Introduction à un domaine de recherche : Cycles proches et cycles évanescents dans le cas analytique complexe

Matthieu Kochersperger
(sous la direction de Bruno Klingler)

8 novembre 2013

Table des matières

1 introduction

On s'intéressera au problème suivant : soit $f : X \to D$ un morphisme d'espaces analytiques complexes où $D \subset \mathbb{C}$ est un disque centré en l'origine et X un espace analytique complexe de dimension $n+1$. On suppose de plus f propre et lisse en dehors de $0 \in D$. On a alors un résultat qui assure que $f|_{f^{-1}(D^*)} : f^{-1}(D^*) \to D^*$ est un fibré $\mathcal{C}^\infty$ où $D^* = D - \{0\}$. On notera $X_d = f^{-1}(d)$ pour $d \in D$. On étudie alors la fibre X_d pour $d \neq$

0. On appelle cycles proches les éléments des groupes de cohomologie de cette fibre. Quand on fait tendre d vers l'origine on obtient une application de la fibre ≪ proche ≫ X_d pour $d \neq 0$ dans X_0. On considèrera alors les cycles évanescents qui correspondent aux conoyaux des applications induites sur les groupes de cohomologie. On peut considérer intuitivement les cycles évanescents comme étant la partie de la fibre ≪ proche ≫ qui disparaît quand on fait tendre d vers l'origine dans X_d.

On s'intéresse également à l'application de monodromie ; le générateur positif de $\pi_1(D^*)$ induit un automorphisme de $H^*(X_d, \mathbb{Z})$ noté T et appelé automorphisme de monodromie locale. Le théorème de monodromie locale, qui est dû à Grothendieck, s'énonce alors de la manière suivante

Théorème 1.1 (Théorème de monodromie locale)**.** *Il existe un entier $a \geq 1$ tel que*

$$(T^a - Id)^{n+1}|_{H^n(X_d,\mathbb{Z})} = 0.$$

On commencera par exposer les résultats de John Milnor qui a étudié le problème local. On s'intéressera ensuite au problème global que l'on peut aborder à l'aide des foncteurs cycles proches et cycles évanescents qui ont été introduits par Grothendieck. Dans une troisième partie on définira la monodromie sur la cohomologie de la fibre ainsi que sur les faisceaux ≪ cycles proches ≫. On présentera pour terminer une démonstration du théorème de monodromie locale due à Grothendieck. L'approche faisceautique est l'élément clé de cette preuve car elle permet de se ramener à un problème locale qu'on étudie à l'aide de la résolution des singularités d'Hironaka.

2 L'approche de Milnor

Dans ce chapitre on suivra principalement l'approche de J. Milnor dans [2]. On commencera par montrer le théorème de fibration et on étudiera ensuite la topologie de la fibre de Milnor ; on s'intéressera tout particulièrement au cas d'une singularité isolée.

2.1 Théorème de fibration

On montre ici le résultat suivant :

Théorème 2.1 (théorème de fibration)**.** *Soit $f : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ une fonction polynomiale vérifiant $f(0) = 0$ et S_ϵ la sphère de centre 0 et de rayon ϵ dans*

$\mathbb{C}^{n+1}$. *Notons* $K = f^{-1}(0) \cap S_\epsilon$. *Pour* ϵ *assez petit, l'application*

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & S_\epsilon - K & \to & S^1 \\ & z & \mapsto & \frac{f(z)}{|f(z)|}, \end{array}$$

est un fibré $\mathcal{C}^\infty$ *de fibre une variété lisse. La fibre au dessus d'un point* $e^{i\theta}$ *de* S^1 *sera noté* $F_\theta = \Phi^{-1}(e^{i\theta})$.

Remarque 2.1. *On peut montrer que* F_θ *est difféomorphe à la fibre de Milnor définie dans l'introduction. Cette description de la fibre de Milnor facilite son étude topologique.*

Démonstration du théorème 2.1. On peut montrer, en suivant [2] §4, que pour ϵ assez petit l'application Φ n'a pas de points critiques, ce qui permet de conclure que les fibres sont lisses.

