

INTRODUCTION AU DOMAINE DE RECHERCHE:
NOTIONS DE BASE EN GÉOMÉTRIE TROPICALE ET
DROITES TROPICALES DANS SURFACES QUARTIQUES

WANG Yilin

sous la direction de Pr. Ilia Itenberg

21 juin 2014

1 Introduction

La géométrie tropicale a connu un essor depuis début XXI^e siècle. Les variétés tropicales sont affines par morceaux qui nous permettent souvent d'employer des méthodes combinatoires pour les étudier (voir par exemple [3], [7] et section 3.1). Figure 1 illustre un exemple de courbe tropicale cubique dans \mathbb{R}^2 et une surface tropicale cubique dans \mathbb{R}^3 .

Elle fait lien intéressant avec la géométrie algébrique qui est l'aspect que ce mémoire s'apprête à développer, et qui, loin d'être la seule utilité de cette nouvelle branche de mathématiques. L'analogie avec la géométrie algébrique complexe se fait à travers une certaine limite des variétés algébriques, en conservant de bonnes propriétés. Citons par exemple le théorème de Bezout (Thm. 1) et la correspondance de Mikhalkin [3].

Dans ce texte, on ne traite que le cas des espaces projectives, tout en sachant que l'analogie se fait en réalité dans le cadre des variétés toriques.

Une question énumérative classique en géométrie algébrique complexe est de savoir combien de droites sont contenues dans une surface algébrique

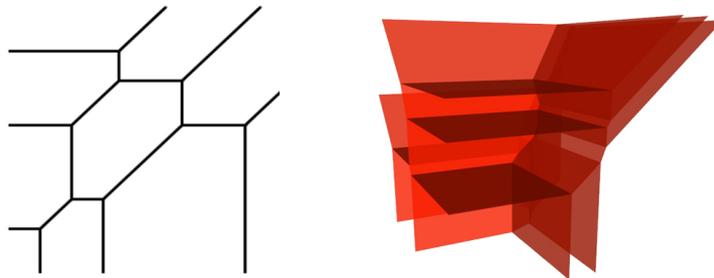


FIGURE 1 – Une courbe cubique dans \mathbb{R}^2 et une surface cubique dans \mathbb{R}^3 .

de \mathbb{CP}^3 . Il y en a 27 pour une cubique, et aucune droite dans une surface générique de degré supérieur ou égal à 4. La quartique de Schur en contient 64, qui est le nombre maximal de droites contenues dans une quartique quelconque (voir [10] et [11]).

On pose la même question dans le cadre de la géométrie tropicale. M. D. Vigeland (voir [7] et section 3.1) propose une étude à travers les propriétés combinatoires des droites tropicales contenues dans une surface générique. Il donne une classification des positions de droite par rapport à la surface. Et il a construit pour tout degré une famille ouverte de surfaces tropicales contenant une infinité de droites (voir [6] et section 3.1). Ce résultat peut paraître très différent qu'en géométrie algébrique, mais en effet, tous les couples tropicaux (Surface, Droite) ne sont pas **approximables** (Déf. 12) par une famille de couples complexes (Surface, Droite), ceux qui le sont, sont plutôt rares. Par exemple pour une surface de Vigeland contenant une famille infinie de droites, seulement un nombre fini de droites parmi elles peuvent être approximées lorsque le degré est supérieur à trois. E. Brugallé a même montré, grâce aux obstructions locales des variétés tropicales, qu'une surface tropicale générique de degré plus grand que quatre ne contient aucune droite approximable (voir [9] et section 3.2).

Trois notions d'approximabilité sont mentionnées dans ce texte :

- La **\mathbb{K} -approximabilité** d'une variété tropicale signifie qu'elle est *amibe non-archimédienne* d'une variété algébrique (Déf. 9) dont le corps est \mathbb{K} , un corps non-archimédien valué (Section 2.4). Le théorème de Kapranov (Thm. 4 et [2]) montre que l'ensemble des hypersurfaces \mathbb{K} -approximables coïncide avec l'ensemble des hypersurfaces tropicales.
- L'**approximabilité** d'une variété tropicale signifie qu'elle est une certaine limite d'une famille à 1 paramètre de variétés complexes (Déf. 8). Cette notion est *a priori* plus faible que la \mathbb{K} -approximabilité si \mathbb{K} est le corps des séries de Puiseux localement convergents à coefficients dans \mathbb{C} .
- L'**approximabilité locale**, plus faible que l'approximabilité, est due à la *dégénération initiale* (voir [14]). En effet soit X une variété tropicale approximable (Def. 8), alors pour tout point $p \in X$, on a aussi une approximation de $Star_p(X)$ par une famille **constante**. Où $Star_p(X)$ est l'éventail à sommet à l'origine composé des vecteurs $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $p + \epsilon v$ soit contenu dans X pour $0 < \epsilon$ petit. Nous appelons les variétés tropicales ayant pour le seul sommet 0, les variétés tropicales *étoilées*.

L'article [9] de E. Brugallé et K. M. Shaw fournit des obstructions à l'approximabilité locale des couples (Surface, Droite).

Ce texte est consacré à une présentation brève des notions de base en géométrie tropicale ainsi que l'exposé des résultats que j'ai appris pendant mon

stage. J'ai étudié ensuite des surfaces tropicales quartiques non-singulières qui ne contiennent qu'un nombre fini de droites tropicales. Le nombre maximal que j'arrive à trouver est 20 (section 4.1), et puis j'étudie leur approximabilité (section 4.2.2) :

Proposition 1. *Il existe une subdivision S primitive convexe de Δ_4 , les surfaces tropicales génériques duales à cette subdivision ont un nombre fini de droites tropicales. Parmi ces surfaces, celles qui contiennent au moins k droites lisses forment un ensemble ouvert de $\mathcal{K}(S)$, où k varie entre 8 et 20, $\mathcal{K}(S)$ est l'ensemble des surfaces tropicales de subdivision duale S .*

Au plus une droite est localement approximable, elle est dégénérée et en plus \mathbb{K} -approximable.

L'étude de la \mathbb{K} -approximabilité d'une droite tropicale dans une surface tropicale mène naturellement à la construction d'une surface quartique contenant deux droites tropicales \mathbb{K} -approximables en même temps (section 4.2.3) :

Proposition 2. *Considérons une subdivision primitive convexe S de Δ_4 qui a 2 couples de tétraèdres indiqués dans Figure 13. Soit T une surface tropicale duale à S et qui contient deux droites dégénérées L_1, L_2 , dont les parties duales $c_T^\vee(L_1)$ et $c_T^\vee(L_2)$ soit ces 2 couples. Alors le triplet (T, L_1, L_2) est \mathbb{K} -approximable.*

Il me semble presque clair que la généralisation de la \mathbb{K} -approximabilité simultanée de plusieurs droites est vraie, à condition que ces droites soient \mathbb{K} -approximables dans la surface, et sont espacées d'une certaine manière (formulée dans Prop. 15). Comme j'ai rencontré des difficultés à faire rentrer en même temps beaucoup de droites tropicales approximables dans une quartique non-singulière, je n'ai pas poursuivi cette voie.

Puis considérons directement une quartique non-singulière de $\mathbb{K}\mathbb{P}^3$ contenant beaucoup de droites. Voyons quels sont leurs amibes non-archimédiennes. La surface tropicale contient naturellement des droites tropicales simultanément \mathbb{K} -approximables. Le résultat obtenu est :

Proposition 3. *Il existe une surface tropicale quartique admettant un relèvement à une surface non-archimédienne non-singulière, contenant au moins 17 droites tropicales, qui sont \mathbb{K} -approximables en même temps que la surface.*

Mais l'amibe de la surface est fortement dégénérée en tant qu'une variété tropicale.

On trouve 17 droites tropicales simultanément \mathbb{K} -approximables sous le compromis de la singularité de la surface au sens tropical.

2 Notions de base en géométrie tropicale

2.1 Courbes tropicales dans \mathbb{R}^n

Intuitivement, une variété tropicale de dimension k est un complexe polyédral de dimension k dans \mathbb{R}^n qui vérifie certaines conditions d'équilibre sur les $(k - 1)$ -cellules.

Dans cette section on précise les conditions pour courbes tropicales.

