

Introduction au domaine de recherche

Charles Fougeron
Encadrant : Anton Zorich

Octobre 2013

Table des matières

1	Introduction	2
2	Cycle asymptotique	3
2.1	Définition	3
2.2	Déviation du cycle asymptotique	4
2.3	Espace de module	5
3	Calcul d'exposants de Lyapunov	7
3.1	Somme des exposants de Lyapunov	7
3.2	Spectre de Lyapunov de revêtements cycliques à petits carreaux	9

1 Introduction

Le problème qui va motiver ce texte, est la configuration très élémentaire d'un billard dans un polygone. Donnons nous un polygone quelconque, et observons le comportement d'une balle lancée dans une direction donnée, et rebondissant sur les côtés dans le modèle de l'optique géométrique. Cette trajectoire est représentée pour un triangle dans la Figure 1. Les questions qui viennent alors automatiquement, sont la nature dynamique de cette trajectoire (va t-elle recouvrir la totalité du polygone, sera t-elle périodique, ..), ainsi que sa nature topologique que nous expliciterons plus loin dans les surface de translation.

On peut tout de suite dire que ce problème, en contraste avec la simplicité de son énonciation, est très difficile. Par exemple, on ne sait pas dire si dans un triangle obtus, il existe ou pas, même presque sûrement, une trajectoire fermée.

L'idée clef pour étudier ce problème est, en s'inspirant du cas du carré, de "développer" la surface. En faisant des symétries de notre polygone par rapport aux côtés. On voit alors que la trajectoire est redressée, et devient une ligne droite, qui est donc beaucoup plus agréable à manipuler. C'est ce qui est fait dans la Figure 1 pour un triangle d'angles $(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$.

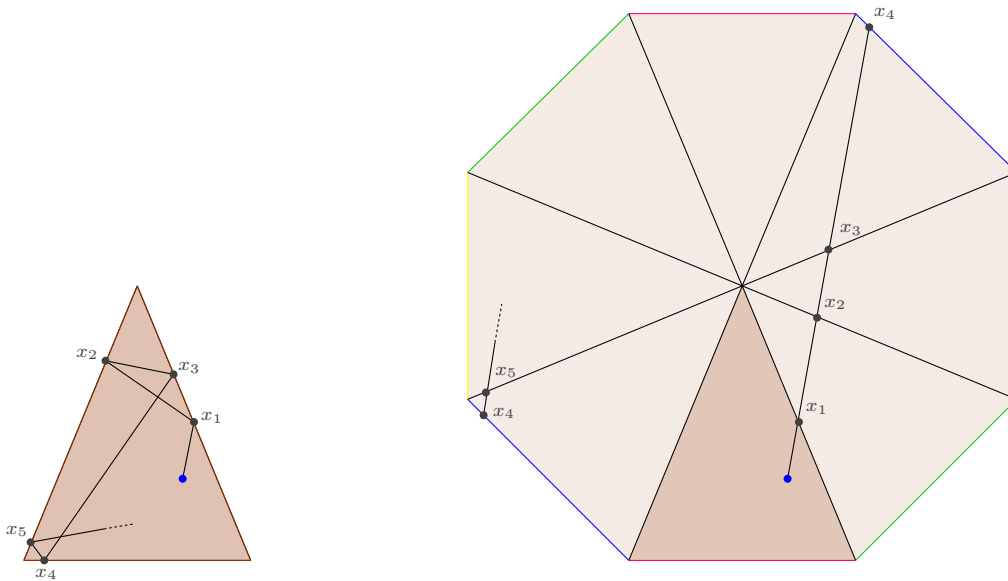


FIGURE 1 – Exemple de développement de billard

Ce qui rend l'exemple de la figure sympathique, c'est qu'il n'existe qu'un nombre fini d'image du polygone par symétrie par rapport à ses côtés. Cette propriété est en fait équivalente à avoir des angles multiples rationnelles de π . On appelle de tels polygone, des *billards rationnels*. Ce sont ces objets qui vont nous intéresser, et plus particulièrement la surface de translation qu'ils induisent par développement.

Donnons dès à présent une première définition de ces surfaces de translation.

Définition 1 Soient P_1, P_2, \dots, P_n des polygones, dont les côtés peuvent être associés par paires de côtés parallèles et de même longueur. Posons S la surface obtenue en identifiant ces paires de côtés par translation. Si de plus on impose que les vecteurs normaux sortant des paires de côtés soient opposés, la surface ainsi obtenue sera une surface de translation.

On voit directement que cette définition colle exactement aux propriétés de la surface développée pour un billards rationnels.

Remarque — Cette surface a potentiellement des points de singularité en les sommets des polygones.
— On peut en fait supposer $n = 1$ dans la Définition 1.

L'exemple suivant éclaircira sans doute cette définition très visuelle.