Pour montrer que Φ est un fibré $\mathcal{C}^\infty$ on construit un champs de vecteur sur $S_\epsilon - K$ dont le flot induit des difféomorphismes entre les fibres F_θ. On admettra le lemme suivant :

Lemme 2.2. *Pour tout* $\epsilon < \epsilon_0$, *il existe un champ de vecteurs lisse* $\vec{v}(z)$ *sur* $S_\epsilon - K$ *tel que pour tout* $z \in S_\epsilon - K$

$$< \vec{v}(z), i \cdot \overrightarrow{grad} \log f(z) >$$

est non nul et d'argument plus petit que $\frac{\pi}{4}$ *en valeur absolue.*

On pose alors

$$\vec{w}(z) = \frac{\vec{v}(z)}{\Re < \vec{v}(z), i \cdot \overrightarrow{grad} \log f(z) >}.$$

On a donc un champ de vecteurs lisse sur $S_\epsilon - K$ vérifiant

$$\Re < \vec{w}(z), i \cdot \overrightarrow{grad} \log f(z) > = 1$$

et

$$|\Im < \vec{w}(z), i \cdot \overrightarrow{grad} \log f(z) >| < 1.$$

Lemme 2.3. *Le flot associé au champ de vecteurs* $\vec{w}(z)$ *est défini sur tout* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Le seul problème que l'on pourrait éventuellement rencontrer vient du fait que $S_\epsilon - K$ n'est pas compact. Il est en effet possible que la trajectoire partant d'un point z_0 arrive sur K en un temps fini t_0, dans ce cas cette trajectoire ne serait pas définie pour $t \geq t_0$. Mais si on note $c_{z_0}(t)$ cette trajectoire, cela implique que

$$\lim_{t \to t_0} \Re \log f(c_{z_0}(t)) = -\infty.$$

Or

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}(\Re \log f(c_{z_0}(t))) & = & \Re< \frac{dc_{z_0}(t)}{dt}, \overrightarrow{grad} \log f(c_{z_0}(.)) > \\ & = & \Re< \vec{w}(c_{z_0}(.)), \overrightarrow{grad} \log f(c_{z_0}(.)) > \end{array}$$

dont la valeur absolue est plus petite que 1 d'après ce qui précède. La fonction $\Re \log f(c_{z_0}(t))$ ne peut donc pas tendre vers $-\infty$ en un temps fini, cette contradiction conclut la démonstration.

□

Si on note $\Phi(z) = e^{i\theta(z)}$ alors

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{dt}\theta(c_{z_0}(t)) & = & \Re< \frac{dc_{z_0}(t)}{dt}, i \cdot \overrightarrow{grad} \log f(c_{z_0}(.)) > \\ & = & \Re< \vec{w}(c_{z_0}(.)), i \cdot \overrightarrow{grad} \log f(c_{z_0}(.)) > \\ & = & 1. \end{array}$$

Ainsi $\theta(c_{z_0}(t)) = t +$ constante. Le flot de $\vec{w}$ au temps t induit donc un difféomorphisme entre $\Phi^{-1}(e^{i\theta}) = F_\theta$ et $F_{t+\theta}$. Soit $e^{i\theta} \in S^1$ et l'ouvert de S^1 $U = \{e^{i(t+\theta)} | t \in]-\eta, \eta[\}$ pour η assez petit. On considère alors l'application

$$\begin{array}{cccc} \Psi : & U \times F_\theta & \to & \Phi^{-1}(U) \\ & (e^{i(t+\theta)}, z) & \mapsto & c_z(t). \end{array}$$

C'est un difféomorphisme, ce qui montre que Φ est une fibration $\mathcal{C}^\infty$.

□

2.2 La fibre de Milnor

On redonne la définition de la fibre de Milnor :

Définition 2.1. *La fibre de Milnor est l'intersetion de X_d avec la boule B_ϵ de centre 0 et de rayon ϵ pour ϵ suffisamment petit et pour $d \neq 0$ suffisamment proche de l'origine. On notera Mil_f la fibre de Milnor.*

On peut montrer que la fibre F_θ du théorème de fibration 2.1 est difféomorphe à la fibre de Milnor. La démonstration se trouve dans [2] §5 et est similaire à la démonstration du théorème 2.1. En utilisant cette description on peut montrer les résultats suivants sur la fibre de Milnor :

