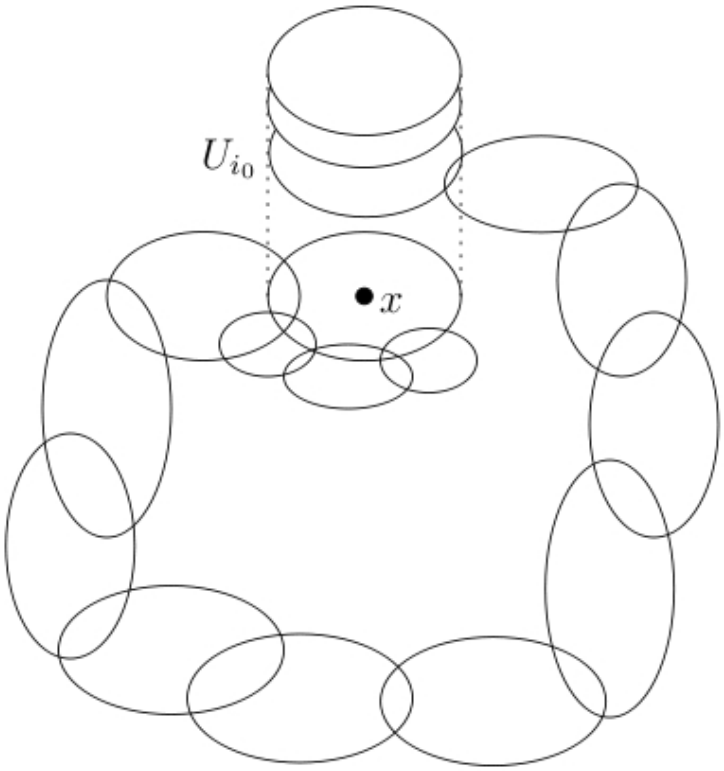


FIGURE 10.1 – Parcours de plaques

On peut maintenant exprimer de manière précise le fait qu'un feuilletage de dimension p sur une variété M définit une partition de M en variétés de dimension p, avec la remarque suivante.

Remarque 55. Comme les feuilles locales de $\mathcal{F}$ sont des sous-variétés C^k, chaque feuille $\mathcal{F}_x$, munie de sa topologie des feuilles et de son atlas des feuilles locales est une variété C^k.

De plus, si on munit $\mathcal{F}_x$ de la topologie induite par la topologie originelle de M, alors elle résulte en une sous-variété *immergée* de M, avec l'inclusion canonique.
En général $\mathcal{F}_x$ n'est pas une sous-variété (*plongée*) de M : il se peut que l'inclusion canonique ne soit pas un homéomorphisme sur son image (on verra un exemple de ça).
Par abus de notat, on utilise la même notat pour le feuilletage $\mathcal{F}$ et la partition de M en feuilles de $\mathcal{F}$.

Remarque 56. On peut définir le quotient d'une variété feuilletée par son feuilletage.
Soit $(M, \mathcal{F})$ une variété feuilletée, avec $\mathcal{F}$ de codimension k. Supposons que les feuilles de $\mathcal{F}$ soient fermées dans M.
On définit l'*espace des feuilles* de la variété feuilletée $(M, \mathcal{F})$ comme l'espace topologique quotient $M/\sim$, par la relation d'équivalence où $x \sim y$ si et seulement si $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}_y$: on identifie les point de M dans la même feuille de $\mathcal{F}$.
Cette construction donne des exemples de ce qu'on appelle des *variétés non séparées*, car l'espace des feuilles est en général localement homéomorphe à $\mathbb{R}^k$, mais par contre il n'est pas toujours séparé.

Chapitre 11

Exemples

11.1 Submersions

Soit $f : M \longrightarrow N$ une submersion entre variétés de classe C^k, avec M de dimension m et N de dimension n.
D'après le théorème de *forme normale* des submersions, on voit que si $x \in M$ et $y = f(x) \in N$, alors on a deux cartes locales (U, φ) autour de x dans M et (V, ψ) autour de y dans N telles que $\varphi(U) = U_1 \times U_2$, avec $U_1 \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ et $U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ ouverts et $\psi(V) = V_2 \supseteq U_2$, de façon que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U_1 \times U_2 \longrightarrow U_2$ coïncide avec la projection sur le premier facteur.
Si on choisit des telles cartes pour tout point $x \in M$, on construit alors un atlas feuilleté C^k de M, de dimension $m-n$. De plus, avec ces hypothèses sur f on voit que les ensemble de niveau $f^{-1}(c)$ sont des sous-variétés de dimension $m-n$ de M pour tout point $c \in N$ de fibre non vide : cela suit encore du théorème de forme normale pour les submersions : il nous assure que les fibres de valeurs réguliers sont des sous-variété. On peut vérifier que les feuilles de ce feuilletage sont exactement les composantes connexes des sous-variétés de niveau de f.

Exemple 11.1. Voici un exemple concret.
Considérons la submersion $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x_1, x_2, x_3) := \alpha(r^2)e^{x_3}$, où $r = r(x_1, x_2) := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ et $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction lisse telle que $\alpha(1) = 0$, $\alpha(0) = 1$ et $\alpha'(t) < 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Notre submersion définit un feuilletage lisse de dimension 2 sur $\mathbb{R}^3$, qu'on appelle $\mathcal{F}$.
Dans ce cas-là, on peut étudier les classes d'homéomorphismes des feuilles de $\mathcal{F}$. Soit $C := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ le cylindre solide d'axe la droite $\{x_1 = x_2 = 0\}$ et de rayon de base 1.
Il se trouve que le bord $\partial C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ du cylindre est une feuille, à savoir $f^{-1}(0)$. Les feuilles à l'extérieur de C, c'est à dire celles contenues dans $\mathbb{R}^3 \setminus C$, sont toutes homéomorphes à des cylindres. Par contre, les feuilles dans l'intérieur de C sont homéomorphes à $\mathbb{R}^2$; on peut les paramétrer par la famille d'applications $\varphi_c : (x_1, x_2) \longmapsto \left(x_1, x_2, \log\left(\frac{c}{\alpha(r^2)}\right)\right)$, définies sur la boule unitaire de $\mathbb{R}^2$ (par la métrique usuelle) dans $\mathbb{R}^3$, où $c > 0$.

11.2 Champs de vecteurs sans points singuliers

Soit X un champ de vecteurs C^{k-1} ne s'annulant pas sur M (avec la convention $\infty - 1 = \infty$, $\omega - 1 = \omega$).
Le théorème du redressement local de champs de vecteurs autour d'un point non singulier montre que M admet un feuilletage C^k de dimension 1, dont les feuilles sont les courbes intégrales de X.
Le résultat auquel on s'appelle est un théorème de *forme normale locale* pour un champ de vecteur ne s'annulant pas en un point. Sur $\mathbb{R}^n$, le champ de vecteurs constant $X_{e_1} : x \longmapsto e_1$, où e_1 est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, est un exemple de tel champ.
Le théorème suivant dit que, localement et a difféomorphismes près, c'est le seul.

Théorème 62. *Soit X un champ de vecteurs C^k sur une variété M de classe C^{k+1}. Pour tout point x_0 de M tel que $X(x_0) \neq 0$, il existe une carte locale (U, φ) en x_0 de classe C^k telle que*

$$\varphi_*(X_{|U}) = (X_{e_1})_{|\varphi(U)}$$

On rem que $X_{|U}$ dénote la restriction de X à l'ouvert U, et que $\varphi_*(X_{|U})$ est le *push-forward* du champ de vecteurs $X_{|U}$ sur $\varphi(U)$ (bien défini puisque φ est un difféomorphisme).

Remarque 57. Cet exemple est un cas particulier de la construction de l'espace des feuilles d'une variété feuilletée.
Soit X un champ de vecteurs C^1 sans points singuliers sur une variété M de classe C^1, tel que les courbes intégrales de X soient fermées dans M. Alors l'espace topologique quotient de M par la relation d'équivalence "appartenir à la même courbe intégrale de X" est localement homéomorphe à $\mathbb{R}$.

11.3 Fibrations

Commençons en définissant les fibrations.

Définition 11.1. Une *fibration* (parfois *fibré localement trivial*) de classe C^k est une application $\pi : E \longrightarrow B$ de classe C^k entre variété C^k, de sorte que pour tout $b \in B$ il existe une variété F de classe C^k, un voisinage ouvert U de b dans B et un C^k-difféomorphisme $\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$, tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times F \arrow[dl, "pr_U"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Où l'on a noté pr_U la projection "verticale" du produit $U \times F$ sur la première composante U.

Voici un peu de terminologie.

Notation 2. On dit que B est la *base*, E *l'espace total*, $\pi^{-1}(b)$ la *fibre* au-dessus de b, U un ouvert *trivialisant*, φ une *trivialisation locale* de π.
Si la variété F ne dépend pas du point b on parle alors d'une *fibration de fibre* F. On désigne souvent une fibration par son espace total, par abus de notat.

On rem encore quelques autres notions pour donner des exemples.

Définition 11.2. Soient $p : E \longrightarrow B$ et $p' : E' \longrightarrow B'$ deux fibrations C^k. Un *morphisme* de fibrations de p dans p' est une couple d'application (f, g) de classe C^k tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "f"] & B' \end{tikzcd}$$

Un *isomorphisme* de fibrations de p vers p' est un morphisme de fibrations (f, g) qui admet un inverse, c'est à dire un morphisme de fibrations (f', g') de p' vers p tel que :

$$g \circ g' = Id_{E'}, g' \circ g = Id_E, f \circ f' = Id_{B'}, f' \circ f = Id_B$$

Deux fibrations sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme entre eux.

Définition 11.3. Soit $p : E \longrightarrow B$ une fibration de classe C^k.
Pour $k' \leq k$, une *section globale* de classe $C^{k'}$ de p est une application $s : B \longrightarrow E$ de classe $C^{k'}$ telle que $p \circ s = Id_B$.

En général des telles sections globales (c'est à dire définies sur B tout entier) n'existent pas.

Exemple 11.2. Si M, F sont variétés C^k, la projection canonique $pr_M : M \times F \longrightarrow M$ sur la première composante du produit est une fibration de fibre F. Elle est dite une fibration *triviale*.
Toute fibration isomorphe à une fibration triviale est dite *trivialisable*

Exemple 11.3. Les revêtements à au plus un nombre dénombrable de feuillets sont des fibrations de fibre discrète.

Exemple 11.4. Les fibrés vectoriels réels C^k de rang n sont des fibrations C^k, de fibre la variété $\mathbb{R}^n$.
En général, une fibration de fibre $\mathbb{R}^n$ n'admet pas une structure de fibré vectoriel évidente, c'est à dire compatible avec celle de fibration.

On peut retourner aux feuilletages.
Considérons une fibration $\pi : E \longrightarrow B$ de classe C^k, de fibre une variété F et dimension p, sur une variété B de dimension n.
Fixons une carte locale (U, φ) de B, où U est un ouvert trivialisant pour π, une carte locale (V, ψ) de F, et une trivialisation locale $\theta : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$ de π au-dessus de U.

Considérons l'application de l'ouvert $W := \theta^{-1}(U \times V)$ de E dans l'ouvert $\varphi(U) \times \psi(V)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ définie par

$$x :\longmapsto (\varphi \times \psi) \circ \theta(x) = (\varphi(\theta(x)), \psi(\theta(x)))$$

On peut vérifier que la collection de ces applications donne un atlas de cartes feuilletées C^k sur E.

11.4 Pull-backs

On peut définir le *pull-back* d'un feuilletage.
Soient $f : M \longrightarrow N$ un C^k-difféomorphisme local entre deux variétés C^k, et $\mathcal{F}$ un feuilletage de N défini par l'atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$. Pour tout point $x \in M$, notons V_x un voisinage ouvert de x dans M tel que $f(V_x)$ soit ouvert dans N et tel que $f_{|V_x}$ soit un C^k-difféomorphisme sur son image.
Alors l'atlas $\{f^{-1}(U_i) \cap V_x, \varphi_i \circ f_{|f^{-1}(U_i) \cap V_x}\}_{i \in I, x \in M}$ est un atlas de cartes feuilletées C^k sur M. Cela définit un feuilletage C^k sur M qu'on note $f^*\mathcal{F}$, et qu'on appelle le *feuilletage image réciproque* de $\mathcal{F}$ par f, ou *pull-back* de $\mathcal{F}$ par f.
L'image $f((f^*\mathcal{F})_x)$ d'une feuille de $f^*\mathcal{F}$ est la feuille $\mathcal{F}_{f(x)}$ de $\mathcal{F}$, mais en général l'image réciproque d'une feuille de $\mathcal{F}$ n'est pas réduite à une seule feuille de $f^*\mathcal{F}$.
Avec cette notion, on peut définir un isomorphisme de feuilletages.

Définition 11.4. Un *isomorphisme* d'une variété feuilletée $(M, \mathcal{F})$ de classe C^k dans une autre $(M', \mathcal{F}')$ est un C^k-difféomorphisme $f : M \longrightarrow M'$ tel que $f^*\mathcal{F}' = \mathcal{F}$. On dit alors que $(M, \mathcal{F})$ et $(M', \mathcal{F}')$ sont *équivalentes*.

De manière équivalente, les applications f, f^{-1} lue par cartes (feuilletées) préservent les familles des sous-espaces horizontaux.

11.5 Actions de groupes

Soit G un groupe discret agissant librement et proprement discontinument par C^k-difféomorphismes sur une variété M de classe C^k. Soit puis $\mathcal{F}$ un feuilletage de M *G-invariant*, c'est à dire tel que $g^*(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ pour tout $g \in G$.
On peut vérifier que la variété quotient M/G admet un unique feuilletage $\mathcal{F}'$ tel que $\pi^*\mathcal{F}' = \mathcal{F}$, où l'on a noté $\pi : M \longrightarrow M/G$ la projection canonique au quotient. Ce feuilletage est appelé le *feuilletage quotient* de $\mathcal{F}$ par l'action de G.

Exemple 11.5. Si F est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de dimension p de $\mathbb{R}^n$, alors $\mathbb{R}^n$ admet un feuilletage dont les feuilles sont les sous-espaces affines translatés de F. De plus, ce feuilletage est $\mathbb{Z}^n$-invariant, si l'on fait agir $\mathbb{Z}^n$ par translations.
Notre feuilletage induit donc par passage au quotient $\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ un feuilletage (analytique) de dimension p du tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$; on l'appelle un *feuilletage linéaire* du tore.
Si on choisit $n = 2$, et si $F \subseteq \mathbb{R}^2$ est une droite de pente irrationnelle dans le plan, on sait

que $\pi(F)$ est une variété immergée du tore difféomorphe à $\mathbb{R}$ qui *n'est pas une sous-variété plongée*. En effet, elle résulte dense dans $\mathbb{T}^2$, mais pas ouverte.
On voit donc un exemple d'un feuilletage dont les feuilles ne sont pas des sous-variétés.

11.6 Actions de groupes de Lie

On commence par un rem.

Définition 11.5. Un *groupe de Lie* G est une variété lisse muni d'une opération de groupe $(g,h) \longmapsto gh : G \times G \longrightarrow G$ telle que l'application $(g,h) \longmapsto gh^{-1} : G \times G \longrightarrow G$ soit C^∞.
Une sous-variété immergée $H \hookrightarrow G$ qui est aussi un sous-groupe est dite un *sous-groupe de Lie* de G.

La définition donnée équivaut au fait que les applications du produit $\mu : (g,h) \longmapsto gh$ et d'inversion $\iota : g \longmapsto g^{-1}$ soient C^∞ pour l'atlas de G.
On peut maintenant considérer des action (*à gauche*) de groupes de Lie sur des variété lisses. Une action C^k d'un groupe de Lie G sur une variété lisse M est une application $\rho : G \times M \longrightarrow M$ de classe C^k telle que $\rho(e,x) = x$ et $\rho(g, \rho(h,x)) = \rho(gh,x)$ pour tout $x \in X$, $g,h \in G$, où l'on a noté avec $e \in G$ l'élément neutre de G.
Dans la suite, on note l'action ainsi : $\rho(g,x) := gx$.
La terminologie usuelle pour les actions de groupe est utilisée dans ce contexte aussi. On appelle *G-orbite* d'un point $x \in M$ l'ensemble $Gx := \{gx | g \in G\} \subseteq M$, et *stabilisateur* de $x \in M$ le sous-groupe $Stab_G(x) := \{g \in G | gx = x\}$ de G. Ici l'action ρ est sous-entendue, mais on parle aussi des orbites et des stabilisateurs de ρ dans le même contexte. On remarque que le sous-groupe $stab_G(x)$ est fermé dans G, et un résultat en théorie des groupes de Lie dit que alors il est un sous-groupe de Lie de G.
Fixons $x \in M$. L'application $\psi_x : G \longrightarrow Gx$ qui à $g \in G$ associe gx est surjective par définition. De plus, elle est constante sur les classes latérales du sous-groupe $stab_G(x)$, et donc factorise au quotient en une application $\bar{\psi}_x : G/stab_G(x) \longrightarrow Gx$. Le quotient est un quotient *d'ensembles*, qui a structure de groupe si et seulement si le stabilisateur de x est distingué dans G.
On peut montrer que le quotient $G/stab_G(x)$ admet une structure différentiable telle que $\bar{\psi}_x$ soit une immersion injective

Pour revenir aux feuilletage, on a besoin d'une autre définition.

Définition 11.6. Soit $\rho : G \times M \longrightarrow M$ une action C^∞ du groupe de Lie G sur la variété lisse M.
On dit que l'action est *feuilletée* si la dimension des espaces tangents aux orbites de ρ est constante.
Si l'on a en particulier $dim_{\mathbb{R}}(T_{gx}Gx) = k$ pour tout $x \in M$ et $g \in G$, on dit que l'action est *feuilletée de dimension k*. Si de plus k est la dimension de G alors on dit que l'action est *localement libre*.

Voici le lien avec les feuilletages, qu'on admet sans démonstration.

Proposition 63. *Les orbites d'une action feuilletée de dimension k définissent un feuilletage lisse de M de dimension k.*

11.7 Feuilletage de Reeb de $\mathbb{S}^3$

On donne un exemple de feuilletage sur $\mathbb{S}^3$, le *feuilletage de Reeb*. Cela est un exemple concret qui à été beaucoup étudié pendant le développement de la théorie des feuilletages. On va décrire la construction de ce feuilletage, qui commence en définissant un feuilletage sur un tore *solide* $D^2 \times \mathbb{S}^1$, où l'on note avec D^2 la boule unité fermée dans $\mathbb{R}^2$ pour la métrique euclidienne.
D'abord, on considère une modification de la submersion de l'exemple dans la section 11.1. Posons $f : D^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, donnée par $f(x_1, x_2, x_3) := \alpha(r)e^{x_3}$, où $r = r(x_1, x_2) := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ et $\alpha(r) := exp\left(-exp\left(\frac{1}{1-r^2}\right)\right)$.
Le feuilletage lisse défini sur $D^2 \times \mathbb{R}$ par f a comme feuilles les graphes des fonctions $\varphi_b : (x_1, x_2) \longmapsto exp\left(\frac{1}{1-r^2}\right) + b$, définies sur D^2 à valeurs dans $\mathbb{R}$, pour $b \in \mathbb{R}$. Ce feuilletage s'étend en un feuilletage lisse de $\mathbb{R}^3$, qu'on note $\mathcal{F}$, dont les feuilles à l'extérieur du cylindre $C := D^2 \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3$ sont les cylindres d'équations $x_1^2 + x_2^2 = \rho^2$, avec $\rho > 1$.
On identifie maintenant les points des deux bases du cylindre compact $D^2 \times [0, 1]$ en disant que $(x_1, x_2, 0) \sim (y_1, y_2, 1)$ si et seulement si $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$. Le quotient $D^2 \times [0, 1]/\sim$ est homéomorphe au tore solide $D^2 \times \mathbb{S}^1$, et puisque le feuilletage $\mathcal{F}$ sur $D^2 \times \mathbb{R}$ est invariant par translations le long de l'axe $\{x_1 = x_2 = 0\}$ on peut définir un feuilletage quotient lisse sur $D^2 \times \mathbb{S}^1$. Cela suit de l'exemple dans la section 11.5.
Ce feuilletage est appelé le *feuilletage orientable de Reeb* de $D^2 \times \mathbb{S}^1$. Il admet une feuille compacte, à savoir le tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ qui donne le bord. De plus, ce feuilletage n'est pas donné par une submersion.
Si on avait considéré l'identification des points de $D^2 \times \{0\}$ avec ceux de $D^2 \times \{1\}$ définie par $(x_1, x_2, 0) \sim (y_1, y_2, 1)$ si et seulement si $x_1 = y_1$ et $x_2 = -y_2$, on aurait trouvé comme quotient $D^2 \times [0, 1]/\sim$ une $3-$variété *non orientable*, qu'on note K^3, dont le bord est C^∞-difféomorphe à une *bouteille de Klein*. Le feuilletage quotient sur cette variété, encore premible puisque l'action du groupe des translations "verticales" préserve les feuilles de $\mathcal{F}$, définit un feuilletage sur K^3.
Ce feuilletage est appelé le *feuilletage non orientable de Reeb* de K^3. Le bord est encore une feuille compacte, et les feuilles à l'intérieur sont toutes homéomorphes à $\mathbb{R}^2$.
Maintenant on va construire un feuilletage sur $\mathbb{S}^3$ en recollant deux feuilletages de Reeb sur $D^2 \times \mathbb{S}^1$.
L'idée topologique à la base est de considérer l'espace $\mathbb{S}^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1\}$ comme la réunion de deux tores solides $T_1, T_2 \cong D^2 \times \mathbb{S}^1$, identifiés le long du bord par des difféomorphismes qui envoient les méridiens de ∂T_1 sur les parallèles de ∂T_2, et réciproquement. À ce point là, le tore solide T_1 est défini par les équations

$$\sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1 \quad \text{et} \quad x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{1}{2}$$

et T_2 par

$$\sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1 \quad \text{et} \quad x_1^2 + x_2^2 \geq \frac{1}{2}$$

Il y a plusieurs premibilités pour décrire cette décomposition de $\mathbb{S}^3$ dans deux tores solides, utilisant par exemple la projection stéréographique du *pole nord* $\pi : \mathbb{S}^3 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, où

$N := (0, 0, 0, 1)$.
Après cette opération purement topologique, il y a une seule façon pour recoller les feuilletages de Reeb sur T_1 et T_2 afin d'obtenir un feuilletage lisse sur $\mathbb{S}^3$ tel que $\partial T_1 = \partial T_2$ soit une feuille.
Ce feuilletage est appelé le *feuilletage de Reeb* de $\mathbb{S}^3$. Il est un feuilletage de codimension 1 ayant une feuille compact, homéomorphe au tore $T^2 \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, à savoir le bord des tores solides qu'on a utilisé pour construire la sphère. De plus, les autres feuilles sont homéomorphes à $\mathbb{R}^2$ et s'accumulent sur la feuille compacte.
Cette situation particulière d'existence d'une feuille compacte à été étudiée dans le contexte plus général des variétés compactes de dimension 3. On verra à ce propos, dans le chapitre 15, un théorème dû à *Novikov*, qui donne une condition purement topologique pour qu'une 3-variété feuilletée compacte admet une feuille compacte (condition liée au groupe fondamental de la variété considérée).

Chapitre 12

Théorème de Frobenius

Dans la suite on travaille avec des variétés C^∞, et on donne une définition qui généralise le fait qu'un champ de vecteurs dans une variété soit intégrable.

Définition 12.1. Un champ de vecteurs X sur M est dit *tangent* au champ de p-plans Δ si pour tout $x \in M$ on a $X(x) \in \Delta_x$.

Définition 12.2. Un champ de p-plans Δ, de classe C^∞ sur M, est dit *intégrable* s'il existe un feuilletage $\mathcal{F}$ lisse de dimension p sur M tel que $\Delta_x = T_x\mathcal{F}_x$ pour tout $x \in M$.

Cela dit qu'il existe une variété tangente au champ de $p-$plans en tout point, à savoir la feuille de notre feuilletage.

Remarque 58. Un tel feuilletage est unique.
En effet, considérons deux feuilletages $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ sur M tel que $T_x\mathcal{F}_x = T_x\mathcal{F}'_x$ pour tout x dans M. Alors la composée $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ d'une carte feuilletée $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ et d'une autre $(U', \varphi') \in \mathcal{F}'$ est (localement) de la forme correcte

$$\varphi' \circ \varphi{-}1 : (x, y) \longmapsto (f(x, y), g(y))$$

car la dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial x}$ de sa seconde composante par rapport à la première variable est nulle.
Cela dit que les atlas $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ sont compatibles, et la condition de maximalité donne $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.

Voici un critère très utile pour l'intégrabilité d'un champ de p-plans.

Théorème 64 (Théorème de Frobenius)**.** *Un champ de p-plans Δ de classe C^∞ sur M est intégrable si et seulement si, pour tous les champs de vecteurs lisses X, Y sur M tangents à Δ, le crochet de Lie $[X, Y]$ sur M est tangent à Δ.*

Pour la démonstration, on utilisera la caractérisation suivant des champs de $p-$plans C^k, qui dit que l'on peut travailler avec p champs de vecteurs C^k indépendants en tout point.

Proposition 65. *Un champ de $p-$plans $\Delta : x \longmapsto \Delta_x$ sur M est de classe C^k si et seulement si, pour tout point $x_0 \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x_0 et p champs de vecteurs $X_1, ..., X_p$ sur U, de classe C^k, tels que $\{X_1(x), ..., X_p(x)\}$ soit une $\mathbb{R}$-base de Δ_x pour tout $x \in U$.*

Démonstration (théorème 64). Supposons d'abord que Δ soit intégrable, défini par le feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension p. Soient X, Y deux champs de vecteurs sur M tangents à Δ, et $x \in M$ un point.
Si l'on montre que $[X, Y](x) \in \Delta_x$ on a démontré la première implication.
Le résultat suit d'un raisonnement local. Si on avait $M = \mathbb{R}^n$, et $\mathcal{F}$ le feuilletage standard $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, alors on aurait $X(z), Y(z) \in \mathbb{R}^p \times \{0\}$, pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, car notre feuilletage définit ce champ de $p-$plans, si l'on identifie $T_x \mathbb{R}^n$ avec $\mathbb{R}^n$.
En effet, $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}_{|z}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}_{|z} \right\}$ est une $\mathbb{R}-$base de $T_z \mathbb{R}^n$ pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, et donc X, Y sont combinaison linéaire des opérateurs de dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_p}$. Mais un crochet de deux tels champs de vecteurs est encore une combinaison linéaire de $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_p}$, et donc $[X, Y]$ est bien tangent à Δ.
La conclusion suit du fait qu'on peut se ramener à cette situation autour de x, en choisissant une carte locale (U, φ) en x et en remplaçant X, Y par $\varphi_*(X_{|U})$ et $\varphi_*(Y_{|U})$ (respectivement).

Réciproquement, supposons que la condition sur le commutateur soit satisfaite. Comme le problème est local, on peut supposer que M soit un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{R}^n$; quitte à le réduire, il existe un $p-$uplet $(X_1, ..., X_p)$ de champs de vecteurs sur M tels que $\{X_1(x), ..., X_p(x)\}$ soit une base de Δ_x pour tout $x \in M$.
Par définition, les champs $X_1, ..., X_p$ sont tangents à Δ, et donc l'hypothèse est que $[X_i, X_j](x) \in \Delta_x$ pour tout $x \in M$, pour tout $i, j \in \{1, ..., p\}$.
On termine la preuve en deux étapes :

1. On montre qu'on peut se réduire au cas où les champs commutent entre eux : $[X_i, X_j] = 0$ pour $1 \leq i, j \leq p$
2. On démontre la deuxième implication avec cette hypothèse supplémentaire

On essaye alors de modifier les champs $X_1, ..., X_p$ en des champs $X'_1, ..., X'_p$ qui commutent entre eux, et qui engendrent encore Δ_x en tout point $x \in M$.
On peut supposer que $X_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}_{|0}$, pour tout $i = 1, ..., p$, à un changement linéaire près. On aura maintenant une matrice de fonction lisses $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$, qui donnent les coordonnées de $X_1, ..., X_p$ dans la base canonique de $T_x M$, pour tout $x \in M$. Cela signifie que l'on à l'écriture :

$$X_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

pour $x \in M$ et $1 \leq i \leq p$.
Quitte à réduire M, on peut supposer que la matrice carrée $(a_{i,j}(x))_{1 \leq i,j \leq p}$, qui vaut l'identité en zéro, soit inversible pour tout $x \in M$ (pour la continuité du déterminant). Soit $(b_{i,j}(x))_{1 \leq i,j \leq p}$ son inverse en tout point de M. Les formules de Cramer montrent que les fonctions $b_{i,j}$ sont encore lisses. Posons :

$$X'_i := \sum_{j=1}^{p} b_{i,j} X_j$$

On va montrer que le $p-$uplet $(X'_1, ..., X'_p)$ de champs de vecteurs convient.
Les $X'_1, ..., X'_p$ sont des nouveaux champs de vecteurs C^∞ sur M. De plus, si on fixe $x \in M$,

on voit que les vecteurs $X_1'(x), ..., X_p'(x)$ sont une nouvelle base du sous-espace de T_xM engendré par $X_1(x), ..., X_p(x)$, c'est à dire de Δ_x.
Par construction, on a $X_i' = \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=p+1}^{n} c_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}$, pour des fonctions lisses $c_{i,j}$ convenables.
En utilisant les propriétés élémentaires du crochet de Lie, on voit que :

$$[X_i', X_j'] = \sum_{k=p+1}^{n} d_{i,j,k} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

pour des autres fonctions lisses $d_{i,j,k} : M \longrightarrow \mathbb{R}$.
Notre hypothèse nous dit que $[X_i', X_j'](x) \in < X_1'(x), ..., X_p'(x) >_{\mathbb{R}} = \Delta_x$ pour tout $x \in M$, et donc on aura des fonctions $e_{i,j,k}$ sur M telles que :

$$[X_i', X_j'] = \sum_{k=1}^{p} e_{i,j,k} X_k' = \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{j=p+1}^{n} c_{k,j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

En soustrayant, on trouve que

$$\sum_{k=1}^{p} e_{i,j,k} \frac{\partial}{\partial x_k} = 0$$

ce qui, par indépendance des $\frac{\partial}{\partial x_k}$, donne $e_{i,j,k} = 0$ pour tout $i, j, k \in \{1, ..., p\}$.
Alors $[X_i', X_j'] = \sum_{k=1}^{p} e_{i,j,k} X_k' = 0$, et pour tout $i, j \in \{1, ..., p\}$, ce qu'il fallait montrer.

Démontrons maintenant le théorème avec les hypothèses $\Delta_x =< X_1(x), ..., X_p(x) >$ pour tout $x \in M$, et $[X_i, X_j] = 0$ pour $i, j = 1, ..., p$.
Notons $t \longmapsto \varphi_t^j$ le flot du champ X_j, et, pour $x_0 \in M$ fixé, $\varepsilon > 0$ convenable, considérons l'application suivante :

$$\psi : [-\varepsilon, \varepsilon]^p \longrightarrow M$$
$$(t_1, ..., t_p) \longmapsto \varphi_{t_1}^1 \circ ... \circ \varphi_{t_p}^p (x_0)$$

Cette fonction a pour image une sous-variété intégrale de Δ.
En effet, on a, pour $1 \leq j \leq p$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t_j} \psi(t_1, ..., t_p) &= \frac{\partial}{\partial t_j} (\varphi_{t_1}^1 \circ ... \circ \varphi_{t_p}^p (x_0)) = \\
&= \frac{\partial}{\partial t_j} (\varphi_{t_j}^j \circ \varphi_{t_1}^1 \circ ... \circ \varphi_{t_{j-1}}^{j-1} \circ \varphi_{t_{j+1}}^{j+1} \circ ... \circ \varphi_{t_p}^p (x_0)) = \\
&= X_j (\varphi_{t_j}^j \circ \varphi_{t_1}^1 \circ ... \circ \varphi_{t_{j-1}}^{j-1} \circ \varphi_{t_{j+1}}^{j+1} \circ ... \circ \varphi_{t_p}^p (x_0))
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que les flots commutent, ainsi que la définition de $\varphi_{t_j}^j$ comme flot de X_j.
Comme les champs $X_1, ..., X_p$ sont linéairement indépendants en tout point, on voit alors que $D\psi_{|(t_1,...,t_p)} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial \psi}{\partial t_j}(t_1, ..., t_p)$ est injective pour tout $(t_1, ..., t_p) \in [-\varepsilon, \varepsilon]^p$, pour ε convenable.
De plus, l'image de $D\psi_{|(t_1,...,t_p)}$ est contenue dans $\Delta_{\psi(t_1,...,t_p)}$, d'après les calculs ci-dessus,

car Δ est engendré par $X_1, ..., X_p$ en tout point. Donc l'image de ψ est une sous-variété tangente à Δ ; comme les deux ont même dimension, elle est une sous-variété intégrale, et on a conclut.

