Fonctorialité de Langlands
—approche géométrique

par Lizao YE

Table des matières

1 Introduction, le groupe dual de Langlands

Soit K un corps de fonctions sur $\mathbb{F}_q$ et G un groupe réductif sur K. La philosophie de *fonctorialité de Langlands* dit que les $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations automorphes(ou formes automorphes) de $G(\mathbb{A}_K)$ soient "*paramétrées*" par son *groupe dual de Langlands* :

$$^LG = \check{G}(\bar{\mathbb{Q}}_\ell) \rtimes Gal(\bar{K}|K)$$

introduit par Robert Langlands dès l'embryon de toute cette histoire dans sa lettre à André Weil [Lan67], où $\check{G}$ est le groupe réductif sur $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ défini en échangeant les racines(resp. poids) avec les coracines(resp. copoids) de $G \otimes \bar{K}$(voir [Bor79]). En particulier, un *L-homomorphisme*[1] $^LH \to {}^LG$ induira un *transfert* des formes automorphes de H vers celles de G.

À première vue, l'intervention de ^LG peut paraître inattendue. Mais l'*isomorphisme de Satake* l'incorpore immédiatement ! Soit maintenant G un groupe réductif sur un corps k séparablement clos, le *groupe de lacets* LG est le foncteur sur la catégorie de k-algèbres :

$$LG : R \mapsto G(R((t))),$$

L^+G le *groupe de lacets positifs* :

$$L^+G : R \to G(R[[t]]),$$

1. i.e. continu, commute avec les homomorphismes vers $Gal(\bar{K}|K)$ de deux côtés, et dont la restriction à $\check{H}$ est un homomorphisme algébrique vers $\check{G}$.

Gr_G la *grassmannienne affine*, défini comme le fpqc-quotient :

$$Gr_G = LG/L^+G,$$

qui est ind-projectif sur k et admet une action évidente de L^+G. On introduit $P_{L^+G}(Gr_G)$ comme la catégorie de faisceaux pervers(ℓ-adiques) L^+G-équivariants sur Gr_G, muni de la convolution défini par : [2]

$$\mathcal{A}_1 * \mathcal{A}_2 := m_*(\mathcal{A}_1 \tilde{\boxtimes} \mathcal{A}_2),$$

où $\mathcal{A}_1 \tilde{\boxtimes} \mathcal{A}_2$ désigne l'unique faiscau pervers sur $LG \times^{L^+G} Gr_G$ tel qu'on a un isomorphisme équivariant pour l'action diagonale de L^+G :

$$p^*(\mathcal{A}_1 \boxtimes \mathcal{A}_2) \simeq q^*(\mathcal{A}_1 \tilde{\boxtimes} \mathcal{A}_2),$$

au vu du diagramme :

$$Gr_G \times Gr_G \xleftarrow{p} LG \times Gr_G \xrightarrow{q} LG \times^{L^+G} Gr_G \xrightarrow{m} Gr_G.$$

On peut faire de $(P_{L^+G}(Gr_G), *)$ une catégorie tensorielle en y imposant les lois de commutativité et d'associativité, grâce à la *fusion de Drinfeld*.

Le couple $(P_{L^+G}(Gr_G), *)$ est juste analogue géométrique de l'*algèbre de Hecke sphérique* : l'ensemble des fonctions localement constantes à support compact sur $G(k((t)))$ à valeurs dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ et $G(k[[t]])$-bi-invariantes, muni de la convolution :

$$(f * g)(x) := \int_{y \in G(k((t)))} f(y) g(y^{-1}x) dy.$$

Une avantage de cette interprétation géométrique est qu'on peut en prendre cohomologie, qui donne un foncteur fibre ω vers la catégorie d'espaces vectoriels sur $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ de dimension finie :

$$\begin{array}{rcl} \omega : P_{L^+G}(Gr_G) & \longrightarrow & Vect_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell} \\ \mathcal{A} & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R^i\Gamma(Gr_G, \mathcal{A}), \end{array}$$

et on montre que ω est tensoriel. [3]

Le théorème fondamental(voir [Ric14]) est : [4]

Théorème 1 (Satake géométrique)**.** $(P_{L^+G}(Gr_G), *, \omega) \simeq (Rep_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell}(^LG), \otimes, oubli)$.

Et c'est encore vrai si k est quelconque, par des arguments de la descente galoisienne.

Le lien entre Gr_G et les formes automorphes est encore plus direct. Gr_G est le modèle local d'une variété(un *champs*) Bun_G qui classifie les G-fibrés principaux sur X. Et l'ensemble $G(K)\backslash G(\mathbb{A}_K)/G(\mathbb{O})$ est juste l'ensemble de $\mathbb{F}_q$-points de Bun_G .

2. Oui, ce nouveau faisceau est encore pervers !

3. Pour que ce soit vrai, il faut en fait modifier la loi de commutativité sur $P_{L^+G}(Gr_G)$ quelque part par le signe -1, à cause du phénomène bête $\alpha \wedge \beta = (-1)^{deg(\alpha)deg(\beta)} \beta \wedge \alpha$ dans les cohomologies.

4. L'article de Mirković -Vilonen [MV07] contient des informations plus précises sur la structure de la grassmannienne affine et les cohomologies, mais pour le simple but d'établir l'isomorphisme, [Ric14] suffit. Même si ce dernier contient plusieurs petites erreurs(e.g. Definition 2.11, Remark 2.21, la démonstration de la Proposition 3.1), il est, pour moi, beaucoup plus accessible et mieux structuré que l'autre en se défendant de recours à la topologie analytique.

D'après le *dictionnaire fonctions-faisceaux* de Grothendieck par lequel une fonction s'interprète comme les traces de Frobenius d'un faisceau ℓ-adique, on s'attend à ce qu'un L-homomorphisme ${}^LH \to {}^LG$ induise un foncteur $D(Bun_H) \to D(Bun_G)$ qui commute avec les *opérateurs de Hecke*.

Lorsque $H = 1, G$ déployé, un L-homomorphisme :${}^LH \to {}^LG$ est simplement un homomorphisme continu :$Gal(\bar{K}|K) \to \check{G}(\bar{\mathbb{Q}}_\ell)$. Vincent Lafforgue a donné dans [Laf12] une décomposition canonique des espaces des formes automorphes cuspidales sur $G(\mathbb{A}_K)$ indexée par tels homomorphismes, donc une forte justification de cette philosophie.