Théorème 2.4. *La fibre de Milnor F_θ est homotopiquement équivalente à un CW-complexe fini de dimension réelle n.*

Remarque 2.2. *La fibre de Milnor est un variété différentielle de dimension réelle $2n$.*

Définition 2.2. *On dira que le point* 0 *est une singularité isolée de* f *si dans un voisinage de* 0 *la fonction* f *n'a pas de point critique mis à part éventuellement* 0 *lui-même.*

Si l'on se restreint au cas d'une singularité isolée on a le résultat suivant :

Théorème 2.5. *Si le polynôme $f : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ a une singularité isolée en zéro alors la fibre de Milnor F_θ est homotopiquement équivalente à un bouquet de sphères de dimension n, $S^n \vee S^n \vee ... \vee S^n$.*

Dans le cas d'une singularité isolée on peut calculer le n-ième nombre de Betti de la fibre de Milnor F_θ. D'après ce qui précède ce nombre est égal au nombre de sphères présentes dans un bouquet de sphères homotopiquement équivalent à F_θ.

Définition 2.3. *Soient $g_1(z), ..., g_m(z)$ des fonctions analytiques complexes de m variables et soit z^0 un zéro isolé du système d'équations*

$$g_1(z) = ... = g_m(z) = 0.$$

On note $g : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ l'application $(g_1(z), ..., g_m(z))$. La <u>*multiplicité*</u> *μ du zéro isolé z^0 est le degré de l'application*

$$z \mapsto g(z)/\|g(z\|$$

allant d'une petite sphère S_ϵ dans la sphère unité de $\mathbb{C}^m$.

On donne ici un lemme qui est démontré dans [2] lemme B.3.

Lemme 2.6. *On garde les notations de la définition précédente. Soit D_ϵ un disque autour de z^0 qui ne contient pas d'autre zéro de g alors, pour presque tout $\vec{v} \in \mathbb{C}^m$ suffisamment proche de l'origine, l'équation $g(z) = \vec{v}$ a précisément μ solutions dans D_ϵ.*

On s'intéresse alors au cas où 0 est une singularité isolée pour la fonction polynomiale $f(z_1, ..., z_{n+1})$. Alors 0 est un zéro isolé du système d'équations

$$df/dz_1(z) = ... = df/dz_m(z) = 0.$$

On notera maintenant μ la multiplicité de ce zéro isolé. On a alors le théorème suivant.

Théorème 2.7. *Dans le cas où* 0 *est une singularité isolée, le* n*-ième nombre de Betti de la fibre de Milnor* F_θ *est égal à la multiplicité* μ.

On termine par donner un exemple :

Exemple 2.8. On considère l'exemple des singularités de Brieskorn. On s'intéresse aux polynômes de la forme

$$f(z_1, ..., z_{n+1}) = z_1^{a_1} + ... + z_{n+1}^{a_{n+1}}$$

où $a_i > 1$ pour tout i. Soit p le plus petit commun multiple des a_i et $q_i = p/a^i$. On définit une action de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C}^{n+1}$ de la façon suivante

$$t.(z_0, ..., z_n) = (t^{q_0} z_0, ..., t^{q_n} z_n).$$

On a alors $f(t.(z_1, ..., z_n)) = t^p f(z_0, ..., z_n)$ donc X_0 est invariant par cette action et on a des difféomorphismes induits par cette action :

$$t : X_d \to X_{t^p.d}.$$

L'origine est clairement une singularité isolée donc d'après le théorème 2.5 la fibre de Milnor au voisinage de l'origine est homotopiquement équivalente à un bouquet de k sphères. De plus le théorème 2.7 assure que $k = \mu$ la multiplicité de l'origine comme zéro isolé du système d'équations

$$df/dz_1(z) = ... = df/dz_{n+1}(z) = 0.$$

D'après le lemme 2.6 μ est égal au nombre de solutions dans un voisinage de l'origine de l'équation

$$(df/dz_1(z), ..., df/dz_{n+1}(z)) = \vec{v}$$

pour presque tout $\vec{v}$ suffisamment proche de l'origine. Or $df/dz_i(z) = a_i z_i^{a_i-1}$ donc pour tout $\vec{v} = (v_1, ..., v_{n+1})$ vérifiant $v_i \neq 0$ pour tout i, l'équation