□

Remarque 59. On peut donner une deuxième définition d'un feuilletage (dans le cas C^∞). On peut dire qu'un feuilletage C^∞ de dimension p d'une variété lisse M est la donnée d'un champ de $p-$plans lisse Δ sur M qui soit intégrable. Les feuilles de notre feuilletage seront les sous-variétés tangentes à Δ.
D'après le théorème de Frobenius, on aurait pu demander la propriété suivante pour Δ. Tout point $x_0 \in M$ admet un voisinage $U \subseteq M$, avec p champs de vecteurs $X_1, ..., X_p$ lisses sur U satisfaisants :

1. $\Delta_x =< X_1(x), ..., X_p(x) >$ pour tout $x \in U$
2. $[X_i, X_j](x) \in \Delta_x$ pour tout $x \in U$

En effet, soient X, Y deux autres champs de vecteurs sur M tangents à Δ. Pour tout $x_0 \in M$, si on fixe un voisinage $U \subseteq M$ de x_0 comme ci-dessus, on pourra trouver des fonctions lisses $f_1, ..., f_p, g_1, ..., g_p$ sur U telles que :

$$X_{|U} = \sum_{i=1}^{p} f_i X_i, Y_{|U} = \sum_{i=1}^{p} g_i X_i$$

Mais alors, si on choisit $x \in U$ quelconque, le vecteur $[X, Y](x)$ est contenu dans l'espace vectoriel engendré par les $[X_i, X_j](x)$, par les propriétés élémentaires du commutateur. Cela entraîne que $[X, Y]$ soit tangent à Δ, et donc le théorème de Frobenius nous assure que Δ est intégrable.

Chapitre 13

Propriétés topologiques des feuilles

Fixons une variété feuilletée $(M, \mathcal{F})$ de classe r et codimension q.

13.1 Cartes distinguées et lemmes techniques

Définition 13.1. On dit qu'une carte feuilletée (U, ϕ) de $\mathcal{F}$ est *distinguée* s'elle satisfait les conditions suivantes :

1. il existe une carte feuilletée (U', ϕ') telle que $\overline{U} \subset U'$ et $\phi'|_U = \phi$.
2. $\phi(U) = (-1, 1)^n$;

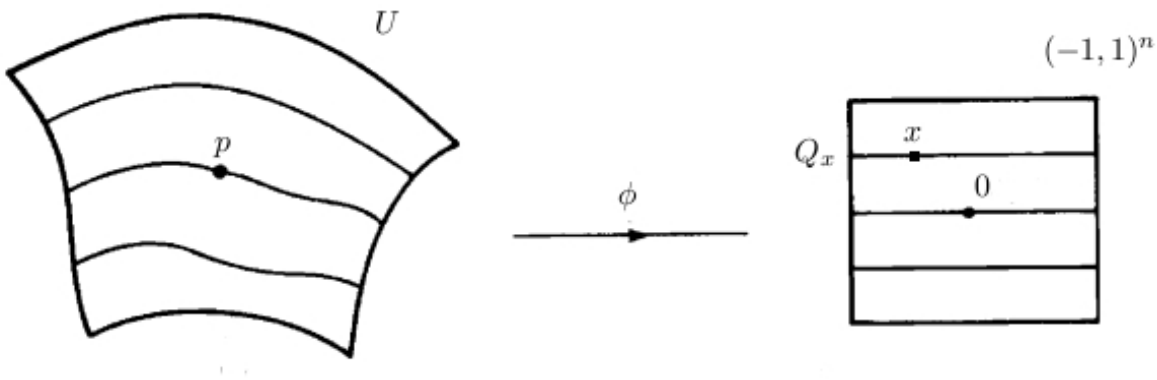


FIGURE 13.1 – Carte distinguée

C'est clair que tout point p de $\mathrm{int}(M)$ appartiennent à une carte distinguée (U, ϕ) avec $\phi(p) = (0, \ldots, 0)$.

Dorénavant, on notera $\hat{\pi} : (-1, 1)^n \to (-1, 1)^q$ la projection sur les dernières q coordonnées.

Si (U, ϕ) est une carte distinguée et $x \in (-1, 1)^q$, on appelle aussi, dans la suite du chapitre 13, l'ensemble $\phi^{-1}(\hat{\pi}^{-1}(x))$ *plaque* de U, et on la notera souvent par Q_x ou Q. Notons que chaque plaque Q est contenue dans une seule feuille de $\mathcal{F}$, qu'elle est

difféomorphe à $(-1,1)^{n-q}$ et que

$$U = \bigcup_{x \in (-1,1)^q} Q_x.$$

Lemme 66. *Si (U_i, ϕ_i) et (U_j, ϕ_j) sont deux cartes distinguées avec $U_i \subset U_j$ et si Q_i est une plaque de U_i, alors il existe un carte distinguée (U_i', ϕ_i') telle que :*

1. *$Q_i \subset U_i' \subset U_i$ et Q_i est une plaque de U_i' ;*
2. *si Q_j est une plaque de U_j avec $Q_j \cap U_i' \neq \emptyset$ alors $Q_j \cap U_i$ est une plaque de U_i'.*

Remarque 60. Notons que la condition 2 du lemme n'est pas triviale : en effet, a priori, il se pourrait que $Q_j \cap U_i$ ait plusieurs composantes connexes (figure 13.2) ; il faut vraiment, donc, se restreindre à une carte distinguée U_i' plus petite de U_i pour éviter ces problèmes.

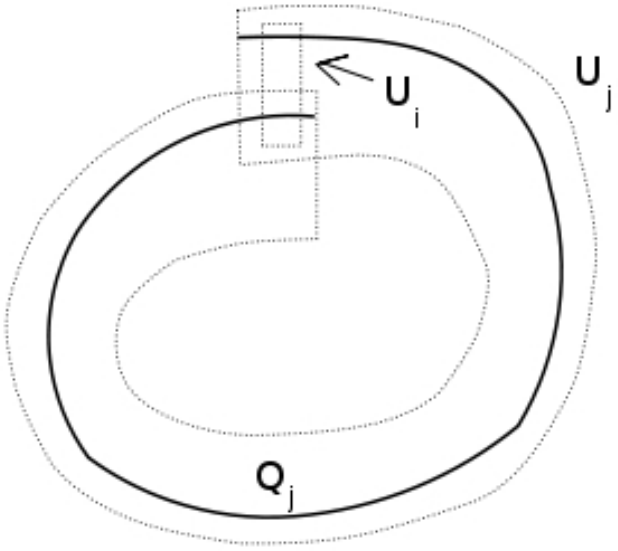


FIGURE 13.2 – Exemple de charte distinguée ne vérifiant pas le lemme 66

Démonstration. Pour le choix de U_i et U_j, chaque plaque de U_i est contenue dans une plaque de U_j. Donc, pour chaque $x \in (-1,1)^q$, on a un unique $x' \in (-1,1)^q$ tel que $Q_x \subset Q_{x'}$. Posons $\zeta : (-1,1)^q \to (-1,1)^q$, $\zeta(x) = x'$; alors, ζ est une immersion C^r. De plus, si on fixe une plaque $Q_i = (\hat{\pi} \circ \phi_i)^{-1}(\hat{x})$ dans U_i, pour un certain $\hat{x} \in (-1,1)^q$, on peut trouver un $\epsilon > 0$ tel que, si l'on pose

$$\hat{U} := \prod_{i=1}^{q} (\hat{x}_i - \epsilon, \hat{x}_i + \epsilon),$$

alors $\zeta|_{\hat{U}}$ est un plongement C^r.

Donc, finalement, il suffit de poser $U_i' := (\hat{\pi} \circ \phi_i)^{-1}(\hat{U})$ et $\phi_i' := \phi_i|_{\hat{U}}$ pour obtenir, quitte à modifier le domaine par une homothétie, la carte distinguée (U_i', ϕ_i') voulue. $\square$

Soit maintenant $\mathfrak{C} = \{U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_m}\}$ une suite de cartes distinguées $(U_{\lambda_i}, \phi_{\lambda_i})$, $i = 1, \ldots, m$. Soit x un point dans une plaque Q_1 de U_{λ_1}. S'il existe des plaques Q_i de U_{λ_i}, $i = 1, \ldots, m$ telles que $Q_i \cap Q_{i+1} \neq \emptyset$, $i = 1, \ldots, m$, on appelle $\mathfrak{C}$ une *chaîne en x* et on appelle *longueur de $\mathfrak{C}$* l'entier m (figure 13.3).

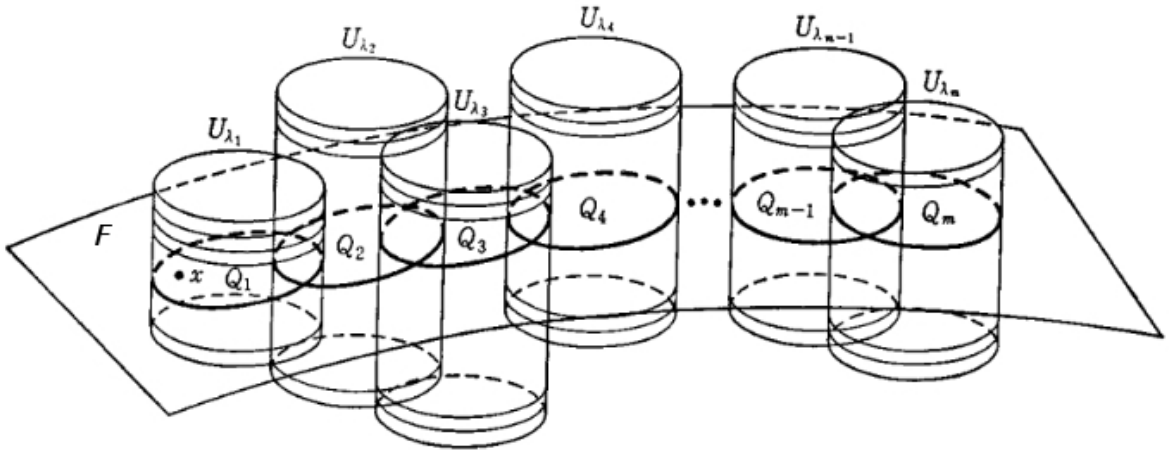


FIGURE 13.3 – Exemple de chaîne en x de longueur m

Remarque 61. Si $\mathfrak{C}$ est une chaîne en $x \in Q$ alors elle l'est en tout point $y \in Q$.

On commence à étudier les propriétés des chaînes par un lemme immédiat :

Lemme 67. *Soit $\mathfrak{C} = \{U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_m}\}$ une chaîne en x et*

$$O = \{z \in U_{\lambda_1} \mid \mathfrak{C} \text{ est une chaîne en } z\}.$$

Alors O est un ouvert de U_{λ_1} qui est réunion de plaques de U_{λ_1}.

Démonstration. Soit $O_m = U_{\lambda_m}$ et, par récurrence,

$$O_i = (\hat{\pi} \circ \phi^i_{\lambda_i})(\hat{\pi} \circ \phi_{\lambda_i})(U_{\lambda_i} \cap O_{i+1}),$$

pour $i = m-1, \ldots, 1$. Alors on a simplement $O = O_1$, qui est bien ouvert dans U_{λ_1}. □

On va maintenant remer un lemme classique sur les espaces métriques qui sera utile pour la suite de cette section ainsi que pour l'étude de l'holonomie au chapitre suivant :

Lemme 68. *Soit X un espace métrique, K un sous ensemble compact de X et U'_i, $i = 1, \ldots, v'$, ouverts de X tels que $K \subset \cup_{i=1}^{v'} U'_i$. Alors il existe des ouverts U_i, $i = 1, \ldots, v$ tels que :*

1. *$K \subset \cup_{i=1}^{v} U_i$;*
2. *si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, alors $U_i \cup U_j \subset U'_k$ pour un $1 \leq k \leq v'$.*

Démonstration (Idée). Comme K est un espace métrique compact, on peut trouver un nombre de Lebesgue $\delta > 0$ associé au recouvrement ouvert $\{U'_i \cap K\}_i$ de K. Alors, il suffit de choisir les U_i, $i = 1, \ldots, v$, satisfaisants la condition 1 avec diamètre $d(U_i) < \frac{\delta}{2}$. □

Voici un autre lemme sur les propriétés des chaînes en un point fixé :

Lemme 69. *Soit F une feuille et soient $x, y \in F$. Alors il existe une chaîne $\mathfrak{C} = \{U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_m}\}$ en x telle que :*

1. *$x \in U_{\lambda_1}$ et $y \in U_{\lambda_m}$;*
2. *si $\mathfrak{C}$ est aussi un chaîne en un certain point $z \in U_{\lambda_1}$ contenu dans une feuille F' et si $\{Q'_i \mid i = 1, \ldots, m\}$ est une chaîne de plaques associée à $\mathfrak{C}$ en z telle que*

$$Q'_i \subset U_{\lambda_i} \cap F' \ , \quad z \in Q'_1 \ , \quad i = 1, \ldots, m \ ,$$

alors, pour chaque $i = 1, \ldots, m-1$, Q'_{i+1} est l'unique plaque de $U_{\lambda_{i+1}}$ qui intersecte Q'_i et, de même, Q'_i est l'unique plaque de U_{λ_i} qui intersecte Q'_{i+1}.

Démonstration. Soit $l : [0,1] \to F$ une courbe continue avec $l(0) = x$ et $l(1) = y$. Recouvrons $l([0,1])$ par des cartes distinguées et choisissons finies des cartes parmi elles pour construire une chaîne $\mathfrak{C}'' = \{U_{\xi_1}, \ldots, U_{\xi_{m'}}\}$ en x, telle que $x \in U_{\xi_1}$ et $y \in U_{\xi_{m'}}$.

En regardant $\cup_{i=1}^{m'} U_{\xi_i}$ comme un espace métrique, on peut appliquer le lemme 68 à $U'_i = U_{\xi_i}$, $v' = m'$ et $K = l([0,1])$ pour obtenir une chaîne $\mathfrak{C}' = \{U_{\lambda'_1}, \ldots, U_{\lambda'_m}\}$ en x, avec $y \in U_{\lambda'_m}$ et telle que si $U_{\lambda'_i} \cap U_{\lambda'_j} \neq \emptyset$ alors $U_{\lambda'_i} \cup U_{\lambda'_j} \subset U_{\xi_k}$ pour un certain k.

Soit, maintenant, Q_i, $i = 1, \ldots, m$, une chaîne de plaques associée à $\mathfrak{C}'$ en x, avec $x \in Q_1$ et $y \in Q_m$. Comme $\emptyset \neq Q_1 \cap Q_2 \subset U_{\lambda'_1} \cap U_{\lambda'_2}$, il existe un k tel que $U_{\lambda'_i} \cup U_{\lambda'_j} \subset U_{\xi_k}$. En appliquant, or, le lemme 66 à $U_{\lambda'_1} \subset U_{\xi_k}$ et $U_{\lambda'_2} \subset U_{\xi_k}$, on obtient des cartes distinguées $(U_{\lambda''_1}, \phi_{\lambda''_1})$ et $(U_{\lambda''_2}, \phi_{\lambda''_2})$ telles que

$$Q_1 \subset U_{\lambda''_1} \ , \quad Q_2 \subset U_{\lambda''_2} \ ,$$

chacune satisfaisante la propriété 2 du lemme 66. Maintenant, on peut supposer que $U_{\lambda''_2} \cup U_{\lambda'_3} \subset U_{\xi_{k'}}$, pour un certain k', car on a que $\emptyset \neq Q_2 \cap Q_3 \subset U_{\lambda''_2} \cap U_{\lambda'_3}$; donc, on peut appliquer le lemme 66 à $U_{\lambda''_2} \subset U_{\xi_{k'}}$ et $U_{\lambda'_3} \subset U_{\xi_{k'}}$ pour obtenir des $(U_{\lambda'''_2}, \phi_{\lambda'''_2})$ et $(U_{\lambda''_3}, \phi_{\lambda''_3})$ qui vérifient le deux conditions du lemme. En itérant cette procédée, on obtient $(U_{\lambda''_1}, \phi_{\lambda''_1})$ (déjà construite) et des $(U_{\lambda'''_i}, \phi_{\lambda'''_i})$, $i = 1, \ldots, m-1$, et une $(U_{\lambda''_m}, \phi_{\lambda''_m})$. On définit, finalement, $(U_{\lambda_i}, \phi_{\lambda_i})$, pour $i = 1, \ldots, m$ en posant

$$(U_{\lambda_1}, \phi_{\lambda_1}) = (U_{\lambda''_1}, \phi_{\lambda''_1}) \ , \quad (U_{\lambda_m}, \phi_{\lambda_m}) = (U_{\lambda''_m}, \phi_{\lambda''_m}) \quad \text{et}$$
$$(U_{\lambda_i}, \phi_{\lambda_i}) = (U_{\lambda'''_i, \phi_{\lambda'''_i}}) \ , \quad i = 2, \ldots, m-1.$$

Clairement les $(U_{\lambda_i}, \phi_{\lambda_i})$ vérifient la propriété 1 du lemme ; on veut montrer qu'ils vérifient aussi la 2. Comme $U_{\lambda_1} \cap U_{\lambda_2} \subset U_{\xi_k}$ pour un certain k, il existe une unique plaque Q''_k de U_{ξ_k} avec $Q'_1 \subset Q''_k$. Comme chaque plaque de U_{λ_2} qui intersecte Q'_1 est contenue dans $U_{\lambda_2} \cap Q''_k$ et comme $U_{\lambda_2} \cap Q''_k$ contient une seule plaque de U_{λ_2} par le lemme 66, aucune plaque de U_{λ_2} différente de Q'_2 peut intersecter Q'_1. Le même argument, appliqué récursivement à la couple $(U_{\lambda_i}, U_{\lambda_{i+1}})$ montre que la propriété 2 vaut aussi. □

On peut, finalement, énoncer un dernier résultat technique qui nous permettra d'analyser quelques propriétés topologiques des feuilles.

Théorème 70. *Soient x et y deux points d'une feuille F. Si l'on a une carte distinguée (U_ν, ϕ_ν) au voisinage de y, il existe une carte distinguée (U_μ, ϕ_μ) au voisinage de x telle que pour toute feuille F' avec $F' \cap U_\nu \neq \emptyset$ on a $F' \cap U_\mu \neq \emptyset$. De plus, U_μ peut être choisie de façon que si U_μ a une plaque Q'_1 avec $Q'_1 \subset F'$ et $x \notin Q'_1$, alors F' contient une plaque de U_ν qui ne contient pas y.*

Démonstration. Considérons la chaîne $\mathfrak{C} = \{U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_m}\}$ en x donnée par le lemme 69. On peut supposer que $U_{\lambda_m} \subset U_\nu$. En appliquant le lemme 68 à $\mathfrak{C}$, on obtient $O_1 \subset U_{\lambda_1}$; on choisit alors U_μ ouvert dans O_1 de façon que (U_μ, ϕ_μ) soit une carte distinguée, où on a posé $\phi_\mu := \phi_{\lambda_1}|_{U_\mu}$, quitte à ajuster le codomaine. On veut montrer que cette carte satisfait la conclusion du théorème.

Choisissons une chaîne de plaques Q'_i, $i = 1, \ldots, m$, qui vérifie la condition 2 du lemme 69 ; alors, les plaques Q'_i et Q'_{i+1} se déterminent réciproquement de façon unique. Donc, si $x \notin Q'_1$, on a aussi $y \notin Q'_m$, et on a conclu. □

13.2 Quelques propriétés topologiques

On commence par un résultat sur la clôture des feuilles.

Théorème 71. *Soit $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un ensemble de feuilles et soit $x \in \overline{\cup_{\alpha \in A} F_\alpha}$. Si F est la feuille passante par x, alors $F \subset \overline{\cup_{\alpha \in A} F_\alpha}$. En particulier, pour chaque feuille F', on a*

$$\overline{F'} = \bigcup_{F \cap \overline{F'} \neq \emptyset} F = \bigcup_{F \subset \overline{F'}} F \ .$$

Démonstration. Soit y un point de F et soit (U_ν, ϕ_ν) une carte distinguée au voisinage de y. Par la première partie du théorème 70, on a une carte distinguée (U_μ, ϕ_μ) au voisinage de x telle que chaque feuille intersectant U_μ intersecte aussi U_ν. Donc, on a $U_\nu \cap (\cup_{\alpha \in A} F_\alpha) \neq \emptyset$; alors, comme on peut choisir U_ν arbitrairement petit, on a $y \in \overline{\cup_{\alpha \in A} F_\alpha}$. □

On a aussi un résultat relatif au saturé d'un ouvert.

Théorème 72. *Soit O un ouvert de M. Alors*

$$\bigcup_{F \cap O \neq \emptyset} F$$

est ouvert aussi.

Démonstration. Notons Y l'ensemble en question : on montre que Y est voisinage de tous ses points. Si $x \in Y$, on a une feuille F contenante x telle que $F \cap O \neq \emptyset$. Pour $y \in F \cap O$, choisissons alors une carte distinguée (U_ν, ϕ_ν) au voisinage de y, telle que $U_\nu \subset O$. Par la première partie du théorème 70, il existe une carte distinguée (U_μ, ϕ_μ) au voisinage de x avec la propriété que chaque feuille intersectant U_μ intersecte U_ν aussi et, donc, O ; alors $U_\nu \subset O$, c'est à dire que O contient un voisinage de x. □

Le théorème 70 permet aussi de donner une caractérisation, avec laquelle on peut travailler facilement, pour le feuilles qui sont des sous variétés plongées.

Théorème 73. *Une feuille F est propre si et seulement si il existe une carte distinguée $(U_\lambda, \phi_\lambda)$ telle que $F \cap U_\lambda$ est la seule plaque de U_λ contenue dans F.*

Démonstration. Supposons que F soit une feuille propre. Alors, si $(U'_\lambda, \phi'_\lambda)$ est une carte distinguée qui a une plaque Q' contenue dans F, comme F est propre, on a un voisinage V de Q' contenu dans U'_λ tel que $F \cap V = Q'$. On peut alors construire une carte distinguée $(U_\lambda, \phi_\lambda)$ qui vérifie l'énoncé du théorème.

Supposons d'avoir (U_μ, ϕ_λ) telle que $F \cap U_\lambda$ est l'unique plaque de U_λ contenue dans F. Soit $x \in F$. Pour le théorème 70, on a une carte distinguée (U_μ, ϕ_μ) au voisinage de x telle que, pour chaque feuille F', $F' \cap U_\lambda \neq \emptyset$ implique $F' \cap U_\mu \neq \emptyset$ et si F' contient une plaque Q'_1 de U_μ avec $x \notin Q'_1$ alors F' contient aussi une plaque de U_λ qui est différente de $F \cap U_\lambda$. Mais la seule plaque de U_λ contenue dans F est $F \cap U_\lambda$ et, donc, si $x \notin F'$ on a que $F' \neq F$. Alors la seule plaque de U_μ contenue dans F est la plaque contenant x et F est plongée. □

On peut, finalement, énoncer une caractérisation des feuilles compactes, qui sera très utile dans la suite :

Théorème 74. *Si F est compacte, pour chaque carte distinguée $(U_\lambda, \phi_\lambda)$, $F \cap U_\lambda$ est constituée d'un nombre fini de plaques de U_λ. De plus, s'il existe un ensemble compact E tel que $F \subset E \subset M$, alors cette condition est aussi suffisante pour la compacité de F.*

Démonstration. Pour la première partie, supposons F compacte et supposons, par absurde, $(U_\lambda, \phi_\lambda)$ carte distinguée avec $F \cap U_\lambda$ constituée d'une infinité de plaques. Mais alors, comme chacune de ces plaques est ouverte dans la feuille F par définition même de la topologie des feuilles, on peut trouver un recouvrement infini de F dont on ne peut pas extraire un sous recouvrement fini : c'est absurde par compacité de F.

Supposons, or, qu'il existe un ensemble E compact tel que $F \subset E \subset M$ et que, pour chaque $(U_\lambda, \phi_\lambda)$, $F \cap U_\lambda$ est une famille fini de plaques. Comme E est compact, il est recouvert par un nombre fini de cartes distinguées. Donc, F est une réunion finie de plaques fermées et est, alors, compacte. □

Chapitre 14

Holonomie et théorèmes de stabilité

Soit M une variété C^s de dimension n feuilletée par $\mathcal{F}$ de codimension q et de classe C^r, $r \geq 1$. Dans cette partie on va étudier les propriétés locales au voisinage d'une feuille F de $\mathcal{F}$.

Remarque 62. Après une section dédiée a des lemmes techniques, on passera aux résultats géométriquement plus importants. En premier lieu, on va associer à chaque feuille F de $\mathcal{F}$ un invariant, qui permettra de dire beaucoup sur la topologie de la feuille, c'est à dire le *groupe d'holonomie* de F. On verra, grâce à sa construction, qu'il indique rem le feuilles près de F s'entortillent sur F même.

Ensuite, on traitera des résultats de stabilité locale et globale, en cherchant une réponse à la question suivante : qu'est-ce qu'on peut dire de plus sur le comportement des feuilles près de F et sur le comportement global du feuilletage $\mathcal{F}$, si on sait que F est compacte et avec groupe d'holonomie fini ? Dans la dernière section de ce chapitre, on va, donc, énoncer deux résultats, dus à Reeb, qui vont répondre de façon très satisfaisante à cette question.

14.1 Systèmes cohérents de cartes

On montre que, étant donné un compact K contenu dans une feuille F, on peut trouver une famille de cartes distinguées qui recouvrent K même et qui ont des propriétés très agréables.

Théorème 75. *Soit K un sous ensemble compact d'une feuille F. Alors il existe une famille $\mathfrak{N}(K) = \{(U_i, \phi_i) | i = 1, \ldots, v\}$ de cartes distinguées qui vérifient les propriétés suivantes :*

1. $K \subset \cup_{i=1}^{v} U_i$,
2. *pour tout U_i, $U_i \cap K$ est contenu dans une plaque Q_i de U_i : en particulier, on peut choisir $Q_i = \phi_i^{-1}(\pi^{-1}(0))$;*
3. *si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, alors $U_i \cap U_j \cap K \neq \emptyset$;*
4. *si U_i, U_j sont tels que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, il existe une carte distinguée (U_{ij}, ϕ_{ij}) telle que :*
   (a) $U_i \cup U_j \subset U_{ij}$;
   (b) *si Q_{ij} est une plaque de U_{ij} et $Q_{ij} \cap U_i \neq \emptyset$, $Q_{ij} \cap U_i$ est une plaque de U_i et de même avec U_j ;*

5. *si* (U_{ij}, ϕ_{ij}) *et* (U_{kl}, ϕ_{kl}) *sont comme en 4, avec* $U_{ij} \cap U_{kl} \neq \emptyset$*, il existe une carte distinguée* (U_{ijkl}, ϕ_{ijkl}) *telle que :*
   (a) $U_{ij} \cup U_{kl} \subset U_{ijkl}$ *;*
   (b) *si* Q_{ijkl} *est une plaque de* U_{ijkl} *et si* $Q_{ijkl} \cap U_{ij} \neq \emptyset$*,* $Q_{ijkl} \cap U_{ij}$ *est une plaque de* U_{ij} *et de même pour* U_{kl}*.*

On appelle la famille $\mathfrak{N}(K)$ un *système cohérent de cartes* sur K.

Démonstration. Comme K est compact, on peut choisir un nombre fini de cartes distinguées (U_i, ϕ_i), $i = 1, \ldots, v$, telles que $K \subset \cup_{i=1}^{v} U_i$. La propriété 1 est, donc, vérifiée.

On a aussi que $U_i \cap K$ est contenu dans une réunion finie de plaques de U_i, car K, compact, est recouvert par la famille des plaques, ouverts dans K, qui sont contenues dans un des U_k choisis. Alors, étant donnée une plaque Q_i de U_i qui intersecte K, le même raisonnement qu'on a fait dans le lemme 66 montre qu'on peut choisir une carte distinguée (U_i', ϕ_i') telle que

1. $Q_i \subset U_i' \subset U_i$,
2. la plaque Q_i est aussi un plaque de U_i',
3. Q_i est la seule plaque de U_i' qui intersecte K.

De plus, c'est facile de voir qu'on peut aussi choisir (U_i', ϕ_i') de façon que $Q_i = \phi_i'^{-1}(\hat{\pi}^{-1}(0))$. Donc, quitte à changer (U_i', ϕ_i') avec (U_i', ϕ_i'), la propriété 2 est vérifiée aussi.

Notons qu'on peut supposer aussi que les U_i satisfont la propriété suivante : si $Q_i \cap Q_j = \emptyset$, alors $\overline{Q_i} \cap \overline{Q_j} = \emptyset$.

De plus, comme (U_i, ϕ_i), $i = 1, \ldots, v$, sont des cartes distinguées telles que $K \subset \cup_{i=1}^{v} U_i$, en regardant $\cup_{i=1}^{v} U_i$ comme espace métrique (cette réunion l'est car sous-ensemble de la variété M, qui est bien un espace métrique) et en appliquant le lemme 68, on obtient des cartes distinguées (V_i, ψ_i), $i = 1, \ldots, v$ qui vérifient $V_i \cup V_j \subset U_k$ pour un certain k : on pose alors $U_{ij} := U_k$. Puis, en appliquant le lemme 66 aux ouverts $V_i \subset U_{ij}$ et $V_j \subset U_{ij}$, on obtient des cartes distinguées $(V_{i'}, \psi_{i'})$ et $(V_{j'}, \psi_{j'})$ telles que $Q_i \subset V_{i'} \subset V_i$ et $Q_j \subset V_{j'} \subset V_j$. Donc, quitte à considérer les (V_i, ψ_i) à la place des (U_i, ϕ_i), on obtient aussi la propriété 4 en gardant la 1 et la 2.

Le même raisonnement appliqué à la famille des U_i, qu'on a obtenue tout à l'heure, montre qu'on peut choisir $\{(U_i, \phi_i)\}_i$ vérifiant aussi la propriété 5.

Maintenant, si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ mais $U_i \cap U_j \cap K = \emptyset$, pour deux indices i et j, alors, grâce au lemme 66, on peut trouver deux cartes distinguées (U_i', ϕ_i') et (U_j', ϕ_j') telles que $Q_i \subset U_i' \subset U_i$, $Q_j \subset U_j' \subset U_j$, Q_i et Q_j sont plaques de U_i' et U_j' respectivement et $U_i' \cap U_j' = \emptyset$. Donc, quitte à changer (U_i, ϕ_i) avec (U_i', ϕ_i') et (U_j, ϕ_j) avec (U_j', ϕ_j'), la propriété 3 est vérifiée aussi par les (U_i, ϕ_i). □

Fixons, maintenant, K un compact contenu dans une feuille F et $\mathfrak{N}(K)$ un système cohérent sur K de cartes distinguées. Une chaîne $\mathfrak{C} = \{U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_{m'}}\}$ en x est dite *chaîne cohérente en* x si $(U_{\lambda_i}, \phi_{\lambda_i}) \in \mathfrak{N}(K)$ pour $i = 1, \ldots, m'$.

Lemme 76. *Si* $\mathfrak{C} = \{U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_{m'}}\}$ *est une chaîne cohérente en* x *qui est aussi une chaîne en* $z \in U_{\lambda_1}$*, alors on a une unique chaîne de plaques* $Q_i' \subset U_{\lambda_i}$*,* $i = 1, \ldots, m'$*, avec* $z \in Q_1'$*, associée à* $\mathfrak{C}$*.*

Démonstration. On montre, par récurrence, que les Q'_i sont uniquement déterminées.

Q'_1 est clairement uniquement déterminée. Supposons, donc, Q'_i uniquement déterminée pour $i = 1, \ldots, j < m'$. Par le théorème 75, on a une carte distinguée $(U_{\lambda_j\lambda_{j+1}}, \phi_{\lambda_j\lambda_{j+1}})$ telle que $U_{\lambda_j} \cup U_{\lambda_{j+1}} \subset U_{\lambda_j\lambda_{j+1}}$ et vérifiante la propriété 4b.

On a alors que Q'_{j+1} est uniquement déterminée, dès que Q'_j est entièrement contenue dans une plaque $Q_{j,j+1}$ de $U_{\lambda_j\lambda_{j+1}}$ qui intersecte $U_{\lambda_{j+1}}$ forcement en une et une seule plaque de $U_{\lambda_{j+1}}$. □

Soit $x \in K$ et m un entier positif. Supposons qu'il existe un point z tel que toute chaîne cohérente $\mathfrak{C} = \{U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_{m'}}\}$ en x avec longueur m', $m' \leq m$, soit aussi une chaîne en z. On dit, alors, que z est un *point admissible* pour les chaînes cohérentes en x de longueur au plus m.