Définition 1. Une *courbe tropicale* dans \mathbb{R}^n est un graphe sans boucles non orientée (V, E_f, E_i, ω) , V l'ensemble de sommets et E_f (resp. E_i) l'ensemble fini des arêtes finies (resp. infini). Toute arête e est munie de poids $\omega(e)$ un entier positif, qui vérifie les conditions suivantes :

- $\forall e \in E_f$ (resp. E_i), e est un segment (resp. un rayon moitié-infini) à pente rationnelle dans \mathbb{R}^n (*i.e.* il existe un vecteur porteur de ce segment, à coordonnées entières).
- $\forall v \in V$, soient $E_v = \{e_i \mid \text{arêtes issues de } v\}$, et $\vec{v}_i \in \mathbb{R}^n$ les vecteurs non nul minimal à coefficients entiers parallèle à e_i issu de v , on a la *condition d'équilibre* :

$$\sum_{e_i \in E_v} \omega_i \vec{v}_i = \vec{0}$$

Une courbe tropicale est dite *réduite* si le pgcd des poids de toutes les arêtes vaut 1. Une courbe tropicale réduite est dite *réductible* si elle est union de deux courbes tropicales distinctes.

Exemple 1. Considérons une variété algébrique dans $(\mathbb{C}^*)^n$, et l'application $-Log_t : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$(z_1, z_2, \dots, z_n) \mapsto \left(-\frac{\log|z_1|}{\log t}, -\frac{\log|z_2|}{\log t}, \dots, -\frac{\log|z_n|}{\log t} \right).$$

Prenons l'exemple $n = 2$, la droite \mathcal{L} dans $(\mathbb{C}^*)^2$ définie par

$$z + w + 1 = 0$$

a une image par $-Log_t$ pour un t petit, qu'on appelle *amibe de \mathcal{L}_t* est dessinée dans la Figure 2, en faisant tendre t vers 0, on obtient la courbe tropicale qui est aussi la squelette dessinée en bleu dans la figure. On dit que cette courbe tropicale est *limite d'amibes d'une famille constante de droites complexes*, notée $Trop(\mathcal{L})$.

A chaque sommet 3-valent S d'une courbe tropicale, les vecteurs primitives pointant vers l'extérieur (v_1, v_2, v_3) , de poids respectives $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, grâce à la condition d'équilibre, on peut associer une *multiplicité* au sommet :

$$\omega_1 \omega_2 |v_1 \wedge v_2| = \omega_2 \omega_3 |v_2 \wedge v_3| = \omega_3 \omega_1 |v_3 \wedge v_1|$$

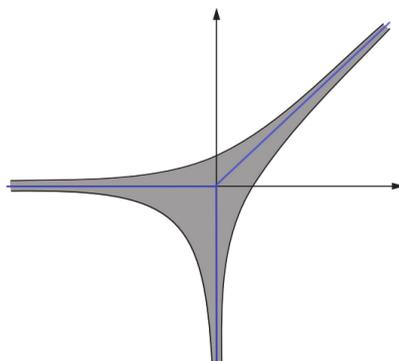


FIGURE 2 – L’amibe d’une droite complexe dans $(\mathbb{C}^*)^2$ et sa squelette dessinée en bleu.

Degré torique d’une courbe tropicale dans \mathbb{R}^n . Comme par définition une courbe tropicale T n’a qu’un nombre fini de rayons infinis, on considère la famille $\mathcal{D}(T) = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k\} \subset \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, telle que :

- $(\tau_i = \lambda \tau_j \text{ pour un } \lambda > 0) \iff (i = j)$.
- Soit u un vecteur primitive, $m u = v \in \mathcal{D}(T)$, si T a un rayon infini de la même direction que u , et $m \in \mathbb{N}$ est le nombre de rayons dans la même direction compté avec poids.

Définition 2. $\mathcal{D}(T)$ est dit *degré torique* de la courbe tropicale T . La condition d’équilibre assure que $\sum_{i=1}^k \tau_i = 0$.

Définition 3. On dit qu’une courbe tropicale paramétrée $h : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ est *lisse* ou *non-singulière*, si h est un plongement, les sommets de Γ sont 3-valent et de multiplicité 1. Voir Figure 3 pour un exemple d’une courbe tropicale lisse dans \mathbb{R}^3 .

Définition 4. On appelle $T \subset \mathbb{R}^n$ *courbe tropicale projective* de degré d si

$$\mathcal{D}(T) = \{(-d, 0, 0, \dots, 0), (0, -d, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, -d), (d, d, \dots, d)\}$$

Les courbes tropicales ont beaucoup de propriétés en commun avec les courbes algébriques. On verra plus d’exemples dans la section 3. Citons ici l’analogie du théorème de Bezout suivant :

Soit T_1, T_2 deux courbes tropicales de \mathbb{R}^2 , l’arête $e_1 = \omega(e_1)(a_1, b_1)$ de T_1 et l’arête $e_2 = \omega(e_2)(a_2, b_2)$ de T_2 , où $\omega(e_i)$ est le poids de e_i , s’intersectent en un point p dans leur intérieur. Alors on définit la *multiplicité d’intersection en p de T_1 et T_2* par : $\omega(e_1)\omega(e_2)|a_1b_2 - a_2b_1|$.

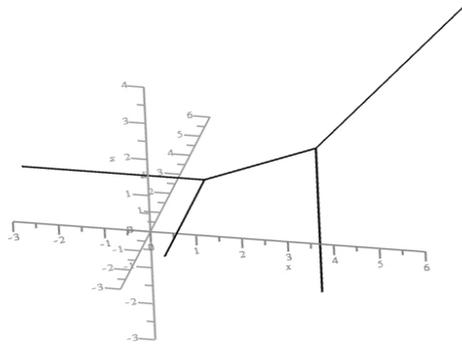


FIGURE 3 – Une courbe tropicale lisse dans \mathbb{R}^3 . On verra qu’elle est en fait une droite tropicale.

Théorème 1 (Bezout tropical). *Soit T_1 et T_2 deux courbes tropicales projectives dans \mathbb{R}^2 de degré d_1 et d_2 , respectivement. Supposons T_1 et T_2 en position générale relative, i.e. s’intersectent uniquement dans l’intérieur des arêtes. Alors le nombre d’intersections comptés avec la multiplicité est $d_1 d_2$.*

Démonstration. Voir la section 4 de [15]. □

2.2 Opérations tropicales et polynômes tropicaux

On introduit le semi-corps tropical $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ muni de deux opérations \oplus et \odot :

$$a \oplus b = \max\{a, b\}, \quad a \odot b = a + b.$$

L’élément neutre pour \oplus est $-\infty$, et \odot est distributive par rapport à \oplus . Ce qui change d’un corps habituel c’est que les éléments n’admettent pas d’opposé sauf $-\infty$.

Ces opérations peuvent être vues comme la déquantification d’une famille de semi-corps $\mathbb{R}_t = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ muni de l’addition \oplus_t et la multiplication \odot_t :

$$\begin{aligned} a \oplus_t b &= -\log_t(t^{-a} + t^{-b}) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \max\{a, b\} = a \oplus b \\ a \odot_t b &= -\log_t(t^{-a} t^{-b}) = a + b = a \odot b \end{aligned}$$

Les polynômes tropicaux sont alors

$$f(X) = \left(\sum_{\omega \in A} a_\omega X^\omega \right) = \max_{\omega \in A} (a_\omega + \omega \cdot X)$$

où $A \subset \mathbb{Z}^n$ est un ensemble fini de points entiers, et l’enveloppe convexe de A est la *polygone de Newton* de f , notons-le Δ . Et “ $\omega \cdot X$ ” est le produit

cartésien dans \mathbb{R}^n de ω et X .

f est une application $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexe affine par morceaux.

Définition 5. L'*hypersurface tropicale* définie par f est l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^n$ au voisinage duquel P n'est pas affine. On la note $T(A, f)$.

$T(A, f)$ est appelée *hypersurface projective de degré d* si $\Delta = \Delta_d = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq d\}$.

Le théorème suivant justifie le nom de "courbe tropicale" donné dans la dernière section.

Théorème 2. *Lorsque $n = 2$, l'ensemble des hypersurfaces tropicales coïncide avec l'ensemble des courbes tropicales définies dans la dernière section. i.e. toute hypersurface tropicale est une courbe tropicale, pour toute courbe tropicale T , il existe $(A \subset \mathbb{Z}^n, f : A \rightarrow \mathbb{R})$, tel que $T = T(A, f)$.*

2.3 Subdivision et dualité

Un polynôme tropical $f(X) = \sum_{i \in \Delta} a_i X^i$ permet de définir une subdivision de son polygone de Newton Δ de la manière suivante :

Soit $\tilde{\Delta} = \text{EnveloppeConvexe}\{(i, t) \mid i \in A, t \leq a_i\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

En projetant les faces bornées de $\tilde{\Delta}$ sur \mathbb{R}^n , on obtient une subdivision S de Δ .

Remarque 1. La fonction sur l'ensemble V_S des sommets de la subdivision :

$$V_S \rightarrow \mathbb{R} \quad i \mapsto -a_i$$

est une fonction convexe.