$$(a_1 z_1^{a_1-1}, ..., a_{n+1} z_{n+1}^{a_{n+1}-1}) = \vec{v}$$

a $(a_1 - 1)...(a_{n+1} - 1)$ solutions. L'ensemble des vecteurs $\vec{v} = (v_1, ..., v_{n+1})$ vérifiant $v_i \neq 0$ dans un voisinage de l'origine est de mesure strictement positive donc le lemme 2.6 assure que $\mu = (a_1 - 1)...(a_{n+1} - 1)$. La fibre de Milnor est donc homotopiquement équivalente à un bouquet de $(a_1 - 1) \cdot ... \cdot (a_{n+1} - 1)$ sphères.

Sur cette exemple on peut également définir la monodromie et montrer le théorème de monodromie locale. On considère le chemin $\Psi(t) = e^{2i\pi \frac{t}{p}}$, $\Psi(t)$ induit un difféomorphisme entre X_d et $X_{e^{2i\pi t}.d}$. La monodromie est alors décrite par le difféomorphisme de X_d induit par $\Psi(1)$ et le fait que $\Psi(p) = 1$ donne le théorème de monodromie locale dans ce cas là.

3 Les faisceaux de cycles proches et de cycles évanescents

3.1 Faisceaux de cycles proches

On définira dans cette partie les faisceaux de cycles proches et les faisceaux de cycles évanescents. On montrera également quelques propriétés justifiant la définition. Ces propriétés assurent que calculer la cohomologie de faisceau des faisceaux de cycles proches sur X_0 revient à calculer la cohomologie « classique » de la fibre X_d pour $d \neq 0$. Il sera alors nettement plus agréable de manipuler ces faisceaux pour étudier la cohomologie de la fibre X_d pour $d \neq 0$.

Soit D un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$. Soit $f : X \to D$ un morphisme propre d'espaces analytiques complexes, qui est de plus lisse en dehors de $0 \in D$. On utilisera sans le démontrer un théorème de fibration global qui assure que la restriction de f à $D^* = D - \{0\}$ est un fibré $\mathcal{C}^\infty$. On notera X_d la fibre au dessus de $d \in D$.

On note $X_0 = f^{-1}(0)$, $D^* = D - 0$ et $X^* = X - X_0$. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] & X^* \arrow[l, hook', "j"'] \arrow[d] \\ 0 \arrow[r, hook] & D & D^*. \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

On note alors $\widetilde{D^*}$ le revêtement universel de D^* et $\widetilde{X^*} = X^* \times_{D^*} \widetilde{D^*}$. Le diagramme commutatif précédent s'étend alors de la manière suivante

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] & X^* \arrow[l, hook', "j"'] \arrow[d] & \widetilde{X^*} \arrow[l, two heads] \arrow[d] \arrow[ll, bend right, "\tilde{j}"'] \\ 0 \arrow[r, hook] & D & D^* \arrow[l, hook'] & \widetilde{D^*}. \arrow[l, two heads] \end{tikzcd}$$

Définition 3.1. *On définit alors le foncteur cycles proches $\Psi = i^*\tilde{j}_*\tilde{j}^*$ qui va de $\boldsymbol{Sh}(X)$ dans $\boldsymbol{Sh}(X_0)$. Où $\boldsymbol{Sh}(X)$ est la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X.*

On peut considérer les foncteurs dérives à droite de ce foncteur :

Définition 3.2. *Si l'on considère le faisceau constant $\mathbb{Z}$ sur X on obtient alors les faisceaux $R^q\Psi(\mathbb{Z})$ sur X_0 appelés faisceaux de cycles proches.*

On montre alors quelques résultats sur ces faisceaux. Localement on a le lemme suivant

Lemme 3.1. *Si f est à singularité isolée en x, alors la tige en x des faisceaux de cycles proches vérifie l'égalité suivante :*

$$R^q\Psi(\mathbb{Z})_x \cong H^q(Mil_{f,x}, \mathbb{Z})$$

où $Mil_{f,x}$ est la fibre de Milnor définie dans le chapitre précédent définition 2.1.

