Part I

Introduction au domaine de recherche

Géométrie dérivée et complexe cotangent

La géométrie dérivée concerne l'étude d'une évolution du concept de "espace" qui à été développée récemment ([9], [2], [10]) notamment dans l'étude des questions liées à la théorie de l'intersection, aux espaces des modules et à la théorie de la déformation. On dit que la géométrie dérivée est une théorie dont les objets géométriques (i.e. les champs dérivées géométriques) ont une structure "gentile" aux singularités, et qui est conservative de ce qui est régulier, ou autrement dit, on récupères exactement la géométrie classique sur les objets réguliers.

L'objet géométrique de base en géométrie dérivée est le champs dérivé, ce qui est l'analogue d'un schéma en géométrie algébrique classique. L'objet mathématique que contient toute l'information géométrique supplémentaire dans le cas dérivé est le *complexe cotangent*. Il encode la structure infinitésimale du champs dérivé et peut être pensé comme l'analogue dérivé au tangent à un schéma; par contre il n'en est pas une généralisation, car par exemple le complexe cotangent à un produit fibré des schémas classiques peut ne pas coïncider avec le tangent classique du produit fibré. En bref, le complexe cotangent est un complexe

$$V^{\bullet} = \cdots \to V_{-1} \to V_0 \to V_1 \to \dots$$

qui encode informations "superieures" (par exemple déformations supérieurs) dans les niveaux différents de 0. Dans le cas régulier, par exemple d'un schéma lisse, ce sera concentré en degré 0, et correspondra au tangent usuel. En général on pourra rencontrer deux phénomènes principales:

1. ils apparaissent des $V_i \neq 0$ en degrés $i < 0$, ce qui corresponds du coté géométrique à des objet "du type champs", ou à des singuliarités "de type quotient";

2. ils apparaissent des $V_i \neq 0$ en degrés $i > 0$, ce qui corresponds du coté géométrique à des objets "dérivés", ou à des singuliarités "de type intersection".

Ce deux phénomènes peuvent se présenter simultanément dans un champs dérivé, et nous verrons dans la suite à quel type de problème géométrique ils répondent.

Nous allons maintenant décrire avec des exemples les problématiques mentionnés ci-dessus, et comment l'introduction des champs géométriques dérivés leur donne une réponse satisfaisante.[1]

[1] Je ne donne pas des références précises dans la suite car toute cette introduction a été écrite en prenant inspiration de plusieurs talks que j'ai eu l'occasion d'écouter récémment, et pas basée sur des articles. J'ai mis une bibliographie complète où l'on peut trouver des références pour des énoncés précis et un développement plus complet de la théorie.

Espaces quotients (ou champs géométriques)

Étant donnée une action d'un groupe de Lie (resp. topologique) G sur une variété (resp. variété topologique) X, en général le quotient topologique X/G (i.e. l'ensemble des orbites avec la topologie quotient induite par celle de X) n'hérite pas une structure différentiable (resp. de variété topologique). Il y a deux motivations principales:

1. *Problème de séparation:* si l'action n'est pas proprement discontinue, l'espace quotient peut etre hautement non-séparé.

2. *Problème de singularité:* rélié aux points avec stabilisateur non-triviale.

On voudrait une théorie compréhensive de tout quotient sans distinction. Le problème a donc été abordé avec la théorie des champs et des topos. Par exemple à toute action d'un groupe de Lie sur une variété lisse est associé un champs quotient $[X/G]$ qui est lisse (au sens des champs), c'est à dire que localement est un groupoid différentiable (ou "de Lie") . Un champs différentiable est donc un recollement lisse de morceaux "affines", de façon analogue au cas régulier des variétés (où le groupoid différentiable est juste la variété).