Définition 6. La subdivision de Δ ainsi définie par f est dite *subdivision associée à f* notée $S(A, f)$. Une subdivision S est dite *convexe* si elle est induite par un polynôme tropical.

Proposition 4. $T(A, f)$ est duale à $S(A, f)$ au sens suivant : Pour tout k -dimensionnel polyèdre Δ' de $S(A, f)$, il existe un polyèdre convexe et fermé $T'_{\Delta'} \subset T(A, f) \subset \mathbb{R}^n$ vérifiant les propriétés suivantes.

- $T'_{\Delta'}$ est inclus dans un sous-espace affine $L'_{\Delta'}$ de dimension $(n - k)$ orthogonal à Δ' .
- L'intérieur $U'_{\Delta'}$ de $T'_{\Delta'}$ dans $L'_{\Delta'}$ est non vide.
- $\bigcup_{\Delta' \in S(A, f)} T'_{\Delta'} = T(A, f)$
- $U'_{\Delta'} \cap U'_{\Delta''} = \emptyset$ si $\Delta' \neq \Delta''$
- $T'_{\Delta'}$ est compact si et seulement si Δ' inclus dans l'intérieur de Δ .

La subdivision est dite *primitive* si ses n -polyèdres sont de volume euclidien $\frac{1}{n!}$.

Lorsque $n = 2$, une courbe tropicale est lisse si et seulement si sa subdivision est primitive. Analogiquement, on définit la non-singularité d'une hypersurface tropicale :

Définition 7. L'hypersurface tropicale $T(A, f)$ est dite *lisse* si la subdivision associée $S(A, f)$ est primitive.

2.4 Corps non-archimédien valué

Comme indiqué dans l'exemple 1, on souhaite voir les variétés tropicales comme une limite d'amibes d'une certaine famille de variétés complexes paramétrées par t , où t dans un voisinage de 0_+ . *i.e.* Pour T une variété tropicale, on cherche une famille de variétés algébriques complexes \mathcal{V}_t , $T = \lim_{t \rightarrow 0} -\text{Log}_t(\mathcal{V}_t)$ sur les compacts pour la métrique de Hausdorff. On choisit un corps dont les éléments sont des fonctions de t , de sorte que la famille de variétés algébriques soit une variété algébrique dans ce corps.

On peut choisir *le corps de séries de Puiseux à puissance réelle localement convergent*, qui est par ailleurs algébriquement clos,

$$\mathbb{K} = \left\{ \Phi : U \rightarrow \mathbb{R} \mid \Phi(t) = \sum_{j \in I} a_j t^j, a_j \in (\mathbb{C}^*), t \in U \right\},$$

où $0 \in U \subset \mathbb{R}$ un certain voisinage de 0, et $I \subset \mathbb{R}$ un ensemble bien ordonné. En effet, on peut choisir un corps algébriquement clos plus petit que celui-ci en autorisant uniquement des puissances de t rationnelles et qui peuvent réduire au même dénominateur.

Dans ce texte on dira *le corps de séries de Puiseux* le corps \mathbb{K} , et *le corps des séries de Puiseux formelles*, $\mathbb{K}' = \left\{ \sum_{j \in I} a_j t^j, a_j \in (\mathbb{C}^*) \right\}$ sans condition de convergence.

Et il existe une valuation non-archimédienne :

$$\begin{aligned} \text{Val} : \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ \sum_{j \in I} a_j t^j &\rightarrow -\min I \end{aligned}$$

i.e. vérifie les propriétés :

1. $\text{Val}(f) = -\infty$ si et seulement si $f = 0$,
2. $\text{Val}(fg) = \text{Val}(f) + \text{Val}(g)$,
3. $\text{Val}(f + g) \leq \max\{\text{Val}(f), \text{Val}(g)\}$.

2.5 Variétés tropicales \mathbb{K} -approximables

Posons l'application $-Log_t : (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$(z_1, z_2, \dots, z_n) \mapsto \left(-\frac{\log|z_1|}{\log t}, -\frac{\log|z_2|}{\log t}, \dots, -\frac{\log|z_n|}{\log t} \right).$$

Définition 8. Soit \mathcal{V}_t une variété algébrique projective complexe, l'amibe de \mathcal{V}_t est l'image de $\mathcal{V}_t \cap (\mathbb{C}^*)^n$ par $-Log_t$. Soient V une variété tropicale, (\mathcal{V}_t) une famille de variétés complexes paramétrée par $t \in U$, où U est un voisinage de 0 dans \mathbb{R}_+ , telle que

$$\lim_{t \rightarrow 0} -Log_t(\mathcal{V}_t) = V$$

pour la métrique de Hausdorff sur les compacts. On dit alors que V est *approximable*, et qu'elle est *limite tropicale* de la famille (\mathcal{V}_t) .

Définition 9. Soit $V_{\mathbb{K}} \subset (\mathbb{K}^*)^n$ une variété algébrique, on définit l'application

$$Val : (\mathbb{K}^*)^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

qui prend la valuation coordonnées par coordonnées. L'image de $V_{\mathbb{K}}$ par Val est appelé l'amibe non-archimédienne de $V_{\mathbb{K}}$.

Une variété tropicale de \mathbb{R}^n est *\mathbb{K} -approximable* si elle est l'amibe non-archimédienne d'une variété algébrique dans $(\mathbb{K}^*)^n$.

Théorème 3 (Mikhalkin-Rullgård). Soient \mathcal{V}_t la variété algébrique complexe à paramètre t définie par l'expression de $V_{\mathbb{K}}$. Alors l'amibe non-archimédienne de $V_{\mathbb{K}}$ est limite tropicale de la famille (\mathcal{V}_t) .

Théorème 4 (Kapranov). Si $V_{\mathbb{K}} \subset (\mathbb{K}^*)^n = \{z \mid \sum_{j \in A} \alpha_j(t) z^j = 0\}$ est une hypersurface, alors son amibe $Val(V_{\mathbb{K}}) \in \mathbb{R}^n$ est une hypersurface tropicale, ne dépend que de la valuation des coefficients qui la définissent, $T(A, f)$, où $f = \sum_{j \in A} \alpha_j z^j$.

Le théorème de Kapranov montre en particulier que toute hypersurface tropicale est \mathbb{K} -approximable. En combinant avec le théorème 3, on obtient que toutes les hypersurfaces tropicales sont approximables.

3 Quelques résultats établis

Intéressons à la question énumérative de savoir combien de droites tropicales peut être contenue dans une surface non singulière de degré d tropicale.

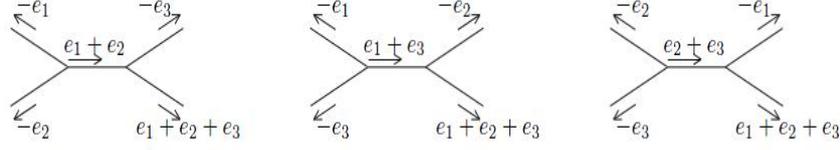


FIGURE 4 – Liste des types combinatoires des droites lisses tropicales de \mathbb{R}^3 , de gauche à droite $(1, 2)(3, 0)$, $(1, 3)(2, 0)$ et $(2, 3)(1, 0)$.

3.1 Droites tropicales contenues dans une surface non-singulière

Les droites tropicales lisses dans \mathbb{R}^3 , ont comme rayons infinis de direction $-e_1 = (-1, 0, 0)$, $-e_2 = (0, -1, 0)$, $-e_3 = (0, 0, -1)$ et $e_0 = e_1 + e_2 + e_3 = (1, 1, 1)$ et deux sommets. Il y a 3 types combinatoires : $(1, 2)(3, 0)$, $(1, 3)(2, 0)$ et $(2, 3)(1, 0)$ dessinés dans Figure 4.

On dit qu'une droite tropicale dans \mathbb{R}^3 est *dégénérée* si les deux sommets coïncident.

Soient Δ_m le polytope de Newton associé à une surface tropicale projective de degré m , *i.e.* le tétraèdre de sommets $(0, 0, 0)$, $(m, 0, 0)$, $(0, m, 0)$, $(0, 0, m)$, \mathcal{F}_i le facet de Δ_m orthogonal à e_i . Dans cette section, on étudie les propriétés des droites dans surface à travers la subdivision induite par la surface.

Pour formaliser la dualité, soit X une surface tropicale de degré m , \mathcal{S}_X la subdivision associée, on définit l'application c_X envoyant $p \in X$ au plus petit complexe polyédral de la surface X contenant p , et c_X^\vee son dual dans la subdivision :

$$c_X^\vee : X \rightarrow \mathcal{S}_X, \quad p \mapsto c_X(p)^\vee,$$

pour une partie $Y \subset X$, on définit :

$$c_X^\vee(Y) := \bigcup_{p \in Y} c_X^\vee(p).$$

Remarquons que si Y est connect, $c_X^\vee(Y)$ l'est aussi.