On voit que dans ce problème particulier, l'objet qui attire notre attention est le flot dans une direction donnée. Notre objectif dans ce texte sera donc de présenter quelques éléments pour comprendre ce flot appelé *flot de translation*. Plus formellement, c'est le flot géodésique avec la métrique euclidienne induite par la

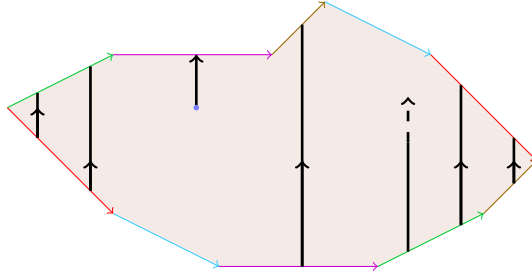


FIGURE 2 – Exemple de surface de translation avec son flot de translation

construction dans la direction verticale (on obtient ainsi des résultats sur les flots dans toutes les directions en faisant tourner la surface) de la surface.

C'est un objet d'autant plus intéressant que les flots sur une surface, induit par un champ de vecteurs n'ayant que des singularités de type selle (*i.e.* dont l'holonomie est une rotation d'angle multiple de 2π) est un flot de translation à renormalisation du temps près. L'étude du comportement des flots de translation nous permettra donc de comprendre de manière générale les flots sur les surfaces. Du moins les propriétés invariantes par changement de paramétrisation du flot, par exemple la minimalité ou l'ergodicité.

Pour une introduction générale au domaine des surfaces de translation on pourra consulter [Zor06].

2 Cycle asymptotique

2.1 Définition

Une première question est de savoir comment le flot de translation s'enroule autour de la surface. On voudrait pouvoir caractériser dans un certain sens le type d'homologie de ce chemin.

Formellement, notons X un segment horizontal dans notre surface, et ϕ_t le flot à l'instant t partant d'un point $x \in X$ donné tel que le flot forme une feuille régulière (ce qui est possible pour presque tout x).

Soit t_n le temps auquel ϕ rencontre X pour la n -ième fois. On peut alors associer de manière canonique à chaque chemin ϕ_{t_n} un lacet $\tilde{\phi}_{t_n}$ en refermant celui-ci par un bout de X que l'on choisit le plus court possible. On a donc une suite dans l'espace d'homologie $H_1(S, \mathbb{R})$ associée au flot, que l'on note $(c_n(x))$.

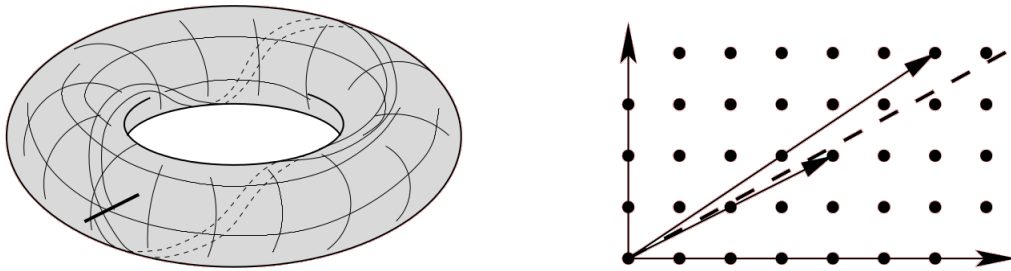


FIGURE 3 – Flot de translation sur le tore

Observons ce qu'il advient de cette suite dans le cas du tore. Cette suite est représentée dans la Figure 3 (tirée de [Zor06]), on voit aisément qu'elle a une direction asymptotique. C'est cette direction qui a été étudiée et introduite par Schwartzman dans [Sch57] en généralisant le nombre de rotation pour les flots d'un champ de vecteur sur une variété différentielle. Dans le cas des surfaces de translation, cette grandeur peut être introduite de manière plus élémentaire avec le théorème suivant :

Théorème 2 *Il existe un cycle c_∞ tel que pour presque tout point $x \in X$,*

$$c_n(x) \sim c_\infty \cdot t_n$$

Ce cycle est appelé cycle asymptotique.

Preuve Pour comprendre cette convergence, nous allons associer à chaque surface de translation le système dynamique donné par l'application de premier retour du flot de translation sur X notée T . Cette application est définie presque partout, en dehors des points dont le flot rencontre une singularité de S . On voit immédiatement par définition des surfaces de translation que cet automorphisme de X est très particulier. C'est un *échange d'intervalles*. Cela signifie qu'il existe un découpage de X en n intervalles et une permutation dans $\mathfrak{S}(n)$ tel que T soit égale presque partout à la réorganisation des intervalles selon cette permutation.

