Les marches aléatoires et théorèmes de type Liouville

Çağrı Sert
sous la direction d'Emmanuel Breuillard

Octobre 2013

Table des matières

On commence par donner dans la première section les définitions générales concernant les marches aléatoires sur les groupes. Ensuite, dans la deuxième section, après avoir décrit l'histoire du sujet et ainsi motivé la notion de la frontière d'une marche aléatoire sur un groupe, on énonce deux constructions (mesurablement isomorphes) de cet objet. La troisième section consiste à introduire la notion d'entropie, l'outil important de l'étude de la frontière de Poisson, d'une marche aléatoire et énoncer quelques théorèmes importants permettant de décider - la trivialité ou non de la frontière de Poisson (la propriété de Liouville), -si une "frontière" donnée est bien la frontière de Poisson. On finit cette section en donnant quelques exemple des frontière de Poisson non-triviales. Dans la quatrième section, on énonce et en donne une preuve rapide d'un critère de type-Liouville qui permet de déduire des propriétés plus fortes que celle de Liouville. Finalement, dans la dernière section, on introduit une nouvelle propriété, plus restrictive que celle de Liouville, que l'on appelle 1-Liouville, pour laquelle on peut se poser plusieurs questions analogues et on finit en donnant une première propriété élémentaire de la notion d'une marche aléatoire 1-Liouville.

1 Définitions

Dans ce mémoire, les groupes considérés seront des groupes discrets infini-dénombrables. Bien que l'on puisse définir les marches aléatoires sur les groupes localement compacts et en donner des propriétés analogues, les idées fondamentales étant en général semblables, on choisit de se restreindre à ce cas pour la brièveté de l'exposition.

Soient G un groupe discret infini-dénombrable et μ une mesure sur G. Le *support* de μ est l'ensemble $\{g \in G | \, \mu(g) > 0\}$, notée $supp(\mu)$. La mesure μ est dite *non-dégénérée* si le semi-groupe engrendré par son support, $sgr(\mu)$, est G, *symétrique* si $\mu(g) = \mu(g^{-1})$.

Définition 1.1 *La marche aléatoire à droite est la donnée d'un groupe avec probabilité (G, μ) qui donne la chaîne de Markov homogène en temps avec l'espace des états les éléments de G et les probabilités de transition $p(g|h) = \mu(h^{-1}g)$, $\forall g, h \in G$.*

Le produit cartésien $\prod_{i=0}^{\infty} G$, sera noté G^{∞} et appelé l'*espace des trajectoires* et un élément $u \in G^{\infty}$, $u = (u_0, u_1, \dots)$ une trajectoire. Muni de la topologie produit, c'est un espace polonais (métrisable, séparable et complet). On note C_n, les applications coordonnées de G^{∞} sur G : $C_n : u = (u_0, u_1, \dots) \longmapsto u_n \quad n \geq 0$. Les *sous-ensembles cylindriques* de G^{∞} sont les préimages des points par les C_n, notés $C_g^n := C_n^{-1}(g) = \{u \in G^{\infty} | \, u_n = g\}$. On note par $C_{g_1,\dots,g_k}^{n_1,\dots,n_k}$ l'ensemble $\bigcap_{i=1}^{k} C_{g_i}^{n_i}$. Le produit cartésien $\prod_{i=1}^{\infty} G$, que l'on va noter $G^{\mathbb{N}_+}$ pour le distinguer de l'espace des trajectoires G^{∞}, muni de la tribu produit et la mesure produit $\mu^{\bigotimes \mathbb{N}_+}$ avec laquelle les applications coordonnées sont des variables aléatoires i.i.d. (indépendantes, identiquement distribuées) de loi commune μ, sera appelé l'*espace des incréments* de la marche aléatoire (G, μ). (Une marche aléatoire, dans ce mémoire, signifie une marche aléatoire à droite.)

Étant donnée une distribution initiale θ, c'est-à-dire une probabilité sur G, on obtient une mesure de probabilité ${}_{\theta}P^{\mu}$ sur l'espace des trajectoires G^{∞}, associée à une marche aléatoire (G, μ) : c'est la mesure image de la mesure $\theta \bigotimes \mu^{\bigotimes \mathbb{N}_+}$ par l'application

$$\begin{aligned} G \times \prod_{i=1}^{\infty} G &\longrightarrow G^{\infty} \\ (x_0, x_1, \dots) &\longmapsto (x_0, x_0 x_1, x_0 x_1 x_2, \dots) \end{aligned} \tag{1.1}$$

On a, par exemple, ${}_{\theta}P^{\mu}(C_{g_0,g_1,\dots,g_n}^{0,1\dots,n}) = \mu(g_0)\mu(g_0^{-1}g_1)\dots\mu(g_{n-1}^{-1}g_n)$. Pour $g \in G$, on va noter ${}_{g}P^{\mu}$ la probabilité sur G^{∞} provenant de la distribution initiale δ_g sur G, et ${}_{e}P^{\mu}$ sera notée P^{μ}.