Définition 10. Soit S une subdivision de Δ_m , posons $K(S)$ le cône de polynômes tropicaux induisant la subdivision S .

$$K(S) = \{f : \text{“} \sum_{i \in \Delta_m} a_i X^i \text{”} \mid S(\Delta_m, f) = S\}$$

Remarquons que la subdivision d'une surface tropicale non-singulière est primitive, donc stable par perturbations du polynôme tropical qui le définit. Ainsi pour S primitive, $K(S)$ est un ouvert dans l'ensemble des polynômes tropicaux, identifié à $\mathbb{R}\mathbb{P}^{|\Delta_m|-1}$.

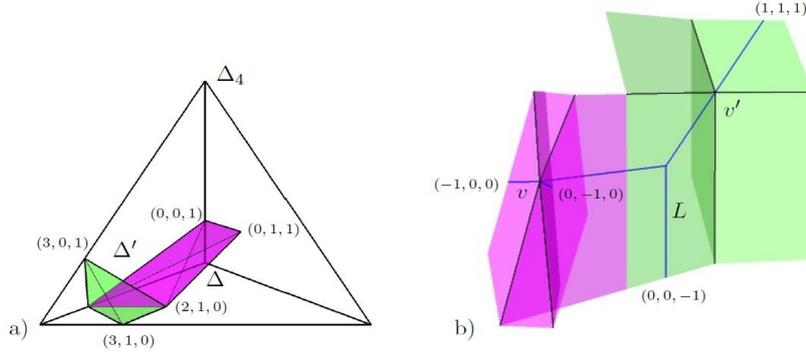


FIGURE 5 – Illustration d’une droite L en position 3G dans une quartique générique X . a) est $c_X^\vee(L)$; b) la partie de la surface contenant L .

Définition 11. On dit qu’une *surface tropicale générique de subdivision* S vérifie une propriété, si l’ensemble de $\alpha \in K(S)$, telle que la surface $T(\Delta_m, \alpha)$ vérifie cette propriété est dense dans $K(S)$.

La proposition est une simple observation sur $c_X^\vee(L)$, si $L \subset X$.

Proposition 5. Pour qu’un rayon infini de direction $-e_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$ ou e_0 soit contenu dans une face (i.e. 2-cellule) F_X d’une surface tropicale X , l’arête $c_X^\vee(F_X)$ dual à F_X doit être contenu dans \mathcal{F}_i . Donc si une droite tropicale L est contenue dans X , alors $c_X^\vee(L)$, contient au moins une arête de \mathcal{F}_i pour tout i .

Exemple 2. Figure 5¹ illustre $c_X^\vee(L)$ et la partie de surface tropicale générique contenant L .

Vigeland a montré dans [6] que pour une surface de degré $d \geq 4$, les droites dans une surface non-singulière générique sont de type 3G (Figure. 5), 3H (Figure. 7) ou 3I (Figure. 6).

On peut voir que s’il existe une droite L de type 3I dans X . Alors $\Delta := c_X^\vee(L)$ est le tétraèdre d -pathologique dual au sommet de la surface en point gras. Plus précisément, un tétraèdre $\Delta' \subset \Delta_d$ est d -pathologique s’il est primitive, a une arête dans $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j$, une dans \mathcal{F}_k et une dans \mathcal{F}_t , où $\{i, j, k, t\} = \{0, 1, 2, 3\}$. sans perte de généralité, supposé de type (1,0)(2,3), Figure 6 a) illustre un tétraèdre 3-pathologique, qui a une arête incluse dans $\mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_3$.

D’ailleurs, X contient alors une famille $(L_l)_{l \geq 0}$ de droites tropicales paramétrées par la longueur l de l’arête finie comme indiquée dans b). La proposition suivante montre que les

Proposition 6. (voir [6].) Pour $d \geq 1$, il existe une subdivision \mathcal{S} primitive de Δ_d , contenant un tétraèdre d -pathologique.

1. Extrait du papier de E. Brugallé et K. M. Shaw [9].

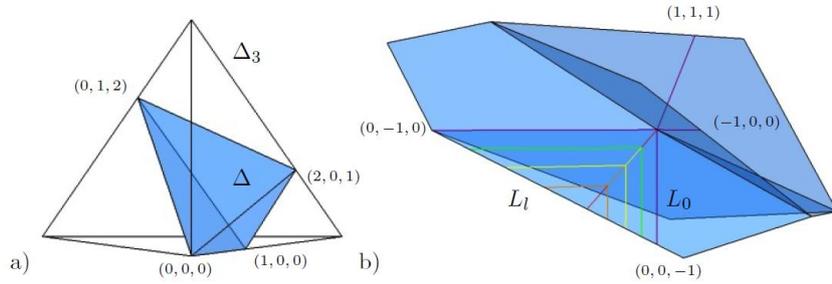


FIGURE 6 – Une famille à 1 paramètre de droites tropicales en position 3I dans une cubique.

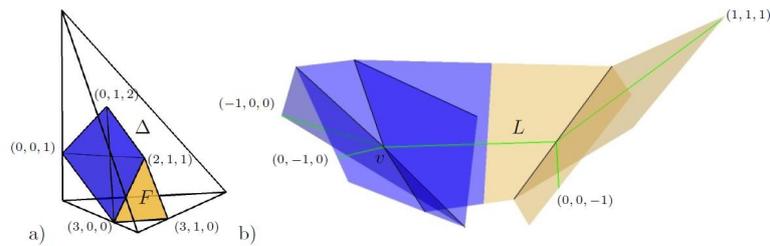


FIGURE 7 – Une droite en position 3H dans une surface quartique.

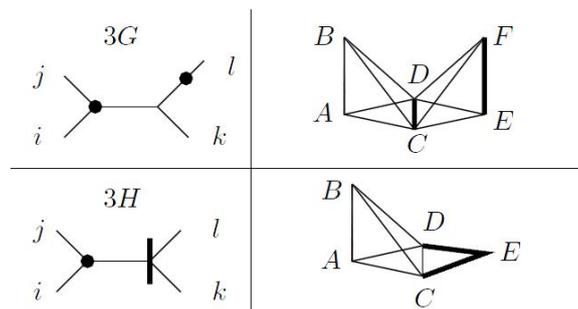


FIGURE 8 – À gauche les positions combinatoires $3G$, $3H$, à droite $c_X^\vee(L)$ associé. Pour $3G$, le tétraèdre $ABCD$ a une arête dans \mathcal{F}_i et une dans \mathcal{F}_j , CD contenue dans \mathcal{F}_k , FE dans \mathcal{F}_l . Pour $3H$, pareille pour $ABCD$, une entre DE et CE dans \mathcal{F}_k et l'autre dans \mathcal{F}_l .

Cela implique que toutes les surfaces tropicales de $K(S)$ contiennent une famille à 1 paramètre, donc un nombre infini de droites tropicales, et $K(S)$ est ouvert.

3.2 Problème d'approximation et de \mathbb{K} -approximabilité

Définition 12. Soit (S, L) un couple tropical, où la droite tropicale L est contenue dans S surface de degré d . S'il existe une famille $(\mathcal{S}_t, \mathcal{L}_t)$ de couples complexes, \mathcal{S}_t de degré d et $\mathcal{L}_t \subset \mathcal{S}_t$, telle que (S, L) est limite tropicale de $(\mathcal{S}_t, \mathcal{L}_t)$.

On dit alors que L est *approximable dans S* .

Définition 13. Le couple (S, L) est dit *\mathbb{K} -approximable* s'il est l'amibe non-archimédienne d'un couple algébrique dans $(\mathbb{K}^*)^3$ de droite contenue dans surface de degré d . En particulier, un couple \mathbb{K} -approximable est approximable.

Dans la section 2.5 on a vu que toute hypersurface tropicale est \mathbb{K} -approximable. Mais ce n'est plus le cas pour les couples (S, L) .

Les obstructions à l'approximabilité constatées dans leur article sont des obstructions à l'approximabilité locale au voisinage d'un sommet de la surface où passe une droite tropicale. Formalisons ceci, la dégénération initiale est traduite par :

Proposition 7. Soient (S, L) un couple tropical approximable, S supposée non-singulière, un point $p \in L \subset S$, alors le couple $(Star_p(S), Star_p(L))$ est égal à $(Trop(\mathcal{P}), Trop(\mathcal{L}))$, où $\mathcal{P} \subset (\mathbb{C}^*)^3$ un plan et \mathcal{L} une droite.