Dans l'exemple plus haut, les intervalles seront les projections verticales des côtés de la partie supérieure du polygone. Et la permutation sera exactement la manière dont les côtés du haut sont réordonnés par rapport à ceux du bas. Cet échange d'intervalle est représenté dans la Figure 4.

Nous verrons plus loin qu'il y a une dualité entre les deux objets, qui sera primordiale pour manipuler informatiquement les surfaces de translation.

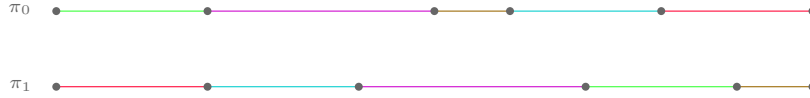


FIGURE 4 – Échange d'intervalles associé à la surface de la Figure 1

Un fait important dans cette partie est que si x et y appartiennent au même intervalle, alors on a $c_1(x) = c_1(y)$. En effet, les deux lacets sont même homotopes, car il n'y a pas de point de singularité dans le domaine délimité par ceux-ci. On peut alors envoyer un lacet sur l'autre continûment par translation.

De plus, on observe la relation de récurrence $c_n(x) = c_1(x) + c_{n-1}(T(x))$ et donc

$$c_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_1(T^i(x)) \quad (1)$$

Ainsi cette grandeur est déterminée par les intervalles dans lesquels se trouvent les $T^i(x)$.

Le résultat découle alors directement du théorème de [KMS86] :

Théorème 3 (Kerckhoff-Masur-Smillie) *Pour toute surface de translation le flot dans presque toute direction est uniquement ergodique.*

Qui nous permet d'appliquer le théorème de Birkhoff à la somme (1). ■

L'étape suivante dans notre compréhension de ces flots de translation est l'étude de la manière dont la convergence se fait.

2.2 Déviation du cycle asymptotique

Nous avons construit une suite c_1, c_2, \dots d'éléments dans le premier espace d'homologie de la surface considérée. Et nous avons vu l'existence d'un c_∞ vérifiant :

$$\frac{c_n}{t_n} \rightarrow c_\infty$$

Une question naturelle qui surgit maintenant, est de savoir comment se comporte cette suite dans l'espace orthogonal à c_∞ . On voit assez rapidement que pour le tore, la suite dans l'espace orthogonal reste uniformément bornée. Mais en genres supérieurs, l'espace orthogonal est plus grand, on peut donc s'attendre à un comportement plus chaotique.

En fait, et c'est plutôt surprenant a priori, il va exister un nouveau cycle c'_∞ et un exposant ν tels que

$$c_n|_{c_\infty^\perp} \sim c'_\infty \cdot t_n^\nu$$

On peut alors recommencer le processus. On observe notre suite dans l'espace orthogonal aux deux cycles obtenus, et de nouveaux cycles et exposants sortent, jusqu'à la g -ième itération ou la suite reste bornée.

On va noter $1 = \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_g$ ces exposants. Ce qui est frappant dans ces nombres est qu'ils sont reliés de manière très naturelle au comportement de la déformation de notre surface dans un espace de modules.

Mais pour comprendre cela, il nous faut d'abord revenir sur la définition des surfaces de translation. Il existe en fait plusieurs manières de définir celles-ci, dans des univers mathématiques assez différents. La définition donnée précédemment se trouve plutôt dans le monde de la géométrie plane.

Voici d'autres définitions équivalentes, d'aspects plus géométrie riemannienne et complexe.

Définition 4 Une surface de translation est une surface qui satisfait l'une des propriétés équivalentes suivantes :

1. une surface issue de l'identification de côtés de polygones comme dans la Définition 1
2. une surface compacte orientée, munie d'une métrique plate qui est définie en dehors d'un nombre fini de points, et telle que la monodromie soit triviale
3. une surface topologique compacte avec un atlas défini en dehors d'un nombre fini de points dont les changements de cartes sont des translations
4. une surface de Riemann compacte munie d'une 1-forme holomorphe

Remarque On voit dans cette Définition 4-2 qu'un aspect important des surfaces de translation réside dans le fait que le transport parallèle des vecteurs est trivial. En particulier, on a une notion de parallélisme proche de la géométrie euclidienne. Deux flots de translation partant dans la même direction ne se croiseront jamais, ou seront confondus.

On a alors toute une série de correspondances entre des grandeurs pour la représentation plane de notre surface et sa représentation complexe-analytique. Par exemple l'angle autour d'un point de singularité est égal à $2\pi(k+1)$ avec k l'ordre du zéro de la 1-forme. Les vecteurs définissant les côtés du polygone sont aussi les périodes relatives de la 1-forme par rapport aux zéros.

2.3 Espace de module

La définition qui nous intéresse pour la suite est la numéro 4. En effet, elle nous permet de définir un espace de modules avec une structure assez rigide.