2 Frontières des marches aléatoires

Une fois que la marche aléatoire est définie, une des premières questions qu'on peut se poser est celle de la récurrence ou transience de la marche aléatoire. Cette question a été une des principales questions de l'étude des marches aléatoires et était le sujet d'une conjecture dite de Kesten, dont les travaux avaient débuté le sujet des marches aléatoires sur les groupes. Cette conjecture, bien qu'affirmée dans certains cas très particuliers comme les groupes libres, a été résolue par une réponse positive par les travaux de Varopoulos [Var85], environ 25 ans après les premières investigations de Kesten [Kes59a], [Kes59b]. La réponse a affirmé que dans “la plupart” des cas, la marche aléatoire est transiente.

Le sujet des frontières des marches aléatoires concerne le cas de transience. Transience implique que la marche aléatoire quitte p.s. (presque sûrement) chaque ensemble fini quand $n \to \infty$. La notion des frontières se présente dans le cas où on voudrait obtenir une information plus raffinée du comportement d'une marche aléatoire transiente : on peut se poser par exemple, est-ce qu'on peut distinguer mesurablement les différentes “directions” suivant lesquelles la marche aléatoire transiente tend vers l'infini.

Il s'avère que la manière mathématique de concrétiser ce qu'on vient de décrire d'une façon informelle concerne les représentations des fonctions μ-harmoniques (d'où le nom frontière de Poisson) bornées associées à une marche aléatoire (G, μ). Une fonction $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ s'appelle une fonction *μ-harmonique*, si elle satisfait la “propriété de la moyenne” dans le cadre des marches aléatoires : $f(x) = \sum_{y \in supp(\mu)} f(xy)\mu(y)$.

D'une façon analogue à la formule classique de représentation intégrale de Poisson pour les fonctions harmoniques dans le disque unité du plan complexe, on peut se poser la question suivante : étant donné un groupe discret avec une probabilité μ, peut-on trouver un G-espace B avec probabilité ν sur B tel que l'on aurait un isomorphisme analogue entre l'espace $H^\infty(G, \mu)$ des fonctions μ-harmoniques bornées et l'espace $L^\infty(B, \nu)$. Une première réponse à cette question, qui est trivialement positive, vient des théorèmes de Blackwell [Bla55], Choquet-Deny [Cho&Den60], qui disent que toute fonction harmonique bornée sur un groupe abélien est constante. On peut alors prendre pour B un singleton et trivialement établir l'isomorphisme voulu. Dans le cas intéressant vis-à-vis de cette question (c'est-à-dire, dans le cas où il existe des fonctions harmoniques bornées non-constantes sur le groupe en question) un premier résultat affirmatif a été obtenu par Dynkin et Malyutov [Dyn&Mal61] pour le cas des groupes libres à $k \geq 2$ générateurs. La première construction d'un tel espace B dans le cas général est dûe à Furstenberg [Fur63], [Fur71] et sa construction comprend les groupes localements compacts et à base dénombrable d'ouverts, munis d'une mesure de probabilité.

Une autre définition et construction dans un cadre uniquement mesurable de la frontière de Poisson est donnée par Kaimanovich et Vershik [Kai&Ver83] et [Kai92]. Ce nouvel objet a aussi la propriété de représenter les fonctions harmoniques bornées et est mesurablement isomorphe à la frontière de Poisson définie par Furstenberg. La construction de Kaimanovich et Vershik se fonde d'une façon essentielle sur la théorie des espaces de Lebesgue-Rokhlin et les partitions mesurables et facilite, par la théorie d'entropie des partitions mesurables, l'étude de cet objet.

La proposition suivante clarifie le rôle important, que l'on a mentionné ci-dessus, des fonctions μ-harmoniques bornées pour l'étude du comportement à l'infini d'une marche aléatoire.

Proposition 2.1 *Soient $g \in G$ et $\omega_n := h(gx_1 \dots x_n)$, $\omega_0 = h(g)$ où h est une fonction μ-harmonique bornée et $(x_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires à valeurs dans G i.i.d. de loi μ (les incréments). Alors ω_n converge p.s. En posant $\lim_n \omega_n = \omega_\infty$, on a $\mathbb{E}[\omega_\infty] = h(g)$.*

La preuve consiste à remarquer que $(\omega_n)_{n\geq 0}$ est une martingale bornée par rapport à la filtration canonique.

Construction de Furstenberg

On donne maintenant la définition d'une *μ-frontière* d'une marche aléatoire (G, μ) et énonce le théorème dû à Furstenberg d'existence d'une μ-frontière maximale ayant la propriété de représenter les fonctions μ-harmoniques bornées, que l'on va appeler la *frontière de Poisson (-Furstenberg)*.

Définition 2.1 *Une suite de variables aléatoires $(z_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans un G-espace B, définies sur un même espace de probabilité qu'une suite de variables aléatoires $(x_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. de loi μ à valeurs dans G, et qui satisfont*

(i) z_k est une fonction de $x_k, x_{k+1}, \dots$

(ii) les variables aléatoires z_k ont la même loi $\forall k \geq 1$

(iii) x_k est indépendante des variables $z_{k+1}, z_{k+2}, \dots$

(iv) $z_k = x_k z_{k+1}$

est appelée un μ-processus.