Lemme 77. *L'ensemble de tous les points admissibles pour les chaînes cohérentes en x de longueur au plus m est un ouvert A qui vérifie*

$$\bigcap_{\substack{U \in \mathfrak{N}(K) \\ x \in U}} (U \cap K) \subset A \subset \bigcap_{\substack{U \in \mathfrak{N}(K) \\ x \in U}} U.$$

Démonstration. On a seulement un nombre fini de chaînes cohérentes en x de longueur au plus m ; en considérant l'ensemble O donné par le lemme 67 pour chaque chaîne cohérente, leur intersection est l'ouvert A cherché, qui vérifie bien les inclusions dans l'énoncé. □

Soit $l : [0, 1] \to K$ une courbe continue dans K. On dit *chaîne cohérente au dessus de l* une chaîne cohérente en $l(0)$ $\mathfrak{C} = \{U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_{m'}}\}$ telle qu'il existe t_i, $i = 1, \ldots, m'$ avec

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m'} = 1$$

et

$$l([t_{i-1}, t_i]) \subset U_{\lambda_i},\ i = 1, \ldots, m'.$$

Évidemment, donnée une courbe l continue sur K, il existe toujours une chaîne cohérente avec $l(0) \in U_{\lambda_1}$ et $l(1) \in U_{\lambda_{m'}}$.

Avant de procéder avec l'étude des propriétés de ces chaînes cohérentes au dessus des arcs continus, on donne un résultat qui suit de tout ce qu'on a dit jusqu'alors mais qui sera aussi très utile dans la suite. Pour cela, on écrit, en utilisant la notat du chapitre 13, $\hat{\pi} : (-1, 1)^n \to (-1, 1)^q$ la projection sur les dernières composantes, n étant la dimension de M et q étant la codimension de $\mathcal{F}$.

Lemme 78 (de trivialisation globale)**.** *Soit $l : I \to M$ un arc continu, injectif et avec image contenue dans une feuille F de $\mathcal{F}$. Alors il existe un voisinage W de $l(I)$ et un difféomorphisme $h : (-1, 1)^{n-q} \times (-1, 1)^q \to W$ tel que les feuilles de $h^*\mathcal{F}$ soient données par $\hat{\pi}^{-1}(y)$, pour chaque $y \in (-1, 1)^q$.*

Démonstration. Fixons, avec les notats qu'on a utilisé tout à l'heure, $\mathfrak{C} = \{U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_{m'}}\}$ une chaîne cohérente au dessus de l telle que $l([t_{i-1}, t_i]) \subset U_{\lambda_i}$, $i = 1, \ldots, m'$.
On construit W et h par récurrence : pour chaque $1 \leq k \leq m'$, on va construire W_k

voisinage de $l([0,t_k])$ et un difféomorphisme $h_k : (-1,1)^{n-q} \times (-1,1)^q \to W_k$ tel que les feuilles de $(h_k)^*\mathcal{F}$ soient données par les fibres de $\hat{\pi}$.

Pour $k = 1$, cela suit immédiatement de la définition de carte distinguée : en effet, il suffit de poser $W_1 = U_{\lambda_1}$ et $h_1 = \phi_{\lambda_1}^{-1} : (-1,1)^n \to U_{\lambda_1}$, où ϕ_{λ_1} est l'application de la carte distinguée $(U_{\lambda_1}, \phi_{\lambda_1})$.

Supposons, maintenant, d'avoir construit jusqu'à W_{k-1} et h_{k-1}.
On aura alors $l([0,t_k]) \subset W_{k-1} \cup U_{\lambda_k}$, où, par hypothèse de récurrence, on a aussi $W_{k-1} \subset \bigcup_{j=1}^{k-1} U_{\lambda_j}$. Alors on a, en particulier, que $W_{k-1} \cap U_{\lambda_k} \subset U_{\lambda_{k-1}} \cap U_{\lambda_k}$, où, pour les propriétés des chaînes cohérentes qu'on a énoncées dans le théorème 75, $\phi_{\lambda_k}(U_{\lambda_{k-1}} \cap U_{\lambda_k})$ est de la forme $(a,b)^{n-q} \times (c,d)^q$. Grâce à tout ça, c'est facile de construire un voisinage W_k de $l([0,t_k])$ et un difféomorphisme $h_k : (-1,1)^n \to W_k$ qui vérifie la propriété voulue ; on omet les détailles de la construction. □

On revient maintenant à la discussion des propriétés des chaînes au dessus des arcs avec le lemme suivante :

Lemme 79. *Soient $\mathfrak{C} = \{U_{i_1}, \ldots, U_{i_{m'}}\}$ et $\mathfrak{C}' = \{U_{j_1}, \ldots, U_{j_{m''}}\}$ deux chaînes cohérentes au dessus de l telles que $U_{i_1} = U_{j_1}$ et $U_{i_{m'}} = U_{j_{m'}}$ et $m', m'' \leq m$. Soit $z \in U_{i_1}$ un point admissible pour les chaînes cohérentes en $l(0)$ de longueur au plus m et soient Q'_i, $i = 1, \ldots, m'$ et Q''_i, $i = 1, \ldots, m''$, avec $Q'_1 = Q''_1$, les chaînes de plaques en z dans $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$ respectivement. Alors $Q'_{m'} = Q''_{m''}$.*

Démonstration. On prend des subdivisions

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m'} = 1, \quad 0 = t'_0 < t'_1 < \ldots < t'_{m''} = 1$$

telles que $l([t_{k-1}, t_k]) \subset U_{i_k}$, $k = 1, \ldots, m'$ et $l([t'_{k-1}, t'_k]) \subset U_{j_k}$, $k = 1, \ldots, m''$. On peut, alors, trouver un raffinement commun $0 = t''_0 < t''_1 < \ldots < t''_{m'''} = 1$ tel que pour chaque k''

$$[t''_{k''-1}, t''_{k''}] \subset [t_{k-1}, t_k] \quad \text{et} \quad [t''_{k''-1}, t''_{k''}] \subset [t_{k'-1}, t_{k'}]$$

pour k, k' convenables ; en particulier, on a aussi $l([t''_{k''-1}, t''_{k''}]) \subset l([t_{k-1}, t_k]) \subset U_{i_k}$ et $l([t''_{k''-1}, t''_{k''}]) \subset l([t'_{k'-1}, t'_{k'}]) \subset U_{j_{k'}}$. Alors, $U_{i_k} \cap U_{j_{k'}} \neq \emptyset$ et, par la propriété 4 du théorème 75, on peut trouver un carte distinguée $(U_{i_k j_{k'}}, \phi_{i_k j_{k'}})$ telle que $U_{i_k} \cup U_{j_{k'}} \subset U_{i_k j_{k'}}$.

On montre maintenant par récurrence sur k, k' et k'', qu'il existe une plaque $\hat{Q}_{kk'}$ de $U_{i_k j_{k'}}$ telle que $Q'_k \cap Q''_{k'} \subset \hat{Q}_{i_k j_{k'}}$. Si $k'' = 1$, on peut choisir $k = k' = 1$ et, comme on a $Q'_1 = Q''_1$, c'est clair qu'il existe une plaque $\hat{Q_{11}}$ de $U_{i_1 j_1}$ telle que $Q'_1 \cup Q''_1 \subset \hat{Q}_{11}$.

Supposons, donc, d'avoir trouvé une telle plaque jusqu'aux indices k, k', k''. Si δ,$\delta' = 0$ ou 1, on a alors

$$[t''_{k''}, t''_{k''+1}] \subset [t_{k-1+\delta}, t_{k+\delta}] \cap [t'_{k'-1+\delta'}, t'_{k'+\delta'}].$$

En particulier, $U_{i_{k+\delta}} \cap U_{j_{k'+\delta'}} \neq \emptyset$ et, par la propriété 4 du théorème 75, on peut trouver une carte distinguée $(U_{i_{k+\delta}, j_{k'+\delta'}}, \phi_{i_{k+\delta}, j_{k'+\delta'}})$ telle que $U_{i_{k+\delta}} \cup U_{j_{k'+\delta'}} \subset U_{i_{k+\delta}, j_{k'+\delta'}}$. Comme $Q'_{k+\delta}$, $Q''_{k'+\delta'} \subset U_{i_{k+\delta}} \cup U_{j_{k'+\delta'}}$, on a aussi $\hat{Q}_{kk'} \cap U_{i_{k+\delta}, j_{k'+\delta'}} \neq \emptyset$. Donc, grâce à la propriété 5 du théorème 75, c'est facile de voir qu'il y a une unique plaque $\hat{Q}_{k+\delta, k'+\delta'}$ de $U_{i_{k+\delta}, j_{k'+\delta'}}$ telle que $\hat{Q}_{k,k'} \cap \hat{Q}_{k+\delta, k'+\delta'} \neq \emptyset$. Comme on sait aussi que $\hat{Q}_{k+\delta, k'+\delta'} \cap U_{i_{k+\delta}}$ est une plaque de

$U_{i_{k+\delta}}$; donc, elle doit forcement être égal $Q'_{k+\delta}$. De même, $\hat{Q}_{k+\delta,k'+\delta'} \cap U_{j_{k'+\delta'}}$ doit coïncider avec $Q''_{k'+\delta'}$. On a, donc,

$$Q'_{k+\delta} \cup Q''_{k'+\delta'} \subset \hat{Q}_{k+\delta,k'+\delta'},$$

ce qui conclut le pas inductif.

Donc, on a, pour $k = m'$, $k' = m''$ et $k'' = m'''$, une unique plaque $\hat{Q}_{m'm''}$ telle que

$$Q'_{m'} \cup Q''_{m''} \subset \hat{Q}_{m',m''}.$$

Comme $U_{i_{m'}} = U_{j_{m''}}$, on a, par la propriété 5 du théorème 75, que $Q'_{m'} = Q''_{m''}$. □

On se demande, maintenant, quels sont les effets d'une "modification continue" de la courbe l sur les chaînes cohérentes associées.

Fixons, donc, deux courbes continues

$$l_0 : [0,1] \to K,\ l_1 : [0,1] \to K,$$

avec $x = l_0(0) = l_1(0)$, $y = l_0(1) = l_1(1)$, qui soient homotopes à extrémités fixées ; on note $\{l_s\}_{0\leq s\leq 1}$ la famille de courbes donnée par l'homotopie entre l_0 et l_1.

Soient $\mathfrak{C} = \{U_{i_1}, \ldots, U_{i_{m'}}\}$ et $\mathfrak{C}' = \{U_{j_1}, \ldots, U_{j_{m''}}\}$ deux chaînes cohérentes au dessus, respectivement, de l_0 et l_1, avec $U_{i_1} = U_{j_1}$ et $U_{i_{m'}} = U_{j_{m''}}$.

Maintenant, on peut trouver une subdivision $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_u = 1$ et des chaînes cohérentes en x

$$\mathfrak{C}^{(k)} = \{U_1^{(k)}, \ldots, U_{m_k}^{(k)}\},\ k = 0, \ldots, u-1$$

telles que $\mathfrak{C}^{(0)} = \mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}^{(1)} = \mathfrak{C}'$, $U_1^{(k)} = U_{i_1}$ et $U_{m_k}^{(k)} = U_{i_{m'}}$ et chaque $\mathfrak{C}^{(k)}$ est cohérente au dessus de l_s pour $s_k \leq s \leq s_{k+1}$. On appelle les $\mathfrak{C}^{(k)}$, $k = 0, \ldots, u-1$, *homotopie* entre $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$ et l'entier $\max_k m_k$ la *longueur* de l'homotopie.

On a, alors, le résultat suivant :

Théorème 80. *Soit $\mathfrak{C}^{(k)}$, $k = 1, \ldots, u-1$ une homotopie de longueur au plus m entre les chaînes cohérentes $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$ au dessus, respectivement, de l_0 et l_1. Soit z un point admissible pour les chaînes cohérentes en $l(0)$ de longueur au plus m et soient Q'_i, $i = 1, \ldots, m'$ et Q''_j, $j = 1, \ldots, m''$ les chaînes de plaques en z, associées à $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$, respectivement, avec, en particulier, $Q'_1 = Q''_1$. Alors $Q'_{m'} = Q''_{m''}$.*

Démonstration. Si Q'''_k, $k = 1, \ldots, m_1$ est la chaînes de plaques, associée à $\mathfrak{C}^{(1)}$, au point z, comme $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^{(0)}$ et $\mathfrak{C}^{(1)}$ sont deux chaînes cohérentes au dessus de l_{s_1}, le lemme 79 implique que $Q'''_{m_1} = Q'_{m'}$.

En appliquant le même argument, récursivement sur k, à $\mathfrak{C}^{(k)}$, on conclut facilement la démonstration. □

14.2 Holonomie

14.2.1 Germes d'applications

Soient U_1, U_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^q$ contenant 0 et soient

$$f_1 : U_1 \to \mathbb{R}^q \text{ et } f_2 : U_2 \to \mathbb{R}^q\ ,$$

avec $f_1(0) = f_2(0) = 0$, deux difféomorphismes C^r au voisinage de 0, pour $r \geq 0$.

On pose $f_1 \sim f_2$ s'il existe un ouvert U' de $\mathbb{R}^q$, avec $0 \in U' \subset U_1 \cap U_2$, tel que $f_1|_{U'} = f_2|_{U'}$.

La relation $\sim$ est bien une relation d'équivalence ; chaque classe qu'elle définit est dite *germe* d'un difféomorphisme local C^r de $\mathbb{R}^q$ au point 0 et on note par $[f]$ la classe de f et par G_q^r l'ensemble de tous les germes en 0.

Si $[f], [g] \in G_q^r$ sont représentés par $f : U \to \mathbb{R}^q$ et $g : U' \to \mathbb{R}^q$ respectivement, on peut définir une application

$$g \circ f : f^{-1}(f(U) \cap U') \to \mathbb{R}^q$$

par $g \circ f(x) = g(f(x))$. Alors $g \circ f$ définit un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^q$ et on pose $[f] \cdot [g] = [f \circ g]$. C'est facile de voir que ça donne une loi de composition

$$\cdot : G_q^r \times G_q^r \to G_q^r$$

bien définie, grâce à laquelle on peut munir G_q^r d'une structure de groupe avec identité $[id]$, où $id : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ est l'identité, et où l'inverse d'un élément $[f]$ est donné par $[f]^{-1} = [f^{-1}]$, bien défini car f^{-1} est bien définie au voisinage de 0.

14.2.2 Holonomie d'une feuille

Soit M une variété C^s de dimension n et soit $\mathcal{F}$ un feuilletage C^r de M de codimension q. On fixe un point $\hat{x}$ d'une feuille F et on considère le groupe fondamental $\pi_1(F, \hat{x})$ de F basé en $\hat{x}$.

On considère un arc continu $w : [0, 1] \to F$, et, en fixant un compact K contenant $w([0, 1])$, on prend un système cohérent de cartes sur K $\mathfrak{N}(K) = \{(U_i, \phi_i) \,|\, i = 1, \ldots, v\}$.

On choisit, maintenant, une chaîne cohérente $\mathfrak{C} = \{U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_{m-1}}, U_{\lambda_m}\}$ au dessus de w, avec $w(0) \in U_{\lambda_1}$. Pour le lemme 67, l'ensemble $\hat{O}$ de tous les $z \in U_{\lambda_1}$ tels que $\mathfrak{C}$ soit une chaîne en z est un ouvert de U_{λ_1}, contenant la plaque Q_1 telle que $U_{\lambda_1} \cap K \subset Q_1$. Pour le lemme 76, la chaîne de plaques au point z associée à $\mathfrak{C}$,

$$Q_i^{(z)},\ i = 1, \ldots, m,\ z \in Q_1^{(z)}, \text{ avec } Q_1^{(z)} \subset U_{\lambda_1} \text{ et } Q_m^{(z)} \subset U_{\lambda_m},$$

est uniquement déterminée par z.

On peut, alors, définir une application $f : \hat{\pi} \circ \phi_{\lambda_1}(\hat{O}) \to \mathbb{R}^q$ via

$$f(\hat{\pi} \circ \phi_{\lambda_1}(Q_1^{(z)})) = \hat{\pi} \circ \phi_{\lambda_m}(Q_m^{(z)}), \text{ pour } z \in \hat{O},$$

où $\hat{\pi} : (-1, 1)^n \to (-1, 1)^q$ est la projection sur les dernières q coordonnées. C'est facile de voir que, par construction, f est un difféomorphisme local C^r de $\mathbb{R}^q$ au voisinage de l'origine.

Si $\mathfrak{C}' = \{U_{\mu_1}, \ldots, U_{\mu_{m'-1}}, U_{\mu_{m'}}\}$ est une autre chaîne au dessus de w, avec $w(0) \in U_{\mu_1}$, et si on construit un autre difféomorphisme local f' à partir de $\mathfrak{C}'$, comme on a fait pour $\mathfrak{C}$ et f, on peut construire $h : \hat{\pi} \circ \phi_{\lambda_1}(U_{\lambda_1} \cap U_{\mu_1}) \to \mathbb{R}^q$ via

$$h(\hat{\pi} \circ \phi_{\lambda_1}(Q_1' \cap U_{\lambda_1})) = \hat{\pi} \circ \phi_{\lambda_1}(Q_1' \cap U_{\mu_1}),$$

pour chaque plaque Q'_1. Alors h est un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^q$ au voisinage de l'origine qui satisfait $[f] = [h][f'][h]^{-1}$: donc, *w détermine un unique élément de G^r_q, à automorphismes intérieurs de G^r_q près.*

De plus, si $\overline{w} : [0,1] \to F$, $\overline{w}(0) = w(0)$ et $\overline{w}(1) = w(1)$ est un autre courbe continue qui est homotope à w à extrémités fixées, on prend K compact de M qui contient une homotopie entre w et $\overline{w}$. On considère aussi

$$\overline{\mathfrak{C}} = \{U_{\lambda_1}, U_{\lambda'_2}, \ldots, U_{\lambda'_{m''-1}}, U_{\lambda_m}\}$$

une chaîne cohérente au dessus de $\overline{w}$ et $\overline{f}$ le difféomorphisme local associé comme ci-dessus. Par le théorème 80, on a alors facilement que $[f] = [\overline{f}]$.

Avant de parler d'holonomie pour courbes fermées, on va faire une petite digression pour énoncer un résultat, application immédiate de ce qu'on a dit ci-dessus. Il s'agit, en effet, d'un raffinement du lemme 78, vu dans la section 14.1 de ce chapitre, dans le cas de feuilletages de codimension 1 transversalement orientables :

Lemme 81. *Soit F une feuille d'un feuilletage $\mathcal{F}$ transversalement orientable, de codimension 1, sur une variété M de dimension n. et soient K un espace topologique compact, connexe par arcs et $f_0 : K \to F$ une application continue homotope à une application constante. Alors il existe une famille continue $f_t : K \to M$, avec $t \in [0,1]$, telle que, pour tout t, $f_t(K)$ soit contenu dans un feuille F_t et, pour tout $x \in K$, l'arc $t \mapsto f_t(K)$ soit normal à $\mathcal{F}$.*

Démonstration. Pour le théorème 75, il existe un système de cartes cohérentes $\eta(f_0(K)) = \{(U_1, \phi_1), \ldots, (U_m, \phi_m)\}$ au dessus de $f_(K)$.
Remarquons la propriété suivante : si $\gamma : S^1 \to K$ est une continue, comme f_0 est homotope à une application constante, on a que $f_0 \circ \gamma : S^1 \to M$ est une courbe homotope à une constante. En particulier, tout chemin de plaques au dessus de $f_0 \circ \gamma$ construit à partir d'une chaîne cohérente au dessus de son image sera trivial, au sens où la plaque initiale coïncidera avec celle finale.

Fixons, maintenant, un $p \in f_0(K)$ et, si $(U_i, \phi_i) \in \eta(f_0(K))$ est la carte distinguée contenant $p \in U$ et si $\phi_i(p) = \{x_1, \overline{x}\}$, pour $x_0 \in (-1,1)$ et $\overline{x} = \{x_2, \ldots, x_n\} \in (-1,1)^{n-1}$ convenables, posons $\Sigma(t) = \phi_i^{-1}(\{x_1, \ldots, x_{n-1}, t\}$, pour $t \in (-1,1)$.
Pour le lemme 77, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour chaque $t \in [0, \epsilon]$ et chaque arc $\alpha : [0,1] \to F$ avec $\alpha(0) = p$, il existe un chemin de plaques au dessus de α, relativement à une chaîne cohérente au dessus de α donnée.
Enfin, fixons un champ de vecteurs normal Y à $\mathcal{F}$, qui existe par l'hypothèse d'orientation transverse.

Pour chaque $x \in K$, on fait, alors, la construction suivante : on considère $\gamma_x : [0,1] \to M$ avec $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = f_0(x)$ et on prend l'orbite $Y_{f_0(x)}$ du champ de vecteurs normal à $\mathcal{F}$ passante pour $f_0(x)$; on définit, donc, $f_t(x)$ comme le seul point d'intersection de l'orbite $Y_{f_0(x)}$ avec la plaque terminale de la chaîne de plaque au dessus de γ_x.
Il faut vérifier que cela ne dépend pas du choix de γ_x. En effet, la remarque qu'on a fait tout à l'heure nous dit que, si δ_x est une autre courbe avec $\delta(0) = p$, $\delta(1) = f_0(x)$, alors $f_0 \circ \gamma_x * \delta_x^{-1}$ est homotope à une constante.

Donc, f_t est une famille bien définie : de plus elle vérifie les propriétés dans l'énoncé. □

On peut, maintenant, retourner à parler d'holonomie de courbes fermées.
Pour ce qu'on a dit avant le lemme, *pour chaque classe d'homotopie à extrémités fixées de arcs sur F, on a un élément de G_q^r, qui est unique à automorphismes intérieurs près* : en effet, l'élément $[f]$ trouvé dépend du choix de la chaîne $\overline{\mathfrak{C}}$ au dessus de K, mais la classe de conjugaison de $[f]$ dans G_q^r n'en dépend pas, pour le même argument qu'on avait utilisé tout à l'heure pour montrer que la classe de conjugaison dans G_q^r d'une certain $[f]$, construite à partir d'un courbe fermée w étant donnée une chaîne $\mathfrak{C}$ au dessus de w, ne dépend pas, en effet, du choix de $\mathfrak{C}$.

On peut, en particulier, construire une application

$$\Psi_{\hat{x}} : \pi_1(F, \hat{x}) \to G_q^r$$

en associant à chaque classe $[w] \in \pi_1(F, \hat{x})$ le germe $[f]$, obtenu comme ci dessus à partir du représentant w.

De plus, on peut facilement vérifier, en utilisant seulement des chaînes cohérentes qui commencent et finissent avec un U_{λ_1} contenant $\hat{x}$ fixé, que $\Psi_{\hat{x}}$ est un morphisme de groupes.

Pour ce qui concerne le changement de point base du groupe fondamental, en choisissant un arc α qui joint les deux points de base, $\hat{x}$ et $\hat{y}$, et en prenant le difféomorphisme local $[\varphi]$ lui associé, on montre sans difficulté que l'on a

$$[\varphi] \cdot \Psi_{\hat{x}}(\gamma) \cdot [\varphi]^{-1} = \Psi_{\hat{y}}(\overline{\alpha}(\gamma))$$

pour chaque $\gamma \in \pi_1(F, \hat{x})$, où $\overline{\alpha}$ est l'isomorphisme entre $\pi_1(F, \hat{x})$ et $\pi_1(F, \hat{y})$ induit par α de la façon habituelle.

Remarquons que si on note, comme d'habitude, $\pi_1(F)$ l'ensemble des classes de conjugaisons du groupe $\pi_1(F, \hat{x})$ on a une application

$$\Psi : \pi_1(F) \to \{\text{classes de conjugaison dans } G_q^r\}$$

bien définie.

Définition 14.1. Le morphisme $\Psi_{\hat{x}}$ s'appelle *holonomie* de la feuille F au point $\hat{x}$, et le sous groupe $\mathrm{Hol}(F, \hat{x}) := \Psi_{\hat{x}}(\pi_1(F, \hat{x})))$ de G_q^r *groupe d'holonomie* de F au point $\hat{x}$.

Exemple 14.1. Considérons le feuilletage de Reeb de la sphère S^3 et fixons F comme étant la seule feuille compacte. Comme $F \simeq S^1 \times S^1$, on a bien $\pi_1(F, \hat{x}) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, où on peut choisir comme générateurs le méridien et la longitude de $S^1 \times S^1$. Alors, en faisant référence à la figure 14.1, on peut voir que le groupe d'holonomie de F en $\hat{x}$ est aussi isomorphe à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, engendré par $[f]$ et $[g]$, où

$$f, g : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$$

avec $f(x) = x$ pour $x \geq 0$, $f(x) < x$ pour $x < 0$ et $g(x) = x$ pour $x \leq 0$, $g(x) < x$ pour $x > 0$.

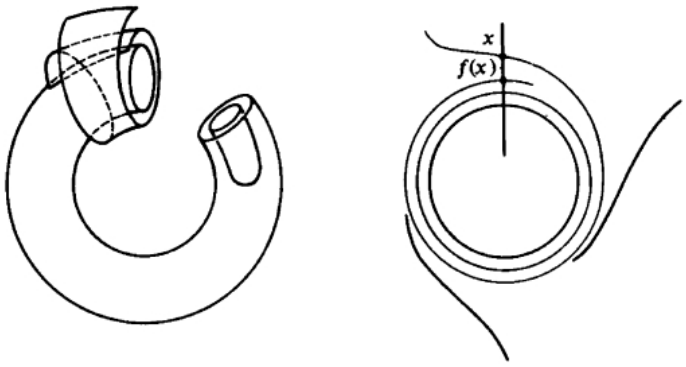


FIGURE 14.1 – Exemple de calcul d'un groupe d'holonomie

14.3 Stabilité locale

Soit M une variété C^s de dimension n, et soit $\mathcal{F}$ une feuilletage de classe C^r, $r \geq 1$ et codimension q pour M. Fixons F une feuille compacte de $\mathcal{F}$ avec groupe d'holonomie $\mathrm{Hol}(F)$ fini, d'ordre ν, et $\hat{x} \in F$: on peut, alors, trouver une famille finie

$$\mathfrak{U} := \{[w_i]\}_{i=1}^{\nu} \subset \pi_1(F, \hat{x})$$

telle que $\Psi(\mathfrak{U}) = \mathrm{Hol}(F, \hat{x})$.

En appliquant le théorème 75 à $K = F$, on obtient

$$\mathfrak{N}(F) = \{(U_i, \phi_i) \ \mid \ i = 1, \ldots, v\}.$$

Alors, pour la propriété 2 de ce théorème, on a $U_i \cap F = Q_i$, $i = 1, \ldots, v$.

Pour chaque Q_i, $i = 1, \ldots, v$, on fixe un point $x_i \in Q_i$ et une famille de courbes continues l_i telles que

$$l_i : [0,1] \to F \, , \, l_i(0) = x_1 \; l_i(1) = x_i \text{ pour } i = 1, \ldots, v.$$

Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, pour la propriété 3 du théorème 75, on a

$$U_i \cap U_j \cap F = Q_i \cap Q_j \neq \emptyset.$$

Pour de tels U_i, U_j, on considère, donc, une courbe continue l_{ij} telle que

$$l_{ij} : [0,1] \to Q_i \cup Q_j \, , \, l_{ij}(0) = x_i \, , \, l_{ij}(1) = x_j,$$

de façon que $l_{ij}(t) = l_{ji}(1-t)$ pour chaque $t \in [0,1]$.

On prend des chaînes cohérentes au dessus des courbes l_i, $i = 1, \ldots, v$, w_k, $k = 1, \ldots, \nu$, et l_{ij} de façon que :

1. $\{U_1, U_2^{(i)}, \ldots, U_{m_i-1}^{(i)}, U_i\}$ soit au dessus de l_i, pour $i = 1, \ldots, v$;
2. $\{U_i, U_j\}$ soit au dessus de l_{ij} ;
3. $\{U_1, \hat{U}_2^{(k)}, \ldots, \hat{U}_{m'_k-1}^{(i)}, U_1\}$ soit au dessus de w_k, pour $k = 1, \ldots, \nu$.

Si on note $w_k * l_i$ la juxtaposition des arcs w_k et l_i, bien définie car $w_k(1) = l_i(0) = x_1$, on a que

$$\mathfrak{C}^{(k)(i)} = \{U_1, \hat{U}_2^{(k)}, \dots, \hat{U}_{m'_k-1}^{(k)}, U_1, U_2^{(i)}, \dots, U_{m_i-1}^{(i)}, U_i\}$$

est une chaîne cohérente au dessus de $w_k * l_i$.

Soit $z \in U_1$ tel que $\mathfrak{C}^{(k)(i)}$ soit une chaîne cohérente en z ; alors z détermine une unique chaîne de plaques associée avec $\mathfrak{C}^{(k)(i)}$, qui commence par une certaine plaque Q'_1 et termine par une autre plaque Q'_i. Comme Q'_i ne dépend que de $\mathfrak{C}^{(k)(i)}$ et de $[w_k] \in \pi_1(F, x_1)$, on note Q'_i aussi par $Q_{i,z}^{[w_k]}$.

Supposons que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$; alors on considère la courbe $w_k * l_i * l_{ij} * l_j^{-1}$, où $l_j^{-1}(t) := l_j(1-t)$. Comme c'est une courbe fermée pointée en x_1, on peut considérer $\Psi(w_k * l_i * l_{ij} * l_j^{-1})$ qui, par le choix de la famille $\mathfrak{U}$, coïncide avec $\Psi(w_{k'})$, pour un k' convenable. Donc, comme Ψ est un morphisme de groupes, on a que $\Psi(w_k * l_i * l_{ij}) = \Psi(w_{k'} * l_j)$.

Soient, or,

$$\mathfrak{C}^{(k)(i)(ij)} = \{U_1, \hat{U}_2^{(k)}, \dots, \hat{U}_{m'_k-1}^{(k)}, U_1, U_2^{(i)}, \dots, U_{m_i-1}^{(i)}, U_i, U_j\}$$

la chaîne cohérente au dessus de $w_k * l_i * l_{ij}$ et

$$\mathfrak{C}^{(k')(j)} = \{U_1, \hat{U}_2^{(k')}, \dots, \hat{U}_{m'_{k'}-1}^{(i)}, U_1, U_2^{(j)}, \dots, U_{m_j-1}^{(j)}, U_j\}$$

cela au dessus de $w_{k'} * l_j$ et $Q'_1, \dots, Q_{i,z}^{[w_k]}, Q''_j$ et $Q'_1, \dots, Q_{j,z}^{[w_{k'}]}$ les chaînes de plaques respectives associées.