Mon plan initial est d'expliquer l'idée de [Lys11] qui exploite la *représentation de Weil* géométrique pour établir la fonctorialité géométrique pour le *pair dual*(au sens de Howe) $\mathbb{SO}_{2m}, \mathbb{S}p_{2n}$ qui stimule mon sujet de thèse. Faute de temps, on se contente de présenter la représentation de Weil elle-même(sur les corps finis) dans la section 2 pour que le lecteur ait une idée de l'avantage des faisceaux. Indiquons seulement que le théorème 3 de [LL09] relie les *faisceaux theta* local et global.

Dans la section 3, on joint une preuve complète et précise de la théorie du corps de classe par la voie géométrique, où beaucoup de constructions et notions(e.g. opérateurs de Hecke, eigenfaisceaux sur Bun_G correspondant à un ${}^LG$-système local sur une courbe) pour d'autres groupes réductifs G seront implicites !

2 Représentations de Weil géométriques

Supponsons q impair. Il y a 4 représentations(complexes) irréductibles "spéciales" W^+, W^-, X^+, X^- du groupe $SL_2(\mathbb{F}_q)$, dont les caractère sont décrits dans le tableau suivant [5] où on a fixé une racine carrée de $(-1)^{\frac{q-1}{2}}q$, et on y a ajouté les caractères de $\pi^\pm := W^\pm \oplus X^\pm$:

5. voir par exemple [FH91].

g	$\mathrm{Tr}(g:W^{\pm})$	$\mathrm{Tr}(g:X^{\pm})$	$\mathrm{Tr}(g:\pi^{\pm})$
$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\frac{q+1}{2}$	$\frac{q-1}{2}$	q
$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$(-1)^{\frac{q-1}{2}}\frac{q+1}{2}$	$(-1)^{\frac{q+1}{2}}\frac{q-1}{2}$	$(-1)^{\frac{q-1}{2}}$
$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$	$\frac{1\pm\sqrt{(-1)^{\frac{q-1}{2}}q}}{2}$	$\frac{-1\pm\sqrt{(-1)^{\frac{q-1}{2}}q}}{2}$	$\pm\sqrt{(-1)^{\frac{q-1}{2}}q}$
$\begin{pmatrix}1&\epsilon\\0&1\end{pmatrix}$	$\frac{1\mp\sqrt{(-1)^{\frac{q-1}{2}}q}}{2}$	$\frac{-1\mp\sqrt{(-1)^{\frac{q-1}{2}}q}}{2}$	$\mp\sqrt{(-1)^{\frac{q-1}{2}}q}$
$\begin{pmatrix}-1&1\\0&-1\end{pmatrix}$	$\frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}\pm\sqrt{(-1)^{\frac{q-1}{2}}q}}{2}$	$\frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}\mp\sqrt{(-1)^{\frac{q-1}{2}}q}}{2}$	$(-1)^{\frac{q-1}{2}}$
$\begin{pmatrix}-1&\epsilon\\0&-1\end{pmatrix}$	$\frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}\mp\sqrt{(-1)^{\frac{q-1}{2}}q}}{2}$	$\frac{(-1)^{\frac{q-1}{2}}\pm\sqrt{(-1)^{\frac{q-1}{2}}q}}{2}$	$(-1)^{\frac{q-1}{2}}$
$\begin{pmatrix}x&0\\0&x^{-1}\end{pmatrix}, x\neq\pm1$	$\sigma(x)$	0	$\sigma(x)$
$\begin{pmatrix}x&y\\\epsilon y&x\end{pmatrix}, x\neq\pm1$	0	$-\tau(\zeta)$	$-\tau(\zeta)$

Ici $\sigma : \mathbb{F}_q^\times \to \{\pm1\}$ (resp. $\tau : \mu_{q+1}(\mathbb{F}_{q^2}) \to \{\pm1\}$) désigne le caractère(unique) non trivial dont le carré est trivial, ϵ est un non-carré de $\mathbb{F}_q^\times$, et on a identifié $\begin{pmatrix}x&y\\\epsilon y&x\end{pmatrix}$ avec $\zeta = x + y\sqrt{\epsilon} \in \mu_{q+1}(\mathbb{F}_{q^2})$ puisque $1 = x^2 - \epsilon y^2 = \mathrm{Nm}_{\mathbb{F}_{q^2}|\mathbb{F}_q}(\zeta) = \zeta^{q+1}$.

Une chose assez remarquable qu'on peut tirer de ce tableau est : $\mathrm{Tr}(g : \pi^{\pm})$ *est un nombre de Weil de poids* i [6] *ssi* $g-Id$ *est une matrice de rang* $2-i$. Cela suggère fortement qu'il existe deux complexes de faisceaux($\ell-$adiques) $\mathscr{K}^+, \mathscr{K}^-$ purs de poids 0 [7] sur la variété $SL_2(F_q)$ [8] tels que :

$$\mathrm{Tr}(Fr_g : \mathscr{K}^{\pm}) = \mathrm{Tr}(g : \pi^{\pm}), \forall g \in SL_2(F_q).$$ [9]

On va construire ces complexes à la fin de cette section, mais avant cela, on va d'abord présenter l'interprétation de Weil dans [Wei64] de ces deux représentations $\pi^{\pm}$, dans le cadre de *représentations métaplectiques* des groupes symplectiques en faisant le lien avec les représentations du *groupe de Heisenberg*.

Soit $(V, \omega = \langle,\rangle)$ un espace vectoriel symplectique de dimension $2N$ sur un corps fini $k = \mathbb{F}_q$. [10] Le groupe de Heisenberg H est l'ensemble $V \times k$ muni de la multiplication

$$(v, z) \cdot (v', z') = (v + v', z + z' + \frac{1}{2}\langle v, v'\rangle).$$

Le centre de H est $\{(0, z)|z \in k\}$, qu'on identifie avec le groupe additif k. On en fixe un caractère non-trivial $\psi : k \to \mathbb{C}^\times$. Le théorème fondamental, facile à démontrer dans le cas de corps finis, concernant les représentations de H est :

6. i.e. algébrique par rapport au corps $\mathbb{Q}$ dont tous les conjugués dans $\mathbb{C}$ sont de valeur absolue $q^{\frac{i}{2}}$.
7. voir [BBD82] pour ces notions que la conjecture de Weil nous apporte.
8. Plus précisément, le $\mathbb{F}_q-$schéma $Spec(\mathbb{F}_q(a, b, c, d)/(ad - bc - 1))$.
9. Deligne a exprimé cette idée à Kazhdan dans [Del82], et c'est décrit en détails et de façon "invariante" dans [GH07].
10. On peut faire la même chose pour les corps locaux et les groupes d'adèles des corps globaux.