Définition 2.2 *Un couple (B, ν) où B est un G-espace admettant une probabilité ν μ-stationnaire et qui est la loi d'un μ-processus sur B, sera appelé une μ-frontière de (G, μ).*

Théorème 2.1 (Furstenberg'71 [Fur71]) *Soit G un groupe discret infini-dénombrable et μ une probabilité sur G, alors il existe une μ-frontière (B, ν) de (G, μ) avec les propriétés suivantes :*

(i)toute μ-frontière de (G, μ) est une image équivariante de (B, ν) ;

(ii)si h est une fonction μ-harmonique bornée sur G, alors il existe une fonction bornée mesurable $\hat{h}$ sur B telle que $h(g) = \displaystyle\int_B \hat{h}(g\xi) d\nu(\xi)$.

La fonction $\hat{h}$ est unique au sens suivant : appelons un sous-ensemble $A \subseteq B$ un sous-ensemble nul si $\nu(gA) = 0$ $\forall g \in G$, et une fonction sur B, une fonction nulle si elle est nulle sauf sur un sous-ensemble nul. Alors la fonction $\hat{h}$ est uniquement déterminée par la fonction μ-harmonique bornée h modulo les fonctions nulles.

Définition 2.3 *La μ-frontière (B, ν) fournie par ce théorème sera appelée la frontière de Poisson-Furstenberg de (G, μ) et sera notée $B(G, \mu) := (B, \nu)$*

La preuve du théorème de Furstenberg consiste à caractériser les G-espaces avec une probabilité ν μ-stationnaire, admettant un μ-processus de loi ν, construire un espace topologique M compact (séparé) muni d'une probabilité ν, par la théorie de Gel'fand en réalisant l'espace des fonctions μ-harmoniques bornées H^∞_μ comme une C^*-algèbre commutative et en construire un G-espace B ayant les propriétés souhaitées encore en partie par la théorie de Gel'fand. (voir [Fur71])

Construction de Kaimanovich-Vershik

Commençons par remarquer que l'espace des trajectoires muni de la tribu borélienne et la probabilité ${}_\theta P^\mu$ pour une distribution initiale θ sur G, étant l'image par un isomorphisme mesurable de l'espace $G \times G^{\mathbb{N}_+}$ muni de la tribu produit et la probabilité $\theta \bigotimes \mu^{\bigotimes \mathbb{N}_+}$, qui est un produit dénombrable de G, est un espace de Lebesgue. Notons par $\sim$ la relation d'équivalence suivante sur G^∞ :

$$x \sim x' \quad \text{pour } x, x' \in G^\infty \Leftrightarrow \exists n, n' \geq 0 \text{ tel que } \hat{T}^n x = \hat{T}^{n'} x' \tag{2.1}$$

où $\hat{T}$ est l'application de décalage sur G^∞, $\hat{T}((u_n)_{n\geq 0}) = (u_{n+1})_{n\geq 0}$. Les classes d'équivalence de la relation $\backsim$ forment une partition mesurable de l'espace des trajectoires, notée η, appelée la *partition de Poisson*. Par la théorie des partitions mesurables (voir [Rokh49] et [Rokh67]), il existe un unique (à isomorphisme mesurable près) espace mesurable, noté $\Gamma := {G^\infty}/{\eta}$ et une projection $bnd : G^\infty \longrightarrow \Gamma$ telle que la tribu engendrée par bnd sur G^∞ coïncide, aux ensembles ${}_m P^\mu$-négligéables près, (où m est la mesure de comptage sur G) avec la tribu engendrée par la relation $\backsim$. On appelle l'espace Γ, la *frontière de Poisson* de la marche aléatoire (G, μ).

Si on note par ν_γ la mesure image de ${}_\gamma P^\mu$ par bnd, on a le théorème suivant qui clarifie cette définition abstraite de la frontière de Poisson :

Théorème 2.2 *Les formules $F(bnd(u)) = \lim_n f(u_n)$, $u = (u_n)_{n\geq 0}$ et $f(g) = < F, g\nu >$, $g \in G$ déterminent un isomorphisme isométrique entre $\mathcal{H}^\infty_\mu(G)$ et $L^\infty(\Gamma, v_\theta)$ où θ est une probabilité telle que $\theta \backsim m$ (c'est-à-dire, $\theta \ll m$ et $m \ll \theta$)*

Dans ce cadre, on définit la notion de μ-frontière à partir de la frontière de Poisson, comme :

Définition 2.4 *Un quotient (Γ_ξ, ν_ξ) de la frontière de Poisson (Γ, ν) par rapport à une partition mesurable G-invariante ξ sera appelé une μ-frontière.*

3 La propriété de Liouville, critères entropiques, exemples

Entropie d'une marche aléatoire

La notion d'entropie d'une marche aléatoire (G, μ) a été introduite par Avez [Av72] qui a démontré en l'utilisant que si l'entropie d'une marche aléatoire (G, μ) est nulle alors toute fonction μ-harmonique bornée est constante. On dit alors que (G, μ) a la *propriété de Liouville*. Ceci équivaut par la discussion de la section précédente à la trivialité de la frontière de Poisson.

Définition 3.1 *Soit G un groupe discret infini-dénombrable. L'entropie d'une mesure de probabilité μ sur G, notée $H(\mu)$, est*

$$H(\mu) = -\sum_{g \in G} \mu(g) log(\mu(g)) \tag{3.1}$$

où on utilise la convention $0.log(0) = 0$.