Comme $\Psi(w_k * l_i * l_{ij}) = \Psi(w_{k'} * l_j)$, on a, alors, $Q''_j = Q_{j,z}^{[w_{k'}]}$: en particulier, on a que

$$Q_{i,z}^{[w_k]} \cap Q_{j,z}^{[w_{k'}]} \neq \emptyset \tag{14.1}$$

Soit, or, $\hat{m}$ la longueur maximale de toutes les chaînes considérées. On a alors le résultat suivant :

Lemme 82. *Soit $\hat{V}$ l'ensemble des point admissibles pour les chaînes cohérentes en x_1 de longueur au plus $\hat{m}$. Alors il existe un ouvert $\hat{V}'$, avec $x_1 \in \hat{V}' \subset \hat{V}$, tel que pour chaque $z \in \hat{V}'$ on a*

$$\overline{Q_{i,z}^{[w_k]}} \subset \bigcup_{i=1}^{v} U_i \ , \ k = 1, \dots, \nu \ , \ i = 1, \dots, v \ .$$

Démonstration. Pour $m \leq \hat{m}$, soit $\mathfrak{C} = \{U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_{m'}}\}$ une chaîne cohérente de longueur au plus m', avec $(U_{\lambda_i}, \phi_{\lambda_i}) \in \mathfrak{N}(F)$. Fixons $O_{m'}$ contenu dans $U_{\lambda_{m'}}$ qui soit réunion de plaques de $U_{\lambda_{m'}}$ et tel que

$$Q_{\lambda_{m'}} \subset O_{m'} \ , \ \overline{O_{m'}} \subset \bigcup_{i=1}^{v} U_i.$$

On définit par récurrence O_i, pour $i = m' - 1, \dots, 1$, via la formule

$$O_i = \phi_{\lambda_i}^{-1} \circ \hat{\pi}^{-1}(\hat{\pi}(\phi_{\lambda_i}(U_{\lambda_i} \cap O_{i+1}))).$$

Alors, si on dénote l'ouvert O_1 ainsi construit à partir de $\mathfrak{C}$ par $O_{\mathfrak{C}}$, on a simplement que

$$\hat{V}' = \bigcap \{O_{\mathfrak{C}} \mid \mathfrak{C} \text{ est un chaîne cohérente de longueur au plus } \hat{m}\},$$

qui est bien ouvert, car l'intersection est finie. □

Soient, donc, $\hat{V}'$ l'ouvert donné par le lemme 82 et $z \in \hat{V}'$ et supposons que z est dans une feuille F'. Soit aussi

$$L(z) = \bigcup \{ Q_{i,z}^{[w_k]} \mid k = 1, \ldots, \nu,\ i = 1, \ldots, v \}.$$

On a clairement que $L(z) \subset F'$ et qu'il est un ouvert de F' ; on montre, maintenant, que $\overline{L(z)} = L(z)$, c'est à dire que $L(z)$ est aussi fermé dans M et, donc, dans F'.
Supposons $y \in \overline{L(z)}$; alors, $y \in \overline{Q_{i,z}^{[w_k]}}$, pour certains i et k. Donc, par le lemme 82 ci dessus, $y \in U_j$ pour un certain j. Si $i \neq j$, alors, pour (14.1), une plaque de U_j contenant y doit être forcement une plaque du type $Q_{j,z}^{[w_{k'}]}$ telle que $Q_{i,z}^{[w_k]} \cap Q_{j,z}^{[w_{k'}]} \neq \emptyset$. Alors, comme $L(z)$ est ouvert et fermé dans F', qui est connexe, on a forcement que

$$F' = L(z) = \bigcup_{i,k} \overline{Q_{i,z}^{[w_k]}}.$$

Mais, comme la réunion ci dessus est finie, on a F' compacte ; on a, donc, prouvé la première partie du théorème suivante :

Théorème 83 (Théorème de stabilité locale)**.** *Soit F une feuille compacte d'une feuilletage $\mathcal{F}$, de classe C^r et codimension q, $r \geq 1$, sur une variété M de classe C^s et dimension n. Supposons que Hol(F) soit fini. Alors on a :*

1. *pour chaque ouvert U de M contenant F, il existe un ouvert U' de M, réunion de feuilles compactes, tel que $F \subset U' \subset U$;*
2. *si $r \geq 2$, on peut choisir U' dans 1 de façon que chaque feuille F' dans U' donne un revêtement de F.*

Démonstration. Il faut montrer le point 2. Pour cela, fixons une métrique riemannienne g sur la variété M
Considérons, pour chaque point $p \in F$, le sous espace vectoriel D_p donné par $(T_p\mathcal{F}_p)^\perp$, où $\mathcal{F}_p$ est la feuille de $\mathcal{F}$ passante par p et l'orthogonal est au sens de la métrique g.
C'est facile de vérifier que l'application $\Psi : p \mapsto D_p$ est un champ de q-planes sur F.

On donne, maintenant, l'idée de rem on peut construire l'ouvert U' vérifiant la propriété 2, sans traiter les détailles.

C'est un résultat connu en géométrie riemannienne qu'il existe, pour chaque point $p \in M$, un ouvert O_p de T_pM contenant 0 et une application $\mathrm{Exp}_p : O_p \to M$ qui est un difféomorphisme C^∞ sur son image et qui dépend "de façon C^∞" du point $p \in M$.
Par compacité de F, on peut trouver un $\epsilon > 0$, un voisinage U' de F dans M, saturé par rapport à $\mathcal{F}$, et un difféomorphisme C^∞ $\mathrm{Exp} : V \to U'$. Ici $V = \{ v \in TM \mid \|v\|_g < \epsilon, v \in \Psi(p) \exists p \in F \} \subset TF \subset TM$ est le sous-fibré de TM formé par les vecteurs de TF, vu dans TM, de module inférieure à ϵ et contenus dans $\Psi(p) = D_p$ pour un certain $p \in F$.

Avec tout cela, la vérification de la propriété suivante est immédiate : les sous ensembles $\mathrm{Exp}(T^\epsilon \cap D_p)$, pour $p \in F$, donnent les feuilles d'un feuilletage $\mathcal{F}^*$ défini sur tout U'.
Ce feuilletage, par construction, est transverse à $\mathcal{F}$; donc, si $\mathcal{F}_p^*$ est la feuille de $\mathcal{F}^*$ passante pour un certain point $p \in F$, on a que, pour chaque F' feuille de $\mathcal{F}$ contenue dans U', $\mathcal{F}_p^* \cap F'$ est un ensemble fini.

On définit $\pi : F' \to F$ comme $\pi(y) = x$ si $x \in F$ et y est un des points d'intersection avec F de la feuille $\mathcal{F}_x^*$ de $\mathcal{F}^*$ passante par x.

On vérifie facilement, grâce à cette construction explicite de $\mathcal{F}^*$, que le cardinal de les fibres de π au dessus de $x \in F$ ne dépend pas du choix de x ; à partir de cela, on déduit aisément que π est un revêtement de classe C^r : on omet ici les vérifications explicites.

Remarque 63. Il faut montrer le point 2. Pour cela, recouvrons U' par des cartes distinguées $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$.

Considérons, maintenant, un ouvert U_i. Comme $\phi_i(U_i) = (0,1)^n$, par définition de carte distinguée, on a sur le fibré tangent $T(\phi_i(U_i)) = T((0,1)^n)$ une structure euclidienne naturelle ; donc, pour chaque $x \in \phi_i(U_i)$, on peut considérer l'orthogonal dans $T_p(\phi_i(U_i)) \simeq \mathbb{R}^n$ à le tangent $T_x(\hat{\pi}^{-1}(\hat{\pi}x)) \simeq \mathbb{R}^{n-q}$ à la plaque $\hat{\pi}^{-1}(\hat{\pi}x)$ passante par x : cet espace orthogonal a une base $e_j(x)$, $j = 1, \ldots, q$, "naturelle", au sens qu'elle donnée par la structure euclidienne naturelle sur le fibré $T(\phi_i(U_i))$.

On a bien que e_j, pour chaque $j = 1, \ldots, q$ est un champs de vecteurs C^r sur $\phi_i(U_i)$. Donc, en tirant en arrière ces e_j via ϕ_i, on obtient q champs de vecteurs linéairement indépendants X_j^i, $j = 1, \ldots, q$ sur U_i.

Fixons, or, une partition de l'unité $\{\rho_i \mid i \in I\}$ subordonnée à le recouvrement $\{U_i \mid i \in I\}$ de U' ; Donc,

$$X_j = \sum_{i \in I} X_j^i,$$

pour $j = 1, \ldots, q$, sont bien des champs de vecteurs sur U' et c'est facile de vérifier qu'ils sont linéairement indépendants, par construction des X_j^i.

C'est aussi clair, en voyant les X_j dans le cartes distinguées, où il sont une somme finie des X_j^i, qu'ils commutent, c'est à dire que le crochet de Lie de deux entre leurs est toujours nul. Par le théorème **??**, donc, ils définissent une feuilletage $\hat{\mathcal{F}}$ de classe C^r et codimension $n - q$ sur U' ; par construction des X_j, c'est aussi clair que $\hat{\mathcal{F}}$ est transverse à $\mathcal{F}|_{U'}$.

Pour construction de $\mathcal{F}'$, à moins de restreindre U' à un ouvert plus petit, on peut supposer que U' soit non seulement comme dans le point 1 de la thèse, mais aussi que, fixé un point $x \in F$ quelconque, la feuille $\hat{F}$ de $\hat{\mathcal{F}}$ qui contient x rencontre chaque feuille F'' de $\mathcal{F}|_{U'}$; en particulier, par transversalité, elle le doit faire en un ensemble discret de points.

Donc, si on fixe F' feuille de $\mathcal{F}|_{U'}$, on peut définir $\pi : F' \to F$ comme $\pi(y) = x$ si $x \in F$ et y est un des points d'intersection de la feuille $\hat{F}_x$ de $\hat{\mathcal{F}}$ qui passe par x avec F'.

On vérifie facilement, grâce à la construction explicite de $\hat{\mathcal{F}}$ donnée, que l'application π ainsi définie est un revêtement de classe C^r : on omet ici le vérifications explicites.

□

On a un corollaire immédiat du théorème 83 ci dessus qui correspond, en effet, à la version plus utile, du point de vue pratique, du résultat de stabilité locale :

Corollaire 84. *Soit F une feuille compacte d'une feuilletage $\mathcal{F}$, de classe C^r et codimension q, sur une variété M de classe C^s et dimension n. Supposons $\pi_1(F)$ fini ; alors pour chaque U ouvert de M contenant F, il existe U' ouvert de M avec $F \subset U' \subset U$ et tel que chaque feuille $F' \subset U'$ vérifie card$(\pi_1(F')) < \infty$.*

Démonstration. On note que la condition que $\pi_1(F)$ soit fini implique que Hol(()F) soit fini. De plus, si dans un revêtement le groupe fondamental de l'espace de base est fini, alors celui de l'espace total l'est aussi.

Il suffit, donc, d'appliquer le théorème 83. □

14.4 Stabilité globale

Dans cette section, on considère une variété M, de classe C^s et dimension n, feuilletée par $\mathcal{F}$, de classe C^r, $r \geq 1$, de *codimension* 1.

Fixons un système cohérent de cartes $\mathfrak{N}(F) = \{(U_i, \phi_i) \mid i = 1, \ldots, v\}$ pour une feuille compacte F. Comme $\mathcal{F}$ est de codimension 1, on a $\hat{\pi} \circ \phi_i : U_i \to (-1, 1)$ et chaque plaque de U_i est de la forme $(\hat{\pi} \circ \phi_i)^{-1}(a)$, avec $-1 < a < 1$.

On dit que $\mathfrak{N}(F)$ est *à deux côtés* si pour chaque couple $U_i, U_j \in \mathfrak{N}(F)$, avec $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $\hat{\pi} \circ \phi_i(z)$ et $\hat{\pi} \circ \phi_j(z)$ ont même signe pour chaque $z \in U_i \cap U_j$; si ce n'est pas le cas, on dit que $\mathfrak{N}(F)$ est *à un côté*. On dit aussi que F est *à deux côtés* s'il existe une $\mathfrak{N}(F)$ à deux côtés et que F est *à un côté* sinon.

Remarque 64. En utilisant les propriétés des systèmes cohérents de cartes, on peut vérifier sans problèmes que F est à deux côtés *si et seulement si* il existe un champ C^{r-1} de vecteurs, défini sur un voisinage de F, qui est transverse à F.

Lemme 85. *Avec les hypothèses ci dessus, il existe un ouvert V de M, qui contient F, tel que chaque feuille F' avec $F' \cap V \neq \emptyset$ vérifie une et une seule des conditions suivantes :*

1. *F' est compacte et $F \subset \cup_{i=1}^{v} U_i$; dans ce cas, on a :*
   (a) *si F est à deux côtés, $F' \cap U_i$ consiste d'une seule plaque ; dans ce cas, si $r \geq 2$, F' est aussi C^r difféomorphe à F ;*
   (b) *si F est à un côté et $F \neq F'$, $F' \cap U_i$ consiste de deux plaques ; dans ce cas, si $r \geq 2$, F' donne aussi un revêtement C^r double de F ;*
2. *F' n'est pas compacte et $\overline{F'} \cap \cup_{i=1}^{v} U_i$ contient une feuille compacte.*

Démonstration. Soit $\hat{x} \in F$ et soit $\hat{O}$ l'ensemble des points admissibles pour les chaînes cohérentes en $\hat{x}$ de longueur au plus v.

En suivant la construction faite dans la preuve du lemme 82, on obtient, à partir de $\hat{O}$, un $\hat{O}'$ qui satisfait les propriétés suivantes : pour chaque feuille F' avec $F' \cap \hat{O}' \neq \emptyset$, on a que $F' \cap U_i \neq \emptyset$, pour $i = 1, \ldots, v$ et que pour chaque i, on a une plaque Q_i' de U_i telle que $Q_i' \subset F'$ et $\overline{Q_i'} \subset \cup_{i=1}^{v} U_i$.

Donc, si on énumère par Λ_i l'ensemble $\{Q_i^{(\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda_i}$ des plaques de U_i telles que

$$Q_i^{(\lambda)} \subset F' \,,\ \overline{Q_i^{(\lambda)}} \subset \bigcup_{i=1}^{v} U_i,$$

pour $i = 1, \ldots, v$, cela est un ensemble non vide, c'est à dire que $\Lambda_i \neq \emptyset$ pour chaque i.

Supposons, premièrement, que F soit à deux côtes ; on fixe aussi $\mathfrak{N}(F)$ à deux côtes. Définissons $\Lambda_i' = \{\lambda \in \Lambda_i \mid \hat{\pi} \circ \phi_i(Q_i^{(\lambda)}) \geq 0\} \subset \Lambda_i$. Quitte à changer le signe aux images des ϕ_i, on peut supposer que $\Lambda_i' \neq \emptyset$ pour $i = 1, \ldots, v$. On définit, aussi, pour chaque $i = 1, \ldots, v$, une plaque Q_i'' de U_i en demandant que

$$\hat{\pi} \circ \phi_i(Q_i'') = \inf_{\lambda \in \Lambda_i'} \hat{\pi} \circ \phi_i(Q_i^{\lambda}) \ \ , \ \ i = 1, \ldots, v.$$

Clairement, $\overline{Q_i''} \subset \cup_{k=1}^{v} U_k$. De plus, si $y \in \overline{Q_i''}$, alors $y \in U_j$ pour un certain j, et, en particulier, y est dans une plaque de U_j. Mais on a alors $y \in Q_j''$, par définition de Q_j''. Donc, $F_0 := \cup_{i=1}^{v} Q_i'' = \cup_{i=1}^{v} \overline{Q_i''}$ est une feuille compacte.

Dans le cas où F' est compacte, on a, par le théorème 74, que Λ_i est fini et, donc, que $F_0 \subset F'$. Or, comme F_0 est ouvert et fermé dans F' et F' est connexe, on a $F' = F_0$: en particulier, pour la propriété 2 des systèmes cohérentes énoncée dans le théorème 75, on a que $F' \cap U_i = Q''_i$. Enfin, dans le cas où F' n'est pas compacte, $F_0 \subset \overline{F'}$, par définition des Q''_i.
Donc, dans le deux cas,

$$V = \bigcup_{F' \cap \hat{O}' \neq \emptyset} F'$$

est l'ouvert cherché.

Supposons, maintenant, F à un côte. On décompose, pour $i = 1, \ldots, v$, $\Lambda_i = \Lambda'_i \cup \Lambda''_i$, avec $\hat{\pi} \circ \phi_i(Q_i^{(\lambda)}) \geq 0$ pour $\lambda \in \Lambda'_i$ et $\hat{\pi} \circ \phi_i(Q_i^{(\lambda)}) \leq 0$ pour $\lambda \in \Lambda''_i$. On définit, donc, des plaques $Q''_i, Q'''_i \subset U_i \cap F'$ via

$$\hat{\pi} \circ \phi_i(Q''_i) = \inf_{\lambda \in \Lambda'_i} \hat{\pi} \circ \phi_i(Q_i^{(\lambda)}) \ , \ \hat{\pi} \circ \phi_i(Q'''_i) = \sup_{\lambda \in \Lambda''_i} \hat{\pi} \circ \phi_i(Q_i^{(\lambda)}),$$

pour $i = 1, \ldots, v$.

Alors, avec le même argument que dans le cas à deux côtes, on peut montrer que $F_1 = \cup_{i=1}^{v}(Q''_i \cup Q'''_i)$ est une feuille compacte. Comme ci dessus, donc, si F' est aussi compacte, on a facilement $F' = F_1$; si F' n'est pas compacte, on a $F_1 \subset \overline{F'}$ et, dans le deux cas, $V = \cup_{F' \cap \hat{O}' \neq \emptyset} F'$ est l'ouvert cherché.

Pour vérifier l'énoncé pour le cas $r \geq 2$, il suffit d'appliquer le même raisonnement utilisé dans le théorème 83 (2) et on ne le traitera pas en détaille ici. □

Avec tous ces résultats, on arrive finalement au théorème plus important de cette section, dû à Reeb :

Théorème 86 (Théorème de stabilité globale)**.** *Soit M une variété C^s de dimension n, compacte, connexe, et soit $\mathcal{F}$ un feuilletage C^r de codimension 1 sur M, avec $r \geq 2$. Supposons que $\mathcal{F}$ a une feuille compacte avec groupe fondamental fini. Alors chaque feuille de $\mathcal{F}$ est compacte et avec groupe fondamental fini.*

Démonstration. Soit $\{F_\alpha \mid \alpha \in A'\}$ l'ensemble des feuilles compactes avec groupe fondamental fini, et soit $W = \cup_{\alpha \in A'} F_\alpha$.

W est un ouvert de M, car si $F \in W$, par le théorème 83, il existe un ouvert U' de M tel que $F \in U'$ et U' est réunion de feuilles compactes avec groupe fondamental fini, c'est à dire $U' \subset W$. On veut, donc, montrer que $W = M$.

Supposons, par l'absurde, que $W \neq M$; donc, comme M est connexe, $\overline{W} \neq W$. Soit, alors, W' une composante connexe de W telle que $\overline{W'} \neq W'$: elle existe car W n'est pas connexe. Soit, alors, $y \in \overline{W'} \backslash W'$. Si $y \in F_\gamma$, pour un certain γ, alors $F_\gamma \subset \overline{W'}$, car W est saturé par rapport à $\mathcal{F}$ et, donc, par le théorème 71, $\overline{W'}$ l'est aussi.

Soit $(U_\lambda, \phi_\lambda)$ une carte distinguée et soit $\{\phi_\lambda^{-1}(\hat{\pi}^{-1}(a_\sigma, b_\sigma))\}_{\sigma \in \Sigma}$ l'ensemble des composantes connexes de $W' \cap U_\lambda$. Pour chaque $\sigma \in \Sigma$, soit W_σ l'ensemble des feuilles qui intersectent $\phi_\lambda^{-1}(\hat{\pi}^{-1}(a_\sigma, b_\sigma))$: alors, par le théorème 72, W_σ est un ouvert de W'. D'autre part, $C := \{\phi_\lambda^{-1}(0, \ldots, 0, x_n) \mid a_\sigma < x_n < b_\sigma\}$, contenu dans U_i, est un fermé de $W' \cap U_\lambda$. Donc $W_\sigma \cap U_\lambda$ est aussi fermé dans $W' \cap U_\lambda$ et on a alors $W_\sigma = W'$, par connexité de W'.

Alors, pour une feuille $F_\beta \subset W'$, on a que le cardinal de l'ensemble des composantes connexes de $F_\beta \cap U_\lambda$ est au moins card(Σ). Mais, comme F_β est compacte, on a, pour le

théorème 74, que $F_\beta \cap U_\lambda$ a un nombre fini de composantes connexes et, donc, Σ est fini aussi. Alors aussi $F_\gamma \cap U_\lambda$ a un nombre fini de composantes connexes et, comme ils existent $(U_{\lambda_i}, \phi_{\lambda_i})$, $i = 1, \dots, m$, cartes distinguées telles que $M \subset \cup_{i=1}^m U_{\lambda_i}$, F_γ est compacte, encore par le théorème 74.

Donc, pour le lemme 85(1) appliqué à F_γ, on déduit que $\pi_1(F_\gamma)$ est fini et, par définition de W, on a $y \in F_\gamma \subset W' \subset W$; ceci est un contradiction avec le choix $y \in \overline{W'} \backslash W'$ fait avant.

On a donc montré par absurde que $W = M$, ce qui conclut. □

Le théorème de stabilité globale est souvent utilisé en conjonction avec le théorème suivant, qui suit du lemme 85 et qui permet de mieux décrire les feuilletages dont toutes les feuilles sont compactes comme feuilletages induits par des fibrations :

Théorème 87. *Soit M une variété C^s de dimension n, compacte, connexe, et soit $\mathcal{F}$ un feuilletage C^r de codimension 1 de M, avec $r \geq 1$. Si chaque feuille de $\mathcal{F}$ est compacte, on a une des propriétés suivantes :*

1. *il existe une application C^r $\pi : M \to S^1$ telle que $\mathcal{F} = \{\pi^{-1}(p) \mid p \in S^1\}$ et chaque feuille de $\mathcal{F}$ est à deux côtes ; de plus, si $r \geq 2$, π est un C^r fibré et $\mathcal{F}$ est, donc, un feuilletage définie par une fibration ;*
2. *il existe une application C^r $\pi : M \to [0,1]$ telle que $\mathcal{F} = \{\pi^{-1}(p) \mid p \in [0,1]\}$ et chaque feuille de $\mathcal{F}$, faite exception pour $\pi^{-1}(0)$ et $\pi^{-1}(1)$, est à deux côtes ; dans ce cas, en plus, si $r \geq 2$, toutes les feuilles à deux côtes sont C^r difféomorphes et chacune forme une revêtement à deux feuillets de $\pi^{-1}(0)$ et de $\pi^{-1}(1)$.*

De plus, si $r \geq 2$, on a que :

1. *dans le cas 1, π est un C^r fibré et $\mathcal{F}$ est, donc, un feuilletage définie par une fibration ;*
2. *dans le cas 2, toutes les feuilles à deux côtes sont C^r difféomorphes et chacune forme une revêtement à deux feuillets de $\pi^{-1}(0)$ et de $\pi^{-1}(1)$.*

Démonstration. Si on note l'ensemble des feuilles donné par $\mathcal{F}$ avec $\{F_\alpha \mid \alpha \in A\}$, on peut définir $\pi : M \to A$ par $\pi(x) = \alpha$ pour $x \in F_\alpha$.

Pour une feuille $F_{\hat{\alpha}}$ fixée, soit V comme dans le lemme 85 ; comme chaque feuille de $\mathcal{F}$ est compacte, on est forcement dans le cas 1 du lemme. Soit, alors, $A_\alpha \subset A$ tel que $V = \cup_{\beta \in A_{\hat{\alpha}}} F_\beta$, et définissons

$$\eta_{\hat{\alpha}} : A_{\hat{\alpha}} \to \hat{\pi} \circ \phi_1(V \cap U_1)$$

via la formule $\eta_{\hat{\alpha}}(\beta) = \hat{\pi} \circ \phi_1(F_\beta \cap U_1)$, dans le cas $F_{\hat{\alpha}}$ à deux côtes, et via $\eta_{\hat{\alpha}}(\beta) = \hat{\pi}(\phi_1(F_\beta \cap U_1) \cap \hat{\pi}^{-1}([0,1]))$, dans le cas $F_{\hat{\alpha}}$ est à une côte.
Notons que l'application $\eta_{\hat{\alpha}}$ ainsi définie est bijective.

Donc, on peut définir sur A une structure "naturelle" de variété, éventuellement avec bord, donnée par l'atlante $\{(A_\alpha, \eta_\alpha) \mid \alpha \in A\}$: en particulier, par régularité des applications η_α construites, c'est facile de voir que cet ensemble de cartes définit bien une structure de variété C^r de dimension 1, éventuellement avec bord. De plus, cette structure de variété sur A est telle que $\pi : M \to A$ est une application C^r. Comme π est clairement surjective et M est compact et connexe, on a que A l'est aussi.

Mais, alors, A doit être forcement difféomorphe à $[0, 1]$ ou à S^1, ce qui donne la première partie du théorème.

Si on sait que $r \geq 2$, on peut, encore une fois, appliquer le même raisonnement que dans le théorème 83(2) pour obtenir le résultat dans l'énoncé ci dessus : on ne traitera pas le détailles ici. $\square$

Chapitre 15

Théorème de Novikov

15.1 Énoncé et idée de la preuve

15.1.1 Énoncé

Le but de ce chapitre est de démontrer le résultat suivant, dû à Novikov.

Théorème 88 (Novikov, 1965)**.** *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage C^2 de codimension 1, défini sur une 3-variété compacte ayant groupe fondamental fini.*
Alors $\mathcal{F}$ a une feuille compacte.

On va donner la démonstration dans le cas d'une variété lisse et d'un feuilletage transversalement orientable. On remarquera à la fin de la preuve qu'on peut toujours se ramener à ce cas-là.

Dans le paragraphe suivant, on présent les étapes fondamentales de la démonstration, qu'on va donner avec toutes les précisions nécessaires.

15.1.2 Idée de la preuve

La preuve commence en montrant l'existence d'un *vanishing cycle* sur la variété feuilletée en question, $(M, \mathcal{F})$. De façon informelle, cela signifie que l'on a une application $f_0 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow M$ contenue dans une famille *différentiable* d'applications $f_t : \mathbb{S}^1 \longrightarrow M$, où $t \in [0, \varepsilon]$ pour $\varepsilon > 0$ convenable, telle que :

1. $f_t(\mathbb{S}^1)$ est contenue dans une feuille A_t de $\mathcal{F}$ pour tout $t \in [0, \varepsilon]$; cela veut dire que pour tout $t \in [0, \varepsilon]$ il existe une feuille A_t de $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{F}_{f_t(x)} = A_t$ pour tout $x \in \mathbb{S}^1$;
2. $f_t : \mathbb{S}^1 \longrightarrow M$ est homotopiquement triviale dans la feuille A_t si et seulement si $t > 0$;
3. pour tout $x \in \mathbb{S}^1$, la courbe $\gamma_x : t \longmapsto f_t(x)$ dans M est *transverse* à $\mathcal{F}$.

La troisième condition signifie que $T_{f_t(x)}M = T_{f_t(x)}A_t \oplus \mathbb{R}\,\dot{\gamma_x}(t)$ pour tout $t \in [0, \varepsilon]$, $x \in \mathbb{S}^1$.
Ce *vanishing cycle* est puis modifié en un *vanishing cycle simple*, dans le sens où l'on

considère les *revêtements universels* $\hat{A}_t$ des feuilles A_t, pour $t > 0$, et les relèvements $\hat{f}_t : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \hat{A}_t$ des applications de notre cycle. On montrera que l'on peut construire cette famille différentiable afin que toute application $\hat{f}_t$ soit *simple*.
Notons que si ces applications $\hat{f}_t$ sont immersives, alors on aura des *plongements* du cercle dans M, par propreté.
La fin de la preuve consiste à montrer que l'existence d'un tel vanishing cycle simple entraîne que la feuille base A_0 soit compacte. En effet, notre cycle $\{f_t\}_{t\in[0,\varepsilon]}$ permet de définir une famille différentiable d'immersions $F_t : D^2 \longrightarrow M$ telle que, d'après ci-dessus :

1. $(F_t)_{|\partial D^2} = f_t$ pour tout $t \in [0, \varepsilon]$
2. $F_t(D^2) \subseteq A_t$ pour tout $t > 0$
3. pour tout $x \in D^2$, la courbe $\gamma_x : t \longmapsto F_t(x)$ dans M est transverse à $\mathcal{F}$

Après ça, on va montrer que pour tout $\alpha > 0$ il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ avec $0 < t_2 < t_1 < \alpha$ et tels que :

1. $A_{t_1} = A_{t_2}$
2. $F_{t_1}(D^2) \subseteq F_{t_2}(D^2)$
3. $F_t(D^2) \cap F_{t_1}(D^2) = \varnothing$ pour tout $t \in (t_2, t_1)$

Il existe alors une région R *arbitrairement proche* à la feuille A_0 qui est *disjointe* de A_0 et qui est contenue dans les surfaces C_1, C_2, où :

$$C_1 := \{F_t(x) | x \in \partial D^2, t_2 < t < t_1\}$$

$$C_2 := F_{t_2}(D^2) \setminus F_{t_1}(D^2)$$

Par définition de la région R, on voit que toute courbe simple transverse à $\mathcal{F}$ qui entre dans R ne peut jamais y sortir. Comme on peut trouver une telle R arbitrairement proche à A_0, on conclut qu'il n'existe pas de courbe fermée simple (un lacet sans auto-intersections) transverse à $\mathcal{F}$ qui passe par A_0.
D'autre part, on peut montrer que toute feuille non-compacte A admet un lacet transverse à $\mathcal{F}$ qui passe par A, et donc A_0 doit être compacte.

15.2 Démonstration

15.2.1 Existence d'un vanishing cycle

On commence avec un petit lemme.

Lemme 89. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage lisse de codimension 1 d'une variété M. Alors il existe une courbe $\gamma : \mathbb{S}^1 \to M$ transverse à $\mathcal{F}$.*

Démonstration. Supposons d'abord que $\mathcal{F}$ soit transversalement orientable et notons par X un champ de vecteurs transverse à $\mathcal{F}$.

Considérons alors une courbe intégrale α de X. Comme M est compacte, on a que deux premibilités : soit $\alpha : \mathbb{S}^1 \to M$, soit $\alpha : \mathbb{R} \to M$ avec α injective.

Dans le premier cas, on a achevé la preuve, car il suffit de poser $\gamma := \alpha$.

Dans le deuxième cas, il existe un point $p \in M$ d'accumulation pour la suite $\{\alpha(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Soit alors (U, ϕ) une carte distinguée avec $p \in U$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\alpha(n) \in U$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour définition de carte distinguée, c'est clair que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la composante connexe de $\alpha(\mathbb{R} \cap \alpha^{-1}(U))$ contenante $\alpha(n)$ rencontre la plaque de U qui contient p. Donc α rencontre la feuille $F := \mathcal{F}_p$ en une infinité de points distincts entre eux, comme α n'est pas fermée ; voir la figure 15.1.

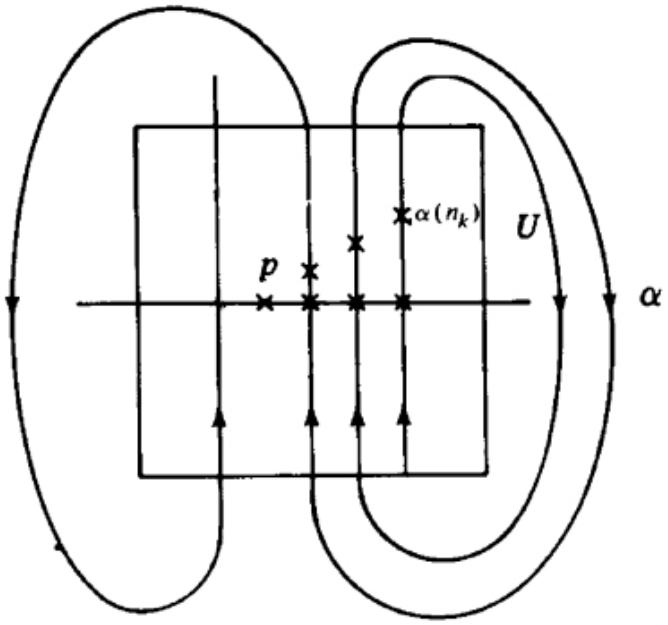


FIGURE 15.1 – Cas α non fermée

Maintenant, soient $t, t' \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha(t), \alpha(t') \in F$ mais $\alpha(s) \notin F$ pour tout $s \in (t, t')$: ils existent bien car α est transverse à $\mathcal{F}$.
En choisissant un arc $l : [0, 1] \to F$ tel que $l(0) = \alpha(t') =: p_2$ et $l(1) = \alpha(t) =: p_1$, et en utilisant le lemme 78, on peut aisément modifier la courbe fermée $\alpha|_{[t,t']} * l$, transverse à $\mathcal{F}$ le long de $\alpha|_{[t,t']}$ et contenue dans F le long de l, en un courbe γ fermée transverse à $\mathcal{F}$; voir la figure 15.2.

Il reste maintenant le cas de $\mathcal{F}$ non transversalement orientable.
Pour ce cas-là, il suffit de considérer le revêtement double d'orientation $\tilde{M}$ associé au champ de droites Δ transverse à $\mathcal{F}$, comme dans la prop 61.
Dès que $\pi^*(\mathcal{F})$ est transversalement orientable de codimension 1 et que $\tilde{M}$ est compacte (comme M l'est) on est dans le cas qu'on a considéré tout à l'heure : il existe, donc, $\tilde{\gamma} : \mathbb{S}^1 \to \tilde{M}$ transverse à $\pi^*(\mathcal{F})$.
Il suffit alors de poser $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$ pour terminer la preuve. □

On donne maintenant une définition. Pour cela, on considère M variété feuilletée par $\mathcal{F}$ de *codimension 1*.