On a également un résultat global. On note $\mathbb{H}^i(X, \mathcal{F})$ le i-ème groupe d'hypercohomologie du faisceau $\mathcal{F}$ défini sur l'espace topologique X.

Proposition 3.2. *Le fait que $f : X^* \to D^*$ soit une fibration et soit propre implique que*

$$\mathbb{H}^i(X_0, R\Psi(\mathbb{Z})) \cong H^i(X_d, \mathbb{Z})$$

où $R\Psi(\mathbb{Z}) = i^*\tilde{j}_*(I^\bullet)$ avec $I^\bullet$ une résolution injective de $\mathbb{Z}|_{\widetilde{X^*}} = \tilde{j}^*\mathbb{Z}|_X$.

On a enfin une suite spectrale :

Proposition 3.3. *On dispose de la suite spectrale des cycles proches*

$$E_2^{pq} = H^p(X_0, R^q\Psi(\mathbb{Z})) \Rightarrow H^{p+q}(X_d, \mathbb{Z}).$$

3.2 Faisceaux de cycles évanescents

On termine cette partie en définissant les faisceaux de cycles évanescents. Le résultat important est l'existence d'une suite exacte longue qui met en jeu les groupes d'hypercohomologie de faisceau du complexe de faisceaux cycles évanescents $\Phi(\mathbb{Z})$:

$$... \to H^i(X_0, \mathbb{Z}) \to H^i(X_d, \mathbb{Z}) \to \mathbb{H}^i(X_0, \Phi(\mathbb{Z})) \to H^{i+1}(X_0, \mathbb{Z}) \to ...$$

On commence par définir le cône d'un morphisme de complexes.

Définition 3.3. *Soit $f : B^\bullet \to C^\bullet$ un morphisme de complexes. Le cône de f, noté cône(f) est le complexe qui vaut $B^{n+1} \oplus C^n$ en degré n et où les différentielles sont définies de la manière suivante*

$$\begin{tikzcd}
B^{n+1} \arrow[r, "-d_B"] \arrow[ddr, "-f"] & B^{n+2} \\
\bigoplus & \bigoplus \\
C^n \arrow[r, "d_C"] & C^{n+1}.
\end{tikzcd}$$

On a alors une suite exacte courte de complexes

$$0 \to C^\bullet \to c\hat{o}ne(f) \to B[1]^\bullet \to 0$$

où $B[1]^n = B^{n+1}$.

Remarque 3.1. *Soit* $\mathcal{F}^\bullet$ *un complexe de faisceaux sur un espace topologique* Y *et* $f : Y \to Y'$ *un morphisme d'espaces topologiques, le fait que pour tout ouvert* $U \subseteq Y$, $f^{-1}(f(U)) \subset U$ *implique qu'il existe un morphisme naturel de complexes de faisceaux de* $\mathcal{F}^\bullet$ *dans* $\mathbb{R}f_*f^*\mathcal{F}^\bullet$, *qui est déterminé par les applications de restriction du faisceau* $\mathcal{F}^\bullet$.

Définition 3.4. *Soit* $\mathcal{F}$ *un faisceau sur* X, *on l'identifie au complexe de faisceaux sur* X *qui vaut* $\mathcal{F}$ *en degré zéro et qui est nul ailleurs, la remarque précédente fournit un morphisme de complexes de faisceaux*

$$\mathcal{F} \to \mathbb{R}\tilde{\tilde{j}}_*\tilde{\tilde{j}}^*\mathcal{F} = R\tilde{\tilde{j}}_*\tilde{\tilde{j}}^*\mathcal{F}.$$

Le foncteur i^* *induit alors un morphisme de complexes de faisceaux sur* X_0 *appelé spécialisation*

$$sp : i^*\mathcal{F} \to R\Psi(\mathcal{F}).$$

On peut alors définir le foncteur cycles évanescents

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \boldsymbol{Sh}(X) & \to & D\boldsymbol{Sh}(X_0) \\ & \mathcal{F} & \mapsto & C\hat{o}ne(sp) \end{array}$$

où $D\boldsymbol{Sh}(X_0)$ *est la catégorie des complexes de faisceaux sur* X_0. *D'après la définition 3.3 on a une suite exacte courte*

$$0 \to R\Psi(\mathcal{F}) \to \Phi(\mathcal{F}) \to i^*\mathcal{F}[1] \to 0.$$

On vérifie facilement que cette suite exacte courte induit une suite exacte longue sur les groupes d'hyperhomologie de ces trois complexes de faisceaux.