Cet espace, noté \mathcal{H}_g est l'ensemble des couples (forme abélienne, structure complexe) sur une surface de genre g . C'est un fibré vectoriel au-dessus de l'espace de modules de Riemann \mathcal{M}_g qui est l'ensemble de structures complexes sur la variété topologique de genre g , à biholomorphisme près. En effet, une base pour l'homologie sur une surface restera une base localement, ce qui nous donne une trivialisatation locale du fibré donnée grâce à la paramétrisation des formes par leurs périodes.

Rappelons qu'une 1-forme holomorphe a exactement $2g-2$ zéros ; si l'on note d_1, d_2, \dots, d_m l'ordre des zéros de ω on a

$$\sum_{i=1}^m d_i = 2g - 2$$

On peut donc séparer l'espace de modules en *strates* en fonction de la multiplicité des zéros des formes. On les notera $\mathcal{H}(d_1, \dots, d_m)$. Ces strates ont une structure de variétés dont les cartes locales sont données grâce à l'application des périodes sur $H^1(S, \{P_1, \dots, P_m\}; \mathbb{C})$. Une manière plus simple de paramétrer les cartes locales, toujours grâce à la correspondance entre les définitions, est de considérer les vecteurs v_1, \dots, v_n qui définissent le polygone.

Reprenons l'exemple de la Figure 1, il y a alors, après identifications, deux points anguleux sur le polygone. L'angle de couleur bleue sur la Figure 2.3 est d'angle 6π et correspond à un zéro d'ordre 2 pour la forme, celui de couleur verte est d'angle 2π et est donc régulier. Par conséquent, la surface appartient à $\mathcal{H}(2, 0)$.

Action de $SL_2(\mathbb{R})$

Pour tout élément h de $SL_2(\mathbb{R})$ et S de \mathcal{H}_g dans la forme de la définition 1, on définit une application qui à S associe $h.S$ en utilisant l'action par homographie de $SL_2(\mathbb{R})$ sur \mathbb{C} dans chaque carte locale.

$$\begin{array}{ccc} & U \cap V & \\ \swarrow & & \searrow \\ h(\mathcal{O}_U) & \xrightarrow{h \circ \alpha_1 \circ \alpha_2^{-1} \circ h^{-1}} & h(\mathcal{O}_V) \end{array}$$

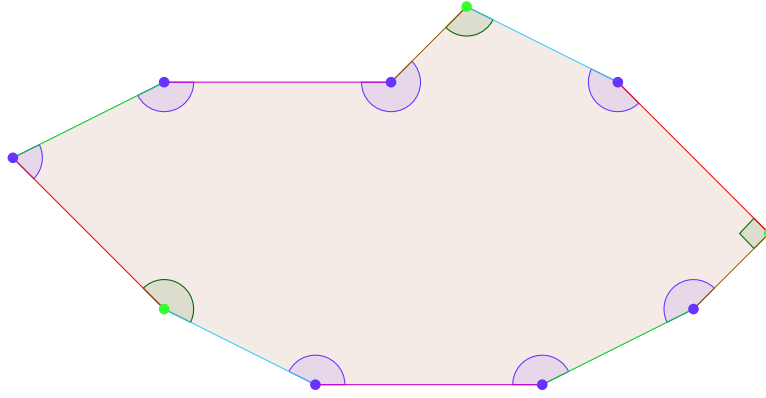


FIGURE 5 – Angles autour des sommets du polygone

On remarque que les changements de cartes sont des conjugués par h de translations, et restent donc bien des translations. De plus on a immédiatement $(g_1.g_2).S = g_1.(g_2.S)$. Ainsi, l'action est bien définie.

Remarque Cette action préserve l'aire, on peut donc se restreindre dans l'étude de celle-ci aux surfaces de translation d'aire égale à 1. On note les strates de cet ensemble $\mathcal{H}^1(d_1, \dots, d_n)$.

Flot de Teichmüller

En partant de la surface de translation $S \in \mathcal{H}_g$, on définit le flot de Teichmüller par l'application

$$\phi(S) : t \mapsto g_t.S \quad \text{où} \quad g_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Remarque — La projection de ce flot dans l'espace de modules de Riemann est géodésique pour la métrique de Teichmüller. C'est pourquoi on l'appelle aussi parfois, *flot géodésique de Teichmüller*.

- On déduit facilement de ce flot géodésique une injection de \mathcal{H}_g dans $T\mathcal{M}_g$
- Veech et Masur dans [Vee82] et [Mas82] ont introduit simultanément mais indépendamment une mesure sur \mathcal{H}_g . L'idée de cette mesure est d'utiliser la mesure de Lebesgue sur les vecteurs des côtés du polygone considérés comme des nombres complexes. Il ont par ailleurs tous deux montré que ce flot est ergodique dans \mathcal{H}_g pour cette métrique, et le théorème essentiel suivant :

Théorème 5 *Pour toute strate de \mathcal{H}_g , le volume*

$$\int_{\mathcal{H}^1(d_1, \dots, d_m)} d\nu_1$$

est fini, pour la mesure induite sur le sous-espace des surface d'aire unitaire.