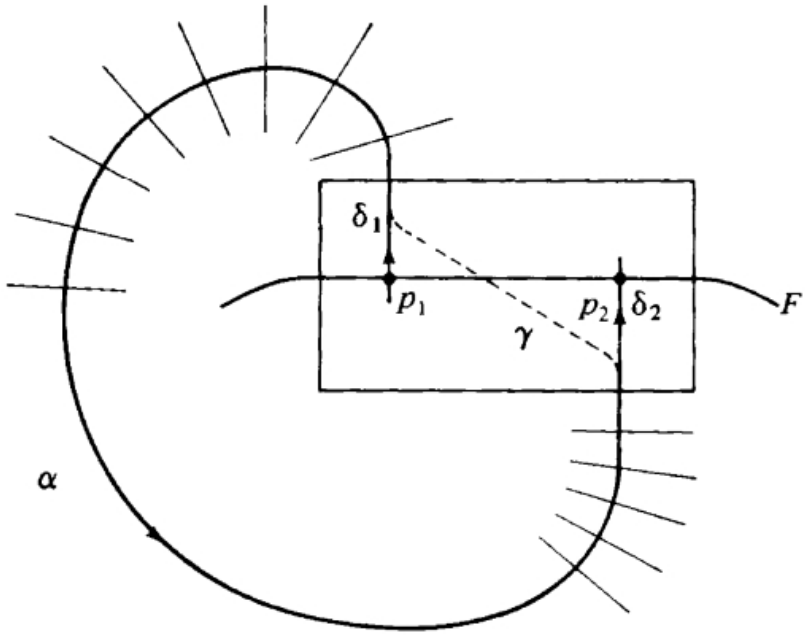


FIGURE 15.2 – Comment obtenir une courbe transverse à partir de α

Définition 15.1. Soit A_0 une feuille de $\mathcal{F}$.
On dit qu'une courbe fermée $f_0 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow A_0$ est un *vanishing cycle* pour $\mathcal{F}$ si f_0 se prolonge en une application différentiable $F : [0, \varepsilon] \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow M$, pour $\varepsilon > 0$ convenable, telle que :

1. la courbe $f_t := F_{|\{t\}\times\mathbb{S}^1} : t \longmapsto F(t, x)$ est contenue dans une feuille A_t de $\mathcal{F}$ pour tout $t \in [0, \varepsilon]$;
2. la courbe $\gamma_x : t \longmapsto F(t, x)$ est transverse à $\mathcal{F}$ pour tout $x \in \mathbb{S}^1$;
3. la courbe f_t est homotope à une constante dans A_t pour tout $t > 0$, et f_0 *n'est pas* homotope à une constante dans A_0.

On dit que le prolongement F de f_0 au cylindre $[0, \varepsilon] \times \mathbb{S}^1$ est une *extension cohérente* du vanishing cycle f_0

Exemple 15.1. Dans le feuilletage orientable de Reeb de $D^2 \times \mathbb{S}^1$ tout méridien du bord est un *vanishing cycle.*

Les hypothèses ci-dessus sont suffisantes pour énoncer la définition. Pour obtenir des résultats d'existence on a besoin d'hypothèses plus fortes, qui figurent parmi celles de l'énoncé du théorème de Novikov, à savoir la compacité de la variété sur laquelle on travaille.

Proposition 90. *Soit M une variété compacte de dimension au moins 3, avec groupe fondamental fini, et soit $\mathcal{F}$ un feuilletage lisse de codimension* 1 *sur M.*
Alors $\mathcal{F}$ admet un vanishing cycle.

Démonstration. Comme M est compacte et $\pi_1(M)$ est fini, pour le lemme 89 il existe une courbe $\alpha : \mathbb{S}^1 \longrightarrow M$ transverse à $\mathcal{F}$ qui est homotopiquement triviale. En effet, le lemme

assure que l'on peut trouver un lacet α transverse à $\mathcal{F}$, et comme sa classe dans $\pi_1(M)$ est d'ordre fini on peut alors facilement construire un lacet encore transverse et homotope à une constante.
Grâce à la prop 103, il existe maintenant une application lisse $g : D^2 \longrightarrow M$ telle que le feuilletage tiré en arrière $\mathcal{F}^* := g^*\mathcal{F}$ soit donnée par les orbites d'un champ de vecteurs Y sur D^2, dont les singularités sont des *centres* ou des *selles* ; de plus, les selles n'ont que des auto-connexions entre elles. Cette construction est le centre de la démonstration : on va exploiter les propriétés spéciales des orbites d'un tel champ de vecteurs sur D^2 pour construire un vanishing cycle.
On utilisera, dans la suite, la propriété suivante : il existe une région ouverte $R \subseteq D^2$ telle que le bord ∂R est une courbe d'holonomie non triviale, et telle que les orbites de Y dans R ont par contre holonomie triviale ; voir l'appendice A, section A.4 pour les détailles de la construction.
On veut, maintenant, montrer qu'il existe une courbe $\Gamma \subseteq R$ qui est une orbite périodique ou un *graphe* Y-invariant (voir la section A.2.2 de l'appendice A pour les définitions) telle que

1. $g(\Gamma)$ n'est pas homotopiquement triviale dans la feuille $A_{g(\Gamma)}$;
2. Γ est le bord d'une bande $C = \bigcup_{t\in(0,1]} \gamma_t \subseteq R$, où les γ_t sont orbites périodiques de Y, et $g(\gamma_t)$ est homotope à une constante dans $A_{g(\gamma_t)}$.

Cela terminerait la preuve de la prop. En effet, quitte à donner une paramétrisation des orbites γ_t ed de Γ, on voit bien qu'on peut la composer avec g pour construire une extension cohérente de $g(\Gamma)$.
Comme la tangence de g avec $\mathcal{F}$ dans les centres est de type *parabolique*, toute orbite γ de Y au voisinage d'un centre est fermée et son image $g(\gamma)$ est homotope à un point dans $A_{g(\gamma)}$. C'est donc une bonne idée de commencer la construction de Γ à partir des centres de Y qui se trouvent dans R.
On rem que si le nombre des centres de Y est $l \geq 1$, alors Y a $l-1$ selles, pour le *théorème de l'indice*. Le même est vrai pour la clôture $\overline{R}$ de R : si $c_1, ..., c_k \in R$ sont les centres de Y contenus dans R (où $k \geq 1$), alors Y a $k-1$ selles dans $\overline{R}$.
Le théorème de l'indice lie la *caractéristique de Poincaré* d'une variété compacte à la somme des indices d'un champ de vecteur sur cette variété en correspondance de ses zéros. Dans notre cas, D^2 est une variété compacte à bord, et le théorème s'applique seulement pour des champs qui sont transverses sur le bord. D'autre part la construction de Hæfliger garantie que le champ Y est de ce type là.
La caractéristique de D^2 est 1, comme il est contractile : son homologie a seulement un générateur en degré zéro. Comme les centres sont des zéros d'indice 1 et les selles sont d'indice -1, on voit qu'il faut avoir un centre en plus des selles.
Notons $s_1, \ldots, s_{k-1}$ les selles de Y dans R. Pour $i \in \{1, \ldots, k\}$, soit V_i la partie connexe maximale de R qui contient c_i et qui est réunion d'orbites fermées de Y qui ont image homotope à une constante dans leurs feuilles. Notons que chaque V_i ne contient pas de centre différents de c_i.

On va montrer que l'ensemble V_i, non vide et Y-invariant par construction, est ouvert ; de plus, on montrera que ∂V_i a une seule composante connexe, qui est une courbe fermée réunion d'orbites de Y.

Commençons en montrant que V_i est ouvert.
Soit $\gamma_0 \subseteq V_i$ une orbite de Y. Le but est de montrer qu'il existe un voisinage tubulaire de γ_0 contenu dans V_i.
Comme les orbites de Y dans R ont holonomie triviale par construction, le lemme 78 permet de conclure la chose suivante. Il existe un voisinage cylindrique $C_0 \subseteq R$ et un difféomorphisme $h : (-1,1) \times \gamma_0 \longrightarrow C_0$ tel que pour tout $t \in (-1,1)$ l'ensemble $\gamma_t := h(\{t\} \times \gamma_0)$ est une orbite fermée de Y. Notons A_t la feuille de $\mathcal{F}$ qui contient $g(\gamma_t)$.
Fixons une métrique Riemannienne $<,>$ sur M. Comme $g(\gamma_0)$ est homotope à une constante dans A_0, il existe une application différentiable $f_0 : D^2 \longrightarrow A_0$ telle que $f_0(\partial D^2) = g(\gamma_0)$.
Le lemme 81 entraîne que f_0 se prolonge en une famille continue d'applications $f_t : D^2 \longrightarrow M$, où $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, telle que $f_t(D^2) \subseteq A_t$ et telle que pour tout $x \in D^2$ la courbe $t \mapsto f_t(x)$ est normale à $\mathcal{F}$.
Pour $t > 0$ la courbe $f_t(\partial D^2) =: \delta_t$ est clairement homotope à une constante, car elle est la restriction d'une fonction définie sur D^2. De plus, les courbes δ_t et $g(\gamma_t)$ sont homotopes en A_t, pour t assez petit. En effet, les familles d'ensembles fermés $\{g(\gamma_t)\}_t, \{\delta_t\}_t$ ont une *distance de Hausdorff* qui tend vers zéro pour $t \longrightarrow 0$, car $\lim_{t \longrightarrow 0} g(\gamma_t) = \lim_{t \longrightarrow 0} \delta_t = g(\gamma_0)$.
Cela entraîne que $g(\gamma_t)$ est homotopiquement trivial dans la feuille A_t, pour t assez petit, et donc on a un voisinage tubulaire $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \gamma_0$ de γ_0 qui est contenu dans V_i.
On a donc montré que les V_i sont ouverts.
Comme V_i est Y-invariant, ∂V_i est soit une orbite fermée soit un graphe de Y. On peut maintenant conclure la preuve en raisonnant par cas.
S'il existe un indice i tel que ∂V_i est une orbite fermée de Y, disons γ_0, alors $g(\gamma_0)$ n'est pas homotope à une constante dans $A_{g(\gamma_0)}$, car sinon on aurait eu $\gamma_0 \subseteq V_i$, mais $\partial V_i \cap V_i = \varnothing$ car V_i est ouvert.
Toutes les orbites de Y dans l'intérieur de γ_0 sont fermées, car elles sont contenues dans V_i. De plus, elle ont image homotopiquement trivial dans leur feuille correspondante. Cela dit que γ_0 appartient à une famille d'orbites $\{\gamma_t\}_{t \in [0,\varepsilon)}$ telle que $g(\gamma_t)$ est homotope à une constante dans $A_{g(\gamma_t)}$. Pour la remarque précédente, on a conclu dans ce cas là.
Il se peut encore que $\Gamma_i := \partial V_i$ soit un graphe de Y pour tout indice $1 \leq i \leq k$. On a alors deux premibilités :

1. il existe un indice $i_0 \in \{1, ..., k\}$ tel que $g(\Gamma_{i_0})$ ne soit pas homotope à une constante dans $A_{g(\Gamma_i)}$;
2. pour tout indice $i \in \{1, ..., k\}$, $g(\Gamma_i)$ est homotope à une constante dans $A_{g(\Gamma_i)}$.

Dans le premier cas, en raisonnant comme ci-dessus, $g(\Gamma_{i_0})$ est un vanishing cycle, et on a terminé.
Supposons donc d'être dans le deuxième cas. On a donc $g(\Gamma_i)$ homotope à une constante dans la feuille $A_{g(\Gamma_i)}$ pour tout $1 \leq i \leq k$.
Comme la différence entre le nombre de centres et selles en $\overline{R}$ est égal à 1, il existe deux graphes qui contiennent la même selle. Quitte à les renuméroter, supposons qu'ils soient Γ_1, Γ_2, contenants la selle s_1.
Les situations premibles sont représentées dans la figure 15.3 ci-dessous.

Dans ce cas-là, $\overline{V_1} \cup \overline{V_2}$ est homéomorphe soit à un disque fermé, soit à deux disques avec un point de bord en commun. Considérons le graphe $\Gamma^1 := \partial\overline{V_1} \cup \partial\overline{V_2} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.
Maintenant on répète la même construction ci-dessus à l'intérieur de toute région de D^2

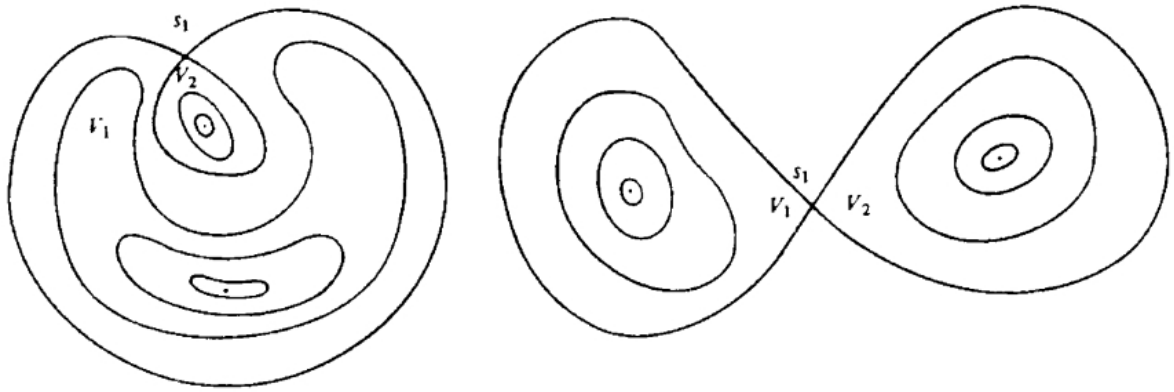


FIGURE 15.3 – Cas malheureux

de ce type-ci.
Comme $g(\Gamma_1)$ et $g(\Gamma_2)$ sont contractiles dans leur respectives feuilles, $g(\Gamma^1)$ est bien contractile dans $A_{g(\Gamma^1)} = A_{g(\Gamma_1)} = A_{g(\Gamma_2)}$.
Il existe alors un voisinage U de Γ^1 tel que $U \setminus \Gamma^1$ est réunion d'orbites fermées de Y homotopiquement triviales dans leur feuilles images. Cela suit du même raisonnement qu'on a utilisé tout à l'heure pour montrer que les V_i étaient ouverts, via le lemme 81.
Soient maintenant $\Gamma_1^1 := \Gamma^1, \Gamma_2^1, ..., \Gamma_{k_1}^1$ les graphes de Y obtenus de la même façon que Γ^1, où $1 \leq k_1 \leq \frac{1}{2}$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, k_1\}$, soit V_1^i la composante connexe maximale qui contient Γ_i^1, telle que $V_i^1 \setminus \Gamma_i^1$ soit réunion de orbites fermées homotopes à une constante dans leurs respectives feuilles.
On peut montrer que chaque V_i^1 est ouvert, toujours avec le même lemme. Le bord ∂V_i^1 est une courbe fermée dans R, réunion d'orbites de Y.
Pour le même argument qu'on vient d'utiliser, s'il existe un indice i tel que $g(\partial V_i^1)$ est homotopiquement trivial dans $A_{g(\partial V_i^1)}$, alors on a trouvé un vanishing cycle pour $\mathcal{F}$.
Il se peut encore que $g(\partial V_i^1)$ soit contractile dans sa feuille pour tout $1 \leq i \leq k_1$. Dans ce cas-là, tous les ∂V_i^1 sont des graphes de Y ; il y en a au moins deux, disons $\partial V_1^1, \partial V_2^1$ qui contiennent la même selle. La situation est maintenant comme dans la figure 15.4.

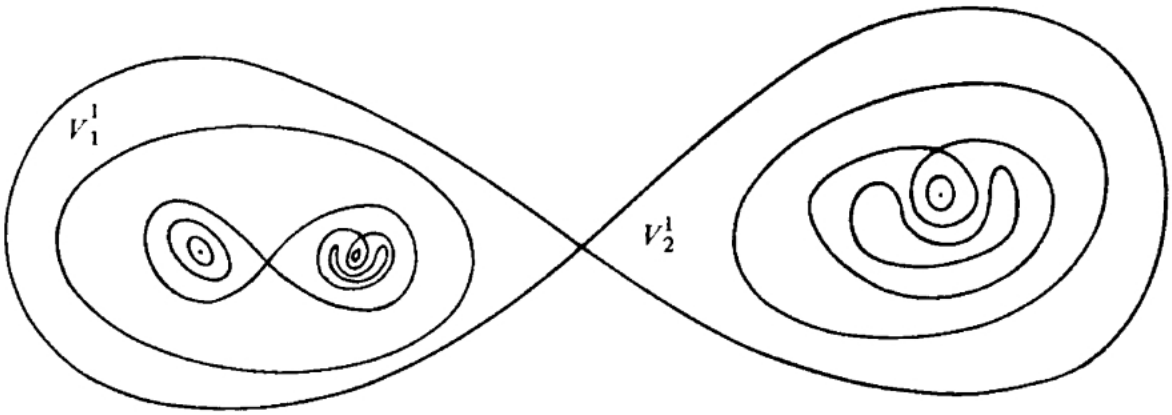


FIGURE 15.4 – Cas malheureux : continuation

Posons $\Gamma^2 := \partial V_1^1 \cup \partial V_2^1$. Alors Γ^2 est un graphe de Y, et $g(\Gamma^2)$ est homotope à une

constante dans sa feuille. Si k_2 est le nombre de graphes défini comme ci-dessus, on a clairement $1 \leq k_2 \leq \frac{1}{2}k_1 \leq \frac{1}{4}k$. De plus, Γ^2 admet un voisinage U tel que $U \setminus \Gamma^2$ est réunion d'orbites fermées contractiles dans leurs respectives feuilles.
Comme $\partial R \cap \partial D^2 = \varnothing$, et comme il y a un nombre fini de singularités de Y dans R, on peut procéder récursivement pour obtenir, après un nombre fini d'étapes, une orbite fermée ou un graphe Γ de Y tel que $g(\Gamma)$ soit un vanishing cycle pour $\mathcal{F}$.

□

15.2.2 Extensions cohérentes normales

Le but de cette partie et de la prochaine est de modifier notre vanishing cycle pour en obtenir un tel que les relèvements de son extension cohérente aux revêtements universels des feuilles soient des courbes simples.
Pour décrire cette construction, on a besoin d'une définition supplémentaire.

Supposons maintenant que $\mathcal{F}$ soit un feuilletage *transversalement orientable* d'une variété M, et soit X un champ de vecteur normal à $\mathcal{F}$ par rapport à une *métrique Riemannienne* $<,>: M \longrightarrow \Sigma^2 T^*M$ fixée sur M.
On note $<,>_{|x}: T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ le produit scalaire défini par $<,>$ en tout point $x \in M$.

Définition 15.2. On dit qu'une courbe $\gamma : I \longrightarrow M$ transverse à $\mathcal{F}$ est *positive* (respectivement, *négative*) si $< \dot{\gamma(t)}, X(\gamma(t)) >_{|\gamma(t)} > 0$ (resp., < 0) pour tout $t \in I$.
Soit $f_0 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow A_0$ un vanishing cycle pour $\mathcal{F}$, et $F : [0, \varepsilon] \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow M$ une extension cohérente de f_0.
On dit que f_0 est un vanishing cycle *positif* (resp. *négatif*) si les courbes $\gamma_x : t \longmapsto F(t, x)$ sont (transverses) positives (resp. négatives). Si de plus les courbes γ_x sont orthogonales aux feuilles de $\mathcal{F}$ on dit que F est une *extension normale* de f_0.

On remarque que l'on peut toujours supposer, si f_0 est un vanishing cycle, que f_0 soit un vanishing cycle positif, quitte à renverser le champ de vecteurs X qui donne l'orientation transverse.
En effet, si F est une extension cohérente de f_0, on a

$$< \dot{\gamma_x}(t), X(\gamma_x(t)) >_{|\gamma_x(t)} \neq 0$$

pour tout $x \in \mathbb{S}^1$ et $t \in [0, \varepsilon]$, dès que les courbes $t \to \gamma_x(t)$ sont transverses à $\mathcal{F}$. Par continuité, le signe de ce produit scalaire sera constant et il suffit donc d'effectuer le changement $X \to -X$ pour avoir la positivité.

On peut maintenant montrer que l'on peut toujours choisir une extension (cohérente) normale.

Proposition 91. *Soit $f_0 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow M$ un vanishing cycle positif.*
Alors :

1. *il existe une extension cohérente positive et normale de f_0 ;*
2. *si $\overline{f}_0 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow A_0$ est homotope à f_0 dans A_0 alors $\overline{f}_0$ est un vanishing cycle positif.*

Démonstration. Prouvons le point 1.
Notons par X_t le flot engendré par le champ de vecteurs normale à $\mathcal{F}$. Il existe, alors, $\delta > 0$ tel que l'application $\tilde{F}(t,x) = X_t(f_0(x))$ soit bien définie sur $[0,\delta] \times S^1$.

On montre, maintenant, qu'on peut paramétrer les courbes $t \mapsto \tilde{F}(t,x)$ avec un paramétrage de la forme $\alpha \mapsto \tilde{F}(t(\alpha,x),x)$, de façon que $\overline{F}(\alpha,x) = \tilde{F}(t(\alpha,x),x)$ soit une extension cohérente positive et normale de f_0.

Comme f_0 est un vanishing cycle positif, l'holonomie positive de f_0 est l'identité ; alors, les feuilles du feuilletage de $(0,\delta) \times S^1$ donné par $(\tilde{F}|_{(0,\delta)\times S^1})^*(\mathcal{F})$ sont, au voisinage de la composante de bord $\{0\} \times S^1 \subset \overline{(0,\delta) \times S^1} \subset [0,\delta] \times S^1$, toutes des courbes fermées et, clairement, simples.
Fixons, alors, $x_0 \in S^1$ et notons S_t la feuille de $(\tilde{F}|_{(0,\delta)\times S^1})^*(\mathcal{F})$ passante par $(t,x_0) \in (0,\delta) \times S^1$. Pour ce qu'on a dit tout à l'heure, pour $\alpha > 0$ petit, S_α rencontre la courbe $t \mapsto (t,x)$ en un seul point, qu'on note $(t(\alpha,x),x)$; voir la figure 15.5.
De plus, c'est facile de voir que ce paramétrage s'étend naturellement à $[0,\delta] \times S^1$ tout, comme $\tilde{F}(\{0\} \times S^1)$ et $\tilde{F}(\{1\} \times S^1)$ sont entièrement contenus chacun dans une feuille de $\mathcal{F}$. Par construction il existe $\tilde{\epsilon} > 0$ tel que l'application $\overline{F}([0,\tilde{\epsilon}] \times S^1) \to M$ donnée par

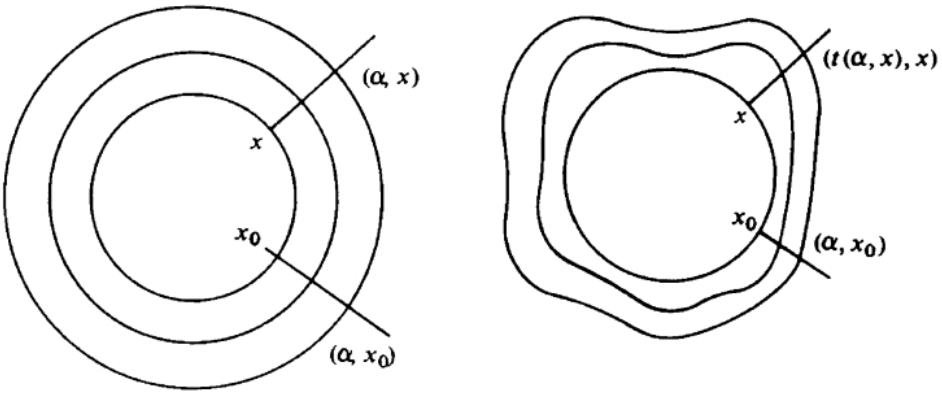


FIGURE 15.5 – Construction du paramétrage $t = t(\alpha,x)$

$\overline{F}(\alpha,x) = \tilde{F}(t(\alpha,x),x)$ satisfait les condition 1 et 2 de la définition 15.1.
Il reste, donc, à montrer que, quitte à restreindre le domaine de $\overline{F}$, on a aussi la propriété 3 de la définition 15.1, c'est à dire que, pour $\alpha > 0$, les courbes $\overline{f}_\alpha(x) := \overline{F}(\alpha,x)$ sont homotopes à une constante dans la feuille qui les contient.
Pour cela, considérons $F : [0,\overline{\epsilon}] \to M$, une extension cohérente positive et normale de f_0 et posons $f_t(x) := F(t,x)$. Quitte à restreindre le domaine de F et quitte à changer paramétrage pour son paramètre t, on peut supposer que $\overline{\epsilon} \leq \tilde{\epsilon}$ et que $f_t(S^1)$ et $\overline{f}_t(S^1)$ soient contenus dans une même feuille $\mathcal{F}_t$ de $\mathcal{F}$. C'est donc clair que, pour t petit, $f_t(S^1)$ et $\overline{f}_t(S^1)$ sont proche, au sens de la distance de Hausdorff pour les fermées dans $\mathcal{F}_t$; en particulier, elles sont homotopes dans $\mathcal{F}_t$. Alors, il existe $\epsilon \leq \overline{\epsilon}$ tel que $\overline{F}|_{[0,\epsilon]} : [0,\epsilon] \to M$ soit une extension cohérente positive et normale de f_0.

Passons à la propriété 2 de l'énoncé.
Notons, d'abord, que si $\overline{f}_0 : S^1 \to A_0$ est une courbe suffisamment proche, selon la topologie C^0, à f_0, alors $\overline{f}_0$ est un vanishing cycle. En effet, comme $\overline{f}_0$ est homotope dans

A_0 à f_0, par hypothèse, $\overline{f}_0$ a holonomie qui est triviale "de l'un des deux côtes de A_0" ; alors, avec la construction ci-dessus, on obtient une $\overline{F} : [0, \overline{\delta}] \to M$ extension positive et normale de $\overline{f}_0$. De plus, pour le point 1 qu'on vient de prouver, il existe $F : [0, \delta] \to M$ extension cohérente positive et normale de f_0. Donc, quitte à remplacer $\overline{\delta}$ par $\overline{\delta}' < \overline{\delta}$, les courbes $\overline{f}_t(S^1) = \overline{F}(\{t\} \times S^1)$ et $f_t(S^1) = F(\{t\} \times S^1)$ sont homotopes, car ils sont "proches" selon la topologie C^0 sur A_t, la feuille qui les contient, et, donc, $\overline{F} : [0, \overline{\delta}] \to M$ est aussi cohérente.
Si f_0 et $\overline{f}_0$ sont homotopes via $H : [0, 1] \times S^1 \to A_0$ et si f_0 est un vanishing cycle, pour compacité de $[0, 1]$ et pour ce qu'on a remarqué tout à l'heure, on a qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $H_{\frac{k}{n_0}}(S^1) := H(\{\frac{k}{n_0}\} \times S^1)$ est un vanishing cycle positif alors $H_{\frac{k+1}{n_0}}(S^1)$ l'est aussi. Cela entraîne, par récurrence, que $H_{\frac{n_0}{n_0}}(S^1) = H_1(S^1) = \overline{f}_0$ est un vanishing cycle positif. □

15.2.3 Extensions cohérentes simples

Supposons désormais que M soit une 3-variété compacte orientable, et que $\mathcal{F}$ soit un feuilletage lisse de codimension 1 sur M.
On a quelques remarques préliminaires.

Remarque 65. Soit $f_0 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow A_0$ un vanishing cycle positif, et $F : [0, \varepsilon] \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow M$ une extension cohérente positive et normale de f_0. En admettant quelques résultats de théorie de la *transversalité*, et avec le point 2 de la prop précédente, on peut supposer que :

1. f_0 est une immersion ;
2. les points d'*auto-intersection* de f_0 sont *doubles* et *transverses*.

Cela suit de la premibilité de considérer f_0 à homotopie dans A_0 près.
Le point 2 signifie que les fibres $f_0^{-1}(p)$, où $p \in A_0$, ont au plus 2 points, et que si l'on a $p = f_0(x_1) = f_0(x_2)$ pour deux points différents $x_1, x_2 \in \mathbb{S}^1$ alors $T_pA_0 = \mathbb{R}\,\dot{f_0}(x_1) \oplus \mathbb{R}\,\dot{f_0}(x_2)$.
On a alors que l'ensemble $B_0 := \{p \in f_0(\mathbb{S}^1) | card(f_0^{-1}(p)) = 2\}$ est fini, car discret dans $\mathbb{S}^1$. Posons puis $B_t := \{p \in f_t(\mathbb{S}^1) | card(f_t^{-1}(p)) = 2\}\}$, et $n_t := card(B_t)$.
Comme $f_0(\mathbb{S}^1)$ est compact et les courbes $\gamma_x : t \longmapsto F(t, x)$ sont des paramétrages des trajectoires du champ de vecteurs normal, il existe $\epsilon > 0$ assez petit tel que si $x_1, x_2 \in \mathbb{S}^1$, les courbes $\gamma_{x_1}, \gamma_{x_2}$ are soit disjointes soit l'une contenue dans l'autre. Cela est une application du théorème de Cauchy-Lipschitz.
Il existe alors un entier n_0 tel que $n_t \leq n_0$ pour tout $t \in [0, \epsilon]$.
Si $A \subseteq M$ est une feuille de $\mathcal{F}$, on note $\hat{A}$ son *revêtement universel*, qui existe comme elle est connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. On note aussi $\pi_A : \hat{A} \longrightarrow A$ la *projection universelle* de revêtement. Comme les f_t sont toutes homotopiquement triviales dans A_t pour $t > 0$, il existe un *relèvement universel* $\hat{f}_t$ de f_t, c'est à dire une courbe $\hat{f}_t : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \hat{A}_t$ telle que $\pi_{A_t} \circ \hat{f}_t = f_t$. On peut supposer d'avoir fixé l'image du point $1 \in \mathbb{S}^1$ par $\hat{f}_t$, au dessus du point $f_t(1) \in A_t$, afin que le relèvement soit *unique*.

Définition 15.3. Avec les mêmes hypothèses de tout à l'heure, on dit qu'une extension cohérente F de f_0 est *simple* si les relèvements $\hat{f}_t$ sont des courbes simples dans $\hat{A}_t$ pour $t > 0$.

Proposition 92. *Soit $f_0 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow A_0$ un vanishing cycle positif, et $F : [0, \varepsilon] \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow M$ une extension cohérente positive et normale de f_0. On note encore $f_t := F_{|\{t\}\times\mathbb{S}^1}$ et A_t la feuille contenante $f_t(\mathbb{S}^1)$.*
Il existe une suite $\{t_n\}_{n\geq 1}$ dans $[0, \varepsilon]$ telle que $t_n \longrightarrow 0$, pour $n \longrightarrow \infty$, et telle que pour tout $n \geq 1$ la feuille A_{t_n} contient un vanishing cycle $g_n : \mathbb{S}^1 \longrightarrow A_{t_n}$ qui premède une extension cohérente positive, normale et simple.

Remarque 66. Il se peut que $t_n = 0$ pour tout $n \geq 1$: un exemple est donnée par le feuilletage de Reeb de $\mathbb{S}^3$, en choisissant comme A_0 la seule feuille compacte et comme $f_0 : (\mathbb{S}^1, 1) \to (A_0, x_0)$ une courbe dont la classe $[f_0]$ est, par exemple, l'élément $(1, 0)$ du $\pi_1(A_0, x_0) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Démonstration. Soit $\hat{f}_t : S^1 \to \hat{A}_t$ un relèvement de f_t et, avec les notats ci-dessus, $B_t = \{\, p \in f_t(S^1) \,|\, p = f_t(x_1) = f_t(x_2),$ avec $x_1 \neq x_2$ dans $S^1 \,\}$. Comme on a déjà remarqué, on peut choisir ϵ assez petit que $n_t = \mathrm{card}(B_t) \leq \mathrm{card} B_0 =: k$. Pour $t > 0$, posons de même $\hat{B}_t = \{\, p \in \hat{f}_t(S^1) \,|\, p = \hat{f}_t(x_1) = \hat{f}_t(x_2),$ avec $x_1 \neq x_2$ dans $S^1 \,\}$. Clairement, $\pi_{A_t}(\hat{B}_t) \subseteq B_t$ et, donc, $\hat{n}_t := \mathrm{card}(\hat{B}_t) \leq n_t \leq k$. Notons $B_0 = \{p_1, \ldots, p_k\}$ et $x_i \neq x'_i$ dans S^1 tels que $f_0(x_i) = f_0(x'_i) = p_i$, pour chaque $i = 1, \ldots, k$; remarquons que si $p \in B_t$ alors il existe $1 \leq i \leq k$ tel que $p = f_t(x_i) = f_t(x'_i)$, pour unicité des solutions du champ de vecteurs normal au feuilletage.

Soient, maintenant, $K_1 = \{\, t \in [0, \epsilon] \,|\, f_t(x_1) = f_t(x'_1) \,\}$ et $U_1 = \{\, t \in (0, \epsilon) \,|\, \hat{f}_t(x_1) = \hat{f}_t(x'_1) \,\}$. Clairement K_1 est fermée et on a l'inclusion $U_1 \subset K_1$; on veut montrer que U_1 est ouvert.
Soit $S^1 \setminus \{x_1, x'_1\} =: \alpha \coprod \beta$, où α et β sont arc ouverts, c'est à dire sans extrémités, de S^1. Si $t \in U_1$, on a $\hat{f}_t(x_1) = \hat{f}_t(x'_1)$ et, donc, la restriction de f_t à la clôture $\overline{\alpha}$ de α est une courbe fermée dans A_t qui est homotope, dans A_t même, à une constante.
Pour le lemme 81, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $s \in (t-\delta, t+\delta)$, $f_s|_{\overline{\alpha}}$ est fermée et homotope à une constante dans A_s, c'est à dire que $\hat{f}_s|_{\overline{\alpha}}$ est une courbe fermée dans $\hat{A}_s$; cela entraîne directement que $s \in U_1$. Donc, U_1 est ouvert.