Dans l'article [9], on a décrit un nombre d'intersection des courbes tropicales étoilées dans un plan tropical non-dégénéré.

Supposons $(\mathcal{P}, \mathcal{C})$ fournit une approximation de $(Star_p(S), Star_p(L))$. Grâce à la théorie d'intersection tropicale, on a obtenu des inégalités non triviales provenant de la formule d'adjonction pour les courbes complexes dans une surface complexe compacte et d'intersection de \mathcal{C} avec sa hessienne $Hess_{\mathcal{C}}$.

On cite quelques résultats obtenus qui seront utiles pour la section suivante :

Théorème 5. (théorème 1.5 de [9].) Soient \mathcal{P} un plan non-dégénéré de $(\mathbb{C}^*)^3$, C une courbe étoilée réduite de valence 2 ou 3 contenue dans $Trop(\mathcal{P})$, alors C est approximable par une courbe complexe réduite et irréductible $C \subset \mathcal{P}$ si et seulement si $C^2 = 0$ ou $C^2 = -1$.

En combinant la dégénération initiale pour les couples tropicaux et la classification des positions combinatoires des droites tropicales isolées, on obtient le corollaire suivant :

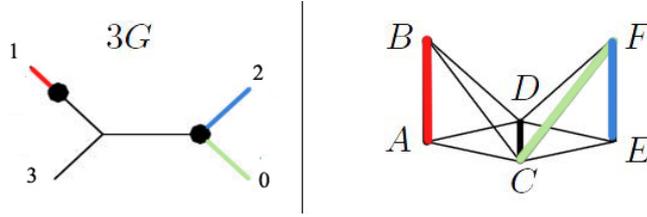


FIGURE 9 – Droite en position 3G de type $(1,3)(2,0)$, avec $CD \subset \mathcal{F}_3$, $CF \subset \mathcal{F}_2$, $FE \subset \mathcal{F}_0$ et $AB \subset \mathcal{F}_1$. Voir section 3.1 pour les définitions.

Corollaire 8. (théorème 7.4 de [9].) *Soient S une surface tropicale générique non singulière de degré $d \geq 4$, (\mathcal{S}_t) une famille de surfaces algébriques de $(\mathbb{C}^*)^3$ de polytope de Newton Δ_d , telle que $\lim_{t \rightarrow 0} -\text{Log}_t(\mathcal{S}_t) = S$. Alors il n'existe pas de famille de droites complexes $\mathcal{L}_t \subset \mathcal{S}_t$, telle que $\lim_{t \rightarrow 0} -\text{Log}_t(\mathcal{L}_t) = L$.*

4 Construction des surfaces quartiques tropicales contenant un nombre fini de droites tropicales

Je construis dans cette section des surfaces quartiques tropicales contenant un nombre fini de droites tropicales. Deux approches sont employées : la première est la construction dans la continuation du travail de Vigeland, par les études des propriétés géométriques combinatoires des surfaces tropicales. Une famille de surfaces construites contiennent au moins 20 droites. Puis on étudiera la \mathbb{K} -approximabilité de ces droites, et en déduire une construction d'une quartique contenant deux droites tropicales \mathbb{K} -approximables. Finalement je prends directement des surfaces non-archimédiennes contenant déjà beaucoup de droites, et voir quels sont leurs amibes.

4.1 Construction d'une quartique non singulière contenant 20 droites tropicales

Dans cette section, on construit une surface tropicale T contenant 20 droites. La construction est faite dans la continuation de la construction de Vigeland [7].

Posons $\mathcal{K}(S)$ le cône de polynômes non-archimédiens induisant la subdivision S ,

$$\mathcal{K}(S) = \{P \in \mathbb{K}_4[x, y, z] \mid P \text{ induit la subdivision } S\}.$$

Proposition 9. *Il existe une subdivision S primitive convexe de Δ_4 , dépourvue de tétraèdre 4-pathologique. Dans $\mathcal{K}(S)$ les surfaces génériques ont un nombre fini de droites tropicales, toutes en position 3G (Figure 5) et de*

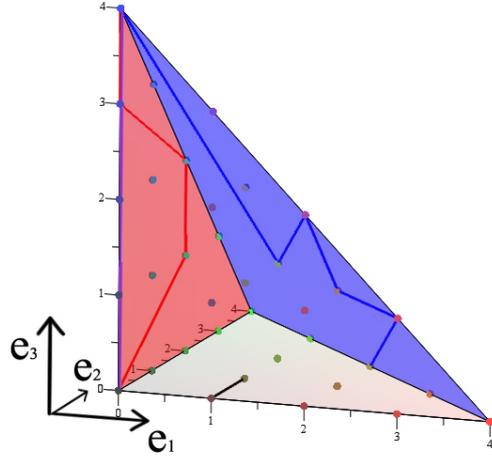


FIGURE 10 – Illustration des segments possibles des arêtes EF (bleu) et AB (rouge) lorsque CD est le segment noir.

type $(1, 2)(3, 0)$ (Figure 4). Parmi ces surfaces, celles qui contiennent au moins k droites lisses forment un ensemble ouvert de $\mathcal{K}(S)$, où k varie entre 8 et 20.

Pour faire la preuve décrivons d’abord la subdivision S .

L’arête finie d’une courbe de Figure 9 est portée par $(1, 0, 1)$ et est contenu dans CD^\vee , donc on a $CD // (0, 1, 0)$, et comme $ABCD$ est primitif, et que $C \in \mathcal{F}_2$ on montre facilement que $C = (1, 0, 0)$ et $D = (1, 1, 0)$.

Regardons le nombre maximal de couples de tétraèdres partageant la même arête CD . On note les coordonnées de $A = (A_1, A_2, A_3)$ et respectivement pour B, C, D, E, F . Comme $A, B \in \mathcal{F}_1$, $A_1 = B_1 = 0$, et $CD // \mathcal{F}_1$, on a facilement que $ABCD$ est primitif si et seulement si $|A_3 - B_3| = 1$. En tenant compte que $CDFE$ soit primitif, et que $F \in \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_0$, on a obligatoirement que EF soit un des 5 segments en bleu dans Figure 10. Il peut au maximum contenir 4 segment AB dans une subdivision et seulement lorsque les 4 segment forment un chemin continu comme par exemple le chemin rouge indiqué dans la figure. Les 5 segments bleus peuvent coexister aussi. Ainsi on obtient 20 couples. La subdivision S est choisie telle qu’elle contient les 9 tétraèdres adjacents.

On arrive à dessiner la partie de T contenant les droites en question. Figure 11 en est un exemple associé à un choix de polynôme de $\mathcal{K}(S)$, la partie colorée est la face de surface tropicale duale à CD , avec les 9 sommets de surfaces, duals aux tétraèdres dont 4 rouges pour $ABCD$ et 5 bleus pour $CDEF$ coexistants.

Remarque 2. Cette face est orthogonale à e_2 . En posant l'abscisse e_1 et l'ordonnée e_3 , on a les pentes des cotés de cette face est déterminée par la subdivision : de gauche à droite $\infty, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{2}, -1, -2, \infty$ (Figure 11).

On a l'observation suivante :

Proposition 10. *Soient $ABCD \cup CDEF$ un couple parmi les vingt, $\mu = (\mu_x, \mu_y, \mu_z)$ (resp. $\nu = (\nu_x, \nu_y, \nu_z)$) le sommet rouge (resp. bleu) dual à $ABCD$ (resp. $CDEF$). Il existe une courbe tropicale L telle que $c_X^\vee(L) = ABCD \cup CDEF$ si et seulement si $\nu_z \geq \mu_z$. L est dégénérée si et seulement si l'on a égalité.*

Démonstration. Ceci est claire en regardant Figure 11. □

Dans Figure 11 sont dessinées les quatre droites qui correspondent aux 4 sommets rouges et un sommets bleu. Les pointillés sont les rayons de droites tropicales qui ne sont pas contenues dans le plan affine de la face.

En combinant les informations sur les pentes des arêtes de la surface de $\mathcal{K}(S)$, on peut alors démontrer :

Démonstration. de la Prop. 9. Pour voir que le nombre de droites tropicales vont de 8 à 20, remarquons que les deux premiers sommets bleus comptés de gauche à droite sont toujours au dessus des 4 sommets. Donc on a au moins 8 droites tropicales d'après la prop. 10. La condition d'existence d'une droite tropicale lisse passant par les deux sommets (rouge, bleu) choisis est une condition ouverte. En déplaçant les sommets bleus relatifs aux sommets rouges, on peut faire varier le nombre de droites contenue dans cette partie de surface tropicale entre 8 et 20.