0.0.1 Foncteur des points

Pour comprendre comment est possible rendre formel le concept d'espace qui rassemble localement à un groupoid, un point de vue très utile que est fondamental dans la théorie de schéma de Grothendieck est celui du *foncteur des points*, que nous allons décrire brièvement. Ici nous considérons le cas différentiable, mais tout ce que suit peut être transposé en un contexte géométrique homotopique (suivant les définition de [9]). Soit $Diff$ la catégorie des variétés différentiables lisses, avec morphismes lisses. Une variété $M \in Diff$ est la donnée d'un atlas $\{U_i\}$ avec certaines morphismes de recollement ϕ_{ij} qui satisfont une condition de cocycle. La même information peut être codifié par l'ensemble $\{\phi : V \to M |\ V \in Diff\}$ des morphismes vers M, et les règles de composition de ces morphismes. En particulier la donnée du foncteur

$$\begin{array}{rccc} h_M: & Diff & \longrightarrow & \mathcal{S}ets \\ & V & \mapsto & \mathrm{Hom}_{Diff}(V, M) \end{array}$$

est équivalente à celle d'une structure lisse sur M, mais plus "fonctorielle" dans le sens que nous n'avons pas choisit un atlas pour donner cette structure. Un foncteur $F : Diff \to \mathcal{S}ets$ est représentable s'il existe un $V \in Diff$ tel que $F \simeq h_V$. On remarque alors que une variété M est juste un foncteur $F : Diff \to \mathcal{S}ets$ qui est un faisceau pour le site différentiable et qui est en plus représentable.

L'idée c'est de considérer foncteurs à valeurs dans la (2)-catégorie des groupoids $\mathcal{G}rpd$, au lieu de la catégorie $\mathcal{S}ets$ des ensembles. On dit alors que un champs différentiable est juste un "faisceaux en groupoid", (i.e. il satisfait une condition de descente similaire à celle des faisceaux en ensembles) tel que il est (localement) représentable. La théorie des variétés lisses se retrouve en considérant les ensembles comme groupoids discrets (i.e. avec juste les morphismes identités). Dans l'exemple ci-dessus, on considère le groupoid de action $X \times G \rightrightarrows X$ où les deux projections sont l'identité de X et l'action. On peut montrer que le foncteur qu'il répresente est juste un foncteur en ensembles dans le cas d'une action régulière, isomorphe au foncteur des points de X/G. Nous avons donc bien répondu à la question de traiter d'une façon unifié tous les quotients d'une action de groupe de Lie.

Problèmes des modules (ou champs supérieurs)

Nous avons vu comme traiter des quotients d'espaces avec la théorie des 1-champs. Nous verrons maintenant que le champs supérieurs apparaissent naturellement dans l'étude de certains problèmes des modules.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie d'espaces, par exemple $\mathcal{C} = Diff$. Un problème des modules sur $\mathcal{C}$ est un foncteur $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{S}ets$ que classifies des familles d'objets algèbro-géométriques. Ce signifie que en général, si $M \in \mathcal{C}$, $F(M)$ sera l'ensemble de certains objets géométriques sur M, par exemple les courbes de genus fixé sur M, ou les fibrés vectoriels d'un certains rang etc.

Considérons à titre d'exemple

$$\mathrm{Vect}_n : Diff^{op} \to \mathcal{S}et$$

le foncteur qui envoie une variété M sur l'ensemble des classes d'isomorphisme des fibrés vectoriels de rang n sur M. Un espace des modules pour F est une variété $\mathcal{E}_F$ qui représente le foncteur F:

$$F(M) = Hom_{Diff}(M, \mathcal{E}_F).$$

L'existence d'un espace des modules est fondamentale pour étudier la géométrie des objets classifiés par le problème correspondant, mais n'est pas toujours assurée, comme dans cet exemple.

Vu que un morphisme entre variétés est déterminé par sa valeur au voisinage de chaque point, un foncteur représentable en $Diff$ est un faisceau (on dit que la topologie est *sous-canonique*). Ce n'est pas le cas pour Vect_n. En fait, pour toute variété M, si $\{U_i \to M\}$ est une famille trivialisante pour M, alors $\mathrm{Vect}_n(U_i) = *$ (l'ensemble avec un seul point), donc si $Vect_n$ était un faisceau il devrait admettre une seule classe d'isomorphisme de fibrés vectoriels de rang n. Le problème est que tous les fibrés vectoriels sont localement isomorphes, mais grâce à ces isomorphismes on peut tordre un fibré trivial pour en obtenir un qui n'est pas trivial. Donc il n'y a pas d'espace des modules pour Vect_n.