C'est un résultat très important pour cette théorie car il est charnière pour utiliser le théorème de Oseledets introduit ci-dessous, et introduire ainsi les exposants de Lyapunov.

Fibré de Hodge et connexion de Gauss-Manin

On peut associer à chaque surface de translation S son espace d'homologie $H_1(S, \mathbb{C})$.

C'est un résultat général, grâce au théorème d'Ehresmann, que c'est un fibré vectoriel sur \mathcal{H}_g . L'espace d'homologie $H_1(S, \mathbb{Z})$ est un réseau de $H_1(S, \mathbb{C})$, et localement on peut identifier ces réseaux. Ce qui nous donne une connexion appelée connexion de Gauss-Manin.

Pour un voisinage \mathcal{O}_S d'un point S , qui trivialise le fibré de Hodge, on peut définir ce que l'on appelle le cocycle de Konsevitch-Zorich, qui est l'application linéaire obtenue à chaque retour dans \mathcal{O}_S par le transport parallèle des vecteurs du fibré de Hodge avec la connexion de Gauss-Manin.

Théorème de Oseledets

Ce théorème a été montré par Oseledets dans [Ose68].

Théorème 6 *Pour une variété X de dimension d , munie d'une mesure μ finie, et d'une application T ergodique, soit une application*

$$B : X \mapsto GL_m \mathbb{R}$$

qui agit sur un fibré vectoriel E et telle que

$$\int_X \log^+ \|B\| d\mu < \infty$$

Alors il existe des exposants

$$\nu_1 < \dots < \nu_d$$

tels que pour presque tout point de $x \in X$, on a une décomposition équivariante en drapeaux de la fibre

$$E_x = \mathcal{L}_1 \supset \mathcal{L}_2 \supset \dots \supset \mathcal{L}_d = \{0\}$$

vérifiant pour $v \in \mathcal{L}_k \setminus \mathcal{L}_{k+1}$,

$$\frac{\log \|B^n(v)\|}{\log n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \nu_k$$

Ce théorème nous permet de tirer directement $2g$ exposants de Lyapunov du cocycle de Konsevitch-Zorich. Qui, par un argument de dualité par rapport à la forme d'intersection, sont symétriques autour de zéro. On obtient alors g exposants positifs qui correspondent à ceux introduits dans la partie 2.2 pour presque toute surface de la strate considérée.

Spectre de Lyapunov d'une surface

Les exposants obtenus définis précédemment sont associés à une strate. On peut en fait les définir pour chaque surface d'une strate, en considérant le fibré sur l'ouvert de la strate formé par l'orbite de la surface considérée. Ces exposants seront par définition presque sûrement égaux à ceux de la strate.

3 Calcul d'exposants de Lyapunov

Il est très difficile d'obtenir des expressions explicites pour les exposants de Lyapunov. Par exemple, si l'on connaît ces exposants des strates dans les espaces de modules en genre petits, aucune formule générale pour ceux-ci n'a été encore démontrée.

Cependant, des simulations numériques rendues possibles grâce à la correspondance développée dans la partie précédente, ont permis à M. Kontsevitch et A. Zorich, de conjecturer une formule sur la somme des exposants de Lyapunov dans [Kon96], qui a ensuite été montrée rigoureusement par G. Forni dans [For01].

3.1 Somme des exposants de Lyapunov

La formulation la plus claire et générale de ce théorème se fait dans le vocabulaire de la géométrie complexe. Rappelons en tout d'abord quelques concepts.

Dans le cadre sympathique des variétés complexes kähleriennes, le théorème de Hodge nous donne une décomposition des espaces de cohomologie, en sous-espaces donnés par la cohomologie de Dolbeaut :

$$H^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X)$$

où

$$H^{p,q}(X) = \overline{H^{q,p}(X)}$$

Par analogie avec cette décomposition, on introduit :

Définition 7 *Une structure de Hodge réelle de poids k sur l'espace vectoriel $V_{\mathbb{R}}$ de dimension finie, est une décomposition de $V_{\mathbb{C}} := V_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$*

$$V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} V^{p,q}$$

les sous-espaces complexes, $V^{p,q}$ satisfaisants

$$V^{p,q} = \overline{V^{q,p}}$$

Toujours dans le cas kählerien, le théorème de Lefschetz difficile nous donne des informations sur la forme quadratique suivante :

$$Q : H^k(X, \mathbb{C}) \times H^k(X, \mathbb{C}) \ni (\alpha, \beta) \mapsto \int_X \omega^{n-k} \wedge \alpha \wedge \omega$$

qui satisfait :

$$Q(H^{p,q}(X), H^{p',q'}(X)) = 0 \quad \text{pour } p \neq q' \text{ et } q \neq p' \quad (2)$$

$$i^{p-q} Q(u, \bar{u}) > 0 \quad \text{pour tout } u \neq 0 \quad (3)$$

On appelle donc structure de Hodge polarisée, toute structure de Hodge sur un espace vectoriel, munie d'une forme quadratique satisfaisant les conditions 2 et 3 ci-dessus.