Énonçons la proposition suivante qui est importante pour la suite et dont la preuve consiste en un simple calcul.

Proposition 3.1 *Soient μ et μ' deux probabilités d'entropies finies sur G, alors l'entropie de $\mu * \mu'$ est finie et on a*

$$H(\mu * \mu') \leq H(\mu) + H(\mu'). \tag{3.2}$$

Cette proposition implique que si $H(\mu)$ est finie alors la suite $H(\mu^{*n})$ est sous-additive, $H(\mu^{*(m+n)}) \leq H(\mu^{*m}) + H(\mu^{*n})$. En vue de cela, la limite $\lim_n \frac{H(\mu^{*n})}{n}$ existe et on introduit la définition suivante :

Définition 3.2 *Soient G un groupe discret infini-dénombrable, μ une probabilité d'entropie finie sur G. La limite*

$$h(G, \mu) := \lim_n \frac{H(\mu^{*n})}{n}$$

s'appelle l'entropie (d'Avez) de la marche aléatoire (G, μ).

Critère de trivialité de la frontière de Poisson

Le théorème suivant, démontré par Derriennic [Der80] et Kaimanovich-Vershik [Kai&Ver83] généralise l'assertion ci-dessus d'Avez et en contient la réciproque.

Théorème 3.1 (Derriennic'80, Kaimanovich&Vershik'83, [Der80], [Kai&Ver83]) *Soit G un groupe discret infini-dénombrable, μ une probabilité d'entropie $H(\mu)$ finie sur G. Alors, la frontière de Poisson (Γ, ν) d'une marche aléatoire (G, μ) est triviale si et seulement si $h(G, \mu) = 0$.*

La démonstration de Kaimanovich-Vershik repose sur la théorie d'entropie des partitions mesurables et la relation qu'ils ont établie entre celle-ci et l'entropie d'Avez.

Un autre théorème essentiel concernant l'étude de l'entropie d'une marche aléatoire est le théorème suivant démontré par Derriennic [Der80] et Kaimanovich-Vershik [Kai&Ver83], dont la preuve est une application du théorème sous-additif ergodique de Kingman.

Théorème 3.2 ([Der80], [Kai&Ver83]) *Soit G un groupe discret infini-dénombrable muni d'une probabilité μ d'entropie $H(\mu)$ finie. Alors P^μ-p.s. $\forall u \in G^\infty$ et dans $L^1(P^\mu)$*

$$-\lim_n \frac{1}{n} log(\mu^{*n}(u_n)) = h(G, \mu).$$

Un corollaire important que l'on peut en tirer, qui donne un critère "géométrique" de la trivialité de la frontière de Poisson est le suivant :

Corollaire 3.1 *La frontière de Poisson est triviale s'il existe $1 > \varepsilon > 0$ et une suite de parties B_n de G vérifiant $\mu^{*n}(B_n) > \varepsilon$ et $log|B_n| = o(n)$.*

Comme corollaire à ce critère, on obtient la proposition suivante, initialement démontrée par Avez à l'aide de la notion d'entropie qu'il a introduite.

Proposition 3.2 *Si G est un group à croissance sous-exponentielle et μ est une probabilité sur G de support fini, alors toute fonction μ-harmonique bornée est constante.*

Critère de maximalité d'une μ-frontière

Le théorème suivant dû à Kaimanovich [Kai00] donne un critère pour tester si une μ-frontière (qui est par définition un quotient G-équivariant de la frontière de Poisson) est maximale, c'est-à-dire, si elle est la frontière de Poisson. Ce critère a plusieurs applications (dont on va exposer deux) à la détermination de la frontière de Poisson par le schèma suivant : étant donnée une marche aléatoire (G, μ), on commence par trouver une μ-frontière "raisonnable" et on vérifie par ce critère si elle est maximale.

On commence par définir l'*entropie asymptotique* d'une probabilité Λ sur G^∞.

Définition 3.3 *La mesure de probabilité Λ sur G^∞ est dite avoir entropie asymptotique $h(\Lambda)$ si Λ-p.s. $\forall u \in G^\infty$ et dans $L^1(\Lambda)$, on a $-\frac{1}{n}log\Lambda(C^n_{u_n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} h(\Lambda)$*

On avait vu que pour une probabilité μ sur G, d'entropie $H(\mu)$ finie, la mesure associée P^μ avait l'entropie asymptotique $h(P^\mu)$ égale à l'entropie de la marche aléatoire (G, μ), $h(G, \mu)$, théorème 3.2.