Notons, maintenant, qu'il y a seulement une des trois premibilités suivantes :

1. *Il existe $\delta > 0$ tel que $[0, \delta] \cap U_1 = \emptyset$:*
   Dans ce cas, quitte à restreindre F à $[0, \delta] \times S^1$, on obtient $\hat{n}_t < n_0 = k$. On procède, alors, par récurrence avec $U_2 := \{\, t \in (0, \delta] \,|\, \hat{f}_(x_2) = \hat{f}_(x'_2) \,\}$.
2. *Il existe $\delta > 0$ tel que $[0, \delta) \subset U_1$:*
   Dans ce cas, $\hat{f}_t(x_1) = \hat{f}_t(x'_1)$ pour $t \in (0, \delta]$ et, donc, $f_t(x_1) = f_t(x'_1)$ pour $t \in [0, \delta]$. On peut, donc, considérer $g_0 = f_0|_{\overline{\alpha}}$ et $\tilde{g}_0 = f_0|_{\overline{\beta}}$ comme applications de S^1 vers A_0. Comme f_0 n'est pas homotope à un point dans A_0, on peut supposer, par exemple, que g_0 ne le soit pas non plus. Posons, alors, $G = F|_{[0,\delta]\times\overline{\alpha}}$ et $g_t(x) = G(t, x)$. Comme $\hat{f}_t(x_1) = \hat{f}_t(x'_1)$ pour $t \in (0, \delta]$, g_t est homotope à une constante dans A_t, pour tout $t \in (0, \delta]$. Donc, si $\hat{n}^1_t := \mathrm{card}(\{\, p \,|\, \hat{g}_t(x) = \hat{g}_t(x'), x \neq x'$ dans $\overline{\alpha} \,\})$, on a $\hat{n}^1_t < \hat{n}_t \leq k$.
3. *Il existe une suite $\tau^1_m \to 0$ telle que $\tau^1_m \in (\overline{U_1} \setminus U_1) \subset K_1$:*
   Dans ce cas, on peut supposer que pour chaque $m \geq 1$ il existe $\epsilon_m > 0$ tel que $(\tau^1_m, \tau^1_m + \epsilon_m] \subset U_1$. Comme dans le cas 2, on a $f_t(x_1) = f_t(x_1)$, mais pour $t \in [\tau^1_m, \tau^1_m + \epsilon_m]$. Dès que $\tau^1_m \in K_1 \setminus U_1$, les restrictions $f_{\tau^1_m}|_{\overline{\alpha}}$ et $f_{\tau^1_m}|_{\overline{\beta}}$ ne sont pas homotopes à des points dans $A_{\tau^1_m}$; par contre, comme $(\tau^1_m, \tau^1_m + \epsilon_m] \subset U_1$,

pour $\tau_m^1 < t \leq \tau_m^1 + \epsilon_m$ les courbes $f_t|_{\overline{\alpha}}$ et $f_t|_{\overline{\beta}}$ sont homotopes à des points dans A_t. Donc, pour chaque $m \geq 1$, $f_{\tau_m^1}|_{\overline{\alpha}}$ est un vanishing cycle positif de $A_{\tau_m^1}$ et $F|_{[\tau_m^1, \tau_m^1+\epsilon_m]}$ est une extension cohérente positive et normale de $f_{\tau_m^1}|_{\overline{\alpha}}$. Alors, si $\hat{n}_t^m := \mathrm{card}(\{\, p \in \hat{f}_t(\overline{\alpha}) \mid \hat{f}_t(x) = \hat{f}_t(x'), \{x, x'\} \neq \{x_1, x_1'\}$ et $x \neq x'$ dans $\overline{\alpha}\,\})$, on a $\hat{n}_t^m < \hat{n}_t \leq k$.

Notons que, dans tous les cas, on a obtenu une suite $\tau_m^1 \to 0$ telle que, pour chaque $m \geq 1$, la feuille $A_{\tau_m^1}$ contient un vanishing cycle g_m qui a un extension cohérente positive et normale $G_m^1 : [\tau_m^1, \tau_m^1 + \epsilon_m] \times S^1 \to M$ telle que le nombre d'auto-intersections de $\hat{g}_{m,t}^1$, un relèvement de $g_{m,t}^1 := G_m^1(t, .)$, est $\hat{n}_{m,t}^1 \leq \min\{k-1, \hat{n}_t - 1\}$. En effet, dans les cas 1 et 2, il suffit de choisir $\tau_m^1 = 0$ pour chaque $m \geq 1$; dans le cas 3, la suite τ_m^1 est déjà donnée et il suffit de identifier les extrémités de $\overline{\alpha}$ pour obtenir un cercle S^1 et on a la propriété voulue.

Le même argument montre qu'on a une suite $\tau_{m,n}^2 \to \tau_m^1$ telle que le nombre d'auto-intersections de $\hat{g}_{m,n,t}^2$ est $\hat{n}_{m,n,t}^2 \leq \min\{k-2, \hat{n}_t - 2\}$. En extrayant une sous-suite $\tau_m^2 := \tau_{m,n(m)}^2 \to 0$, on obtient un vanishing cycle g_m^2 qui a une extension cohérente positive et normale $\hat{G}_m^2$ telle que le nombre d'auto-intersections de $\hat{g}_{m,t}^2$ est $\hat{n}_{m,t}^2 \leq \min\{k-2, \hat{n}_t - 2\}$. En itérant cet argument au plus $k-2$ fois, on obtient une suite $\tau_m \to 0$ telle que, pour chaque $m \geq 1$, la feuille A_{τ_m} contient un vanishing cycle qui admet une extension cohérente positive, normale et simple. □

15.2.4 Existence d'une feuille compacte

Voici la prop qui nous intéresse pour terminer la preuve du théorème de Novikov.

Théorème 93. *Soit A_0 une feuille de $\mathcal{F}$ qui admet un vanishing cycle ayant une extension cohérente positive, normale et simple. Alors A_0 est une feuille compacte.*

Ce théorème suit de nombreuses props.

Proposition 94. *Si A est une feuille non-compacte d'un feuilletage $\mathcal{F}$ de codimension 1 sur une variété compacte, alors pour chaque $p \in A$ il existe une courbe fermée γ transverse à $\mathcal{F}$ et passante par p.*

Démonstration. Comme M est compacte et A ne l'est pas, on a $\overline{A} \setminus A \neq \emptyset$. Considérons un point $x_0 \in \overline{A} \setminus A$ et une carte distinguée (U, ϕ) avec $x_0 \in U$. Soit $\ell \subset U$ un arc normal à $\mathcal{F}$ passant pour x_0. Comme $x_0 \in \overline{A} \setminus A$, il existe une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ de points tels que $x_n \in \ell \cap A$.
Soit $\alpha : [0,1] \to A$ une courbe différentiable sans auto-intersections telle que $\alpha(0) = x_n \neq \alpha(1) = x_n + 1$. Pour le lemme 78 de trivialisation globale, il existe un voisinage V de $\alpha([0,1])$ tel que $\mathcal{F}|_V$ soit équivalent à $\mathcal{F}'$ de $D^{n-1} \times (-\rho, \rho)$ qui a comme feuilles les $D^{n-1} \times \{t\}$, pour $t \in (-\rho, \rho)$. On peut supposer, sans perte de généralité, que la situation soit comme dans la figure 15.6.

Traitons, d'abord, le cas où $\mathcal{F}$ est transversalement orientable.
Dans ce cas, on peut supposer que l'orientation de ℓ soit compatible avec l'orientation transverse de $\mathcal{F}|_V$, de façon que ℓ coupe V comme on a représenté dans la figure 15.6.
Soient, maintenant, δ_n et δ_{n+1} les composantes connexes de $\ell \cap V$ qui contiennent, respectivement, x_n et x_{n+1} et $\overline{\gamma} : [0,1] \to \ell$ l'arc reliant x_n à x_{n+1}. Alors $\partial V \cap \delta_n = \{q, q'\}$,

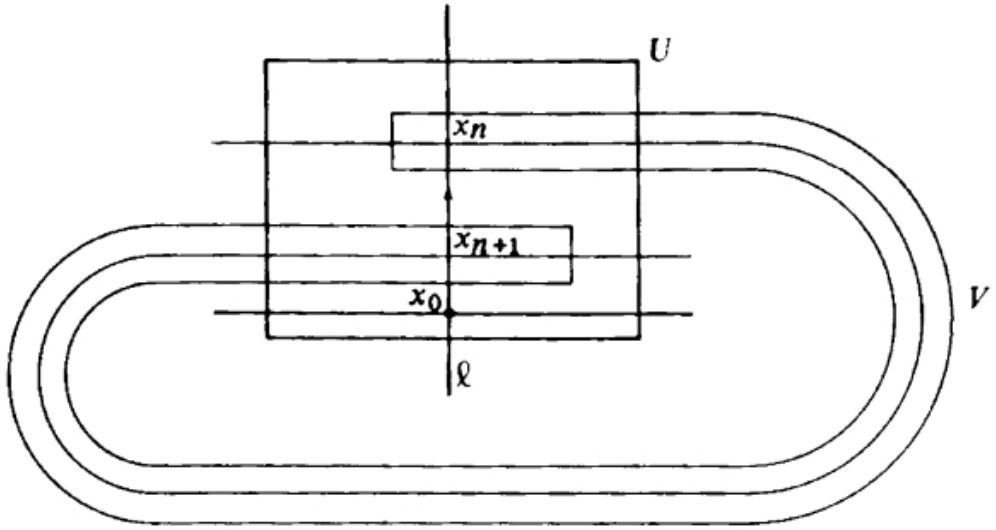


FIGURE 15.6 – Disposition de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$

avec $q < q'$ dans ℓ, où $<$ est l'ordre naturellement induit par l'orientation de ℓ choisie. En travaillant avec le feuilletage $\mathcal{F}'$ sur $D^{n-1} \times (-\rho, \rho)$, on peut facilement trouver un arc $\tilde{\gamma} : [0,1] \to V$ transverse à $\mathcal{F}|_V$, compatible avec l'orientation positive de $\mathcal{F}|_V$ et tel que $\tilde{\gamma}(0) = x_{n+1}$ et $\tilde{\gamma}(1) = q$. On peut, clairement, supposer que les vecteurs tangents de $\overline{\gamma}$ et $\tilde{\gamma}$ en x_{n+1} et q coïncident, de façon qu'ils se recollent en une courbe différentiable $\gamma : S^1 \to M$. Toute la construction est représentée en figure 15.7. Donc, ce qu'on a obtenu

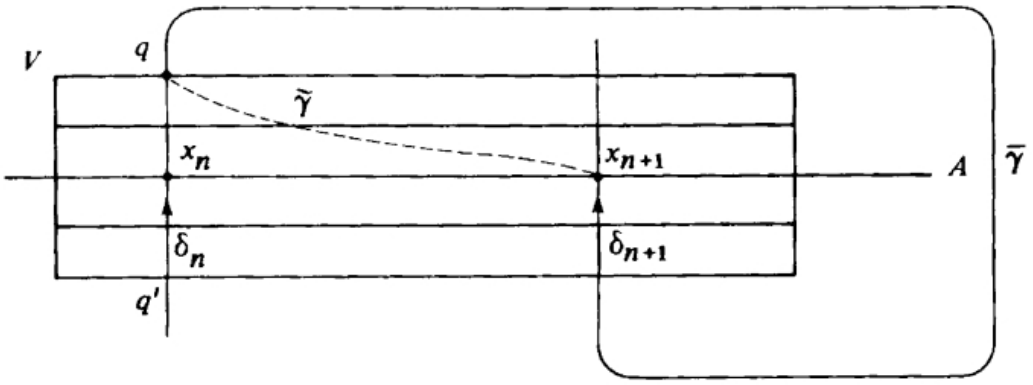


FIGURE 15.7 – Cas $\mathcal{F}$ transversalement orientable : construction de γ

jusqu'alors est une courbe fermée différentiable qui coupe la feuille A donnée. Maintenant, on va modifier γ de façon qu'elle va passer pour un point $x \in A$ donné : cela nous permet de conclure la preuve, dans le cas où $\mathcal{F}$ est transversalement orientable.
On répète, ici, la construction faite avant avec le lemme 78, pour travailler dans un feuilletage dont on connais très bien les feuilles. Soit, alors, x un point arbitraire de A. Soit

$\beta : [0,1] \to A$ un arc différentiable sans auto-intersections avec $\beta(0) = x_{n+1}$ et $\beta(1) = x$. Le lemme 78 nous donne un voisinage W de $\beta([0,1])$ tel que $\mathcal{F}|_W$ est équivalent à le feuilletage de $D^{n-1} \times (-\epsilon, \epsilon)$ de feuilles $D^{n-1} \times \{t\}$ avec $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Comme $\gamma \cap W$ est composé par deux points q, q', disons avec $q > q'$ dans γ, on peut définir un arc différentiable $\tilde{\mu} : [0,1] \to W$ transverse à $\mathcal{F}$, avec $\tilde{\mu}(0) = q'$, $\tilde{\mu}(1) = q$, $\tilde{\mu}(\frac{1}{2}) = x$ et tel que les vecteurs tangents de γ et $\tilde{\mu}$ en q et q' coïncident. Alors, en joignant $\tilde{\mu}$ avec la partie de γ qui est dehors de W, on obtient une courbe fermée différentiable μ passante par x et transverse à $\mathcal{F}$; voir la figure 15.8 pour une représentation.

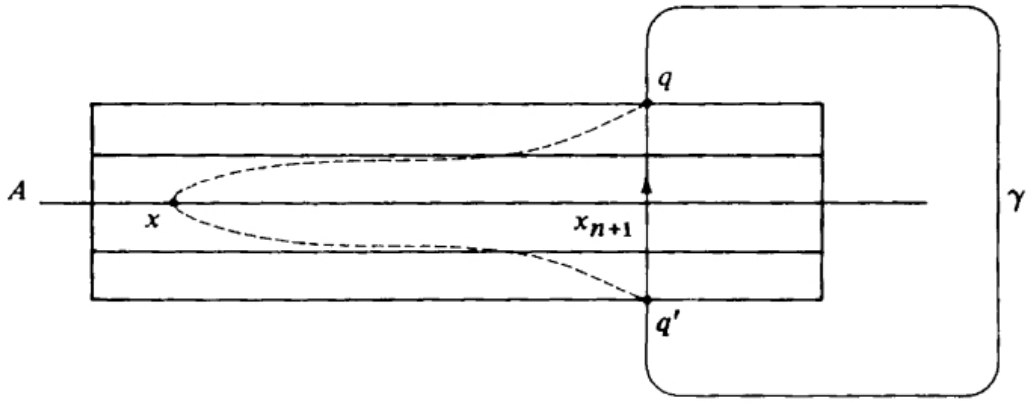


FIGURE 15.8 – Cas $\mathcal{F}$ transversalement orientable : construction de μ

On omet ici les détailles pour le cas $\mathcal{F}$ non transversalement orientable : en effet, l'argument est exactement le même, sauf pour le fait que, afin que tout marche bien, on doit appliquer le lemme 78 à un arc qui passe pour *trois* point successifs de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$; on serait, alors, dans un des deux cas représentés dans la figure 15.9 et, dans tous les deux, on peut procéder comme avant pour arriver jusqu'à la conclusion. □

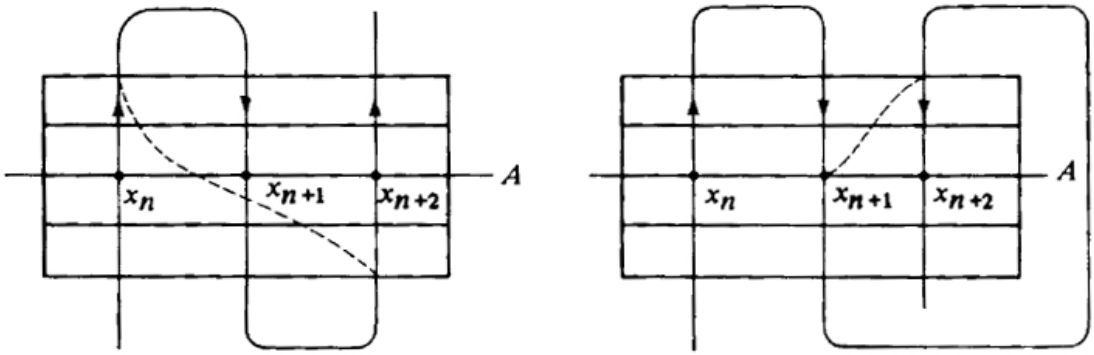


FIGURE 15.9 – Cas $\mathcal{F}$ non transversalement orientable : cas premibles de disposition de ℓ par rapport à trois points successifs de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$

Pour la prop suivante, on travaille dans les hypothèses du théorème 93, c'est à dire A_0 est une feuille de $\mathcal{F}$ avec un vanishing cycle f_0 qui admet une extension $F : [0, \epsilon] \times S^1 \to M$ cohérente, positive, normale et simple. On a, alors :

Proposition 95. *Il existe une immersion différentiable $H : (0, \epsilon] \times D^2 \to M$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. *pour chaque $x \in D^2$, les arcs $t \mapsto H(t, x)$ sont positifs et normales ;*
2. *pour chaque $t \in (0, \epsilon]$, $H(\{t\} \times D^2) \subset A_t$;*
3. *la restriction de H à $(0, \epsilon] \times S^1$ coïncide avec $F|_{(0,\epsilon]\times S^1}$.*

Démonstration. Premièrement, remarquons qu'on peut supposer que chaque feuille A de $\mathcal{F}$ ait comme revêtement universel le plan $\mathbb{R}^2$.
En effet, on peut supposer d'abord que notre feuille A soit orientable, quitte à considérer le revêtement d'orientation à deux feuillets. Maintenant, toute surface orientable admet une structure de surface de Riemann, et les revêtements universels des surfaces de Riemann sont, à homéomorphisme près, seulement $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{S}^2$. Si l'on était dans le cas de $\mathbb{S}^2$, notre feuille A serait déjà compacte : rien à démontrer. Donc, forcement, $\hat{A} \simeq \mathbb{R}^2$.

En particulier, alors, $\hat{A}_\epsilon \simeq \mathbb{R}^2$. Comme F est une extension cohérente et simple de f_0, la courbe $\hat{f}_\epsilon : S^1 \to \hat{A}_\epsilon$ est simple : alors, pour le théorème de la courbe fermée de Jourdan, il existe $h_\epsilon : D^2 \to A_\epsilon$ telle que $\hat{h}_\epsilon|_{\partial D^2} = \hat{f}_\epsilon$. Comme $\hat{f}_\epsilon(S^1)$ est une courbe simple plongée, on peut, de plus, supposer que $\hat{h}_\epsilon$ est un difféomorphisme sur $\hat{h}_\epsilon(D^2)$, qui serait, alors, un disque. Donc, on a que $f_\epsilon = \pi_{A_\epsilon} \circ \hat{f}_\epsilon$ s'étend, de façon naturelle, à une immersion $h_\epsilon = \pi_{A_\epsilon} \circ \hat{h}_\epsilon : D^2 \to A_\epsilon$.
De plus, par le lemme 81, h_ϵ s'étend en une immersion $H : (\epsilon_0, \epsilon] \times D^2 \to M$ telle que les arcs $t \mapsto H(t, x)$ sont positifs et normales et telle que, pour chaque $t \in (\epsilon_0, \epsilon]$, $H(\{t\} \times D^2) \subset A_t$.
Soit, maintenant, $\tilde{F}$ la restriction de H à $(\epsilon_0, \epsilon] \times S^1$. On a, alors, $\tilde{F}(\epsilon, x) = h_\epsilon(x) = f_\epsilon(x) = F(\epsilon, x)$. Les arcs $t \mapsto \tilde{F}(t, x)$ et $t \mapsto F(t, x)$ sont deux paramétrages d'une orbite du champ de vecteurs normal, fixé au début de cette section, au feuilletage $\mathcal{F}$. Donc, quitte à changer le paramétrage de $(\epsilon_0, \epsilon]$, on peut supposer que $F(t, x) = \tilde{F}(t, x)$, c'est à dire que $H|_{(\epsilon_0,\epsilon]\times S^1} = F|_{(\epsilon_0,\epsilon]\times S^1}$. En résumant, on a obtenu $H : (\epsilon_0, \epsilon] \times S^1 \to M$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. pour chaque $x \in D^2$, les arcs $t \mapsto H(t, x)$ sont positifs et normales ;
2. pour chaque $t \in (\epsilon_0, \epsilon]$, $H(\{t\} \times D^2) \subset A_t$;
3. la restriction de H à $(\epsilon_0, \epsilon] \times S^1$ coïncide avec $F|_{(\epsilon_0,\epsilon]\times S^1}$.

En particulier, si $\epsilon_0 = 0$, on a déjà conclut la preuve.

Supposons, donc, d'être dans le cas malheureux où $\epsilon_0 > 0$. On va, alors, prouver que, pour chaque $x \in D^2$, $\lim_{t\to\epsilon_0^+} H(t, x)$ existe.
La courbe fermée $\hat{f}_{\epsilon_0}$ est le bord d'un disque dans $\hat{A}_{\epsilon_0}$ et, donc, en utilisant le même argument que tout à l'heure, il existe $\delta > 0$ et une extension $H' : (\epsilon_0 - \delta, \epsilon_0 + \delta) \times D^2 :\to M$ satisfaisant encore les propriétés 1, 2 et 3, avec domaine opportunément changé.
Si $\epsilon_0 < t_0 < \epsilon_0 + \delta$, la restriction $h'_{t_0} = H'|_{\{t_0\}\times D^2}$ est homotopiquement triviale dans A_{t_0} et, donc, elle se relève à $\hat{h}'_{t_0} : D^2 \to \hat{A}_{t_0}$. Par construction, on a $\partial(\hat{h}'_{t_0}(D^2)) = \hat{f}_{t_0}(S^1) = \partial(\hat{h}_{t_0}(D^2))$, comme $H' = H = F$ sur $\{t_0\} \times S^1$. De plus, dès que $\hat{A}_{t_0} = \mathbb{R}^2$ et que $\hat{h}_{t_0}$

et $\hat{h}'_{t_0}$ sont deux immersions, cela entraîne que $\hat{h}_{t_0}(D^2) = \hat{h}'_{t_0}(D^2)$, c'est à dire que pour chaque $x \in D^2$ il existe $x \in D^2$ tel que $\hat{h}_{t_0}(x) = \hat{h}'_{t_0}(y)$. Or, par l'unicité des trajectoires du champ normal au feuilletage, on a $H(t,x) = H'(t,y)$ pour chaque $t \in (\epsilon_0, \epsilon_0 + \delta)$. Donc, $\lim_{t\to\epsilon_0^+} H(t,x)$ existe et vaut $H'(\epsilon_0, y)$.

Maintenant, on peut facilement étendre H à $(\epsilon_0 - \delta, \epsilon) \times D^2$, comme f_{ϵ_0} est homotope à une constante dans A_{ϵ_0} et $\hat{f}_{\epsilon_0}$ est une courbe simple dans $\hat{A}_{\epsilon_0}$.
Par la connexité de $(0, \epsilon]$, on en conclut facilement que H peut être étendue à $(0, \epsilon] \times D^2$ tout. Cette H vérifie, par construction, toutes les propriétés voulues ; la seule chose qui reste à vérifier est le fait qu'elle soit une immersion, mais, effectivement, cela suit directement du fait qu'on l'a construite à partir des orbites du champ normal à $\mathcal{F}$. □

Un autre résultat technique nous donne des propriétés de l'immersion H qu'on vient de construire :

Proposition 96. *Soit $H : (0, \epsilon] \times D^2 \to M$ donnée par la prop 95 et soient $h_t = H|_{\{t\}\times D^2}$ et $D_t = h_t(D^2)$. Alors il existe une suite décroissante $\tau_n \to 0$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. *$A_{\tau_n} = A_{\tau_{n+1}} = A$ pour $n \geq 1$;*
2. *$D_{\tau_n} \subset D_{\tau_{n+1}}$ pour $n \geq 1$;*
3. *pour chaque $n \geq 1$, il existe une application $g_n : D^2 \to D^2$ telle que $g_n : D^2 \to g_n(D^2)$ soit un difféomorphisme et $h_{\tau_n} = h_{\tau_{n+1}} \circ g_n$.*

Démonstration. Soit $U = \{x \in D^2 \mid \lim_{t\to 0^+} H(t,x) \text{ existe }\}$. On va montrer que U est un sous-ensemble *propre* et ouvert de D^2, contenant S^1.
En effet, U est ouvert puisque les arcs $t \mapsto H(t,x)$ sont des paramétrages des orbites du champ de vecteurs normale à $\mathcal{F}$; donc, le théorème d'existence locale du flot nous assure que, si $x \in U$, alors U contient tout un voisinage de x, c'est à dire que U est ouvert. De plus, $S^1 \subset U$ car la restriction de H à $(0, \epsilon] \times S^1$ coïncide avec F. Enfin, si, par absurde, $U = D^2$ tout, H s'étendrait de façon continue à $\{0\} \times D^2$, c'est à dire f_0 serait homotope à une constante dans A_0, ce qui est absurde.

Considérons, maintenant, un $x_0 \in D^2 \setminus U$. Comme M est compacte, il existe une suite décroissante $s_n \to 0$ telle que, si on note $p_n = H(s_n, x_0)$, il existe $p_0 \in M$ avec $p_n \to p_0$; notons A la feuille passante par p_0. Soit (V, ψ) une carte distinguée avec $p_0 \in V$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $p_n \in V$ pour chaque $n \geq 1$.

Comme l'arc $\gamma(t) = H(t, x_0)$ est normal à $\mathcal{F}$, pour chaque $n \geq 1$, il existe $t_n > 0$ tel que $q_n = H(t_n, x_0)$ soit dans A et le sous-arc de γ qui lie p_n et q_n soit contenu dans V ; la figure 15.10 représente le cas où $s_{n-1} < t_n < s_n$, mais il se peut bien qu'on ait la situation symétrique où $s_n < t_n < s_{n+1}$. En tout cas, on a clairement que $t_n \to 0$ et qu'elle est une suite décroissante satisfaisant $A_{t_n} = A$, c'est à dire que $(t_n)_{n\geq 1}$ vérifie la propriété 1 de l'énoncé. On va, maintenant, extraire une sous-suite de $(t_n)_{n\geq 1}$ qui vérifie toutes les propriétés de la prop.

Notons, d'abord, que $p_0 \in D_{t_n}$ pour n assez grand.
En effet, si c'était pas le cas, on aurait qu'il existe $b_n \in \partial D_{t_n}$ avec $b_n \to p_0$, dès que q_n est dans l'intérieure de D_{t_n}. Or, on a aussi $\partial D_{t_n} \subset f_{t_n}(S^1)$, qui converge uniformément vers $f_0(S^1)$; on aurait, alors, $p_0 \in f_0(S^1) \nsubseteq A$, ce qui est absurde.

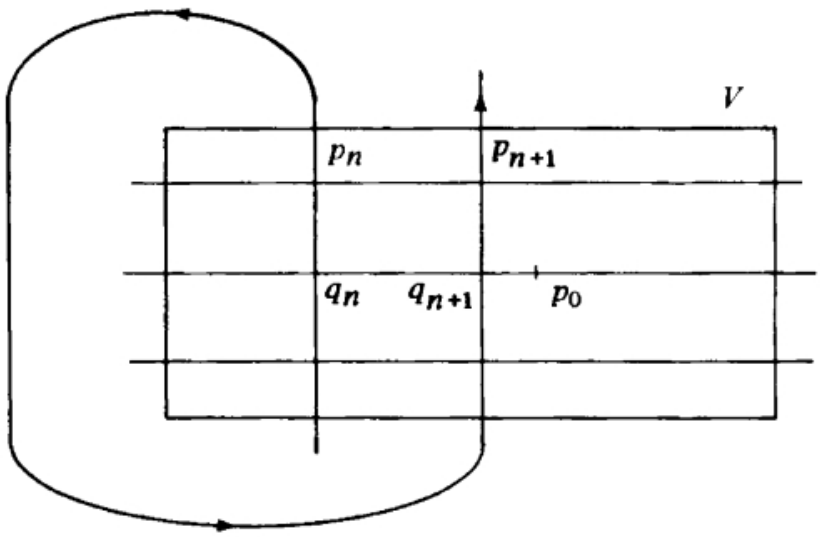


FIGURE 15.10 – Cas $s_{n-1} < t_n < s_n$, c'est à dire $q_n < p_n$ dans γ

Choisissons, maintenant, $\hat{p}_0 \in \pi^{-1}(p_0)$ et des voisinages $W, \hat{W}$ de $p_0, \hat{p}_0$ dans $A, \hat{A}$, respectivement, tels que $\pi : \hat{W} \to W$ soit un difféomorphisme. Considérons une suite $\hat{q}_n \in \hat{W}$ avec $\hat{q}_n \to \hat{p}_0$ et $\pi_A(\hat{q}_n) = q_n = h_{t_n}(x_0)$. Soit, pour chaque $n \geq 1$, $\hat{h}_{t_n} : D^2 \to A$ le seul relèvement de h_{t_n} tel que $\hat{h}_{t_n}(x_0) = \hat{q}_n$ et soit $\hat{D}_{t_n} = \hat{h}_{t_n}(D^2)$.
Notons que si $m \neq n$ sont des entiers positifs, les courbes $h_{t_m}(S^1) = f_{t_m}(S^1)$ et $h_{t_n}(S^1) = f_{t_n}(S^1)$ sont courbes fermées disjointes de A ; de même, les $\hat{h}_{t_m}(S^1), \hat{h}_{t_n}(S^1)$ sont courbes fermées et simples dans $\hat{A}$ et, en particulier, $\hat{D}_{t_n} \subset \hat{D}_{t_m}$ ou $\hat{D}_{t_m} \subset \hat{D}_{t_n}$, dès que ces disques s'intersectent au moins sur le point p_0. Alors, on a aussi $D_{t_n} \subset D_{t_m}$ ou $D_{t_m} \subset D_{t_n}$.

On rem que avec la topologie des feuilles sur M les feuilles globales résultent des sous-variétés immergées ; en particulier, elles sont des espaces topologiques métrisables pour cette topologie. Donc on peut bien fixer une métrique d_A sur A qui donne la topologie des feuilles sur A même.
Maintenant, comme la suite de courbes $h_{t_n}(S^1)$ converge vers $f_0(S^1)$, on a que $f_0(S^1) \subset \overline{A} \setminus A$; donc, $\lim_{n\to\infty} d_A(p_0, h_{t_n}(S^1)) = +\infty$. On peut, alors, extraire une suite décroissante $\tau_k = t_{n_k}$ de $(t_n)_{n\geq 1}$ telle que $d_A(p_0, h_{\tau_k}(S^1))$ soit croissante et divergeant vers $+\infty$. Cette suite décroissante $(\tau_n)_{n\geq 1}$, clairement convergeant vers 0, satisfait alors les propriétés 1 et 2 de la prop.

Posons, maintenant, $D_n = h_{\tau_n}(D^2)$ et $\hat{D}_n = \hat{h}_{\tau_n}(D^2)$. Notons, alors, que, pour chaque $n \geq 1$, $\hat{h}_{\tau_n} : D^2 \to \hat{D}_n$ est un difféomorphisme et que $\hat{D}_n \subset \hat{D}_{n+1}$. Enfin, on définit $g_n : D^2 \to D^2$ en posant $g_n = (\hat{h}_{\tau_{n+1}})^{-1} \circ \hat{h}_{\tau_n}$: ces difféomorphismes g_n satisfont, alors, toutes les propriétés voulues. □

Remarque 67.

Remarque 68. Pour tout $t \in (0, \varepsilon]$, il existe une suite $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers zéro telle que $D_{r_n} \subseteq A_t$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_{r_n} = A_t$.
Ce fait, qu'on montrera tout de suite, implique que $\bigcup_{t\in(0,\varepsilon]} D_t = \bigcup_{t\in(0,\varepsilon]} A_t$.