En dimension 1, toutes ces définitions se simplifient. On pose

$$G : (\alpha, \beta) \mapsto \frac{i}{2} \int_X \alpha \wedge \bar{\beta}$$

appelée forme de Hodge. C'est une forme hermitienne associée à une forme symplectique pour la structure semi-complexe naturelle. Le fait que cette forme est définie positive découle directement de l'égalité déjà citée plus haut

$$\frac{i}{2} \int_X \omega \wedge \bar{\omega} = \text{Aire}(S)$$

où S est la surface plate associée. L'espace $H^{1,0}$ peut alors être vu comme un sous-espace lagrangien associé à la forme symplectique. C'est à dire un sous-fibré W tel que l'ensemble des formes qui annulent $G(w, \bullet)$ pour un w élément du sous-fibré soient exactement W .

On observe par ailleurs que sur un espace de modules de courbes complexes (donc de dimension complexe 1) qui sont pour des questions de dimension toutes kähleriennes, la connexion de Gauss-Manin introduite en 2.3 transporte la structure de Hodge polarisée sur le fibré de Hodge. En effet, il suffit d'observer qu'elle préserve la forme de Hodge. Or celle-ci peut être définie comme l'extension naturelle de la forme sur l'anneau \mathbb{Z}

$$G_{\mathbb{Z}} : H^1(X, \mathbb{Z}) \times H^1(X, \mathbb{Z}) \mapsto \mathbb{Z}$$

qui est préservé par cette connexion.

C'est ce qu'on appelle une variation de structure de Hodge. Pour une courbe algébrique complexe lisse quelconque \mathcal{C} , on peut définir une variation de structure de Hodge polarisée réelle (notée \mathbb{R} -pVHS) de poids 1, comme un fibré vectoriel symplectique $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}$ muni d'une connexion plate, qui préserve la forme symplectique, et muni d'une structure Hermitienne compatible (donc d'une structure complexe). De plus, on impose que le sous-fibré lagrangien correspondant (l'espace propre de i), $\mathcal{E}^{1,0}$ dans $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ est holomorphe. On dira qu'une \mathbb{R} -pVHS est *plate*, si les valeurs propres de sa monodromie autour des points selles, sont de norme 1, et si le sous-fibré $\mathcal{E}^{1,0}$ est méromorphe au-dessus des points selles.

Le fait que les pVHS tirées de notre connexion de Gauss-Manin sur le fibré de Hodge soient bien plate vient des deux théorèmes suivants :

Théorème 8 ([Gri70], Theorem 3.1) *Soit $\phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{C}$ une famille de courbes de genre g . Si $s \in S$, et T est la monodromie associée à une boucle autour de s , alors T est quasi-unipotente, i.e. il existe $M, N \in \mathbb{N}$ tels que*

$$(T^N - 1)^M = 0$$

On en tire directement, que les valeurs propres de la monodromie sont des racines de l'unité.

Le théorème local suivant permet de définir ce que l'on appelle l'extension de Deligne.

Théorème 9 ([Del70], **Proposition 7.25**) *Soit \mathbb{V} un système local complexe sur le disque épointé, dont la monodromie autour de 0 est unipotente. Soit $\mathcal{V} = \mathbb{V} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{D^*}$. Alors \mathcal{V} peut être étendu en un fibré vectoriel méromorphe sur le disque entier.*

Cette extension s'applique dans notre cas, et assure la propriété de méromorphie sur les sous-fibré lagrangiens considérés.

On peut à présent formuler le théorème,

Théorème 10 ([EKZ11]) *Soit $(\mathcal{E}_{\mathbb{R}}, \nabla, \mathcal{E}^{1,0})$ une $\mathbb{R} - pVHS$ plate de poids 1 et de rang $2r$ sur une courbe \mathcal{C} de caractéristique d'Euler négative, munie de sa métrique hyperbolique complète usuelle. On tire alors $2r$ exposants de Lyapunov du cocycle défini par le flot géodésique. Ils seront par un argument déjà vu précédemment symétriques par rapport à 0, et donc on obtient r exposants positifs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ qui satisfont :*

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_r = \frac{2 \deg(\mathcal{E}^{1,0})}{-\chi(\mathcal{C})}$$

Remarque Comme nous l'avons développé plus haut, ce théorème s'applique pour \mathcal{C} un revêtement non ramifié d'une courbe de Teichmüller, avec le flot géodésique de Teichmüller. On peut en outre prendre un sous-fibré de Hodge \mathcal{E} invariant par monodromie, et par l'étoile de Hodge.