Théorème 3.3 (Kaimanovich'98 [Kai00]) *Une μ-frontière (Γ_ξ, ν_ξ) est la frontière de Poisson $B(G, \mu)$ si et seulement si $h(P^{\gamma_\xi}) = 0$ ν_ξ-p.s. $\forall \gamma_\xi \in \Gamma_\xi$ (où les probabilités P^{γ_ξ} sur G^∞ sont des probabilités conditionnelles définies ν_ξ-p.s. par la transformée de Doob des fonctions μ-harmoniques $\phi_\gamma(g) = \frac{dg\nu}{d\nu}(\gamma)$).*

Exactement comme le corollaire 3.1, on obtient le corollaire suivant qui donne un critère "géométrique" de la maximalité d'une μ-frontière :

Corollaire 3.2 *Une μ-frontière (Γ_ξ, ν_ξ) est la frontière de Poisson $B(G,\mu)$ si ν_ξ-p.s. $\forall \gamma_\xi \in \Gamma_\xi$ $\exists \varepsilon > 0$ et une suite de sous-ensembles $A_n = A_n(\gamma_\xi) \subseteq G$ telle que*

(i) $log|A_n| = o(n)$;
(ii) $C_{n*}P^{\gamma_\xi}(A_n) > \varepsilon$ *pour tout n assez grand*

Exemples d'application du critère de Kaimanovich

Dans cette partie on donne deux exemples (sans preuves) de frontière de Poisson que l'on détermine grâce au schèma de détermination de la frontière de Poisson décrit dans la partie précédente avec le corollaire précédent comme critère de maximalité.

Exemple 1.

Théorème 3.4 (Kaimanovich'98 [Kai00]) *Étant donnée une marche aléatoire (G,μ) où μ est une probabilité non-dégénérée de support fini et G un groupe hyperbolique non-élémentaire au sens de Gromov, alors le bord hyperbolique ∂G du groupe G peut être muni d'une probabilité ν tel que $(\partial G, \nu)$ soit la frontière de Poisson de la marche aléatoire (G,μ).*

La preuve de ce théorème utilise d'une façon essentielle la "géométrie" des groupes hyperboliques ; Kaimanovich utilise en particulier la finesse des triangles géodésiques et la propriété que les rayons géodésiques tendant vers un même point au bord géométrique et ayant les mêmes points initiaux restent à une distance uniformément bornée.
Notons qu'en toute généralité, on n'a pas besoin de l'hypothèse de finitude du support mais une autre condition concernant le moment d'ordre 1 de la probabilité μ que l'on n'a pas défini ici.

Exemple 2 Le deuxième exemple de détermination de la frontière de Poisson constitue le sujet de l'article [Bro&Sch11] et concerne les marches aléatoires sur $GL_d(\mathbb{Q})$. Notons par $\mathcal{P}^*$ l'ensemble des nombres premiers et posons $\mathcal{P} = \mathcal{P}^* \cup \{\infty\}$. Pour $p \in \mathcal{P}^*$, notons $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques et par convention posons $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$. Si μ est une probabilité sur $GL_d(\mathbb{Q})$ de moment logarithmique fini, c'est-à-dire

$$\int log^+||g||_p + log^+||g^{-1}||_p d\mu(g) < \infty,$$

pour chaque $p \in \mathcal{P}$, on note les exposants suivant de Lyapunov associés, qui satisfont $\lambda_1(p) \geq \lambda_2(p) \geq \ldots \geq \lambda_d(p)$ et $\forall k \in \{1, \ldots, d\}$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(p) = \lim_n \frac{1}{n} \int log|| \wedge^k g||_p d\mu^{*n}(g),$$

où $\wedge$ dénote le produit extérieur. Soit P_p le sous-groupe parabolique de $GL_d(\mathbb{Q}_p)$ qui consiste en les matrices $a(p)_{i,j}$ telles que $a(p)_{i,j} = 0$ si $\lambda_i(p) < \lambda_j(p)$. Notons par

$B_p := GL_d(\mathbb{Q}_p) \big/ P_p$ la variété de drapeaux obtenue en quotientant $GL_d(\mathbb{Q}_p)$ par le stabilisateur d'un drapeau $(E_1^p, \ldots, E_r^p)$ obtenu d'une façon canonique à partir des exposants de Lyapunov $\lambda_i(p)$. Finalement munissons l'ensemble $\mathbb{B} := \prod_{p \in \mathcal{P}} B_p$ de la topologie produit, qui en fait un $GL_d(\mathbb{Q})$-espace compact, à base dénombrable d'ouverts. Alors on a :

Théorème 3.5 (Brofferio&Schapira'09 [Bro&Sch11]) *Soit μ une probabilité sur le groupe $GL_d(\mathbb{Q})$ telle que*

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \int log^+ ||g||_p + log^+ ||g^{-1}||_p d\mu(g) < \infty.$$

Alors il existe une unique probabilité ν sur $\mathbb{B}$ telle que $(\mathbb{B}, \nu)$ soit la frontière de Poisson de la marche aléatoire $(GL_d(\mathbb{Q}), \mu)$.

La preuve de cet énoncé se fait en deux parties suivant le schéma décrit : d'abord on démontre que l'espace B_p (respectivement $\mathbb{B}$) avec une probabilité convenable ν_p (ν) est une μ-frontière d'une marche aléatoire $(GL_d(\mathbb{Q}_p), \mu_p)$ $((GL_d(\mathbb{Q}), \mu))$, en utilisant le théorème multiplicatif ergodique d'Oseledec (une version pour les corps locaux dûe à Raghunathan), et ensuite on applique le critère de maximalité pour en déduire le résultat.