Théorème 2 (Stone-Von Neumann)**.** *À isomorphisme près, il existe une unique représentation $(\rho_\psi, \mathcal{H}_\psi)$ de H telle que le centre k agit par le caractère ψ.* [11]

On dispose d'une action du groupe symplectique $Sp = Sp(V, \omega)$ sur H :

$$g \cdot (v, z) = (gv, z)$$

fixant le centre k qui est compatible avec la structure de groupe de H. D'après ce théorème, pour tout $g \in Sp$, il existe $M \in GL(\mathcal{H}_\psi)$ vérifiant la *relation d'Egorov* :

$$M\rho_\psi(h)M^{-1} = \rho_\psi(gh), \forall h \in H. \tag{1}$$

M est déterminé par g à scalaire près. On note $\tilde{Sp}_\psi$ le sous-groupe de $Sp \times GL(\mathcal{H}_\psi)$ formé des couples (g, M) vérifiant la relation (1), alors $\mathcal{H}_\psi$ devient une représentation du groupe $\tilde{Sp}_\psi \ltimes H$. Le groupe $\tilde{Sp}_\psi$ est une extension centrale de Sp par $\mathbb{C}^\times$:

$$1 \to \mathbb{C}^\times \to \tilde{Sp}_\psi \to Sp \to 1.$$

Dans le cas de corps finis, cette suite est scindée de façon unique [12]. Ainsi $\mathcal{H}_\psi$ devient une représentation du groupe $Sp \ltimes H$(dit le *groupe de Jacobi*), qu'on appelle *représentation de Heisenberg-Weil*, ou de plus, en oubliant le facteur H, une représentation de Sp, qu'on appelle *représentation de Weil* et qu'on note par π_ψ, dont le cas $N = 1$ nous produit exactement les deux représentations "spéciales" $\pi^\pm$ qu'on a évoquées au début ! On le verra tout de suite.

On va construire une section(aussi un homomorphisme) :$Sp \to \tilde{Sp}_\psi$ à l'aide de la *transformation de Weyl* ci-dessous qui donne un isomorphisme entre deux k-algèbres :

$$\begin{array}{rcl} End(\mathcal{H}_\psi) & \xleftrightarrow{1:1} & S(V) \\ A & \longmapsto & \hat{A} : v \mapsto q^{-N}\,\mathrm{Tr}(A\rho_\psi(v)^{-1}) \\ \sum_{v\in V} f(v)\rho_\psi(v) & \longleftarrow & f. \end{array}$$

Ici on a identifié V avec le sous-ensemble(pas un sous-groupe !) $\{(v, 0) | v \in V\}$ de H et $S(V)$ désigne l'ensemble des fonctions complexes sur V muni de la structure d'algèbre définie par la convolution :

$$(f * g)(v) = \sum_{v_1+v_2=v} \psi(\frac{1}{2}\langle v_1, v_2\rangle) f(v_1) g(v_2).$$

Pour tout $g \in Sp$, notons par $K_{\psi,g} \in S(V)$ la fonction sur V qui corresponde à $\pi_\psi(g)$(que nous sommes en train de déterminer) sous cette transformation. A priori, $K_{\psi,g}$ est déterminé à scalaire près puisque $\pi_\psi(g)$ l'est. On peut donc montrer par un calcul direct que :

$$K_{\psi,g}(v) = \nu(g)\psi(\frac{1}{4}\langle \kappa(g)v, v\rangle), \forall g \in U, \tag{2}$$

11. D'ailleurs, $dim\mathcal{H}_\psi = q^N$.
12. sauf si $N = 1$ et $q = 3$, qu'on se dispense de détailler.

où $U := \{g \in Sp | g - \mathrm{Id}$ inversible dans $End(V)\}$, $\kappa(g) := \frac{g+\mathrm{I}}{g-\mathrm{I}} \in End(V)$ la *transformation de Caylay* de $g \in U$, et le constant $\nu(g) \in \mathbb{C}^\times$ ne dépend pas de $v \in V$.

La transformation de Weyl étant un isomorphisme d'algèbres, la condition $\pi_\psi(g)\pi_\psi(g') = \pi_\psi(gg')$ se traduit par $K_{\psi,g} * K_{\psi,g'} = K_{\psi,gg'}$. Autrement dit, si on note

$$\begin{array}{rcl} K_\psi : Sp \times V & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (g, v) & \longmapsto & K_{\psi,g}(v) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} m_V : Sp \times Sp \times V & \longrightarrow & Sp \times V \\ (g, g', v) & \longmapsto & (gg', v), \end{array}$$

alors on doit avoir

$$m_V^* K_\psi = K_\psi \circledast_V K_\psi, \tag{3}$$

où pour deux fonctions f, f' sur $Sp \times V$, $f \circledast_V f'$ désigne la fonction sur $Sp \times Sp \times V, (g, g', v) \mapsto \sum_{v_1+v_2=v} \psi(\frac{1}{2}\langle v_1, v_2\rangle) f(g, v_1) f'(g', v_2)$ qui est la convolution de f et f'. Comme $Sp = U \cdot U$, la fonction K_ψ est déterminée par sa restriction à $U \times V$. Notons $\mathfrak{e} := \sum_{z\in\mathbb{F}_q} \psi(z^2)$ la somme de Gauss. On prétend que la fonction [13]

$$K_\psi(g, v) := \frac{\mathfrak{e}^{2N}}{q^{2N}} \sigma(det(\kappa(g) + \mathrm{I}))\psi(\frac{1}{4}\langle\kappa(g)v, v\rangle), (g, v) \in U \times V \tag{4}$$

s'étende à une fonction K_ψ sur $Sp \times V$ tout entier qui vérifie (3).

Pour ce faire, le plus naturel est de construire un faisceau pervers ℓ-adique [14] $\mathscr{K}_{\psi,U}$(éventuellement décalé) correspondant à (4) sur la variété $U \times V$, puis prendre l'extension intermédiaire $\mathscr{K}_\psi := j_{!*}\mathscr{K}_{\psi,U}$ par rapport à l'inclusion $j : U \times V \to Sp \times V$ et vérifier directement au niveau de faisceaux la relation (3) ! Concrètement, on prend le système local(décalé) de rang 1 sur $U \times V$: [15]

$$\mathscr{K}_{\psi,U} := \mathscr{E}^{\otimes 2N} \otimes \mathscr{L}_{\sigma(det(\kappa(g)+\mathrm{I}))}[4N](2N) \otimes \mathscr{L}_{\psi(\frac{1}{4}\langle\kappa(g)v,v\rangle)}, \tag{5}$$

où $\mathscr{L}_\psi$ est le système local de rang 1 sur $\mathbb{G}_a$ défini par le caractère $\psi : \mathbb{G}_a(\mathbb{F}_q) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ à travers l'isogénie de Lang, $\mathscr{L}_\sigma$ celui sur $\mathbb{G}_m$ correspondant au caractère $\sigma : \mathbb{G}_m(\mathbb{F}_q) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$, et $\mathscr{E} := \int_{\mathbb{G}_a} \mathscr{L}_{\psi(z^2)}$ [16] est un système local de rang 1 placé au degré 1.