Une idée importante pour calculer des exposants de Lyapunov, est alors de trouver une décomposition du fibré de Hodge

$$H^1(X; \mathbb{C}) = \bigoplus_{k=1}^N V(k)$$

stable par l'action de $SL_2(\mathbb{R})$ (transportée à l'aide de la connexion de Gauss-Manin) et qui induit une décomposition du sous-fibré holomorphe :

$$H^{1,0}(X) = \bigoplus_{k=1}^N V^{1,0}(k)$$

où $V_k^{1,0} = H^{1,0}(X) \cap V(k)$.

En particulier, si l'on a un sous-espace de rang 2, ce théorème nous donne une expression du coefficient de Lyapunov correspondant, en fonction du degré du fibré correspondant.

C'est cette idée qui est utilisée pour calculer les exposants de Lyapunov des revêtements cycliques à petits carreaux, dans [EKZ11]. On la développe dans la partie suivante.

3.2 Spectre de Lyapunov de revêtements cycliques à petits carreaux

Introduisons tout d'abord les espaces considérés. Soit un entier $N > 1$ et un quadruplet d'entier (a_1, \dots, a_4) , (z_1, \dots, z_4) quatre points de \mathbb{C} deux à deux distincts. On considère alors la surface de Riemann associée à l'équation polynomiale

$$w^N = (z - z_1)^{a_1} (z - z_2)^{a_2} (z - z_3)^{a_3} (z - z_4)^{a_4}$$

Par construction, cette surface sera un revêtement de $\mathbb{C}P^1$ au-dessus des z_i . On choisit de plus les paramètres entiers de telle sorte que la surface soit connexe et ne ramifie pas à l'infini. On a donc une action naturelle de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ sur la surface générée par

$$T : (z, w) = (z, \zeta w)$$

avec ζ une racine N -ième de l'unité primitive.

Cette application induit une action sur l'espace de cohomologie,

$$T^* : H^1(X; \mathbb{C}) \rightarrow H^1(X; \mathbb{C})$$

On a $(T^*)^N = Id$ et on peut donc décomposer l'espace de cohomologie en sous-espaces propres de cette application.

On pose, pour $k = 1, \dots, N - 1$, le cas $k = 0$ correspondant à l'espace des vecteurs invariants par T étant isomorphe à $H^1(\mathbb{C}P^1) = 0$ on ne le mentionne pas,

$$V_k(X) := \ker(T^* - \zeta^k Id)$$

Cette décomposition est alors invariante par la connexion de Gauss-Manin, et comme elle préserve la forme Hermitienne d'intersection, cette décomposition satisfait bien les conditions requises.

Dans ce cas, tout marche bien, car la décomposition est assez fine pour que les sous-espaces sur lesquels les exposants ne sont pas tous nuls, soit de dimension 2. On peut donc calculer les exposants grâce au degré du fibré correspondant. Pour la caractéristique d'Euler, on remarque juste que l'on peut paramétrer nos surfaces par un seul des quatre points de ramification, car il existe toujours une isométrie envoyant trois points donnés vers $\{0, 1, \infty\}$. Ainsi, notre courbe de Teichmüller, est homéomorphe à $\mathbb{C}P^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. Donc $\chi(\mathcal{C}) = 2 - 2 \cdot 0 - 3 = -1$ d'où $\lambda = \deg(\mathcal{V}^{1,0})$. Pour calculer le degré, il suffit de choisir une section du fibré, et de calculer le degré de ses singularités. On prend alors pour section la fonction holomorphe de projection

$$(z, w) \mapsto w$$

Le calcul est ensuite classique.

On obtient une expression explicite et générale du spectre de Lyapunov dans ce cas des revêtements cycliques à petits carreaux. Il faut au préalable introduire les grandeurs arithmétiques suivantes.

Notons pour $i \in \{1, \dots, 4\}$ et $N \in \{1, \dots, N-1\}$

$$t_i(k) = \left\{ \frac{a_i}{N} k \right\}$$

avec $\{x\}$ la partie fractionnelle de x . Et posons $t(k) = t_1(k) + \dots + t_4(k)$.