4 Un théorème de type-Liouville, exemple d'application

Le "théorème de Liouville" pour les marches aléatoires sur les groupes (sections 2 et 3) dit que pour un groupe G et une probabilité μ d'entropie $H(\mu)$ finie, sur G ; si l'entropie de la marche aléatoire $h(G, \mu)$ est nulle alors tout fonction μ-harmonique bornée est constante (la réciproque est aussi vraie). Rappelons nous aussi que $h(G, \mu) = 0$ signifie la croissance sous-linéaire de la suite des entropies des convolutions, $H(\mu^{*n})$. Dans cette partie, suivant [Ers&Kar10], on montre que, sous certaines conditions sur μ, une borne plus stricte sur la croissance des $H(\mu^{*n})$ implique que non seulement les fonctions μ-harmoniques bornées, mais aussi les fonctions μ-harmoniques à croissance assez lente sont des constantes.

Théorème 4.1 (Erschler&Karlsson'10 [Ers&Kar10]) *Soit G un groupe discret et μ une probabilité non-dégénérée de support $supp(\mu) = S$ fini, contenant l'identité $e \in G$. Soit $f_c : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction croissante. Supposons qu'une des deux conditions suivantes est vraie :*

(i) Pour une fonction $f_H : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $f_H(n) \nearrow \infty$ et $f_H(n) \geq H(n)$ on a

$$f_c(n)\sqrt{f_H(n+1) - f_H(n)} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

(ii) Il existe une suite croissante n_k dans $\mathbb{N}$ telle que

$$f_c(n_k)\sqrt{H(n_k+1) - H(n_k)} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Alors, toute fonction μ-harmonique sur G de croissance au plus f_c (par rapport à l'ensemble générateur $S = supp(\mu)$) est constante.

On commence par donner une minoration pour les différences des entropies des convolutions en termes de sommes des différences des convolutions décalées, plus précisément : soit μ une probabilité non-dégénérée, de support fini sur G.

Lemme 4.1 *Soit S un ensemble fini contenu dans le support de μ. Supposons aussi que $e \in supp(\mu)$. Alors $\exists C_0 > 0$ tel que*

$$\forall g \in S\ \forall n \geq 1 \quad \text{on a} \quad H(\mu^{*(n+1)}) - H(\mu^{*n}) \geq C_0 . \sum_{\substack{h: \\ \mu^{*n}(gh)+\mu^{*n}(h)>0}} \frac{(\mu^{*n}(gh) - \mu^{*n}(h))^2}{\mu^{*n}(gh) + \mu^{*n}(h)}$$

Preuve. Puisque S est fini, il suffit de démontrer le lemme pour un g fixé, $e \neq g \in supp(\mu)$. Soit $supp(\mu) = \{g_0, g_1, \ldots\}$ où $g_0 = e$ et $g_1 = g$. Par concavité sur $]0,1[$ de la fonction $-tlog(t)$, on se ramène au cas où il suffit de démontrer $H(\frac{1}{2}\nu_0 + \frac{1}{2}\nu_1) \geq \frac{1}{2}H(\nu_0) + \frac{1}{2}H(\nu_1) + CD$ où $p_i := \mu(g_i) > 0$, $\nu_i = g_i\mu^{*n}$ pour un $n \geq 1$ fixé et

$$D := \sum_{\substack{h: \\ \nu_1(h)+\nu_0(h)>0}} \frac{(\nu_1(h) - \nu_0(h))^2}{\nu_1(h) + \nu_0(h)} \quad \text{et} \quad P = \frac{p_0}{p_0 + p_1}.$$

Alors l'inégalité voulue s'obtient en sommant l'inégalité suivante que l'on peut démontrer par les développements limités : $\exists C > 0$ tel que $\forall a \geq 0, b \geq 0$ avec $a + b > 0$,

$$-\frac{1}{2}(a+b)log(\frac{a+b}{2}) + \frac{1}{2}(aloga + blogb) \geq C\frac{(a-b)^2}{a+b}.$$

Corollaire 4.1 *Avec les mêmes hypothèses que le lemme précédent, il existe $C > 0$ tel que $\forall g \in S$, $\forall n \geq 1$*

$$\sum_h |\mu^{*n}(gh) - \mu^{*n}(h)| \leq C\sqrt{H(\mu^{*(n+1)}) - H(\mu^{*n})}$$

Corollaire 4.2 *Pour toute probabilité μ non-dégénérée, de support fini, en prenant la longueur l_S associée à $S = supp(\mu)$, on a : $\exists C > 0$, $\forall g \in G$*

$$\sum_h |\mu^{*n}(gh) - \mu^{*n}(h)| \leq Cl(g)\sqrt{H(n+1) - H(n)}$$

Preuve (du théorème 4.1). On commence par démontrer que la condition (i) implique (ii) : supposons que (i) est vraie alors que (ii) ne l'est pas. Alors $\exists \varepsilon_0 > 0$ $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_0$ $f_c(n)\sqrt{H(n+1) - H(n)} > \varepsilon_0$ et soit $M_0 \geq N_0$ tel que $f_c(n)\sqrt{f_H(n+1) - f_H(n)} < \frac{\varepsilon_0}{2}$ alors $\forall n \geq M_0$ $\sqrt{H(n+1) - H(n)} \geq 2\sqrt{f_H(n+1) - f_H(n)}$ et donc $H(n+1) - H(n) \geq 4(f_H(n+1) - f_H(n))$. Alors

$$H(n) - H(M_0) = \sum_{k=M_0}^{n-1} H(k+1) - H(k) \geq 4 \sum_{k=M_0}^{n-1} f_H(k+1) - f_H(k) = 4(f_H(n) - f_H(M_0))$$

En conséquence $H(n) \geq 4f_H(n) + (H(M_0) - 4f_H(M_0))$ $\forall n \geq M_0$. Puisque $f_H(n) \nearrow \infty$ cela implique que pour n assez grand $H(n) > f_H(n)$ ce qui est une contradiction.