Une solution au problème de trouver un bon espace des modules est de considérer un problème des modules différent, que se souvient des isomorphismes. Pour le problème considéré ci-dessus ce signifie étudier un foncteur

$$\mathcal{V}ect_n : \mathcal{D}iff^{op} \to \mathcal{G}rpd,$$

où $\mathcal{G}rpd$ est la catégorie des groupoids, et $\mathcal{V}ect_n(M)$ est le groupoid dont les objets sont tous les fibrés vectoriels de rang n sur M et les morphismes sont les isomorphismes de fibrés vectoriels. On trouve donc à nouveau le concept de champs différentiable, et dans ce cas on a existence d'un bon champs des modules (on peut vérifier que le champs différentiable des GL_n-fibrés principaux).

Dans notre exemple le problème était l'existence d'automorphismes non triviaux sur les objets que on considérait. En général, il peut y avoir des relations d'isomorphisme "supérieures", ou d'équivalence faible, par exemple si on considère les complexes des fibrés vectoriels de rank n sur M. Dans ces cas ce ne sera pas suffisant de considérer un problème des modules à valeurs dans $\mathcal{G}rpd$, mais dans une (n-)catégorie qui se souvient des morphismes supérieurs. Une façon de rendre cette idée formelle est de considérer problèmes des modules à valeurs dans $\mathcal{T}op$, la (∞-)catégorie des espaces topologiques. En voyant les ensembles comme espaces discrets et les groupoids comme espaces homotopiquement équivalents à CW-complexes de dimension 1, nous avons le diagramme suivante:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}iff^{op} \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & Sets \arrow[d, hook] \\
 & \mathcal{G}rpd \arrow[d, hook, dotted] \\
 & \mathcal{T}op
\end{tikzcd}$$

Comme nous avons vu dans la section sur les quotients, pour obtenir une bonne notion de champs différentiable (ou plus en général géométrique) $F : \mathcal{C}^{op} \to s\mathcal{S}et$, nous devons répondre à deux questions:

1. Qu'est-ce que c'est que un "faisceaux en espaces topologiques"? Ou autrement dit, quelle condition généralise la condition de descente classique des faisceaux en ensembles?

2. Comment définir une structure différentiable (resp. géométrique) sur un objet qui satisfait cette condition?

Nous n'allons pas décrire les détails ici, mais il suffira savoir que la condition de descente est remplacée par la condition de *hyperdescente* suivante: pour toute hypercover $U_* \to X$, le morphisme naturel

$$F(X) \to \operatorname{holim} F(U_*)$$

est une équivalence homotopique.

La condition de géométricité dans ce cas est obtenue en itérant le processus de quotient décrit dans la section précédente: un champs $n-$géométrique sera donc une sorte de quotient $[\mathfrak{X}/\mathfrak{M}]$ où $\mathfrak{X} \rightrightarrows \mathfrak{M}$ est un groupoid en champs $(n-1)-$géométriques.

Á titre d'exemple, je laisse réfléchir le lecteur sur l'existence d'un espace/champs/champs supérieur des modules pour le problème des modules qui envoye une variété M sur les $[\cdot/G]$-fibrés principaux, où G est un groupe de Lie, et $[\cdot/G]$ est le champs différentiable quotient de l'action triviale de G sur un point.

Théorie de l'intersection (ou champs dérivées)

Nous avons parlé brièvement de champs supérieurs, qui correspondent aux degrés négatif du complexe cotangent ou à des phénomènes de singularité de type quotient. Nous allons maintenant nous adresser aux degré positif, i.e. la partie dérivée dans nôtres espaces. Pour ça nous utiliserons comme exemple la théorie de l'intersection: ce n'est pas nécessaire d'aller trop loin dans cette théorie pour trouver des phénomènes qui ont été compris en profondeur seulement dans les dérniers années grâce à la géométrie dérivée.

En général, pour comprendre la géométrie d'un espace, on est ramené à faire des calculs cohomologiques. L'idée de la géométrie dérivée est de inclure toute information cohomologique directement dans la structure d'espace.

La théorie de l'intersection concerne l'étude des questions du type:

- Étant donnés Y, Z courbes algébriques en $X = \mathbb{C}^2$, qu'est-ce qu'on peut dire sur la cardinalité de $Y \cap Z$?
- Est-ce que on a toujours $\dim Y \cap Z = \dim Y + \dim Z - \dim X$?