Théorème 11 (Corollary 1, [EKZ11]) *Le spectre de Lyapunov $\Lambda Spec$ des revêtements cycliques à petits carreaux peut être obtenu grâce à l'algorithme suivant :*

Pour k allant de 1 à $N-1$:

- si $t(k) = 3$ ajouter deux zéros à $\Lambda Spec$
- si $t(k) = 2$ ajouter $2d(k)$ à $\Lambda Spec$
- si $t(k) = 1$ ne rien ajouter

Illustrons ce théorème sur un exemple plus spécifique, dont on tire les exposants comme conséquence directe de ce résultat, en travaillant encore un peu avec les symétries supplémentaires.

Considérons une famille très simple de surfaces à petits carreaux indexée par les entiers naturels. La surface n sera représentée par n carrés collés bord à bord sur une même ligne, on identifie ensuite le côté gauche du premier carré avec le côté droit du dernier. Il ne reste plus qu'à identifier les côtés hauts avec les côtés bas. On les identifie donc selon la permutation qui inverse l'ordre.

La Figure 6 représente cette surface. Les carreaux sont numérotés, et le numéro sur chaque côté correspond au carré adjacent.

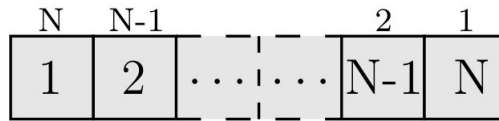


FIGURE 6 – Représentation de l'origami

En fait ces surfaces peuvent être vues comme des quotients de la surface $M_{2N}(N+2, N-2, N, N)$, représentée sur la Figure 7, par une involution qui préserve sa structure plate. Plus précisément c'est l'involution de $\mathbb{C}P^1$ donnée par le modèle de la housse d'oreiller relevée au revêtement. Cela permet de déduire leurs spectre de Lyapunov à partir du résultat ci-dessus.

Corollaire 12 *Le spectre de Lyapunov de $S(N)$ est*

$$\Lambda Spec = \begin{cases} \frac{1}{N}, \frac{3}{N}, \frac{5}{N}, \dots, \frac{N}{N} & \text{si } N \text{ est impair} \\ \frac{2}{N}, \frac{4}{N}, \frac{6}{N}, \dots, \frac{N}{N} & \text{si } N \text{ est pair} \end{cases}$$

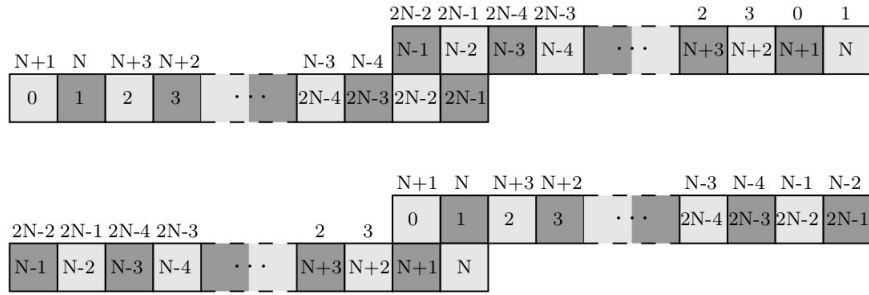


FIGURE 7 – $M_{2N}(N + 2, N - 2, N, N)$

Références

- [Del70] Pierre Deligne. *Équations différentielles à points singuliers réguliers*. Springer, Berlin, 1970.
- [EKZ11] Alex Eskin, Maxim Kontsevitch, and Anton Zorich. Lyapunov spectrum of square-tiled cyclic covers. *Preprint*, 2011.
- [For01] G. Forni. Deviation of ergodic averages for area-preserving flows on surfaces of higher genus. *Annals of Math.*, 155 :1 :1–103, 2001.
- [Gri70] Phillip A. Griffiths. Periods of integrals on algebraic manifolds : Summary of main results and discussion of open problems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 76 :228–269, 1970.
- [KMS86] S. Kerckhoff, H. Masur, and J. Smilie. Ergodicity of billiard flows and quadratic differentials. *Annals of Math.*, 124 :293–311, 1986.
- [Kon96] M. Kontsevitch. *The mathematical beauty of physics*, volume 23, chapter Lyapunov exponents and Hodge Theory, pages 318–332. Adv. Ser. Math. Phys., Saclay, 1996.
- [Mas82] H. Masur. Interval exchange transformations and measured foliations. *Annals of Math.*, 115 :169–200, 1982.
- [Ose68] I. Oseledets, V. A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic number for dynamical systems. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 19 :197–231, 1968.
- [Sch57] S. Schwartzman. Asymptotic cycles. *Annals of Math.*, 66 :270–284, 1957.
- [Vee82] W. A. Veech. Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps. *Annals of Math.*, 115 :201–242, 1982.
- [Zor06] Anton Zorich. *Frontiers in number theory, physics, and geometry*, volume I, chapter Flat Surfaces, pages 437–538. Springer, 2006.