Il suffit alors de démontrer le théorème en supposant (ii). Soient $\phi : G \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction μ-harmonique de croissance au plus f_c et $g \in G$ avec $l(g)$ sa longueur. Alors

$$\phi(e) - \phi(g) = \sum_h \phi(h)\mu^{*n_k}(h) - \sum_h \phi(h)\mu^{*n_k}(g^{-1}h) =$$

$$\sum_{\substack{h \in supp(\mu^{*n_k}) \cup \\ g.supp(\mu^{*n_k})}} \phi(h)(\mu^{*n_k}(h) - \mu^{*n_k}(g^{-1}h)) \leq f_c(n_k + l(g)) \sum_h |\mu^{*n_k}(h) - \mu^{*n_k}(g^{-1}h)|$$

$$\leq f_c(n_k + l(g)).l(g).C.\sqrt{H(n_k+1) - H(n_k)}$$

où l'avant dernière inégalité découle de l'hypothèse de croissance de ϕ et la dernière du corollaire précédent. Alors l'hypothèse (ii) implique que l'on a $\phi(e) - \phi(g) = 0$, d'où le théorème.

Corollaire 4.3 *Soient G un groupe dont la fonction de croissance est bornée par $exp(Cn^a)$ pour un $a < 1$ et $\mathcal{P}$ la classe des probabilités non-dégénérées de support fini sur G. Alors il existe $b > 0$ tel que $\forall \mu \in \mathcal{P}$, toute fonction μ-harmonique de croissance au plus n^b est constante. De plus, si pour une fonction μ-harmonique avec $\mu \in \mathcal{P}$, il existe une suite $n_k \nearrow \infty$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall g \in G$ avec $l(g) \leq n_k$, on a $\phi(g) \leq n_k^b$, alors ϕ est constante.*

Exemple. Le corollaire 4.3 s'applique à l'important premier groupe de Grigorchuk [Gri80] qui est un premier exemple d'un groupe ayant une croissance intermédiaire. Une estimation de Bartholdi [Ba98] montre que a du corollaire 4.3 pour le premier groupe de Grigorchuk est plus petit que $0.7674\ldots$. En utilisant cet estimation, le corollaire 4.3 implique que pour une probabilité non-dégénérée μ sur le premier groupe de Grigorchuk, il n'y a pas de fonction μ-harmonique non-constante et de croissance plus petite que $n^{0.116}$.

5 La propriété "1-Liouville"

Dans cette dernière section, on s'intéresse à l'espace vectoriel des fonctions harmoniques lipschitziennes $H_\mu^{lip}(G)$ associées à une marche aléatoire (G, μ) sur un groupe. On commence par exposer certaines relations plus ou moins évidentes entre l'espace $H_\mu^{lip}(G)$ et l'espace vectoriel $Hom(G, (\mathbb{R}, +))$ des homomorphismes des groupes de G dans $(\mathbb{R}, +)$. Ensuite, on en déduit une nouvelle définition intéressante, dite 1-Liouville, et on en donne une première propriété élémentaire, analogue des théorèmes classiques de Choquet-Deny et Blackwell.

On se donne un groupe discret G, finiment engendré avec un ensemble générateur symétrique S, $d = d_S$ la métrique associée et μ une probabilité sur G. Soit ϕ un morphisme de groupes de G sur $(\mathbb{R}, +)$.

Observation 1. *ϕ est une fonction lipschitzienne sur G.*

Preuve. Soient $g_1, g_2 \in G$ tels que $d(g_1, g_2) = l(g_1^{-1}g_2) = n$ pour un $n \geq 1$. Alors il existe $s_1, \ldots, s_n \in S$ tels que $g_1 s_1 \ldots s_n = g_2$, et soit $s_0 = e$. Alors on a $|\phi(g_1) - \phi(g_2)| = |\phi(g_1) - \phi(g_1 s_1 \ldots s_n)| \leq \sum_{i=1}^n |\phi(g_1 s_0 \ldots s_{i-1}) - \phi(g_1 s_0 \ldots s_i)| = \sum_{i=1}^n |\phi(s_i)| \leq n. \max_{s \in S} |\phi(s)| = d(g_1, g_2) \max_{s \in S} |\phi(s)|$.