Enfin prenons

$$\mathscr{K}_\psi := j_{!*}\mathscr{K}_{\psi,U}. \tag{6}$$

C'est clair que $\mathscr{K}_\psi$ est un $dim(Sp)$-faisceau pervers pur de poids 0 sur $Sp \times V$, et on montre comme dans [GH07] qu'il vérifie bien : [17]

$$m_V^*\mathscr{K}_\psi = \mathscr{K}_\psi \circledast_V \mathscr{K}_\psi.$$

13. i.e. on prend $\nu(g) = \frac{\mathfrak{e}^{2N}}{q^{2N}}\sigma(det(\kappa(g) + \mathrm{I}))$ dans (2). On peut bien sûr l'écrire autrement, mais cette forme se prête à géométrisation.
14. après avoir fixé un isomorphisme entre $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ et $\mathbb{C}$.
15. traduction de (4) par le dictionnaire de Grothendieck.
16. On se permet un peu l'abus de notations.
17. L'essentiel est : $\mathscr{E}^{\otimes 4} = \bar{\mathbb{Q}}_\ell[-4](-2)$, correspondant au fait classique sur la somme de Gauss associée au caractère de Legendre : $|\mathfrak{e}| = q^{\frac{1}{2}}$. Plus précisément, $\mathfrak{e}^2 = (-1)^{\frac{q-1}{2}}q$.

Il s'en suit que la fonction K_ψ qui lui corresponde vérifie (3). La construction de la représentation de Weil $(\pi_\psi, \mathcal{H}_\psi)$ du group $Sp = Sp(V, \omega)$ correspondant au caractère non-trivial $\psi : \mathbb{F}_q \to \mathbb{C}^\times$ s'est ainsi achevée.[18]

3 Théorie du corps de classe géométrique

Soit K un corps de type fini sur $\mathbb{F}_q$, de degré de transcendance 1, de sorte que $\mathbb{F}_q$ soit algébriquement clos dans K. Soit $D = \sum n_v v$ une somme formelle et finie de places de K à coefficients entiers positifs. La théorie du corps de classe pour K affirme qu'il existe une bijection naturelle entre les caractères(continus) du groupe de galois absolu G_K et les caractères unitaires automorphes du groupe des idèles $\mathbb{A}_K^\times$. Plus précisément, on a une bijection[19] :

Théorème 3.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho : G_K \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times \textit{ tel que } \forall v, \rho_{|G_{K_v}^{n_v}} = 1, \textit{ et que} \\ Im(\rho) \subset \textit{une extension finie de } \mathbb{Q}_\ell \end{array} \right\} \stackrel{1:1}{\longleftrightarrow} \{\xi : K^\times \backslash \mathbb{A}_K^\times / \mathbb{O}_D^\times \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times \textit{ unitaire}\},$$

de sorte que ρ corresponde à ξ si et seulement si $\rho(Fr_v) = \xi(\pi_v), \forall v \notin supp(D)$.

On en présente une preuve ici[20] dans le cas où D est réduit, c'est à dire $n_v = 0$ ou 1 pour toute place v, pour voir comment la voie géométrique permet d'arriver directement au fond des choses[21] :

Démonstration. **A.** "automorphe$\Rightarrow$ galois" : Soit $\xi : K^\times \backslash \mathbb{A}_K^\times / \mathbb{O}_D^\times \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ un caractère unitaire. Prenons X la courbe lisse propre sur $\mathbb{F}_q$ associé au corps K, on peut alors considérer D comme un sous schéma fermé de X. Notons par Pic_D la variété de Picard généralisée[22] associée à la courbe X et au diviseur D. Elle représente les classes d'isomorphisme de couples $(\mathscr{L}, \imath)$ où $\mathscr{L}$ est un fibré en droites sur X et $\imath : \mathscr{L}|_D \simeq \mathscr{O}|_D$ désigne une trivialisation de $\mathscr{L}$ en D[23]. Son composant classifiant les fibrés en droites de degré i sera noté $Pic_D^i, \forall i \in \mathbb{Z}$. Notons par Div_D le schéma représentant les diviseurs relatifs effectifs de $X - D$. On a l'isomorphisme sur $\mathbb{F}_q$:

$$Div_D = \coprod_{i>0} (X - D)^{(i)},$$

18. Lorsque $N = 1, V = \mathbb{F}_q \oplus \mathbb{F}_q, \langle (x, y), (x', y') \rangle = xy' - yx', Sp = SL_2(\mathbb{F}_q)$, parmi ces $q - 1$ représentations π_ψ(ψ caractère non-trivial de $\mathbb{F}_q$), un moitié est isomorphe à π^+, l'autre moitié à π^-. On a $\pi_\psi \simeq \pi_{\psi'}$ ssi il existe $a \in \mathbb{F}_q^\times$ tel que $\psi(x) = \psi'(a^2 x), \forall x \in \mathbb{F}_q$. On peut distinguer ces deux classes en calculant la trace $\mathrm{Tr}(g : \pi_\psi) = qK_\psi(g, 0)$ sur g unipotent, par exemple sur $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, en employant (3).

19. voir la fin de cette section pour les notations non expliquées.

20. due à Deligne.

21. Même plus que ça, la rédaction s'avançant au fur et à mesure, j'ai de plus en plus le sentiment d'être en train d'écrire une tautologie..

22. voir [Ser59] pour sa construction et ses propriétés.

23. Dans la suite, on va omettre la mention de $\imath$ s'il n'y en pas d'ambiguïté pour ne pas alourdir la notation.

où $(X-D)^{(i)} := (X-D)^i/\mathfrak{S}_i$ désigne la i-ième puissance symétrique de la courbe($\mathfrak{S}_i$ est le groupe symétrique). Elles sont lisses. L'application naturelle :

$$A : Div_D \to Pic_D \tag{7}$$

qui associe à un diviseur le fibré en droites qu'il définit donne une interprétation remarquable du double quotient de $\mathbb{A}_K^\times$:

$$K^\times\backslash\mathbb{A}_K^\times/\mathbb{O}_D^\times = Pic_D(\mathbb{F}_q).$$

Cette identification est compatible avec la graduation par degré de deux côtés, en particulier :

$$(K^\times\backslash\mathbb{A}_K^\times/\mathbb{O}_D^\times)^{\deg=0} = Pic_D^0(\mathbb{F}_q).$$

D'autre part, $Pic_D^0(\mathbb{F}_q)$ est aussi le noyau de l'homomorphisme de Lang(F désigne le Frobenius géométrique) :

$$L = F - Id : Pic_D^0 \to Pic_D^0.$$

Ce dernier étant un revêtement étale, le caractère $\xi|_{Pic_D^0}$ définit un système local(ℓ-adique) de rang 1 $\mathscr{E}_0$ sur Pic_D^0 qui vérifie, au vu de la fonctorialité du morphisme de Lang,

$$m_i^*\mathscr{E}_0 = \mathscr{E}_0^{\boxtimes i}, \tag{8}$$

où $m_i : (Pic_D)^i \to Pic_D$ désigne l'addition de i fibrés en droites, ou sa diverse restriction comme ici $m_i : (Pic_D^0)^i \to Pic_D^0$.