On sait que dans des cas réguliers il y a une réponse satisfaisante: si Y, Z sont transverses en X, i.e. pour tout $x \in Y \cap Z$, $T_xY + T_xZ = T_xX$, alors d'près le théorème de Bezout:

$$\#Y \cap Z = \deg Y \cdot \deg Z. \tag{1}$$

De plus dans ce cas on a toujours $\dim Y \cap Z = \dim Y + \dim Z - \dim X$.

Exemple 0.0.1. $X = \mathbb{C}^2$, $Y = \{y = 0\}$, $Z = \{x = 0\}$ Alors $Y \cap Z = (0, 0)$ et (1) est satisfaite.

Exemple 0.0.2. $X = \mathbb{C}^2$, $Y = \{y - x^2 = 0\}$, $Z = \{y = 0\}$. Ici $Y \cap Z = (0,0)$, mais les variétés ne sont pas transverses, car $T_xY \subset T_xZ \subsetneq T_xX$. Donc on a bien $\dim Y \cap Z = \dim Y + \dim Z - \dim X$, mais (1) n'est pas vérifiée. La théorie des schéma donne une réponse à ce problème: on se souvient des multiplicités d'intersection qui sont détectées par l'anneau des fonctions:

$$\mathbb{C}[x,y]/(y - x^2) \otimes_{\mathbb{C}[x,y]} \mathbb{C}[x,y]/y = \mathbb{C}[x]/(x^2)$$

et

$$\mathbb{C}[x]/(x^2) \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \cdot x$$

comme espaces vectorielles, en particulier est de dimension 2. Donc le théorème de Bezout est encore assuré, si au lieu de la cardinalité de l'intersection nous considérons la cardinalité de l'intersection avec multiplicités.

Exemple 0.0.3. Soient $Y = Z = \{y = 0\}$ courbes algébriques. On voudrait $\#(Y \cap Y) = 1$, et $\dim Y \cap Y = 1 + 1 - 2 = 0$ mais ce n'est évidemment pas le cas. L'intersection schématique donne:

$$\mathbb{C}[x,y]/y \otimes_{\mathbb{C}[x,y]} \mathbb{C}[x,y]/y \simeq \mathbb{C}[x]$$

qui a dimension 1, donc la formule de Bezout n'est pas vérifiée dans ce cas.

La formule de Serre donne une réponse à ce problème: soit $x \in Y \cap Z \subset X$. La dimension de l'intersection de Y et Z en x est

$$\dim_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{Y,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{Z,x}) + \sum_{i \geqslant 1} (-1)^i \dim Tor_i^{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{Z,x}, \mathcal{O}_{Y,x}).$$

Ici,

$$\mathcal{O}_{Y,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{Z,x}$$

est l'intersection schématique classique, et

$$\sum_{i \geqslant 1} (-1)^i \dim Tor_i^{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{Z,x}, \mathcal{O}_{Y,x})$$

est la correction cohomologique: l'idée de la géométrie dérivée est de rassembler toutes ces "coordonnées cohomologiques" dans la définition d'objet géométrique.

Dans le dernier exemple,

$$Tor_i := H^i(- \otimes^{\mathbb{L}} -)$$

où $\otimes^{\mathbb{L}}$ est le produit tensoriel dérivé, dans $cdga^{\leqslant 0}$ la catégorie modèle des algèbres différentielles commutatives gradués.

Soient A, B, C en $cdga^{\leqslant 0}$. Alors

$$A \otimes_B^{\mathbb{L}} C := A' \otimes_B C$$

où A' est un remplacement cofibrant de A. Les cofibrations en $cdga^{\leqslant 0}$ sont les (retracts de) morphsimes quasi-libre, i.e. les $f : A \to B$ tels que il existe un $\mathbb{C}$-module libre V et un isomorphisme

$$B \simeq A \otimes_{\mathbb{C}} Sym^{gr}_{\mathbb{C}} V$$

en $cga^{\leqslant 0}$ (on oublie la différentielle), où l'algèbre symmetrique libre est calculée en $cga^{\leqslant 0}$.