Démonstration (Observation 68). On va vérifier ce fait pour la feuille $A = A_{\tau_n}$. L'espace totale $\hat{A}$ du revêtement universel de la feuille A est muni d'une distance canonique $\hat{d_A}$, définie en tant que pull-back d'une métrique riemannienne sur la variété A. De cette façon, pour tout ouvert $U \subset \hat{A}$ tel que $(\pi_A)_{|U} : U \to \pi_A(U)$ soit un difféomorphisme, la restriction est aussi une isométrie.
Le fait que $d_A(p_0, h_{\tau_n}(S^1)) \to \infty$ entraîne que $\hat{d}_a(\hat{p_0}, \hat{h}_{\tau_n}(S^1)) \to \infty$, où l'on a choisi $\hat{p_0} \in (\pi_A)^{-1}(p_0)$. Donc $\bigcup_{n\geq 1} \hat{D}_n = \hat{A}$, d'où $\bigcup_{n\geq 1} D_n = A$.
Considérons maintenant p_0 comme dans la preuve de la prop 96. Alors, comme on a vu, $p_0 \in D_{\tau_n}$, pour n assez grand. On a donc $p_0 = H(\tau, x)$ pour quelque $x \in D^2$ et $\tau = \tau_n$ fixé. Remarquons maintenant que p_0 est dans l'ensemble limite $\omega(\gamma)$ d'une orbite du champ de vecteurs normal passant pour le point $q_n = H(\tau, x_0)$, avec les notats introduites dans l'appendice A.2.2. Comme cet ensemble limite est invariant pour le flot, on conclut que si $t \in (0, \varepsilon]$ alors $p_t = H(t, x) = \lim_{n\to\infty} H(r'_n, x_0)$, pour une certaine suite $r'_n \to 0$. En utilisant le même raisonnement de la prop 96, on conclut qu'il existe une suite $r_n \to 0$ telle que $D_{r_n} \subset D_{r_{n+1}} \subset A_t$ et $p_t \in D_{r_n}$ pour n assez grand.
En itérant ce qu'on a fait pour la feuille A_{τ_n}, on conclut que $\bigcup_{n\geq 1} D_{r_n} = A_t$.

□

Considérons maintenant la variété topologique quotient K_n obtenu à partir de la variété à bord $[\tau_{n+1}, \tau_n] \times D^2$ en identifiant le points (τ_n, x) avec $\tau_{n+1}, g_n(x))$ pour tout $x \in D^2$ (voir figure 15.11).

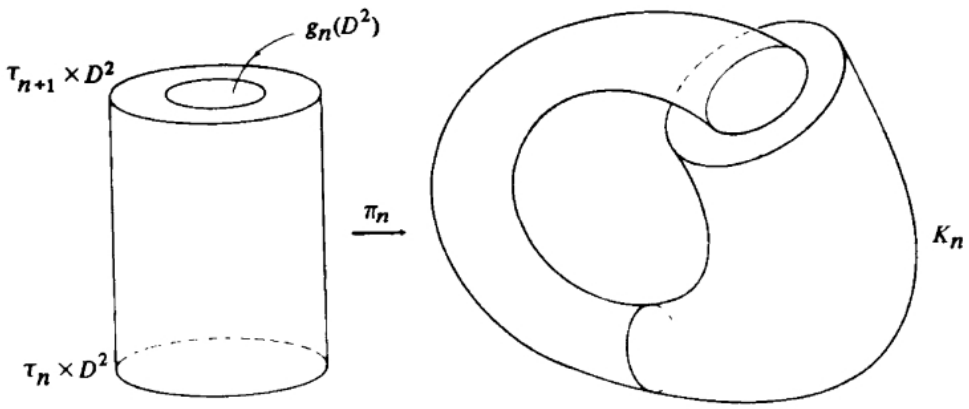


FIGURE 15.11 – Construction de K_n

Soit $\pi_n : [\tau_{n+1}, \tau_n] \times D^2 \to K_n$ la projection canonique au quotient.
Remarquons que pour tout $x \in D^2$ on a $h_{\tau_{n+1}}(g_n(x)) = h_{\tau_n}(x)$. Donc il existe une application $\overline{H_n} : K_n \to M$ telle que $H_n = \overline{H_n} \circ \pi_n$. En particulier, $\overline{H}_n$ est une immersion. Cette construction contient l'idée fondamentale de la preuve du théorème de Novikov.

Avec tout ce qu'on a dit jusqu'alors, on peut finalement prouver le théorème 93 :

Démonstration (théorème 93). Supposons par l'absurde que A_0 ne soit pas compacte. Fixons $x_0 \in \mathbb{S}^1$, et soit $q_0 = f_0(x_0)$.
D'après la prop 94, il existe une courbe fermée positive γ transverse à $\mathcal{F}$ passant par q_0. Quitte à considérer une courbe homotope à γ, on peut supposer que :

1. $\tilde{\gamma}$ rencontre $F([0,\varepsilon] \times \mathbb{S}^1)$ le long du segment normal $\{f_t(x_0) | t \in [0,\alpha]\}$, où $0 < \alpha \leq \varepsilon$;
2. $\tilde{\gamma}$ ne rencontre pas le segment normal $\{f_t(x) | t \in [0,\alpha]\}$, pour tout $x \neq x_0$.

À un reparamétrage près, on peut supposer que $\tilde{\gamma}(t) = f_t(x_0)$, pour $t \in [0,\alpha]$. Considérons maintenant la suite τ_n comme dans la prop 96, et soit n assez grand de façon que $\tau_n < \alpha$, et soit $\overline{H}_n : K_n \to M$ comme dans la dernière remarque.
Pour tout $x \in D^2$ considérons la courbe $\beta_x(t) := \pi_n(t,x)$. Par construction, on a $\overline{H}_n(\beta_x(t)) = H(t,x)$, et donc la courbe $t \mapsto \beta_x(t)$ est envoyée par $\overline{H}_n$ dans une orbite du champ de vecteurs normal. En particulier $\tilde{\gamma}(t) = \overline{H}_n(\beta_{x_0}(t))$, pour $t \in [\tau_{n+1}, \tau_n]$.
On va tirer en arrière la partie de $\tilde{\gamma}$ contenue dans $\overline{H}_n(K_n)$ en une courbe $\overline{\gamma}$ dans K_n telle que $\overline{H}_n \circ \overline{\gamma} = \tilde{\gamma}$.
Posons $\overline{\gamma}(t) := \beta_{x_0}(t)$ pour $t \in [\tau_{n+1}, \tau_n]$. Comme $\tilde{\gamma}(t)$ est contenu dans l'intérieur de $\overline{H}_n(K_n)$ pour $\tau_n < t < \tau_n + \mu$ (où $\mu > 0$ est choisi suffisamment petit), on peut relever $\tilde{\gamma}$ dans l'intervalle $[\tau_{n+1}, \tau_n + \mu]$ (voir figure 15.12).

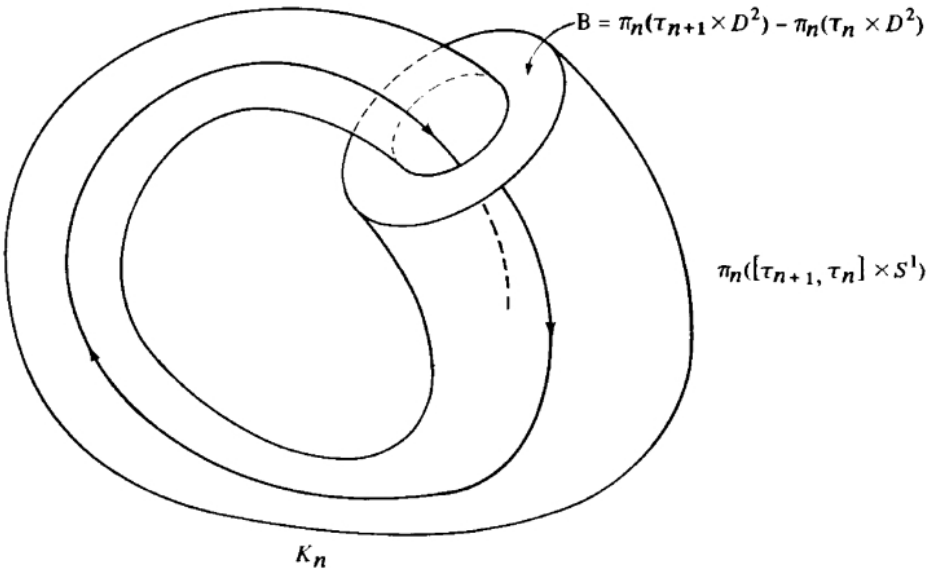


FIGURE 15.12 – Construction de $\overline{\gamma}$

Comme $\overline{H}_n$ est un difféomorphisme local, on peut continuer à tirer en arrière $\tilde{\gamma}$ jusqu'à ce que $\overline{\gamma}$ reste dans l'intérieur de K_n. A priori on sera obligé à s'arrêter quand on rencontrera ∂K_n. D'autre part, on doit le rencontrer puisque $\tilde{\gamma}$ est une courbe fermée et le tiré en arrière part du bord.
Il y a donc seulement deux premibilités afin que $\overline{\gamma}$ rencontre ∂K_n :

1. en $\pi_n([\tau_{n+1}, \tau_n] \times \mathbb{S}^1)$;
2. en $B := \pi_n(\{\tau_{n+1}\} \times D^2) \setminus \pi_n(\{\tau_n\} \times D^2)$.

Or, les deux sont absurdes.
La première premibilité est exclue car $\tilde{\gamma}$ coupe $H_n([\tau_{n+1}, \tau_n) \times \mathbb{S}^1)$ seulement le long du segment normal $t \mapsto f_t(x_0) = \tilde{\gamma}(t)$, pour $t \in [\tau_{n+1}, \tau_n]$.
La seconde est aussi impremible. En effet comme $\overline{H}_n(B) \subset A = A_{\tau_n}$, si $\overline{\gamma}$ touchait le bord de K_n en un point $z \in B$ alors son vecteur vitesse en ce point sortirait de K_n. Donc le vecteur tangent à $\tilde{\gamma}$ en $\overline{H}_n(z)$ serait dans la direction négative. Cela contredit la positivité de $\tilde{\gamma}$.

On a obtenu une contradiction, supposant que la feuille A_0 n'était pas compacte. Cela achève la preuve de la prop. □

Remarque 69. Pour raisonner sur un exemple plus visuel, on peut encore une fois considérer le feuilletage orientable de Reeb $\mathcal{F}$ de $\mathbb{S}^3$, présenté en 11.7. On considère ce qui se passe au voisinage de la feuille compacte, qui sépare les tores solides recollés en $\mathbb{S}^3$.
Regardons la figure 15.13 : elle représente la feuille compacte A_0, qu'on sait être homéomorphe à un tore bidimensionnel $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. De plus, on y voit un vanishing cycle f_0 pour A_0 qui admet une extension cohérente positive, normale et simple, dessinée avec des nuances. Cette extension indique la direction transverse au feuilletage.
A l'intérieur on peut identifier l'immersion de la variété à coin K_n qu'on vient de construire.

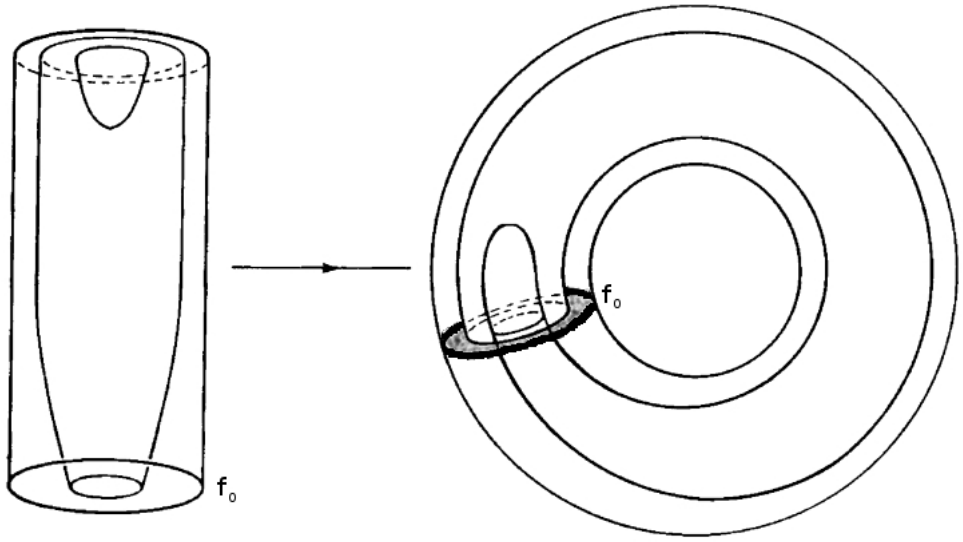


FIGURE 15.13 – Situation autour de la feuille compacte $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Supposons maintenant d'avoir une courbe γ transverse à $\mathcal{F}$ qui traverse A_0. Si elle entre aussi à l'intérieur de l'immersion de K_n, elle ne pourra jamais y sortir : cela est l'idée sur laquelle repose la démonstration de la dernière prop.
En effet, on peut supposer que la courbe soit positive. Si à un certain point elle sortait de K_n, on aurait forcément un instant où la positivité a été perdue ; alors, par continuité, on aurait aussi un point où la courbe n'était plus transverse à $\mathcal{F}$.
La situation serait comme dans la figure 15.14, où l'on voit notre courbe qui est censée rester à l'intérieur de K_n.

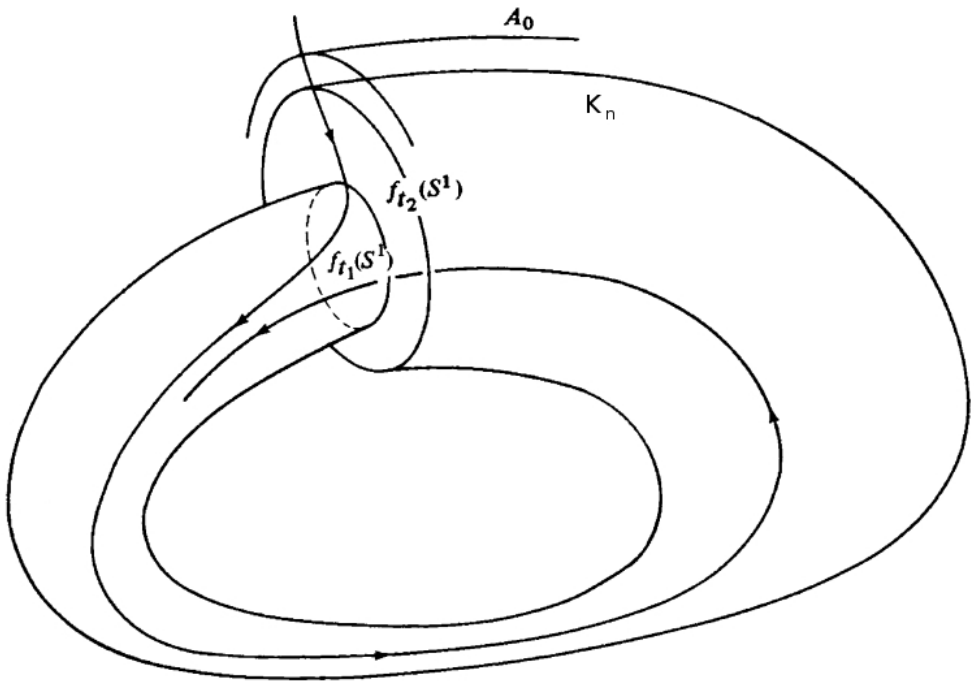


FIGURE 15.14 – La courbe piégée

Cela entraîne en particulier qu'on ne peut pas avoir une courbe *fermée* transverse à $\mathcal{F}$ qui traversent K_n. Comme on peut construire des immersion de K_n qui soient arbitrairement proches à A_0, on conclut que le même est vrai pour les courbes qui traversent A_0.

15.2.5 Conclusion de la preuve

Comme conséquence des résultats des sections précédents, on obtient une preuve très concise du théorème de Novikov, dont on répète l'énoncé :

Théorème 97. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage C^2 de codimension 1, défini sur une 3-variété compacte ayant groupe fondamental fini.*
Alors $\mathcal{F}$ a une feuille compacte.

Démonstration. Supposons d'abord $\mathcal{F}$ transversalement orientable. D'après la prop 90, il existe un vanishing cycle pour $\mathcal{F}$.
D'après la prop 92, $\mathcal{F}$ a une feuille A_0 contenant un vanishing cycle, qui admet une extension cohérente positive, normale et simple.
D'après le théorème 93, la feuille A_0 est compacte.
Dans le cas général, on fixe une métrique riemannienne sur M et un champ de droites L orthonormal à $\mathcal{F}$ en tout point. Considérons maintenant le revêtement double d'orientation $\pi : \tilde{M} \to M$ de L, comme dans la prop 61.
. On peut utiliser l'argument précédent pour conclure que $\pi^*(\mathcal{F})$ admet une feuille compacte $\tilde{A}_0$. Alors la feuille $A_0 := \pi^(\tilde{A}_0)$ de $\mathcal{F}$ est compact, en tant qu'image continue d'un compact. □

Remarque 70. On peut se demander si le résultat est encore valide en dimension $n \geq 4$. La réponse est négative : il existe des variétés lisses de dimension $n \geq 4$ compactes ayants groupe fondamental fini qui admettent des feuilletages de codimension 1 sans feuilles compactes. Voir, par exemple, l'article [**contrex**] en bibliographie.

Appendices

Annexe A

Feuilletages du disque et construction de Hæfliger

A.1 Singularités d'applications à valeurs réels

Soit M une variété C^s de dimension n et soit $g : M \to \mathbb{R}$ une fonction C^t, avec $2 \leq t \leq s$.
On appelle *singularité de g* chaque point $p \in M$ tel que $dg(p) = 0$.

Remarque 71. Si (U, ϕ) est une carte au voisinage d'un point p singulier pour g, on peut considérer la forme quadratique $Q^p_\phi : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ donnée par $Q^p_\phi(u, v) = \mathrm{Hess}_p(f \circ \phi^{-1})(d_p\phi(u), d_p\phi(v))$.
Si (V, ψ) est une autre carte au voisinage de p, $Q^p_\phi = Q^p_\psi$ comme formes quadratiques ; donc, on a une forme quadratique Q^p en p associée à g indépendante du choix de la carte, qui est appelée *Hessien de g en p*, et notée souvent $\mathrm{Hess}_p(g)$.

Si p est une singularité de g, on dit que p est *non dégénérée* si $\mathrm{Hess}_p(g)$ est non dégénérée comme forme quadratique.
On dit aussi que $\mathrm{Hess}_p(g)$ est *positive* (resp. négative) si $\mathrm{Hess}_p(g)(v) > 0$ (resp. $\mathrm{Hess}_p(g)(v) < 0$) pour chaque $v \in T_pM$; on appelle enfin *indice de f en p* la valeur

$$\mathrm{ind}(g, p) \;=\; \max\{\dim(E) \,|\, E \text{ sous espace de } T_pM \text{ avec } \mathrm{Hess}_p(g)|_{E\times E} \text{ négative}\}.$$

Rappelons, sans preuve, quelque résultat classique sur les "formes canoniques" au voisinage des points singuliers non dégénérés :

Théorème 98 (Lemme de Morse)**.** *Soit $p \in M$ un point singulier non dégénéré pour $g : M \to \mathbb{R}$ avec $ind(f, p) = k$. Alors il existe un voisinage U de p dans M, un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ contenant 0 et un difféomorphisme $\rho : (U, p) \to (\Omega, 0)$ tels que*

$$g \circ \rho(x_1, \ldots, x_n) = -x_1^2 - x_2^2 + \ldots - x_k^2 + x_{k+1} + \ldots + x_n^2.$$

Ce lemme nous dit qu'on peut identifier une classe très agréable de fonctions de M vers $\mathbb{R}$: on dit que $g : M \to \mathbb{R}$ est une *fonction de Morse* si tous ses points singuliers sont non dégénérés.

Remarque 72. Dans le cas de dimension $n = 2$, ce qui nous intéressera dans la suite, les formes canoniques premibles sont les suivantes :

1. $g \circ \rho(x, y) = -x^2 - y^2$;
2. $g \circ \rho(x, y) = +x^2 + y^2$;
3. $g \circ \rho(x, y) = +x^2 - y^2$;

Dans les cas 1 (respectivement 2) p est un maximum (respectivement minimum) local, et les courbes de niveau sont difféomorphes à des cercles : dans ces cas, on dit que p est un *centre* pour g ; par contre, dans le cas 3, p est un point de selle et les courbes de niveau sont difféomorphes à des selles avec 4 séparatrices.

Enfin, on énonce, sans preuve, un lemme technique qui sera très utile dans la suite :

Lemme 99. *Soient U, V et W des ouverts dans $\mathbb{R}^n$ avec $\overline{U} \subset V \subset \overline{V} \subset W$ et W une boule ouverte et soit $h : \overline{W} \to \mathbb{R}$ de classe C^t, $t \geq 2$. Alors, pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $g : \overline{W} \to \mathbb{R}$, de classe C^t, telle que $\|g - h\|_{C^t} < \epsilon$, $g|_{W \setminus V} = h|_{W \setminus V}$ et $g|_U$ est une fonction de Morse.*

A.2 Feuilletages singuliers du disque

A.2.1 Définitions

Dans cette section, on va introduire le concept de "feuilletage singulier" ; on utilisera, pour éviter de rentrer dans les détailles techniques de la théorie des feuilletages singuliers, des définitions "non-standard", adaptées au cas du disque unitaire $D^2 \subset \mathbb{R}^2$, comme c'est le seul cas qui nous intéresse.

Soit M une variété C^s de dimension $n \geq 3$, feuilletée par $\mathcal{F}$ de classe C^r et codimension 1.
Soit, maintenant, $g : D^2 \to M$ une application C^∞. Comme le feuilletage $\mathcal{F}$ sur M donne, de façon naturelle, une partition de M même, on peut considérer la partition $g^*(\mathcal{F})$, qu'on indiquera parfois plus simplement $\mathcal{F}^*$, induite sur D^2 via l'image réciproque selon g de la partition $\mathcal{F}$ de M.

Définition A.1. On appelle chaque partition $\mathcal{F}^*$ de D^2, construite comme ci-dessus, *feuilletage singulier* sur D^2.

Remarque 73. En général, on peut pas définir, via le tiré en arrière de $\mathcal{F}$, un feuilletage sur D^2 selon la définition qu'on avait donné dans le chapitre 10.
En effet, la difficulté ne consiste pas seulement en le fait que D^2 est une variété à bord, mais aussi en le fait que $g^*(\mathcal{F})$ peut avoir des "singularités" (voir la figure **??**). Il existe aussi une théorie des feuilletages singuliers, qui permet de traiter formellement ces cas-là, mais on ne va pas entrer dans les détailles ; ici, on se contentera de traiter la question de façon plus élémentaire.

Notons, que si $p \in D^2 \setminus \partial D^2$ n'est pas un point de tangence de g avec $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^*$ définit bien une feuilletage, au sens du chapitre 10, au voisinage de p. $\mathcal{F}_p$ est bien une sous variété (à bord) de M, au voisinage de p.
De plus, si $g|_{S^1} : S^1 \to M$ est transverse à $\mathcal{F}$, la partition $\mathcal{F}^*$ de D^2 satisfait la propriété suivante : si $E \in \mathcal{F}^*$ est tel que $E \cap \partial D^2 \neq \emptyset$, alors E est un sous variété (à bord) de D^2

au voisinage de chaque $p \in E \cap \partial D^2$ et y est transverse, en tant que sous variété, à ∂D^2. Dans ce cas-là, on dit simplement que $\mathcal{F}^*$ *est transverse à* ∂D^2.
Par contre, si $p \in D^2$ est un point de tangence de g avec $\mathcal{F}$ et si (U, ϕ) est une carte distinguée au voisinage de p, on a que $\mathcal{F}^*$ n'est par "régulier" au voisinage de p ; on dit, alors, que :

1. p est un *centre* pour $\mathcal{F}^*$ si $\hat{\pi} \circ \phi \circ g : U \to \mathbb{R}$ a une singularité non dégénérée de type centre (au sens des fonctions de Morse) en p ;
2. p est une *selle* pour $\mathcal{F}^*$ si $\hat{\pi} \circ \phi \circ g : U \to \mathbb{R}$ a une singularité non dégénérée de type selle (au sens des fonctions de Morse) en p.

Enfin, on dit que $\mathcal{F}^*$ *admet des connections entre deux selles distinctes* s'il existe $p, q \in D^2$ point de selle pour $\mathcal{F}^*$ et un élément E de $\mathcal{F}^*$ tel que $\overline{E}$ est un arc lisse de p vers q.

A.2.2 Feuilletages singuliers du disque et champs de vecteurs

Avec toutes ces notats, on peut, maintenant, énoncer quelque résultat qui nous sera utile dans la suite.

Pour cette section, on notera $\mathcal{F}^*$ un feuilletage singulier sur D^2, *transverse au bord* ∂D^2 et avec un *nombre fini de singularité* ; on notera aussi l'ensemble des singularités par T.

On dit que $\mathcal{F}^*$ est C^r *localement orientable* si pour chaque point $p \in D^2$ il existe un voisinage U de p et un champ de vecteurs Y sur U tel que :

1. si $q \in T$ on a $Y(q) = 0$;
2. si $q \in U \setminus T$ on a $Y(q) \neq 0$ est tangent à l'ensemble $E_q \in \mathcal{F}^*$ passant par q.

Remarque 74. Notons que, pour ce qu'on a dit dans la section précédente, si $q \in U \setminus T$, la direction tangent à E_q est toujours bien définie ; donc, la propriété 2 est bien formulée.

On dit aussi que $\mathcal{F}^*$ est C^r *orientable* s'il existe un champ Y comme ci-dessus défini sur tout D^2.

Proposition 100. *Si $\mathcal{F}^*$ est un feuilletage singulier de D^2 C^r localement orientable, il est C^r orientable.*

Démonstration. Pour chaque $p \in D^2$ il existe un champ de vecteurs Y de classe C^r, défini sur un voisinage U de p, tel que Y soit tangent à $\mathcal{F}^*$ et $Y(q) = 0$ si et seulement si q est une singularité de $\mathcal{F}^*$. Par compacité de D^2, on en peut trouver un nombre fini $U_1, \ldots, U_k$ qui recouvrent D^2 ; notons $Y_1, \ldots, Y_k$ leurs respectives champs de vecteurs.

On affirme, maintenant, que trouver un champ de vecteurs Y global équivaut à orienter convenablement les Y_i.
En effet, supposons pour l'instant de pouvoir obtenir des $\tilde{Y}_i$ sur U_i, en posant simplement $\tilde{Y}_i = Y_i$ ou $-Y_i$, de façon telle que, pour $i \neq j$, $\tilde{Y}_i(q)$ et $\tilde{Y}_j(q)$ ont “même orientation” si

$q \in (U_i \cap U_j) \setminus T$. Cela signifie qu'il existe $\lambda_q > 0$ telle que $\tilde{Y}_i(q) = \lambda_q \tilde{Y}_j(q)$. Alors, si $(\rho_i)_{i=1}^k$ est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_i)_{i=1}^k$ de D^2, on a que

$$Y = \sum_{i=1}^{k} \rho_i \tilde{Y}_i$$

est le champs de vecteurs de classe C^r voulu, comme il est défini sur tout D^2, il est bien tangent à $\mathcal{F}^*$ et, dès que les $\tilde{Y}_i$ sont orientés convenablement, $Y(q) = 0$ si et seulement si q est une singularité de $\mathcal{F}^*$.

Donc, il suffit de montrer qu'on peut obtenir des $\tilde{Y}_i$ comme ci-dessus.
On note, premièrement, que, quitte à diviser les U_i, on peut supposer que les U_i sont connexes et que, si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $U_i \cap U_j$ est connexe. Donc, sur $(U_i \cap U_j) \setminus T$, on peut écrire $Y_i = \lambda_{ij} Y_j$, où $\lambda_{ij} : (U_i \cap U_j) \setminus T \to \mathbb{R}$ est continu et jamais nulle ; en particulier, par connexité de $U_i \cap U_j$, et donc de $(U_i \cap U_j) \setminus T$, comme T est fini, on a que le signe de λ_{ij} est constant.
Si $\lambda_{ij} > 0$, on dit, comme ci-dessus, que Y_i et Y_j ont *même orientation* ; sinon, on dit qu'ils ont *orientation opposée.*
Notons que clairement on peut choisir les $\tilde{Y}_i$ de façon qu'ils ont même orientation "le long d'un arc quelconque", c'est à dire que si $\gamma : [0,1] \to D^2$ est tel que $\gamma(0) = p_1 \in U_1$ et $\gamma(1) = p_j \in U_j$ on peut aisément trouver un recouvrement $(U_{i_1} = U_1, U_{i_2}, \ldots, U_{i_{l-1}}, U_{i_l} = U_j)$ de $\gamma([0,1])$ et des $\tilde{Y}_{i_1} = \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_{i_2}, \ldots, \tilde{Y}_{i_{l-1}}, \tilde{Y}_{i_l} = \tilde{Y}_j$ correspondants qui ont orientation cohérente, selon la définition qu'on a donnée tout à l'heure. On omet ici les détailles, comme ceci est un argument classique de géométrie différentielle.
Or, c'est aussi facile de vérifier que si $\delta, \gamma : [0,1] \to D^2$ sont deux arcs homotopes, choisir un orientation "le long de γ" ou "le long de δ", au sens de ci-dessus, donne le même résultat : si on note $\tilde{Y}_{k_1} = \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_{k_2}, \ldots, \tilde{Y}_{k_{m-1}}, \tilde{Y}_{k_m}$ la chaîne de champs obtenue à partir de δ, on aura simplement, $\tilde{Y}_{k_m} = \tilde{Y}_{i_l}$, où $\tilde{Y}_{i_l}$ était obtenu à partir de γ, comme noté ci-dessus. On omet, encore une fois, les détailles, comme ceci est aussi un argument très classique.
Enfin, comme D^2 est simplement connexe, tous les arcs qui lient deux points donnés sont homotopes à extrémités fixés : cela montre qu'on peut définir Y sur D^2 en utilisant la construction "le long des arcs", comme cela ne dépend pas de l'arc choisi. □

On a un corollaire immédiat de cette prop :

Corollaire 101. *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage C^r, $r \geq 1$, de codimension 1, sur M et soit $g : D^2 \to M$ une application C^r avec point de tangence non dégénérés avec $\mathcal{F}$, c'est à dire soit des centres soit des selles. Alors $\mathcal{F}^* = g^*(\mathcal{F})$ est C^{r-1} orientable.*

Démonstration. Pour la prop 100, il suffit de vérifier que $\mathcal{F}^*$ est C^{r-1} localement orientable.
Soient, donc, $p \in D^2$ et (U, ϕ) une carte distinguée pour $\mathcal{F}$ au voisinage de $g(p)$.
Notons, comme on avait fait dans la section 13.1 du chapitre 13, $\hat{\pi} : (-1,1)^n \to (-1,1)$ la projection sur le dernière facteur et posons $h := \hat{\pi} \circ \phi \circ g : U \to (-1,1)$. On a, alors, que les ensembles de la partition $\mathcal{F}^* \cap U$ coïncident avec les courbes de niveau de h et que, si on note par (x,y) les fonctions coordonnées sur $U \subset D^2 \subset \mathbb{R}^2$, le champ $Y(q) := (\frac{\partial h}{\partial y}, -\frac{\partial h}{\partial x})$, pour chaque $q \in U$, est bien un champ de vecteurs tangent à $\mathcal{F}^* \cap U$.
Donc, $\mathcal{F}^*$ est C^{r-1} localement orientable. □

Remarquons que, en particulier, le corollaire énoncé tout à l'heure nous dit que chaque feuilletage singulier $\mathcal{F}^*$ sur D^2 de codimension 1 est donné par le courbes intégrales d'un certain champ de vecteurs Y sur D^2.
Maintenant, on veut étudier rem certaines propriétés de $\mathcal{F}^*$ se traduisent en propriété du flot du champ Y ainsi obtenu ; on va voir, ici, les feuilletages singuliers de D^2 sous un point de vue de la dynamique des flots qui les définissent.

Supposons, dorénavant, que $\mathcal{F}^* = g^*(\mathcal{F})$ satisfait les propriétés suivantes :

1. $\mathcal{F}^*$ est transverse à ∂D^2 ;
2. les singularités de $\mathcal{F}^*$ sont non dégénérées, donc des centres ou des selles ;
3. $\mathcal{F}^*$ n'a pas de connexions entre selles distinctes.

Soit $p \in D^2$ un point singulier de Y avec $p \in W := g^{-1}(U)$, où (U, ϕ) est une carte distinguée de $\mathcal{F}$ qui contient $g(p)$; soit aussi $\pi := \hat{\pi} \circ \phi : U \to \mathbb{R}$.
Alors p est une singularité non dégénérée pour $f := \pi \circ g : W \to \mathbb{R}$ et les orbites de Y sont contenus dans les courbes de niveau de f.