Observons cette fois-ci que pour un morphisme $\phi : G \longrightarrow \mathbb{R}$, $\forall g \in G$, on a $\sum_h \phi(gh)\mu(h) = \sum_h [\phi(g) + \phi(h)]\mu(h) = \phi(g) + \sum_h \phi(h)\mu(h)$. Cela implique que si μ est une probabilité centrée ou en particulier symétrique de support fini, alors on a

Observation 2. *Pour une probabilité centrée μ sur G, l'espace vectoriel $Hom(G, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $H_\mu^{lip}(G)$ des fonctions μ-harmoniques lipschitziennes.*

Ayant observé cette inclusion, remarquons que la propriété d'être Liouville pour un groupe peut se reformuler avec une modification triviale de la façon suivante : G est Liouville si et seulement si l'espace vectoriel $H_\mu^\infty(G)\big/\mathbb{R}$ est isomorphe à un sous-espace vectoriel de $Hom(G, \mathbb{R})$. En vue de cette reformulation, suivant une communication orale de Emmanuel Breuillard, on peut donner la définition suivante : un groupe est dit *1-Liouville* si l'espace vectoriel $H_\mu^{lip}(G)\big/\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel (ou également par l'observation 2, isomorphe à) $Hom(G, \mathbb{R})$. Autrement dit, la propriété 1-Liouville est la "réciproque" de la deuxième observation : un groupe est 1-Liouville si et seulement si l'espace vectoriel des fonctions harmoniques lipschitziennes normalisées (par $f(e) = 0$) est égale à $Hom(G, \mathbb{R})$. Par l'inclusion évidente $H_\mu^\infty \subseteq H_\mu^{lip}$, il est clair que la propriété 1-Liouville est plus "forte" que la propriété Liouville : un groupe qui n'est pas Liouville admet une fonction harmonique bornée non-constante qui n'est donc pas un homomorphisme, mais une fonction harmonique lipschitzienne, et par conséquent n'est pas 1-Liouville.

On avait mentionné qu'un premier résultat général concernant la propriété Liouville pour un groupe était les théorèmes de Blackwell et Choquet-Deny qui disent que les groupes abéliens sont Liouville. La proposition suivante dit que les groupes abéliens sont 1-Liouville sous quelques hypothèses sur G ; par conséquent, elle "généralise" ces derniers théorèmes classiques.

Proposition 5.1 *Toute fonction harmonique lipschitzienne normalisée ($f(e) = 0$) associée à une marche aléatoire (G, μ) sur un groupe abélien G avec une probabilité non-dégénéré, apériodique et d'entropie $H(\mu)$ finie, est un homomorphisme sur $\mathbb{R}$.*

La preuve consiste en une application du théorème 4.2 de [Kai&Ver83].

Références

[Av72] Avez, A. (1972) "Entropie des groupes de type fini" *C.R.Acad.Sci, Paris* **275**A, 1363-1366

[Ba98] Bartholdi, L. (1998) "The growth of Grigorchuk's torsion group" *Int. Math. Research Notices* **20**, 1049-1054

[Bla55] Blackwell, D. (1955) "On transient Markov processes with a countable number of states and stationary transition probabilities" *Ann. Math. Stat.* **26**, 654-658

[Bro&Sch11] Brofferio, S. et Schapira B. (2011) "Poisson boundary of $GL_d(\mathbb{Q})$" *Israel Journal of Mathematics* **185**(1), 125-140

[Cho&Den60] Choquet, G. et Deny, J. (1960) "Sur lquation de convolution $\mu = \mu * \sigma$" *CR Acad. Sci. Paris* **250**, 799-801

[Der80] Derriennic, Y. (1980) "Quelques applications du théorème ergodique sous-additif" *Astérisque*, **74**, 183-201

[Dyn&Mal61] Dynkin, E.B. et Malyutov, M.B. (1961) "Random walks on groups with finite number of generators" *Soviet Math. Dokl.* **2** 399-402

[Ers&Kar10] Erschler, A. et Karlsson, A. (2010) "Homomorphisms to $\mathbb{R}$ constructed from random walks" *Annales de l'institut Fourier* **60**6, 2095-2113

[Fur63] Furstenberg, H. (1963) "A Poisson formula for semi-simple Lie groups" *Ann. of Math.* **77**, 335-386

[Fur71] Furstenberg, H. (1971) "Random walks and discrete subgroups of Lie groups" *Adv. Prob. related topics*, **1**, 3-63

[Gri80] Grigorchuk, R.I. (1980) "Burnside's problem on periodic groups" *Fun. Anal. App* **14**, 41-43

[Kai&Ver83] Kaimanovich, V. et Vershik, A.M. (1983) "Random walks on discrete groups : Boundary and entropy" *Ann. Prob.* **11** 457-490

[Kai92] Kaimanovich, V. (1992) "Measure-theoretic boundaries of Markov chains, 0-2 laws and entropy" *Harmonic analysis and discrete potential theory* (Frascati 1991), 145-180

[Kai00] Kaimanovich, V. (2000) "The Poisson formula for groups with hyperbolic properties" *Ann. of Math* **152**(3), 659-692

[Kes59a] Kesten, H. (1959) "Symmetric random walks on groups" *Trans. Amer. Math. Soc.* **92** 336-354

[Kes59b] Kesten, H. (1959) "Full Banach mean values on countable groups" *Math. Scand* **7** 146-156

[Rokh49] Rokhlin, V.A. (1949) "On the fundamental ideas of measure theory" *Functional analysis and measure theory*(Translations series 1) **10**, 1-54

[Rokh67] Rokhlin, V.A. (1967) "Lectures on the entropy theory of measure preserving transformations" *Russian Math. Surveys* **22** :5 1-52

[Var85] Varopoulos, N. (1985) "Long range estimates for Markov chains" *Bull. Sci. Math.* **109**.2, 225-252