Voyons dans un exemple comment marche-t-il le produit tensoriel dérivé sur les $\mathbb{C}$-algèbres, calculons

$$\mathbb{C}[x,y]/y \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{C}[x,y]} \mathbb{C}[x,y]/y.$$

Remplacement cofibrant de $\mathbb{C}[x,y]/y$: est donné par

$$\mathbb{C}[x,y][\varepsilon] \to C[x,y]/y,$$

où le premier terme est la cdga symmetrique libre sur $\mathbb{C}[x,y]$ engendrée par ε, avec $\deg \varepsilon = -1$. En particulier $\varepsilon^2 = 0$, car nous sommes en train de considérer l'algèbre symmetrique libre graduée. Cette ε est à carré nul et de degré -1 et il n'apparaît pas dans le cas classique. On peut le penser comme une *homotopie algébrique* entre y et 0. En particulier, $\mathbb{C}[x,y][\varepsilon]$ est le complexe

$$0 \to \mathbb{C}[x,y] \cdot \varepsilon \to \mathbb{C}[x,y] \to 0$$

et le produit tensoriel usuel

$$\mathbb{C}[x,y][\varepsilon] \otimes_{\mathbb{C}[x,y]} \mathbb{C}[x,y]/y$$

est le complexe

$$0 \to \mathbb{C}[x,y] \cdot \varepsilon \otimes_{\mathbb{C}[x,y]} \mathbb{C}[x,y]/y \to \mathbb{C}[x,y] \otimes_{\mathbb{C}[x,y]} \mathbb{C}[x,y]/y \to 0,$$

i.e.

$$0 \to \mathbb{C}[x] \cdot \varepsilon \xrightarrow{d=0} \mathbb{C}[x] \to 0.$$

En particulier

$$Tor_1(\mathbb{C}[x,y]/y \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{C}[x,y]} \mathbb{C}[x,y]/y) = H^1(0 \to \mathbb{C}[x] \cdot \varepsilon \xrightarrow{d=0} \mathbb{C}[x] \to 0) = \mathbb{C}[X]$$

et la formule de Serre nous dit bien que $\dim Y \cap Y = 1 - 1 = 0$.

Ici le point important c'est que l'intersection, comme schémas dérivées, de deux schémas classiques, est différente de l'intersection classique. On peut obtenir toute la géométrie dérivée avec les objets classiques affines et les intersections dérivée.

Nous concluons cette introduction au domaine de recherche en montrant comment on peut construire formellement les champs dérivées en analogie au cas classique.

Construction de la ∞-catégorie des champs derivés

La procédure classique pour définir les schémas algébriques est la suivante:

1. On définit les objets affines comme la catégorie (opposée) des anneaux affines $CRing^{op}$.

2. On agrandit la catégorie des objets affines pour qu'elle soit complète, i.e. close sous limites. $CRing^{op}$ est une sous catégorie pleinement fidèle de la catégorie des prefaisceaux en ensembles $Pr(CRing^{op})$ par l'embedding de Yoneda

$$\begin{array}{rccl} h: & CRing^{op} & \longrightarrow & Pr(CRing^{op}) \\ & A & \mapsto & B \mapsto \mathrm{Hom}(A, B) \end{array}$$

   Elle est engendrée par limites arbitraires dans l'image de h, donc nous disons que $Pr(CRing^{op})$ est le complètement de Yoneda de $CRing^{op}$.

3. On pose une structure locale sur la catégorie $CRing^{op}$, i.e. une topologie. Une topologie de Grothendieck sur une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée, pour chaque objet U de $\mathcal{C}$ d'une classe $Cov(U)$ de *familles couvrantes*, qui satisfont certains d'axiomes. Ces axiomes sont naturellement codifiés dans la donnée d'une topologie sur un ensemble X. On peut les déduire en considérant $\mathcal{C} = Ouv(X)$ la catégorie des ouverts de X et $Cov(U)$ donné par les recouvrements ouverts de U.

   Dans notre exemple, on considère la topologie de Zarinsky sur $Cring^{op}$: une famille de morphismes $\{f_i : A \to B_i\}$ est couvrante s'il existent a_i et isomorphismes $A[a_i^{-1}] \to B_i$ tels que les diagrammes

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B_i \\ A[a_i^{-1}] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

   commutent et les a_i engendrent tout A.

4. On recolle les objets affines: un schéma est finalement un objet de $Pr(CRing^{op})$ qui est un faisceaux pour la topologie de Zarinsky et qui admet un atlas de schémas affines.