Pour le théorème 98, il existe un difféomorphisme $\alpha : U \to V$, où $V \subset W$ est un voisinage ouvert de p et $\alpha(0) = p$, tel que $f \circ \alpha(x, y) = f(p) + q(x, y)$, où on a $q(x, y) = x^2 + y^2$ ou $q(x, y) = -(x^2 + y^2)$ ou $q(x, y) = x^2 - y^2$.
Dans le premiers deux cas, p est un *centre pour* Y, c'est à dire que le trajectoires non dégénérées de Y dans W sont tous fermées et difféomorphes à S^1. Par contre, dans le troisième cas, p est une *selle pour* Y, c'est à dire que $f^{-1}(f(p))$ est constitué par deux courbes lisses δ_1, δ_2 qui s'intersectent transversalement en p de façon que $\delta_1 \cup \delta_2 \setminus p$ contient 4 différentes trajectoires régulières de $Y|_V$, α_1, α_2, α_3 et α_4, telles que $\alpha_1 \cup \alpha_3 \cup \{p\} = \delta_1$ et $\alpha_2 \cup \alpha_4 \cup \{p\} = \delta_2$.
Les α_i, pour $1 \leq i \leq 4$, sont les séparatrices locales de la selle p de Y. Si on dénote par $t \mapsto Y_t(q)$ la courbe intégrale de Y qui passe par q pour $t = 0$, on a que deux entre ces α_i, disons α_1 et α_3, sont caractérisés par la propriété $\lim_{t\to\infty} Y_t(q) = p$, pour chaque $q \in \alpha_1 \cup \alpha_2$, et les autres deux, disons α_2 et α_4, par $\lim_{t\to-\infty} Y_t(q) = p$, pour chaque $q \in \alpha_2 \cup \alpha_4$. On appelle *stables* les trajectoires du premier type et *instables* celles du deuxième type.

De plus, par construction de Y, le fait que $\mathcal{F}^*$ est transverse à ∂D^2 équivaut au fait que Y soit transverse à $\partial D^2 = S^1$.

Si $\gamma(t) := Y_t(q)$ est une trajectoire, pour $q \in D^2$ quelconque, on pose

$$\omega(\gamma) := \{\, x \in D^2 \,|\, x = \lim_{n\to\infty} \gamma(t_n)\,,\ \text{où}\ t_n \to \infty\ \text{pour}\ n \to \infty \,\}$$

et

$$\alpha(\gamma) := \{\, x \in D^2 \,|\, x = \lim_{n\to\infty} \gamma(t_n)\,,\ \text{où}\ t_n \to -\infty\ \text{pour}\ n \to \infty \,\}.$$

Notons que, pour le théorème 105 dans l'appendice B, les ensembles $\omega(\gamma)$ et $\alpha(\gamma)$ doivent coïncider avec :

1. $\emptyset$, si γ coupe ∂D^2 pour $t \to +\infty, -\infty$;
2. une *singularité* pour Y, c'est à dire un point fixe pour Y ;
3. une *orbite fermée* de Y ;

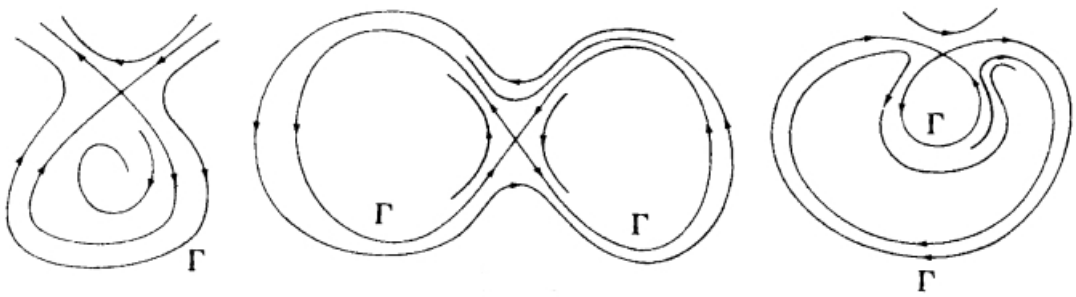
4. un *graphe* de Y, c'est à dire un ensemble connexe Λ constitué par des selles et des séparatrices, de façon que si $p \in \Lambda$ est un selle de Y, Λ contient au moins une séparatrice stable et une instable pour p.

Notons que, comme Y est transverse à S^1, on peut supposer que $Y|_{\partial D^2}$ soit entrant dans D^2, quitte à remplacer Y par $-Y$; on a, alors, que $\omega(\gamma) \neq \emptyset$, pour chaque orbite γ de Y.

Définition A.2. On dit que le sous ensemble $\Gamma \subset D^2$ est un *cycle limite* pour Y si Γ n'est pas une seule singularité et s'il existe une orbite γ de Y, avec $\gamma \cap \Gamma = \emptyset$, telle que $\Gamma = \omega(\gamma)$ ou $\Gamma = \alpha(\gamma)$.

De ce qu'on a dit ci-dessus, un cycle limite non vide Γ de Y est soit une orbite fermée soit un graphe de Y. De plus, c'est facile de vérifier que Γ est toujours connexe et que $D^2 \setminus \Gamma$ a au moins deux composantes connexes, dont une contient entièrement ∂D^2, comme $\Gamma \cap \partial D^2 = \emptyset$, pour ce qu'on a dit tout à l'heure. Dans la figure A.1, on a représentés quelques Γ premibles dans le cas où ils sont des graphes de Y.

FIGURE A.1 – Cas de cycle limite qui est un graphe



Or, dans notre cas, effectivement, les cas représentés dans la figure A.1 sont les *seuls cas premibles* dans lesquels Γ est un graphe de Y, car on est dans l'hypothèse de $\mathcal{F}^*$ sans connexions entre selles distinctes.

Soit, maintenant, Σ l'ensemble de tous les cycles limites. Étant donné un $\Gamma \in \Sigma$, on note $R(\Gamma)$ la réunion des clôtures des composantes connexes de $D^2 \setminus \Gamma$ qui ne contiennent pas ∂D^2. Sur Σ, on définit aussi un ordre partiel $\leq$ en disant que $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$ si $R(\Gamma_1) \subseteq R(\Gamma_2)$. Notons, enfin, que, comme Γ est invariant par Y, $R(\Gamma)$ l'est aussi.

Proposition 102. *Soit $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de cycles limites et soit Γ_∞ le bord de l'ensemble $\bigcap_{n\geq 1} R(\Gamma_n)$. Alors Γ_∞ est soit une orbite fermée soit un graphe de Y.*

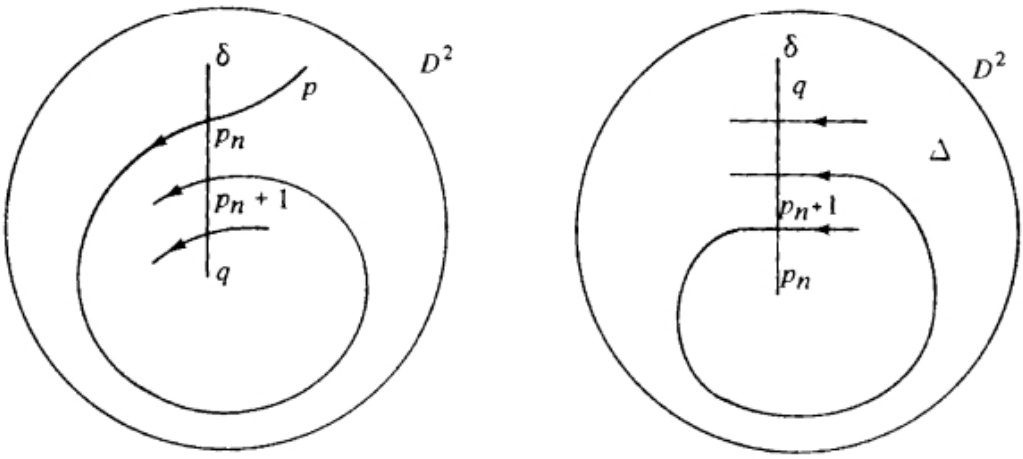
Démonstration. Comme si la suite se stabilise la preuve devient triviale, on peut supposer qu'elle ne se stabilise pas ; donc, quitte à extraire une sous-suite, on a que $\Gamma_n \neq \Gamma_m$ pour chaque $n \neq m$. De plus, comme le nombre de selles de Y est fini, Y admet un nombre fini de graphes et, quitte à extraire une autre sous-suite, on peut supposer que chaque Γ_n soit une orbite fermée. On s'est, donc, ramené au cas où une suite strictement décroissante, au sense de $\leq$, d'orbites fermées s'accumule sur Γ_∞.

En particulier, chaque $R(\Gamma_n)$ est un ensemble, homéomorphe à un disque, invariant pour Y et on a que $R(\Gamma_n) \subset R(\Gamma_{n+1})$. Donc, $\cap_{n\geq 1} R(\Gamma_n)$ et Γ_∞ sont non-vides et invariants pour Y. De plus, Γ_∞ contient au moins un point p tel que $Y(p) \neq 0$: en effet, on n'a pas de centres dans Γ_∞, car les centres ne peuvent pas être points d'accumulation de cycles limites, dès que, au voisinage de chaque centre de Y, les orbites sont toutes fermées, c'est à dire périodiques, et coïncident, donc, avec leurs points d'accumulation. Par contre, Γ_∞ peut contenir une selle, mais, dans ce cas, il doit contenir aussi deux ses séparatrices.

Supposons, alors, que Γ_∞ ne soit pas une orbite fermée ; on veut montrer qu'il est un graphe de Y.
Prenons $p \in \Gamma_\infty$ un point tel que $Y(p) \neq 0$, qu'il existe pour ce qu'on a dit tout à l'heure, et posons, pour simplicité de notats, $\omega(p) := \omega(\gamma)$, où γ est l'orbite de Y qui passe pour p au temps $t = 0$.

On veut montrer que, alors, $\omega(p)$ doit être une selle contenue dans Γ_∞.
En effet, $\omega(p)$ ne peut pas contenir un centre de Y, pour ce qu'on a dit ci-dessus. Mais si, par absurde, $\omega(p)$ n'était pas une selle, forcement on aurait $q \in \omega(p)$ tel que $Y(q) \neq 0$, comme $\omega(p)$ est connexe : on veut déduire de cela une contradiction.
Notons que $q \notin \mathcal{O}(p) := \{\, Y_t(p) \,|\, t \in \mathbb{R} \,\}$, comme Γ_∞ n'est pas une orbite fermée de Y. Fixons, donc, δ un segment transverse à Y passant par p. Alors, $\mathcal{O}(p)$ rencontre δ en une suite de points $p_n := Y_{t_n}(p)$, où t_n croit (strictement) vers $+\infty$ pour $n \to \infty$ et $\lim_{n\to\infty} p_n = q$: les deux dispositions premibles pour ces points p_n sont représentées en figure A.2. Soit, maintenant, η la courbe fermée de D^2 qui est réunion de l'arc contenu dans δ

FIGURE A.2 – Seules façons premibles pour que la suite p_n converge vers q

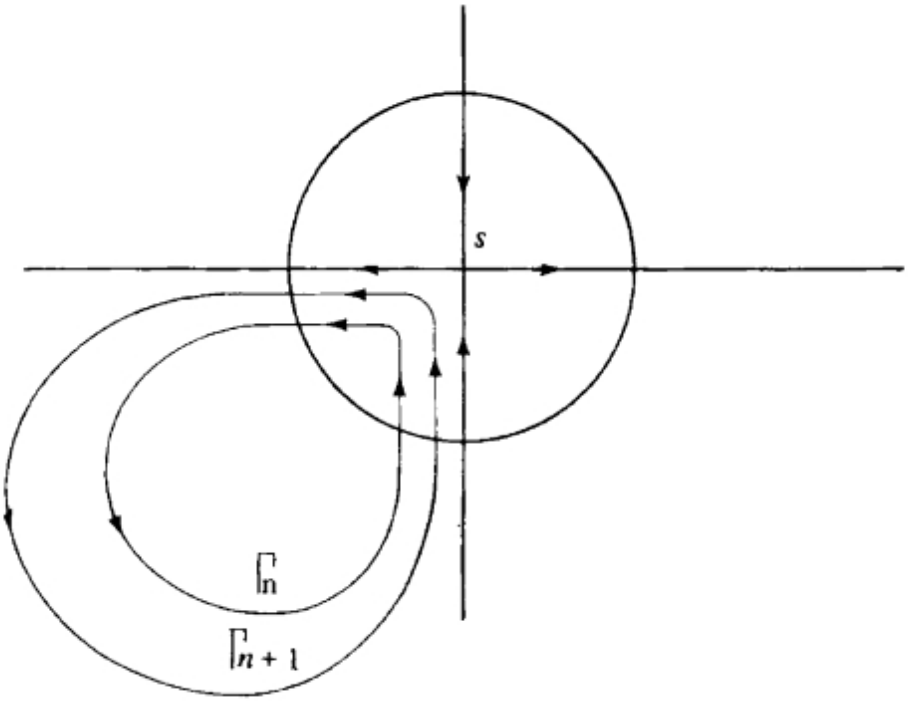


et joignant p_n à p_{n+1}, qu'on note $[p_n, p_{n+1}]$, et de l'arc $\mu := \{\, Y_t(p) \,|\, t_n \leq t \leq t_{n+1} \,\} \subset \mathcal{O}(p)$; soit aussi Δ la composante connexe de $D^2 \setminus \eta$ qui contient q.
Or, une orbite qui coupe l'arc $[p_n, p_{n+1}]$ ne peut pas être fermée, car elle doit rentrer dans Δ, de laquelle elle ne pourra plus sortir ; donc, p_n ne peut pas être un point d'accumulation d'orbites fermées de Y, mais c'est une contradiction avec le fait que $p_n \in \Gamma_\infty$.
On a, finalement, prouvé que $\omega(p)$ est un point de selle dans Γ_∞.
De même, on a que $\alpha(p)$ est aussi un point de selle contenu dans Γ_∞.

Enfin, comme une selle dans Γ_∞ est un point d'accumulation d'orbites fermées de Y, Γ_∞ doit contenir au moins une séparatrice stable et une instable (figure A.3), c'est à dire

que Γ_∞ doit être un graphe de Y. □

FIGURE A.3 – Si Γ_∞ contient une selle, il contient au moins deux séparatrices



A.3 Construction de Hæfliger

Dans cette section, on notera avec $\mathcal{F}$ un feuilletage de classe C^r, $r \geq 2$, et de codimension 1 sur une variété M de classe C^s et de dimension $n \geq 3$.
Étant donnée une application $h : D^2 \to M$, de classe C^∞, où D^2 est le disque unitaire de $\mathbb{R}^2$, on dit que $p \in D^2$ est un *point de tangence de h avec $\mathcal{F}$* si $\mathrm{d}_p(h)(\mathbb{R}^2) \subset T_{h(p)}\mathcal{F}$.

On a, alors, la prop suivante :

Proposition 103. *Soit $A : D^2 \to M$ une application C^∞ telle que $A|_{\partial D^2}$ soit transverse à $\mathcal{F}$. Alors, pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $g : D^2 \to M$ de classe C^∞ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *$\|g - A\|_{C^r} < \epsilon$;*
2. *$g|_{\partial D^2}$ est transverse à $\mathcal{F}$;*
3. *pour chaque point p de tangence de g avec $\mathcal{F}$, il existe une carte distinguée (U, ϕ) au voisinage de $g(p)$ telle que p soit une singularité non dégénérée pour $\pi \circ g : g^{-1}(U) \to \mathbb{R}$, où on a noté $\pi := \hat{\pi} \circ \phi$; en particulier, g a seulement un nombre fini de points de tangence avec $\mathcal{F}$;*
4. *si $T = \{p_1, \ldots, p_l\}$ est l'ensemble des points de tangence de g avec $\mathcal{F}$, $g(p_i)$ et $g(p_j)$ sont contenus dans feuilles distinctes de $\mathcal{F}$, pour $i \neq j$; en particulier, $\mathcal{F}^* = g^*(\mathcal{F})$ n'a pas de connexions entre selles distinctes.*

Démonstration. Soient $(Q_1, \phi_1), \ldots, (Q_k, \phi_k)$ des cartes distinguées pour $\mathcal{F}$ dont la réunion recouvre $A(D^2)$ et puis $\pi_i := \hat{\pi} \circ \phi_i : Q_i \to \mathbb{R}$ la composition des cartes distinguées avec la projection le long de la composante transverse, pour chaque $i = 1, \ldots, k$; avec ces notats, on peut écrire $\phi_i = (\phi_1^i, \ldots, \phi_{n-1}^i, \pi_i)$ et que $\pi_i^{-1}(t)$ est une plaque de $\mathcal{F}$ dans Q_i.
On écrit aussi $\phi_i \circ A = (A_1^i, \ldots, A_{n-1}^i, \pi_i \circ A)$ et on remarque que A est transverse à $\mathcal{F}$ en $p \in A^{-1}(Q_i)$ si et seulement si $\mathrm{d}_p(\pi_i \circ A) \neq 0$. On pose, enfin, $W_i := A^{-1}(Q_i)$ pour $i = 1, \ldots, k$.

Clairement on a $\cup_{1=1}^k W_i = D^2$ et, comme D^2 est compact, on peut trouver des recouvrements ouverts plus fins $(V_i)_{i=1}^k, (U_i)_{i=1}^k$ tels que $\overline{U_i} \subset V_i \subset \overline{V_i} \subset W_i$ pour $i = 1, \ldots, k$.

Soit $\delta = \min_{1 \leq i \leq k} \inf\{d(A(x), y) \,|\, x \in \overline{V_i} \text{ et } y \in \partial Q_i\}$, où d est une métrique riemannienne fixée sur M. Si $f : D^2 \to M$ est telle que $\|f - A\|_{C^0} < \delta$, alors $f(\overline{V_i}) \subset Q_i$. Donc, les composées $\pi_i \circ f : \overline{V_i} \to \mathbb{R}$ sont bien définies ; toutes les applications qu'on considérera dorénavant satisferont cette propriété.

Notons qu'un point $p \in \overline{V_i}$ est un point de tangence de A avec $\mathcal{F}$ si et seulement si $\mathrm{d}_p(\pi_i \circ A) = 0$, comme cela équivaut au fait que $\mathrm{d}_p(A)(T_p D^2) \subset T_{A_p}\mathcal{F}_p$.

On va construire g satisfaisant les propriétés 1, 2 et 3 en modifiant récursivement la restriction $A|_{\cup_{i=1}^j W_i}$ pour tout $j = 1, \ldots, k$.

Soit $j = 1$. Pour le lemme 99 il existe $f_1 : W_1 \to \mathbb{R}$ telle que $f_1|_{U_1}$ est une fonction de Morse, $f_1|_{W_1 \setminus V_1} = (\pi_1 \circ A)|_{W_1 \setminus V_1}$ et $\|f_1 - \pi_1 \circ A\|_{C^r} < \delta_1$.
Maintenant on définit $g_1 : D^2 \to M$ en posant $g_1|_{D^2 \setminus V_1} = A|_{D^2 \setminus V_1}$ et $g_1|_{W_1} = \phi_1^{-1} \circ (A_1^1, \ldots, A_{n-1}^1, f_1)$. Comme $\pi_1 \circ A = f_1$ sur $W_1 \setminus V_1$, g_1 est bien définie et $\pi_1 \circ g_1|_{U_1} = f_1|_{U_1}$ et, donc, g_1 est de Morse sur U_1. Or, si on choisit δ_1 suffisamment petit, on a aussi que $\|g_1 - A\|_{C^r} < \frac{\epsilon}{k}$.

Supposons, par récurrence, d'avoir défini $g_j : D^2 \to M$, pour un indice $1 \leq j \leq k-1$, telle que $\|g_j - A\|_{C^r} < \frac{j\epsilon}{k}$, $g_j|_{D^2 \setminus \cup_{i=1}^j V_i} = A|_{D^2 \setminus \cup_{i=1}^j V_i}$ et $\pi_i \circ g_j|_{U_i} : U_i \to \mathbb{R}$ est de Morse, pour chaque $i = 1, \ldots, j$.
Pour le lemme 99, il existe $f_{j+1} : W_{j+1} \to \mathbb{R}$ telle que $f_{j+1}|_{W_{j+1} \setminus V_{j+1}} = (\pi_{j+1} \circ g_j)|_{W_{j+1} \setminus V_{j+1}}$, $f|_{U_{j+1}}$ est de Morse et $\|f_{j+1} - \pi_{j+1} \circ g_j\|_{C^r} < \delta_{j+1}$.
On pose alors $g_{j+1} : D^2 \to M$ avec $g_{j+1}|_{D^2 \setminus V_{j+1}} = g_j|_{D^2 \setminus V_{j+1}}$ et $g_{j+1}|_{W_{j+1}} = \phi_{j+1}^{-1} \circ (g_1^j, \ldots, g_{n-1}^j, f_{j+1})$, où on a écrit $\phi_{j+1} \circ g_j = (g_1^j, \ldots, g_{n-1}^j, \pi_{j+1} \circ g_j)$.
C'est clair que g_{j+1} est bien définie car $f_{j+1}|_{W_{j+1} \setminus V_{j+1}} = \pi_{j+1} \circ g_j|_{W_{j+1} \setminus V_{j+1}}$. De plus, si l'on choisit δ_{j+1} suffisamment petit on aura que $\|g_{j+1} - g_j\|_{C^r} < \frac{\epsilon}{k}$ et que $\pi_i \circ g_{j+1}|_{U_i}$ est de Morse sur U_i pour chaque $i = 1, \ldots, j+1$, car l'ensemble des fonctions de Morse est un ouvert selon la topologie C^r.
Récursivement, on obtient une fonction $g_k : D^2 \to M$ telle que $\pi_i \circ g_k|_{U_i}$ est de Morse, pour chaque $i = 1, \ldots, k$ et $\|g_k - A\|_{C^r} < \epsilon$. Donc, g_k satisfait les propriétés 1 et 3.
De plus, si ϵ est suffisamment petit, $g_k|_{\partial D^2}$ est encore transverse à $\mathcal{F}$.

Du fait que, si π est comme dans 2 de l'énoncé, les singularités de $\pi \circ g_k$ sont non dégénérées, le théorème 98 entraîne qu'ils sont isolées, donc, par compacité de D^2, finies. On a, donc, que les points de tangence de g_k avec $\mathcal{F}$ sont finis, comme ils coïncident avec les singularités dégénérées de $\pi \circ g_k$.

Soit $T := \{p_1, \ldots, p_l\}$ l'ensemble des points de tangence de g_k avec $\mathcal{F}$. On modifiera g_k pour obtenir une g, avec les mêmes points de tangence, satisfaisant la propriété 4.
Supposons, par exemple, que $g(p_1), g(p_2)$ soient contenus dans la même feuille F de $\mathcal{F}$,

avec $p_1 \in U_i$. Posons $f_i := \pi_i \circ g_k|_{V_i} : V_i \to \mathbb{R}$ et $t_1 = f_i(p_1)$. Fixons des voisinages $U \subset V$ de p_1 avec $\overline{U} \subset V \subset \overline{V} \subset V_i$ et p_1 soit la seule singularité de f_i dans V.
Soit $\alpha : V \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, non négative et telle que $\alpha|_U = 1$ et $\alpha|_{V_i \setminus V} = 0$. Posons $\tilde{f}_i := f_i + \delta\alpha$, avec $\delta > 0$. Comme $\mathrm{d}\tilde{f}_i = \mathrm{d}f_i + \delta \mathrm{d}\alpha$, si δ est suffisamment petit, p_1 est l'unique singularité de $\tilde{f}_i$ dans V et elle est encore non dégénérée. De plus, les singularités de $\tilde{f}_i$ et de f_i, dans V_i, sont les mêmes, car $(\tilde{f}_i - f_i)|_{V_i - V} = 0$.
Définissons $\tilde{g}_k : D^2 \to M$ en posant $\tilde{g}_k|_{D^2 \setminus V} = g_k|_{D^2 \setminus V}$ et $\tilde{g}_k|_{V_i} = \phi_i^{-1} \circ (g_1^k, \ldots, g_{n-1}^k, \tilde{f}_i)$.
On peut facilement vérifier que $\tilde{g}_k$ satisfait les propriétés 1, 2, 3 et que l'ensemble des points de tangence de $\tilde{g}_k$ avec $\mathcal{F}$ est T.

Notons que $F \cap Q_i$ contient au plus une infinité dénombrable de feuilles locales de F et, donc, il existe $\delta \geq 0$, arbitrairement petit, tel que $\pi_i^{-1}(t_1 + \delta) = \pi_i^{-1}(\tilde{f}_i(p_1)) \nsubseteq F$, c'est à dire $\tilde{g}_k(p_1)$ et $\tilde{g}_k(p_2)$ sont contenus dans feuilles distinctes de $\mathcal{F}$.
En itérant le procédé un nombre fini de fois, on peut obtenir une $g : D^2 \to M$ satisfaisant les propriétés 1, 2, 3 et 4. □

On énonce, maintenant, un corollaire presque immédiat de la prop ci-dessus :

Corollaire 104 (Construction d'Hæfliger)**.** *Soit $\gamma : S^1 \to M$ une courbe C^∞ transverse à $\mathcal{F}$ et homotope à une constante. Alors il existe une application $g : D^2 \to M$ de classe C^∞ telle que $\mathcal{F}^* := g^*(\mathcal{F})$ est un feuilletage de D^2 avec singularités, satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. *$g|_{\partial D^2}$ est homotope à γ et $\mathcal{F}^*$ transverse à ∂D^2 ;*
2. *les singularités de $\mathcal{F}^*$ sont selles ou centres ;*
3. *$\mathcal{F}^*$ n'a pas de connexions entre selles distinctes.*

Démonstration. Comme γ est homotope à une constante dans M, on peut obtenir, par approximation de l'homotopie, une application C^∞ $A : D^2 \to M$ telle que $A|_{\partial D^2} = \gamma$. Il suffit, maintenant, de choisir g comme dans 103, avec ϵ suffisamment petit. □

A.4 Construction de la région R d'holonomie triviale

Avec tous ce qu'on à fait dans l'appendice A jusqu'à ici, on peut, finalement, construire la région R utilisée dans la preuve de la prop 90 du chapitre 15.

Considérons, maintenant, une variété M de classe C^s, $s \geq 2$, et dimension $n \geq 3$ et supposons qu'elle soit feuilletée par $\mathcal{F}$ de classe C^2 et de codimension 1 tel qu'*il existe une courbe lisse fermée $\gamma : S^1 \to M$ transverse à $\mathcal{F}$.*
Pour le corollaire 104 il existe une application C^∞ $g : D^2 \to M$ telle que $\mathcal{F}^* := g^*(\mathcal{F})$ soit un feuilletage singulier sur D^2.
De plus, le corollaire 101 entraîne qu'il existe un champ de vecteurs Y de classe C^1, tel que :

1. Y est tangent à $\mathcal{F}^*$;
2. Y est transverse à ∂D^2 et y entrant dans D^2 ;
3. Y a singularités coïncidents avec celles de $\mathcal{F}^*$ et elles sont toutes non dégénérées ; en particulier, elles sont en nombre fini et soit de type centre soit de type selle ;

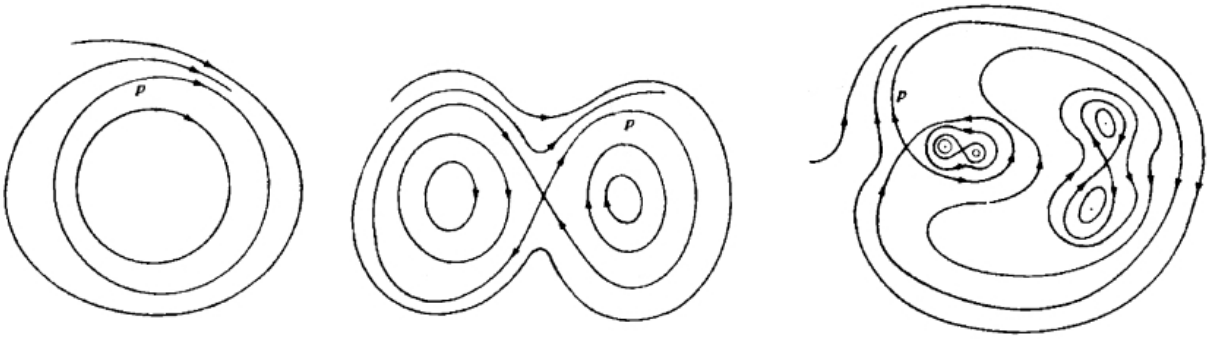
4. il n'existe pas de connexions entre deux singularités de type selle distinctes.

Soit $\overline{\Sigma}$ l'ensemble constitué par les cycles limites de Y, et par les orbites fermées et les graphes de Y qui sont obtenus comme dans la prop 102, c'est à dire ces qui sont le bord de $\cap_{n\in\mathbb{N}} R(\Gamma_n)$ où Γ_n sont des cycles limites avec $R(\Gamma_{n+1}) \subseteq R(\Gamma_n)$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$.
Notons que $\overline{\Sigma} \neq \emptyset$, comme si $p \in D^2$ quelconque, $\omega(p)$ est un cycle limite.
Maintenant, comme on l'avait déjà fait pour Σ dans la section A.2.2, on définit sur $\overline{\Sigma}$ une relation d'ordre partiel comme suit : si $\Gamma \in \overline{\Sigma}$, on note, par $R(\Gamma)$ la réunion des clôtures des composantes connexes de $D^2 \setminus \Gamma$ qui ne contiennent pas ∂D^2 et on pose $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$ si $R(\Gamma_2) \subseteq R(\Gamma_1)$.
Pour la prop 102, on a que si $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante dans $\overline{\Sigma}$, au sens de $\leq$, c'est à dire telle que $R(\Gamma_{n+1}) \subseteq R(\Gamma_n)$, alors il existe Γ_∞ dans $\overline{\Sigma}$ tel que $\Gamma_\infty \leq \Gamma_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: cela veut dire exactement que $(\overline{\Sigma}, \leq)$ est un ensemble partiellement ordonné inductif.
Donc, pour le lemme de Zorn, il existe dans $\overline{\Sigma}$ un élément minimal Γ. Donc, par construction, ce Γ est le bord d'une région ouverte $R(\Gamma)$ qui ne contient pas de cycles limites, c'est à dire que pour chaque $p \in R(\Gamma)$ on a que $\mathcal{O}(p)$ est soit une singularité, soit une orbite périodique soit contenu dans un graphe.
C'est, alors, facile de vérifier que $R(\Gamma)$ vérifie les propriétés suivantes :

1. si $p \in R(\Gamma)$ est régulier pour Y, $\mathcal{O}(p)$ a holonomie triviale, vue comme feuille de $\mathcal{F}^*$, qui est bien un feuilletage hors de ∂D^2 et des point singuliers de Y ;
2. si $p \in \partial R(\Gamma) = \Gamma$, $\mathcal{O}(p)$ n'a pas "holonomie" triviale, c'est à dire qu'elle est un cycle limite.

Donc, $R(\Gamma)$ est bien la région cherchée. La figure A.4 résume quelque typologies de $R(\Gamma)$ premibles.

FIGURE A.4 – Quelque exemples de régions $R(\Gamma)$ premibles



Annexe B

Théorème de Poincaré-Bendixson

On va, dans cette brève appendice, remer un résultat très connu sur la dynamique des flots des champs de vecteurs sur le plan.

Soit, pour fixer des notats, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et soit Y un champ de vecteurs C^1 défini sur Ω.
On considère le problème de Cauchy associé

$$y'(t) = Y(y(t)),\ x(0) = x_0.$$

Comme le champ Y est C^1, il existe pour chaque $x_0 \in \Omega$ un $\epsilon > 0$ et une solution $x = x(t)$, définie sur $(-\epsilon, \epsilon)$, pour le problème de Cauchy considéré.
On appelle alors, comme on avait déjà fait dans l'appendice A, *ensemble ω-limite de $x(t)$*, et on le note $\omega(x)$, l'ensemble des points d'accumulation de l'orbite $\chi := \{x(t) \,|\, t \in (-\epsilon, \epsilon)\}$, c'est à dire l'ensemble $\overline{\chi} \setminus \chi$.
On appelle, enfin, *graphe de Y* une réunion quelconque de points singuliers et de séparatrices pour Y.

Avec toutes ces notats, on peut finalement énoncer le résultat qui nous intéresse :

Théorème 105 (Poincaré-Bendixon)**.** *Étant donné un problème de Cauchy défini par un champ de vecteurs C^1 sur un ouvert du plan $\mathbb{R}^2$, chaque orbite admet comme ω-limite soit un point fixe de Y, soit une orbite périodique, soit un graphe de Y.*

Démonstration. Pour la preuve de ce théorème, on renvoie à des références classiques, par exemple la preuve due à Bendixson qui apparait dans [**poincarebendixson**]. □