$$... \to \mathbb{H}^i(X_0, i^*\mathcal{F}) \to \mathbb{H}^i(X_0, R\Psi(\mathcal{F})) \to \mathbb{H}^i(X_0, \Phi(\mathcal{F})) \to \mathbb{H}^{i+1}(X_0, i^*\mathcal{F}) \to ...$$

Si on prend pour $\mathcal{F}$ *le faisceau* $\mathbb{Z}$, *on peut appliquer les résultats sur les faisceaux de cycles proches. Et on a la suite exacte longue*

$$... \to H^i(X_0, \mathbb{Z}) \to H^i(X_d, \mathbb{Z}) \to \mathbb{H}^i(X_0, \Phi(\mathbb{Z})) \to H^{i+1}(X_0, \mathbb{Z}) \to ...$$

Cette suite exacte longue montre que cette définition correspond bien à l'intuition des cycles évanescents que l'on a essayé de donner dans l'introduction.

4 Définitions de la monodromie et théorème de monodromie locale

4.1 Monodromie locale

On commence par définir l'automorphisme monodromie locale que l'on définira d'abord sur la cohomologie de la fibre $H^*(X_d, \mathbb{Z})$ puis sur les faisceaux de cycles proches.

Proposition 4.1. *Le générateur positif de $\pi_1(D^*)$ induit un automorphisme de $H^*(X_d, \mathbb{Z})$ noté T et appelé automorphisme de monodromie locale.*

Démonstration. L'idée de la démonstration est de relever un champ de vecteur tournant autour de l'origine dans D^* et de considérer l'automorphisme induit sur la fibre X_d quand on fait un tour autour de l'origine dans D^*. On peut ensuite vérifier que l'application induite sur la cohomologie de la fibre ne dépend pas des choix des champs de vecteurs.

□

On définit maintenant l'automorphisme de monodromie locale sur les faisceaux de cycles proches.

Définition 4.1. *Considérons le diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] & X^* \arrow[l, hook', "j"'] \arrow[d] & \widetilde{X^*} \arrow[l, two heads, "\pi"'] \arrow[d, "\tilde{f}"] \arrow[ll, bend right, "\tilde{j}"'] \\
0 \arrow[r, hook] & D & D^* \arrow[l, hook'] & \widetilde{D^*}. \arrow[l, two heads]
\end{tikzcd}$$

On a un automorphisme naturel $T|_{\widetilde{D^*}}$ de $\widetilde{D^*}$ qui correspond au fait de faire un tour autour de l'origine dans D^* en respectant le sens donné par le générateur positif du groupe fondamental de D^* déterminé par la proposition précédente. Si on considère de plus l'automorphisme identité de X^* on a un unique automorphisme, noté T, de $\widetilde{X^*}$ vérifiant $\tilde{f} \circ T = T|_{\widetilde{D^*}} \circ \tilde{f}$ et $\pi \circ T = \pi$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sur X. Considérons le faisceau $\tilde{j}^*\mathcal{F}$ sur $\widetilde{X^*}$. Soit U un ouvert de $\widetilde{X^*}$, comme $\tilde{j} \circ T = j \circ \pi \circ T = j \circ \pi = \tilde{j}$, on a $\tilde{j}(T(U)) = \tilde{j}(U)$ et il existe un isomorphisme naturel entre $\tilde{j}^*\mathcal{F}(U)$ et $T^*\tilde{j}^*\mathcal{F}(U)$. De plus comme $\tilde{j} \circ T = \tilde{j}$, le faisceau $T^*\tilde{j}^*\mathcal{F} = (T \circ \tilde{j})^*\mathcal{F}$ est le faisceau $\tilde{j}^*\mathcal{F}$. On a donc un automorphisme de faisceau $T^* : \tilde{j}^*\mathcal{F} \to \tilde{j}^*\mathcal{F}$. Si *on lui applique le foncteur $i^*(R^q\tilde{j}_*)$ on obtient un automorphisme de faisceau $i^*(R^q\tilde{j}_*)T^* : R^q\Psi(\mathcal{F}) \to R^q\Psi(\mathcal{F})$. Dans le cas des faisceaux de cycles proches on le note encore $T : R^q\Psi(\mathbb{Z}) \to R^q\Psi(\mathbb{Z})$.*