Remarque. Souvent on définit un schéma comme un espace localement annelé qui admet un recouvrement de schémas affines. Les deux définitions sont équivalentes, mais la prémière est plus pratique pour notre généralisation. Il y a plus de subtilitées quand on cherche de faire de la géométrie dérivée dont on ne connaît pas les objets affines, mais nous n'allons pas rentrer dans ce discours ici.

Voici finalement la construction des champs dérivées:

1. On change la catégorie d'objets affines avec la catégorie des "anneaux dérivées" $DCRing^{op}$;

2. On considère les préfaisceaux simpliciaux
$$DCRing^{op} \to s\mathcal{S}et$$
au lieux des préfaisceaux en ensembles, pour obtenir des champs;

3. On aura une topologie naturelle sur les anneaux dérivées, dépendante de notre choix de $DCRing^{op}$;

4. On définit un champs (n)-algébrique dérivée comme un champs sur $DCRing^{op}$, i.e. qui satisfait la condition de descente décrite au chapitre précédente, et tel qu'il admet un (n)-atlas de champs affines.

Remarque. Il y a plusieurs choix pour la catégorie des anneaux dérivées. En particulier, pour le cas algébrique, il y a trois approches:

1. $DCRing = cdga^{\leqslant 0}$ les complexes de algèbres gradués commutatives coconnectives

2. $DCRing = sCring$ les algèbres commutatives simpliciales

3. $DCRing = E_\infty - rings$ les E_∞-anneaux.

D'après la correspondance de Dold-Kan, avec un peu de travail on peut montrer que les deux premiers approches sont équivalents, donc on obtient la même théorie. Le troisième choix par contre ne l'est pas, et on obtient une théorie différente. Ce signifie que selon les objectifs que un se propose, il y a plusieurs théories envisageables qui généralisent la théorie de schémas de Grothendieck.

Un diagramme qui décrit bien la situation, emprunté par Töen et Vezzosi est le suivant:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}ring^{op} \arrow[r, "Faisceaux"] \arrow[dr, "1-St"] \arrow[ddr, "\infty-St"] \arrow[dd, hook] & \mathcal{S}ets \arrow[d, hook] \\
& \mathcal{G}rpd \arrow[d, hook, dotted] \\
\mathcal{D}CRing^{op} \arrow[r, "\infty-dSt"] & \infty - \mathcal{G}rpd
\end{tikzcd}$$

where St and dSt dénotent champs et champs dérivés respectivement, et $\infty - \mathcal{G}rpd$ sont les ∞-groupoid, i.e. les espaces topologiques.

Bibliography

[1] Hollander S. *A homotopy theory for stacks,* arXiv:math/0110247.

[2] Lurie J. *Derived algebraic geometry V-XIV*

[3] Behrend K., P. Xu. *Differentiable stack and gerbes,* arXiv:math/0605694v2.

[4] Hovey M. *Model categories,* Mathematical surveys and monographs, Vol. 63, Amer. Math. Soc., Providence 1998.

[5] Dugger D., S. Hollander, D. Isaksen. *Hypercovers and simplicial presheaves,* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 136 (2004), 9-51.

[6] Goerss, P. G., J. F. Jardine. *Simplicial Homotopy Theory,* Progress in Mathematics 174. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser.

[7] Grothendieck A. *élements de géométrie algébrique I*

[8] Toën B., Vezzosi G. *Homotopical Algebraic Geometry I: Topos Theory,* arXiv:math/0207028v4.

[9] Toën B., Vezzosi G. *Homotopical Algebraic Geometry II: Geometric Stacks and Application,* arXiv:math/0404373v7.

[10] Toën B. *Higher and derived stack: a global overview* arxiv.org/abs/math/0604504

[11] Toën B. *Derived algebraic geometry and deformation quantization*

[12] Laumon G., Moret-Bailly L. *Champs algébriques* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, 39, Springer, Berlin, 2000.

[13] Metzler D. *Topological and smooth stacks,* arXiv:math/0306176v1.

[14] Noohi B. *Foundations of topological stacks I,* arXiv:math/0503247v1.

[15] Hirschhorn P. *Model categories and their localizations,* Mathematical Surveys and Monographs, 99. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[16] Lurie J. *Higher Topos Theory,* arXiv:math/0608040 .

[17] Dwyer W. and D. Kan, *Function Complexes in Homotopical Algebra,* Topology 19, 427-440 (1980).

[18] Vistoli A. *Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory,* arXiv:math/0412512v4.