On sait que $Pic_D^1(\mathbb{F}_q) \neq \emptyset$. Prenons un élément $\mathscr{L}_1$ dedans. Notons par $act_{-i\mathscr{L}_1}$: $Pic_D^i \to Pic_D^0$ l'application qui envoie un fibré en droites $\mathscr{L}$ en $\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}_1^{\otimes(-i)}$. Prenons $\mathscr{T}$ le système local de rang 1 sur $Spec(\mathbb{F}_q)$ défini par l'homomorphisme(continu) $Gal(\bar{\mathbb{F}}_q|\mathbb{F}_q) = \widehat{\mathbb{Z}} \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ qui envoie 1 sur $\xi(\mathscr{L}_1)$. [24] En tirant en arrière, on obtiendra un système local de rang 1 sur chaque $\mathbb{F}_q$-schéma, qu'on note par la même notation. Prenons alors sur chaque Pic_D^i le système local de rang 1 donné par

$$\mathscr{E}_i := \mathscr{T}^{\otimes i} \otimes act_{-i\mathscr{L}_1}^*\mathscr{E}_0, \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Pour tout $i > 0$, notons $A^{(i)} : (X-D)^{(i)} \to Pic_D^i$ la restriction du morphisme A de (7). Prenons ensuite $\mathscr{F}^{(i)} := A^{(i)*}\mathscr{E}_i$ et appelons $\mathscr{F}^{(1)}$ aussi par $\mathscr{F}$. Désignons par r_i : $(X-D)^i \to (X-D)^{(i)}$ le morphisme quotient. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(X-D)^i \arrow[r, "(A^{(1)})^i"] \arrow[d, "r_i"'] & (Pic_D^1)^i \arrow[r, "(act_{-\mathscr{L}_1})^i"] & (Pic_D^0)^i \arrow[d, "m_i"'] \\
(X-D)^{(i)} \arrow[r, "A^{(i)}"] & Pic_D^i \arrow[r, "act_{-i\mathscr{L}_1}"] & Pic_D^0.
\end{tikzcd}$$

et la propriété (8) montre que :

$$r_i^*\mathscr{F}^{(i)} = \mathscr{F}^{\boxtimes i}, \forall i > 0. \tag{9}$$

24. Légitime car $\xi(\mathscr{L}_1)$ est unitaire, et c'est le seul endroit où on a besoin que ξ soit unitaire.

Désignons par $act_i : (X-D)^{(i)} \times Pic_D \to Pic_D$ le morphisme qui envoie un couple $(E, \mathscr{L})$ sur $\mathscr{L}(E)$, et par la même notation sa restriction $act_i : (X-D)^{(i)} \times Pic_D^j \to Pic_D^{i+j}$. On a alors pour tout $i > 0$ et tout entier j :

$$act_i^* \mathscr{E}_{i+j} = \mathscr{F}^{(i)} \boxtimes \mathscr{E}_j,$$

comme le nous affirme le diag. comm. ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
(X-D)^{(i)} \times Pic_D^j \arrow[r, "A^{(i)}\times \mathrm{Id}"] \arrow[dr, "act_i"'] & Pic_D^i \times Pic_D^j \arrow[r, "act_{-i\mathscr{L}_1}\times act_{-j\mathscr{L}_1}"] & Pic_D^0 \times Pic_D^0 \arrow[d, "m_2"'] \\
 & Pic_D^{i+j} \arrow[r, "act_{-(i+j)\mathscr{L}_1}"] & Pic_D^0.
\end{tikzcd}$$

Pour conclure, passons à la partie **C**.

B. "galois$\Rightarrow$ automorphe" : Soit $\rho : G_K \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ un caractère non-ramifié en dehors de D et modérément ramifié en $v \in supp(D)$, et tel que $\mathrm{Im}(\rho) \subset$ une extension finie de $\mathbb{Q}_\ell$. Il définit un système local de rang 1 $\mathscr{F}$ sur $X-D$, donc aussi un système local de rang 1 $\mathscr{F}^{\boxtimes i}$ sur $(X-D)^i$, qui est de plus naturellement $\mathfrak{S}_i$-équivariant. Prenons ensuite

$$\mathscr{F}^{(i)} := (r_{i*}(\mathscr{F}^{\boxtimes i}))^{\mathfrak{S}_i},$$

le sous faisceau ℓ-adique de $r_{i*}(\mathscr{F}^{\boxtimes i})$ invariant par $\mathfrak{S}_i$. C'est un système local de rang 1 sur $(X-D)^{(i)}$ [25] qui vérifie d'ailleurs (9) et [26]

$$\mathscr{F}^{(i)} \boxtimes \mathscr{F}^{(j)} = \mathscr{F}^{(i+j)}. \tag{10}$$

On veut que, pour i assez grand, $\mathscr{F}^{(i)}$ vienne d'un système local sur Pic_D^i en tirant en arrière par l'application $A^{(i)} : (X-D)^{(i)} \to Pic_D^i$.

Pour ce faire, rappelons que pour $D = 0$, $A^{(i)}$ est une fibration(propre) à fibre l'espace projectif $\mathbb{P}^{i-g}$ lorsque $i \geqslant 2g-1$ (g désigne le genre de la courbe X). On en déduit une suite exacte de groupes fondamentales :

$$\pi_1(\mathbb{P}^{i-g}_{\bar{\mathbb{F}}_q}) \to \pi_1(X^{(i)}) \to \pi_1(Pic^i) \to 1,$$

comme $\mathbb{P}^{i-g}_{\bar{\mathbb{F}}_q}$ est simplement connexe, il existe un unique système local de rang 1 $\mathscr{E}_i$ sur Pic^i tel que $A^{(i)*}\mathscr{E}_i \simeq \mathscr{F}^{(i)}$.