On peut vérifier que si le positionnement des sommets rouges et bleus respectent les pentes prescrites dans la remarque 2, il existe une assignation de valuation sur les sommets de subdivision concernés qui le réalise.

Pour compléter la preuve, il reste à construire une subdivision convexe primitive complète de Δ_4 grâce au lemme suivant avec 9 tétraèdres qui partagent la même arête CD dont les arêtes opposées soient les cinq arêtes bleues dessinées dans Figure 10 et un chemin rouge. □

Approximabilité des droites construites. D'après Cor. 8, les droites tropicales lisses construites dans Prop. 9 ne sont pas approximables dans la surface tropicale qui la contient.

Quant aux droites dégénérées, (la surface qui en contient n'est donc pas générique), seule la droite centrée en le sommet bleu le plus à droite est localement approximable.

On s'intéresse ensuite à l'approximabilité globale de cette droite dans surface, on va montrer que ce couple de droite et surface est en fait \mathbb{K} -approximable.

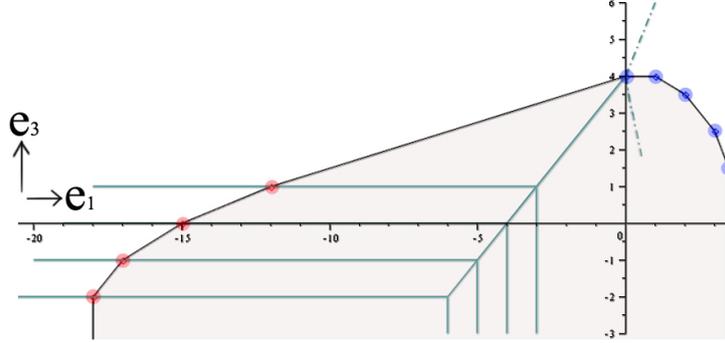


FIGURE 11 – Face de surface tropicale S duale à CD , et exemples de 4 droites tropicales contenues dans S .

4.2 \mathbb{K} -approximabilité des droites tropicales dans une quartique.

4.2.1 Amibe non-archimédienne d'une droite de $(\mathbb{K}^*)^3$

Commençons par l'amibe non-archimédienne d'une droite \mathcal{L} de $(\mathbb{K}^*)^3$, en position générale relative aux hyperplans $(\mathcal{P}_i)_{i \in \{0,1,2,3\}}$ de $\mathbb{K}\mathbb{P}^3 \setminus (\mathbb{K}^*)^3$, i.e. $\mathcal{L} \cap \mathbb{K}\mathbb{P}^3 \setminus (\mathbb{K}^*)^3$ est 4 points distincts. \mathcal{L} est alors paramétrée par

$$\mathbb{K}^* \rightarrow (\mathbb{K}^*)^3 \quad X \mapsto (X, \lambda_1(X + \alpha), \lambda_2(X + \beta)), \quad (1)$$

ou

$$\mathbb{K}^* \rightarrow (\mathbb{K}^*)^3 \quad X \mapsto (\lambda_1(X + \alpha), X, \lambda_2(X + \beta)), \quad (2)$$

pour certain $\alpha, \beta \in \mathbb{K}^*$, telle que $Val(\alpha - \beta) = \max\{Val(\alpha), Val(\beta)\}$. En effet, si $Val(\alpha - \beta) < \max\{Val(\alpha), Val(\beta)\}$, il suffit de poser $X' = X + \alpha$.

Proposition 11. *Supposons on a une paramétrisation de droite $L \subset (\mathbb{K}^*)^3$ décrite dans (1). Notons*

$$M = \max\{Val(\alpha), Val(\beta)\}, m = \min\{Val(\alpha), Val(\beta)\}.$$

L'amibe de \mathcal{L} , noté $Val(\mathcal{L})$, est une droite tropicale dans \mathbb{R}^3 à 4 rayons infinis, de sommets :

$$(M, M + Val(\lambda_1), M + Val(\lambda_2)) \text{ et } (m, Val(\alpha) + Val(\lambda_1), Val(\beta) + Val(\lambda_2)).$$

En particulier, une droite \mathbb{K} -approximable en position générale par rapport aux hyperplans a une amibe dégénérée si et seulement si dans sa paramétrisation, $Val(\alpha) = Val(\beta)$.

Démonstration. La multiplication par λ_1 à un composant conduit à une translation de $Val(\lambda_1)$ dans la direction de ce composant dans \mathbb{R}^3 . On peut supposer que $Val(\lambda_1) = Val(\lambda_2) = 0$.

Le rayons infini, L_0 (resp. L_1, L_2, L_3) de direction $(1, 1, 1)$, (resp. $(-1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(0, 0, -1)$), correspond quand $Val(X) \rightarrow +\infty$ (resp. $X = \epsilon$, $X = -\alpha + \epsilon$, $X = -\beta + \epsilon$ lorsque $Val(\epsilon) \rightarrow -\infty$).

Donc

$$\begin{aligned} L_0 &\subset \{(a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \\ L_1 &\subset \{(b, Val(\alpha), Val(\beta)) \mid b \in \mathbb{R}\} \\ L_2 &\subset \{(Val(\alpha), c, M) \mid c \in \mathbb{R}\} \\ L_3 &\subset \{(Val(\beta), M, d) \mid d \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Lorsque $Val(\alpha) \leq Val(\beta)$, L_1 et L_2 se coupent en $(Val(\alpha), Val(\alpha), Val(\beta)) = (m, Val(\alpha), Val(\beta))$ et que L_0 et L_3 se coupe en (M, M, M) . L'arête finie de l'amibe provenant des $X \in \mathbb{K}^*$ de valuation entre $Val(\alpha)$ et $Val(\beta)$. \square

Remarque 3. La paramétrisation (1) donne seulement deux types de droites tropicales : $(1,2)(3,0)$ et $(1,3)(2,0)$. Les droites \mathbb{K} -approximables de type $(2,3)(1,0)$ peuvent être uniquement paramétrée par (2).

Soit \mathcal{T} une surface quartique dans $(\mathbb{K}^*)^3$ définie par :

$$P(X = (x, y, z)) = \sum_{i \in \Delta_4} \omega_i X^i.$$

D'après le théorème de Kapranov, son image par Val est uniquement déterminé par la valuation des coefficients du polynôme qui la définit, et duale à la subdivision S , convexe engendrée par P ou par l'application concave : $f(i) = Val(\omega_i)$.

4.2.2 \mathbb{K} -approximabilité du couple (T, L) de la section 4.1

Formulons la remarque faite à la fin de la section 4.1.

Proposition 12. *Soient S une subdivision primitive convexe de Δ_4 contenant le tétraèdre δ_1 de sommets (le tétraèdre à droite dans Figure 12 a) :*

$$A = (1, 0, 0), B = (1, 1, 0), C = (2, 2, 0), D = (3, 0, 1)$$

et le tétraèdre δ_2 de sommets :

$$A = (1, 0, 0), B = (1, 1, 0), E = (0, 0, 0), H = (0, 0, 1),$$

T une surface tropicale non singulière, de subdivision duale S . Soient s_1 (resp. s_2) le sommet de T tel que $c_T^\vee(s_1) = \delta_1$ (resp. $c_T^\vee(s_2) = \delta_2$). Et T contient L une droite tropicale dégénérée centrée sur le sommet s_1 , ayant un rayon qui traverse le sommet s_2 . Alors le couple (T, L) est \mathbb{K} -approximable.

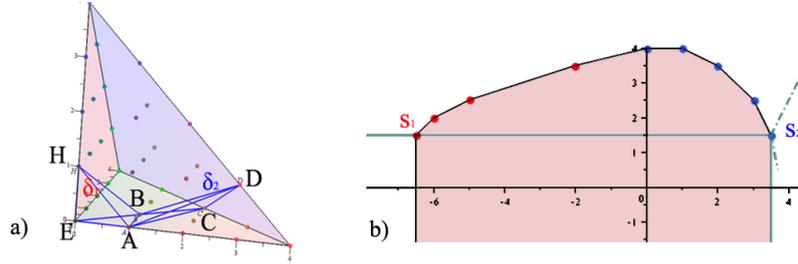


FIGURE 12 – a) Le couple de tétraèdres $c_T^\vee(L)$; b) La partie de surface contenant la droite L .