Dans le cas $D > 0$, un point(géométrique) de Pic_D^i est un fibré en droites de degré i $\mathscr{L}$ sur X plus une trivialisation en D : $\mathscr{L}|_D \simeq \mathscr{O}|_D$. La fibre de $A^{(i)}$ en ce point s'identifie avec la fibre en 1 de la restriction $H^0(X, \mathscr{L}) \to H^0(X, \mathscr{L}|_D) \simeq H^0(X, \mathscr{O}|_D)$. Appliquant le théorème de Riemann-Roch à la suite exacte longue de groupes de cohomologies associée à la suite exacte courte $0 \to \mathscr{L}(-D) \to \mathscr{L} \to \mathscr{L}|_D \to 0$, on constate que cette fibre en 1 est un espace affine de dimension $i-g+1-deg(D)$ dès que $i \geqslant deg(D)+2g-1$. Prenons $n := \prod_{v\in supp(D)} deg(v)$. Remarquons que l'image de l'homomorphisme injectif habituel

25. Cet énoncé innocent est non-trivial.

26. pour vérifier une égalité de ce genre, il suffit de l'examiner sur un ouvert, ici c'est le complément du grand diagonal.

pour une extension galoisienne finie L/K_v : $G^0(L|K_v)/G^1(L|K_v) \hookrightarrow \kappa_L^\times$ qui envoie g vers $\frac{g\pi_L}{\pi_L}$ sera inclue dans $\kappa_v^\times$ si l'extension serait de plus supposée abélienne[Ser62]. Comme ρ est modérément ramifié, il s'en suit que ρ^{q^n-1} est non-ramifié. Le système local ${\mathscr{F}^{(i)}}^{q^n-1}$ sur $(X-D)^{(i)}$ peut donc s'étendre à un système local sur $X^{(i)}$, lui-même vient d'un système local sur Pic^i, compte tenu du cas où le diviseur est nul. On en déduit que ${\mathscr{F}^{(i)}}^{q^n-1}$ vient d'un système local sur Pic^i_D. D'après [Gro03], on a la suite exacte des groupes fondamentales(modifiés) suivante :

$$\pi_1^{p'}(\mathbb{A}^{i-g+1-deg(D)}) \to \pi_1'((X-D)^{(i)}) \to \pi_1(Pic^i_D) \to 1,$$

où p' désigne l'ensemble des nombres premiers différents de p. Le fait que $\pi_1^{p'}(\mathbb{A}^j) = 0$ pour tout j nous permet de conclure qu'en fait $\mathscr{F}^{(i)}$ lui-même vient d'un système local sur Pic^i_D, qu'on va noter dans la suite par $\mathscr{E}_i$, on a donc $\mathscr{F}^{(i)} \simeq {A^{(i)}}^* \mathscr{E}_i$. C'est pour tout $i \geqslant deg(D) + 2g - 1$.

Les $\mathscr{E}_i$ ayant été construits pour $i \geqslant deg(D) + 2g - 1$, on va rapidement montrer comment les construire pour d'autres entiers. Au vu du diag. comm. suivant :

$$\begin{tikzcd} (X-D)^{(j)} \times (X-D)^{(i)} \arrow[r, "+"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\times A^{(i)}"'] & (X-D)^{(i+j)} \arrow[d, "A^{(i+j)}"] \\ (X-D)^{(j)} \times Pic^i_D \arrow[r, "act_j"] & Pic^{(i+j)}_D, \end{tikzcd}$$

on a pour tout $i \geqslant deg(D) + 2g - 1$,

$$act_j^* \mathscr{E}_{i+j} = \mathscr{F}^{(j)} \boxtimes \mathscr{E}_i, \tag{11}$$

On sait que pour j assez grand, $(X-D)^{(j)}(\mathbb{F}_q) \neq \emptyset$. Soit $E : Spec(\mathbb{F}_q) \to (X-D)^{(j)}$ un élément dedans, E est donc un diviseur effectif de degré j sur X étranger à D défini sur $\mathbb{F}_q$. On obtient alors un morphisme $act_E := act_j \circ (E \times \mathrm{Id}) : Pic^i_D \to Pic^{i+j}_D$. Appliquons $(E \times \mathrm{Id})^*$ à (11), on a

$$\mathscr{E}_i = {\mathscr{F}^{(j)}_E}^\vee \otimes act_E^* \mathscr{E}_{i+j}. \tag{12}$$

Maintenant pour un quelconque entier i, prenons $j > 0$ assez grand de sorte qu'il existe un E comme au paragraphe précédant et que $i + j \geqslant deg(D) + 2g - 1$, on peut alors simplement prendre (12) comme définition de $\mathscr{E}_i$. Le diagramme suivant montre l'indépendance du choix de cette définition(E' est un autre diviseur de haut degré j') :

$$\begin{tikzcd} Pic^i_D \arrow[r, "act_E"] \arrow[d, "act_{E'}"'] & Pic^{i+j}_D \arrow[d, "act_{E'}"] \\ Pic^{i+j'}_D \arrow[r, "act_E"] & Pic^{i+j+j'}_D. \end{tikzcd}$$

Et puis le diag. comm. ci-dessous permet de rétablir (11) pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et tout $j > 0$ (prenons $E' \in (X-D)^{(j')}(\mathbb{F}_q)$ pour j' grand) :

$$\begin{tikzcd} (X-D)^{(j)} \times Pic^i_D \arrow[r, "act_j"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\times act_{E'}"'] & Pic^{i+j}_D \arrow[d, "act_{E'}"] \\ (X-D)^{(j)} \times Pic^{i+j'}_D \arrow[r, "act_j"] & Pic^{i+j+j'}_D. \end{tikzcd}$$

Passons à la partie **C** pour terminer.

C. La partie **A**, et indépendamment la partie **B**, nous ont conduit à une même relation entre un système local de rang 1 $\mathscr{F}$ sur la courbe perforée $X-D$ et un système local de rang 1 $\mathscr{E}$ sur le schéma de Picard généralisé Pic_D, l'application $act_i : (X-D)^{(i)} \times Pic_D \to Pic_D$ qui envoie $(E, \mathscr{L})$ à $\mathscr{L}(E)$ servant d'intermédiaire :

$$act_i^* \mathscr{E} = \mathscr{F}^{(i)} \boxtimes \mathscr{E}, \forall i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}.$$

Pour mettre en évidence l'importance et l'autonomie, même la souveraineté de cette relation, on va prétendre pour un moment avoir oublié la voie par laquelle on y est arrivé. Au bout de quelques lignes, le lecteur saura qu'on n'a en fait rien perdu en ne se tenant qu'à cette relation.

Voici quelques propositions qui s'en découlent directement :

(i) $A^{(i)*} \mathscr{E}_i = \mathscr{F}^{(i)}$. Au vu du diag. comm. :

$$\begin{tikzcd} (X-D)^{(i)} \arrow[d, "\mathrm{Id} \times 0"'] \arrow[dr, "A^{(i)}"] & \\ (X-D)^{(i)} \times Pic_D^0 \arrow[r, "act_i"'] & Pic_D^i. \end{tikzcd}$$

(ii) $act_E^* \mathscr{E}_{i+j} = \mathscr{E}_j \otimes \mathscr{F}_E^{(i)}, \forall E : Spec(\mathbb{F}_q) \to (X-D)^{(i)}$. Parce que :

$$\begin{tikzcd} Pic_D^j \arrow[d, "E \times \mathrm{Id}"'] \arrow[dr, "act_E"] & \\ (X-D)^{(i)} \times Pic_D^j \arrow[r, "act_i"'] & Pic_D^{i+j}. \end{tikzcd}$$

(iii) $m_2^* \mathscr{E} = \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$. Parce que, pour j, j' grand :

$$\begin{tikzcd} (X-D)^{j+j'} \arrow[r] \arrow[dr] & (X-D)^{(j)} \times (X-D)^{(j')} \arrow[r, "A^{(j)} \times A^{(j')}"] \arrow[d, "+"'] & Pic_D^j \times Pic_D^{j'} \arrow[d, "m_2"'] \\ & (X-D)^{(j+j')} \arrow[r, "A^{(j+j')}"] & Pic_D^{j+j'}; \end{tikzcd}$$

pour i, i' quelconques, prenons j, j' grand et E, E' $\mathbb{F}_q$-point de $(X-D)^j, (X-D)^{j'}$ respectivement, le diag. comm. suivant et (10), (ii) permet de conclure :

$$\begin{tikzcd} Pic_D^i \times Pic_D^{i'} \arrow[r, "act_E \times act_{E'}"] \arrow[d, "m_2"'] & Pic_D^{i+j} \times Pic_D^{i'+j'} \arrow[d, "m_2"] \\ Pic_D^{i+i'} \arrow[r, "act_{E+E'}"] & Pic_D^{i+i'+j+j'}. \end{tikzcd}$$

(iv) Par (iii), $\mathscr{E}_{\{0\}} = \bar{\mathbb{Q}}_\ell$.

(v) $(-\mathrm{Id})^*\mathscr{E} = \mathscr{E}^\vee$. Puisque l'on a (iii), (iv) et le diag. comm. :

$$\begin{tikzcd} Pic_D \arrow[rr, "0"] \arrow[d, "diag"'] & & Pic_D \\ Pic_D \times Pic_D \arrow[rr, "\mathrm{Id}\times(-\mathrm{Id})"] & & Pic_D \times Pic_D. \arrow[u, "m_2"'] \end{tikzcd}$$

(vi) $L^*\mathscr{E}_0 = \bar{\mathbb{Q}}_\ell$. Compte tenu du fait général que $F^*\mathscr{E} = \mathscr{E}$ pour le Frobenius F, il suffit alors de rappeler la définition du morphisme de Lang L :

$$\begin{tikzcd} Pic_D^0 \arrow[rr, "L"] \arrow[d, "diag"'] & & Pic_D^0 \\ Pic_D^0 \times Pic_D^0 \arrow[rr, "F\times(-\mathrm{Id})"] & & Pic_D^0 \times Pic_D^0. \arrow[u, "m_2"'] \end{tikzcd}$$

Les propriétés (i) et (iii) montrent qu'en fait $\mathscr{E}$ est déterminé par $\mathscr{F}$ de la même façon que dans la partie **B**.

Le contexte de la partie **A** peut aussi être retracé. En prenant la trace de Frobenius du système local $\mathscr{E}$ sur les $\mathbb{F}_q$-points de Pic_D [27], on obtient un caractère $\xi : Pic_D(\mathbb{F}_q) \to \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ grâce à (iii). Compte tenu de (vi), on constate que $\mathscr{E}_0$ est juste le système local construit à partir du caractère $\xi|_{Pic_D^0}$ par la procédure décrite dans la partie **A**. Montrons que $\mathscr{E}_1$ coïncide avec le système local portant le même nom dans la partie **A**. Pour cela, prenons $\mathscr{L}_1 \in Pic_D^1(\mathbb{F}_q)$ et puis $\mathscr{T}$ comme dans la partie **A**. $\mathscr{T}$ est donc égal à $\mathscr{E}_1|_{\mathscr{L}_1}$, le tiré en arrière du système local $\mathscr{E}_1$ par l'application $\mathscr{L}_1 : Spec(\mathbb{F}_q) \to Pic_D^1$. On sait qu'il existe $j > 0, E_{j+1} \in (X-D)^{j+1}(\mathbb{F}_q), E_j \in (X-D)^j(\mathbb{F}_q)$ tels que le fibré en droites $\mathscr{L}_1$ soit représenté par le diviseur(non effectif) $E_{j+1} - E_j$. En terme pédant, on a un diag. comm. :

$$\begin{tikzcd} & Pic_D^1 \times (X-D)^{(j)} \arrow[rr, "\mathrm{Id}\times A^{(j)}"] & & Pic_D^1 \times Pic_D^j \arrow[d, "m_2"] \\ Spec(\mathbb{F}_q) \arrow[ur, "(\mathscr{L}_1, E_j)"] \arrow[r, "E_{j+1}"] & (X-D)^{j+1} \arrow[rr, "A^{(j+1)}"] & & Pic_D^{j+1}. \end{tikzcd}$$

On en déduit à l'aide de (i), (iii) que :

$$\mathscr{T} \otimes \mathscr{F}^{(j)}_{E_j} = \mathscr{F}^{(j+1)}_{E_{j+1}}.$$

Puis le diag. comm.

$$\begin{tikzcd} Pic_D^1 \arrow[r, "act_{E_j}"] \arrow[d, "act_{-\mathscr{L}_1}"'] & Pic_D^{j+1} \\ Pic_D^0 \arrow[ur, "act_{E_{j+1}}"'] & \end{tikzcd}$$

27. dictionnaire fonctions-faisceaux de Grothendieck.

et (ii) montrent que

$$\mathscr{E}_1 = \mathscr{T} \otimes act^*_{-\mathscr{L}_1}\mathscr{E}_0. \tag{13}$$

C'est à dire $\mathscr{E}_1$ est construit bien comme dans la partie **A**. Donc $\mathscr{F} = A^{(1)^*}\mathscr{E}_1$ l'est aussi(donc aussi $\mathscr{F}^{(i)}$), et de même pour $\mathscr{E}_i$, quand i est grand, grâce à (i). Enfin (ii) permet de conclure pour les autres $\mathscr{E}_i$. On s'est donc bien retrouvé dans la situation de **A**.