Démonstration. Cherchons un relèvement dans $(\mathbb{K}^*)^3$ d'un couple (T, L) . On démontrera la proposition équivalente Prop. 13 reformulée en terme des séries de Puiseux. \square

Sans perte de généralité, on peut supposer que les coefficients sont de valuation 0 sur 4 sommets du tétraèdre à δ_1 . Alors

$$s_1 = (0, 0, 0),$$

donc la composante en z de s_2 est 0. Ceci impose une relation de valuation sur les coefficients correspondant à 1 (resp. Z), *i.e.* le coefficient correspond à $(0, 0, 0) \in \Delta_4$ (resp. $(0, 0, 1)$) :

$$\text{Val}(\omega_{(0,0,0)}) = \text{Val}(\omega_{(0,0,1)}).$$

On va voir que c'est la seule condition pour qu'un relèvement du couple (T, L) existe.

Comme L est centrée en $(0, 0, 0)$, on a la paramétrisation de L :

$$\mathbb{K}^* \rightarrow (\mathbb{K}^*)^3 \quad X \mapsto (X, \lambda_1(X - \alpha), \lambda_2(X - \beta)),$$

avec $\text{Val}(\alpha) = \text{Val}(\beta) = \text{Val}(\alpha - \beta) = \text{Val}(\lambda_1) = \text{Val}(\lambda_2) = 0$.

Par ailleurs, on peut choisir que toutes les valuations des coefficients soit entiers, par la concavité de la fonction $i \mapsto \text{Val}(\omega_i)$, $\text{Val}(\omega_i)$ sont des entiers négatifs. Comme multiplier par λ_1 ou λ_2 ne change pas la valuation, on peut aussi supposer que $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Ainsi la question d'approximabilité par séries de Puiseux est formulée :

Proposition 13. *Fixons une fonction concave $f : \Delta_4 \rightarrow \mathbb{Z}$, telle que :*

- f induit la subdivision S ;
- f s'annulant sur les sommets de $\delta_1 : A, B, C, D$;
- $f(0, 0, 1) = f(0, 0, 0) = -n$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que

$$Val(\alpha) = Val(\beta) = Val(\alpha - \beta) = 0,$$

et il existe $P \in \mathbb{K}_4[x, y, z]$, $X := (x, y, z)$,

$$P(X) = \sum_{i \in \Delta_4} \omega_i X^i$$

dont les coefficients sont de valuation donnée par f , i.e. $Val(\omega_i) = f(i)$, et que

$$P(X, X + \alpha, X + \beta) = 0. \quad (3)$$

De plus, pour tout choix de coefficients de P sauf $a := \omega_A$, $b := \omega_B$, $c := \omega_C$, $e := \omega_E$ et tout choix de α à valuation imposée par f , il existe une unique solution de (a, b, c, e, β) , qui sont en plus de la valuation prescrite.

Remarque 4. Les inconnus $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}, \beta)$ ont été choisis pour rendre la résolution du système d'équations simple. On dira que $\{A, B, C, E\} \subset c_T^\vee(L)$ est une *partie déterminante* de couple (T, L) , il existe bien sûr plusieurs parties déterminantes.

Dans la suite, les lettres en gras sont des inconnus à résoudre.

Démonstration. En effet, ceci résulte de la résolution directe des 5 équations dans \mathbb{K} les coefficients de X provenant de

$$P(X, X + \alpha, X + \beta) = aX + bX(X + \alpha) + cX^2(X + \alpha)^2 + dX^3(X + \beta) + h(X + \beta) + e + \dots$$

les coefficients de X^k doivent s'annuler :

$$X^4 : d + \mathbf{c} + R_4 \quad (4a)$$

$$X^3 : d\beta + 2\alpha\mathbf{c} + R_3(\beta, \mathbf{c}) \quad (4b)$$

$$X^2 : \alpha^2\mathbf{c} + \mathbf{b} + R_2(\beta, \beta^2, \mathbf{c}) \quad (4c)$$

$$X^1 : \mathbf{a} + \alpha\mathbf{b} + h + R_1(\beta, \beta^2, \beta^3, \mathbf{b}) \quad (4d)$$

$$X^0 : \mathbf{e} + h\beta + R_0(\beta, \beta^2, \beta^3, \beta^4) \quad (4e)$$

où les R_k sont des fonctions affines sur les variables entre parenthèse à coefficients dans $\mathbb{C}[\omega_i, i \in \Gamma_k; \alpha]$, avec

$$\Gamma_k = \{(x, y, z) \in \Delta_4 \setminus \{A, B, C, E\} \mid x + y + z \geq k, x \leq k\}$$

Remarquons que $Val(\omega_i) < 0, \forall i \in \Gamma_4, \Gamma_3, \Gamma_2, \Gamma_1$ et que $Val(\omega_i) < -n, \forall i \in \Gamma_0$, ce qui est déduit de la concavité de l'application $i \mapsto Val(\omega_i)$. On résout le système :

$$\begin{aligned}
(4a) &\implies c = -d - R_4 \implies \text{Val}(c) = 0 \\
(4b) &\implies \beta = \frac{-2\alpha c - \tilde{R}_3(c)}{d + \text{coeff}(R_3, \beta)} \implies \text{Val}(\beta) = 0 \\
(4c) &\implies b = -\alpha^2 c - R_2 \implies \text{Val}(b) = 0 \\
(4d) &\implies a = -\alpha b - h - R_1 \implies \text{Val}(a) = 0 \\
(4e) &\implies e = -h\beta - R_0 \implies \text{Val}(e) = -n
\end{aligned}$$

où l'on a posé $\tilde{R}_3(c) = R_3(\beta, c) - \text{coeff}(R_3, \beta)\beta$. □

Remarque 5. Si α et les coefficients (sauf les inconnus a, b, c, e) sont choisis des séries entières de rayon de convergence non nul, ce qui est possible comme les valuations sont négatives, la solution pour a, b, c, e et β sont aussi des séries entières, de rayon de convergence non nul.

Pour pouvoir passer au cas des deux droites, on peut regarder de près chaque terme dans le développement de Puiseux de la solution pour une droite.

Notons les coefficients à déterminer par exemple

$$\begin{aligned}
a &= \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k t^k \\
e &= t^n \sum_{k \in \mathbb{N}} e_k t^k \\
\omega_i &= t^{-\text{Val}(\omega_i)} \sum_{k \in \mathbb{N}} \omega_{i,k} t^k.
\end{aligned} \tag{5}$$

Alors en développant

$$P(X, X + \alpha, X + \beta) = aX + bX(X + \alpha) + cX^2(X + \alpha)^2 + dX^3(X + \beta) \cdots$$

on montre que les inconnus a_k, b_k, c_k, e_k dépendent uniquement des d'autres coefficients $\omega_i \in \Delta_4 \setminus \{A, B, C, E\}$ par les $\omega_{i,k'}$, avec $k' < k$. (Détaillé dans mon mémoire de M2.)

Cette remarque importante nous permet de passer à relèvement des deux droites L_1 et L_2 telles que $c_T^\vee(L_1) \cap c_T^\vee(L_2) = \emptyset$ dans la partie suivante.

4.2.3 Approximation par séries de Puiseux les deux droites contenues dans une surface tropicale

Donnons l'esquisse de la preuve de Prop. 2 dans cette section.

Les deux droites dégénérées en considération ici sont contenues dans les deux parties indiquées dans la Figure 13.

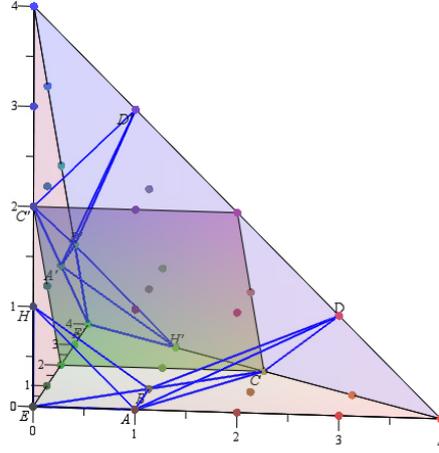


FIGURE 13 – La subdivision duale aux parties de surface contenant deux droites et un plan séparant.

Remarquons d'abord que le couple de tétraèdres formé par A', B', C', D', E' et H' peut être obtenu par la transformation projective $\sigma := X \leftrightarrow Z, Y \leftrightarrow T$ où $[X, Y, Z, T]$ est le coordonné homogène de \mathbb{P}^3 . Donc à une translation près, une droite est contenue dans la surface de la partie correspondante se traduit par les mêmes type d'équations sur a', b', c', e', β' .

En prenant les autres coefficients des séries entières localement convergentes, par le même raisonnement, les solutions sont des séries entières. La remarque à la fin de la section 4.2.2 nous permet de résoudre le système d'équations venant des deux droites simultanément rang par rang. Ceci est possible car a_k dépend uniquement des $a'_{k'}, b'_{k'}, c'_{k'}, e'_{k'}, \beta'_{k'}$ pour les $k' < k$, on a aussi $a'_{k'}$ dépend des $a_k, b_k, c_k, e_k, \beta_k$ pour $k < k'$. Cela donne la \mathbb{K}' -approximabilité des deux droites.