Pour terminer, vérifions que le caractère galoisien ρ associé au $\mathscr{F}$ et le caractère idélique ξ associé au $\mathscr{E}$ satisfont bien $\rho(Fr_v) = \xi(\pi_v), \forall v \notin supp(D)$. Soit v une place de K disjointe de D. Notons d son degré.

La place v définit d $\mathbb{F}_{q^d}$-points différents de la courbe $x_0, \cdots, x_{d-1} : Spec(\mathbb{F}_{q^d}) \to X-D$ constituant une orbite du Frobenius $F : X-D \to X-D$. Notons par y_i l'image de x_i dans Pic^1_D par l'application $A^{(1)} : X-D \to Pic^1_D$. Les points $y_0, \cdots, y_{d-1}$ sont différents, et forment une F-orbite dans Pic^1_D. En particulier, $y_0 + \cdots + y_{d-1} \in Pic^d_D$ est fixe par F, on voit qu'en fait c'est juste le fibré en droites $\mathscr{O}(\pi_v)$ défini par le diviseur π_v. Notons $z_i := y_i - \mathscr{L}_1 \in Pic^0_D(\mathbb{F}_{q^d})$. Par (13),

$$\rho(Fr_v) = \mathrm{Tr}(Fr_{x_i} : \mathscr{F}) = \xi(\mathscr{L}_1)^d\, \mathrm{Tr}(Fr_{z_i} : \mathscr{E}_0). \tag{14}$$

Pour calculer la trace du côté droite, il faut rappeler qu'on a montré que $\mathscr{E}_0$ est construit à partir du caractère ξ à travers le morphisme de Lang L. Nous sommes ainsi ramenés à déterminer l'action de F^d sur $L^{-1}z_i$. Voici le diagramme cartésien qui résume cette situation :

$$\begin{tikzcd} L^{-1}z_i \arrow[r, hook] \arrow[d, "L"'] & Pic^0_D \arrow[d, "L"] \\ z_i \arrow[r, hook] & Pic^0_D. \end{tikzcd}$$

Soit b un point de $L^{-1}z_i$, on a $Fb - b = Lb = z_i = y_i - \mathscr{L}_1$, et donc

$$\begin{aligned} F^d b - b &= (1 + F + \cdots + F^{d-1})(y_i - \mathscr{L}_1) \\ &= (1 + F + \cdots + F^{d-1})y_i - d\mathscr{L}_1 \text{ (puisque } F\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_1) \\ &= y_0 + y_1 + \cdots + y_{d-1} - d\mathscr{L}_1 \\ &= \mathscr{O}(\pi_v) - d\mathscr{L}_1. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\mathrm{Tr}(Fr_{z_i} : \mathscr{E}_0) = \xi(\mathscr{O}(\pi_v) - d\mathscr{L}_1) = \xi(\pi_v)\xi(\mathscr{L}_1)^{-d}.$$

Combiné avec (14), on obtient bien ce qu'on cherche :

$$\rho(Fr_v) = \xi(\pi_v), \forall v \notin supp(D).$$

Enfin, montrons que la ramification de ρ est bornée par D. Lorsque $D = 0$, il n'y a rien à démontrer. Lorsque $D > 0$ et réduit, prenons $n := \prod_{v \in supp(D)} deg(v)$, ξ^{q^n-1} est non-ramifié, donc ρ^{q^n-1} l'est aussi pour tout v. En particulier $\rho^{q^n-1}|_{G^1_{K_v}} = 1$. Comme $G^1_{K_v}$ est un pro-p-groupe, cela entraîne que $\rho_{|G^1_{K_v}} = 1$ pour tout v.

$\square$

Notations :

ℓ : un nombre premier différent de p.

K_v : le corps local, complété de K en v.

O_v : l'anneau de valuation de K_v.

m_v : l'idéal maximal de O_v.

κ_v : O_v/m_v.

π_v : un uniformisant de K_v.

U_v et U_v^0 : le groupe d'unités de O_v.

U_v^i : $1+m_v^i, i \geqslant 1$.

G_{K_v} : le groupe de galois absolu de K_v.

$(G_{K_v}^t)_{t\geqslant -1}$: la filtration décroissante de G_{K_v} par les groupes de ramification absolus(à numérotation supérieure).

$\mathbb{O}_D^\times$: $\prod U_v^{n_v}$.

Références

[BBD82] A. A. Beillinson, J. Bernstein et P. Deligne. "Analyse et topologie sur les espaces singuliers (I) : Faiseaux Pervers". In : *Astérisque* 100 (1982).

[Bor79] A. Borel. "Automorphic L-functions". In : *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*. T. XXXIII, Part 2. 1979.

[Del82] P. Deligne. "Metaplectique". Lettre à Kazhdan. 1982.

[FH91] W. Fulton et J. Harris. *Representation Theory : A First Course*. Springer, 1991.

[GH07] S. Gurevich et H. Hadani. "The geometric Weil representation". In : *Selecta Mathematica*. New Series 13.3 (2007), p. 465–481.

[Gro03] A. Grothendieck. *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie - 1960-61 - Revêtements étales et groupe fondamental - (SGA 1)*. T. 3. Société Mathématique de France, 2003.

[Laf12] V. Lafforgue. *Chtoucas pour les groupes réductifs et paramétrisation de Langlands globale*. 2012. url : http://arxiv.org/abs/1209.5352.

[Lan67] R. Langlands. "Lettre à Weil". 1967.

[LL09] V. Lafforgue et S. Lysenko. "Geometric Weil representation : local field case". In : *Composito Mathematica* 145 (2009), p. 56–88.

[Lys11] S. Lysenko. "Geometric theta-lifting for the dual pair $\mathbb{SO}_{2m}, \mathbb{S}p_{2n}$". In : *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* 44 (2011), p. 427–493.

[MV07] I. Micković et K. Vilonen. "Geometric Langlands duality and representations of algebraic groups over commutative rings". In : *Annals of Mathematics* 166 (2007), p. 95–143.

[Ric14] T. Richarz. "A new approach to the geometric Satake equivalence". In : *Documenta Mathematica* 19 (2014), p. 209–246.

[Ser59] J.-P. Serre. *Groupes algébriques et corps de classes*. Hermann, 1959.

[Ser62] Jean-Pierre Serre. *Corps Locaux*. Hermann, 1962.

[Wei64] A. Weil. "Sur certains groupes d'opérateurs unitaires". In : *Acta Mathematica* 111 (1964), p. 143–211.