On trouve alors une solution dans le corps algébriquement clos des séries de Puiseux formelles \mathbb{K}' .

La proposition suivante permet de conclure.

Proposition 14. *Soit $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}'$ deux corps algébriquement clos. Si un système d'équations polynomiales de variables X_1, \dots, X_k à coefficients dans \mathbb{K} admet au moins une solution dans \mathbb{K}' , alors il admet aussi une solution dans \mathbb{K} .*

Démonstration. Ceci découle de Nullstellensatz de Hilbert.

Soit I l'ideal de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_k]$ engendré par le système d'équations. Supposons qu'il n'admet pas de solution dans \mathbb{K} . Comme \mathbb{K} est algébriquement clos, on a $1 \in I$. D'où $1 \in I \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}'$, il n'a pas de solution dans \mathbb{K}' non plus. \square

Par les mêmes raisonnements, on pourrait montrer que :

Proposition 15. *Soit T une surface tropicale contenant des droites tropicales L_1, \dots, L_k , telles que*

— *(T, L_i) est \mathbb{K} -approximable de partie déterminante $\Omega_i \subset c_T^\vee(L_i)$*

(Rem. 4) $\forall i \in [1, k]$;

— *$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ si $i \neq j$*

— *La graphe (sans boucles) orientée de sommets $1, \dots, k$ définie comme ce qui suit n'a pas de cycle orientée : il y a une arête de i à j si et seulement si $\Omega_i \cap c_T^\vee(L_j) \neq \emptyset$.*

Alors il existe un relèvement $\mathcal{T} \subset (\mathbb{K}^)^3$ de T , contenant des droites $\mathcal{L}_i, 1 \leq i \leq k$, d'amibe L_i .*

Exemple 3. Les surfaces contenant deux droites \mathbb{K} -approximables construites dans Prop. 2 correspondent à la graphe ayant deux sommets et sans arêtes.

4.3 Plus de droites tropicales \mathbb{K} -approximables

On avait vu que c'était difficile de trouver beaucoup de droites tropicales \mathbb{K} -approximables dans une surface quartique par l'étude des propriétés combinatoires des variétés tropicales. Et que ce passe-t-il si l'on prend directement une surface quartique dans $(\mathbb{K}^*)^3$ contenant beaucoup de droites, et quelle est son amibe ? Par cette approche, on démontre Prop. 3.

Commençons par les quartiques connues comme la quartique de Schur \mathcal{S} , définie dans $\mathbb{K}\mathbb{P}^3$ de coordonnées homogènes $[X_0 : X_1 : X_2 : X_3]$ par l'équation :

$$P : X_0^4 - X_0X_1^3 = X_2^4 - X_2X_3^3.$$

Elle contient exactement 64 droites, ce qui est le nombre maximal de droites contenues dans une quartique, voir [10] et [11].

Ici prenons la convention $(\mathbb{K}^*)^3 \hookrightarrow \mathbb{K}\mathbb{P}^3 : (x, y, z) \mapsto [x : y : z : 1]$. La surface tropicale associée à la quartique de Schur est une surface étoilée T et les droites ont la même amibe qui est la droite tropicale formée par les 4 arêtes de T (voir Figure. 14).

Soient \mathcal{L} (resp. \mathcal{L}') la droite de $\mathbb{K}\mathbb{P}^3$ paramétrée comme $(X_0, X_1) \rightarrow (X_0, X_1, 0, 0)$ (resp. $(X_2, X_3) \rightarrow (0, 0, X_2, X_3)$), et A_1, A_2, A_3, A_4 (resp. B_1, B_2, B_3, B_4) les quatres points distincts de $\mathcal{L} \cap \mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{L}' \cap \mathcal{S}$). La droite passant par A_i et B_j est contenue dans \mathcal{S} .

On va faire une transformation projective dans l'objective de séparer les amibes de ces 16 droites reliant un point α et un point β par le lemme suivant. Tout en sachant que si l'on fait une transformation projective quelconque de $\mathbb{K}\mathbb{P}^3$, les surfaces tropicales (même non singulières) dégénère facilement. Donc cela ne nous étonne pas que la surface tropicale reste dégénérée.

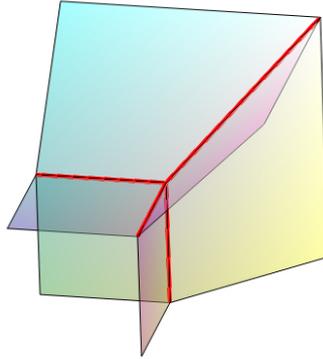


FIGURE 14 – L’amibe de la quartique de Schur et de 64 droites.

Lemme 16. Soient \mathcal{L} la droite de $\mathbb{K}\mathbb{P}^3$ paramétrée comme $(X_0, X_1) \rightarrow (X_0, X_1, 0, 0)$, et A_1, A_2, A_3, A_4 quatres points distincts de \mathcal{L} , A_k de coordonnées $(x_{k,0}, x_{k,1}, 0, 0)$, avec

$$\text{Val}(x_{k,0}) = \text{Val}(x_{k,1}) = 0.$$

Soient $L \subset \mathbb{R}^3$ une droite tropicale dégénérée, et P_1, P_2, P_3, P_4 quatres points de L , tels que sur chaque rayon infini il y a exactement un point. Il existe alors une transformation projective f de $\mathbb{K}\mathbb{P}^3$ telle que $\mathcal{L}, A_1, A_2, A_3$ et A_4 sont envoyés sur les points d’amibes L, P_1, P_2, P_3 et P_4 .

Démonstration. Voir mémoire. □

Utiliser des transformations projectives pour rendre l’amibe de la surface non singulière me paraît assez compliqué. Ceci met en jeu deux notions de non singularité, l’un est au sens tropical, l’autre au sens des variétés algébriques non-archimédiennes.

Pour rendre une surface tropicale contenant beaucoup de droites tropicales \mathbb{K} -approximables moins dégénérée (*i.e.* rendre la subdivision de Δ_4 plus fine), on perturbe souvent les coefficients du polynôme tropical qui la définit. Mais comme les surfaces génériques de degré supérieure à 4 ne contient aucune droite. La perturbation doit être faite dans un espace à codimension grande.

Références

- [1] I. Itenberg, G. Mikhalkin & E. Shustin : *Tropical algebraic geometry*, Oberwolfach Seminars, vol. **35** , Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
- [2] M. Kapranov : *Amoebas over non-Archimedean fields*, Prépublication, 2000.

- [3] G. Mikhalkin : *Enumerative tropical algebraic geometry in \mathbb{R}^2* , J. Amer. Math. Soc. Vol. **18**(2005), N. 2, p. 311-377 (electronique).
- [4] E. Shustin : *Patchworking singular algebraic curves, non-Archimedean amoebas and enumerative*, arXiv : **math/0211278v7** [math.AG], 2005.
- [5] I. Itenberg : *Introduction à la géométrie tropicale*, <http://www.math.polytechnique.fr/xups/xups08-01.pdf>.
- [6] M. D. Vigeland : *Smooth tropical surfaces with infinitely many tropical lines* Ark. Mat., **48**(2010), p. 177-206.
- [7] M. D. Vigeland : *Tropical lines on smooth tropical surfaces*, arXiv : **0708.3847v1**, 2007.
- [8] S. Bossière, A. Sarti : *Counting lines on surfaces*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 5 (2007), 39-52.
- [9] E. Brugallé, K. M. Shaw : *Obstructions to approximating tropical curves in surfaces via intersection theory*, arXiv : **1110.0533v3** [math.AG], 2013.
- [10] B. Segre : *The maximal number of lines lying on a quartic surface*, Quarterly Journal of Math. (1943) os-**14** (1) : 86-96.
- [11] S. Rams, M. Schütt : *64 lines on smooth quartic surfaces*, arXiv : **1212.3511v3** [math.AG], 2013.
- [12] T. Nishinou, B. Siebert : *Toric degenerations of toric varieties and tropical curves*, Duke Math. J. **135**(2006), no.1, 1-202.
- [13] B. Sturmfels : *Solving systems of polynomial equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics. AMS, Providence, RI 2002.
- [14] D. Maclagen, B. Sturmfels : *Introduction to Tropical Geometry*, oeuvre en progression, valable sur <http://www.warwick.ac.uk/sta/D.Maclagan/papers/papers.html>
- [15] J. Richter-Gebert, B. Sturmfels, T. Theobald : *First steps in tropical geometry*, In Idempotent mathematics and mathematical physics, volume 377 of Contemp. Math., pages 289-317. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.