On peut alors vérifier que L'isomorphisme du lemme 3.1

$$R^q\Psi(\mathbb{Z})_x \cong H^q(Mil_{f,x}, \mathbb{Z})$$

est T-équivariant si on considère les automorphismes T défini dans les deux définitions précédentes.

De la même manière on montre que les définitions coïncident avec l'isomorphisme de la proposition 3.2

$$\mathbb{H}^i(X_0, R\Psi(\mathbb{Z})) \cong H^i(X_d, \mathbb{Z}).$$

Ceci implique également, en utilisant le fait que T est naturel, que la convergence de la proposition 3.3

$$E_2^{pq} = H^p(X_0, R^q\Psi(\mathbb{Z})) \Rightarrow H^{p+q}(X_d, \mathbb{Z})$$

est T-équivariante.

4.2 Le théorème de monodromie locale

Les résultats de la partie précédente permettent, grâce aux faisceaux de cycles proches, de démontrer le théorème de monodromie locale.

Théorème 4.2 (Théorème de monodromie locale)**.** *Il existe un entier $a \geq 1$ tel que*

$$(T^a - Id)^{n+1}|_{H^n(X_d,\mathbb{Z})} = 0.$$

La démonstration qu'on présente ici est dû à Grothendieck et on suivra la partie 2.1 de l'article [1]

Démonstration. La preuve se déroule en deux temps. On se ramène d'abord, grâce aux faisceaux de cycles évanescents $R^q\Psi(\mathbb{Z})$, à un énoncé local qu'on peut ensuite démontrer à l'aide de la résolution des singularités d'Hironaka.

La proposition 3.3 fournit la suite spectrale

$$E_2^{pq} = H^p(X_0, R^q\Psi(\mathbb{Z})) \Rightarrow H^{p+q}(X_d, \mathbb{Z}),$$

où la convergence est T-équivariante. Supposons qu'il existe un entier a tel que $T^a|_{R^q\Psi(\mathbb{Z})} = Id$ pour tout q, alors $T^a|_{E_2^{pq}} = Id$ et donc $T^a|_{E_3^{pq}} = Id$

car E_3^{pq} est un sous-quotient de E_2^{pq}. Ainsi par récurrence on montre que $T^a|_{E_\infty^{pq}} = Id$. Pour tout n, il existe une filtration de $H^n(X_d,\mathbb{Z})$,

$$0 = F^{n+1}H^n(X_d,\mathbb{Z}) \subseteq ... \subseteq F^pH^n(X_d,\mathbb{Z}) \subseteq ... \subseteq F^1H^n(X_d,\mathbb{Z}) \subseteq F^0H^n(X_d,\mathbb{Z}) = H^n(X_d,\mathbb{Z})$$

telle que $E_\infty^{pq} = F^pH^{p+q}(X_d,\mathbb{Z})/F^{p+1}H^{p+q}(X_d,\mathbb{Z})$. On a vu que $(T^a - Id)|_{E_\infty^{pq}} = 0$ ce qui équivaut à dire que $(T^a - Id)$ envoie $F^pH^{p+q}(X_d,\mathbb{Z})$ dans $F^{p+1}H^{p+q}(X_d,\mathbb{Z})$ or comme $F^{n+1}H^{p+q}(X_d,\mathbb{Z}) = 0$, $(T^a - Id)^{n+1}|_{H^n(X_d,\mathbb{Z})} = 0$. Il suffit donc de montrer qu'il existe un entier a tel que $T^a|_{R^q\Psi(\mathbb{Z})} = Id$ pour tout q. Comme f est propre, X_0 est compact et il suffit de trouver un tel entier localement sur X_0.

On peut donc supposer que X est un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$. La résolution des singularités d'Hironaka permet de supposer que f est donnée par

$$(z_1, z_2, ..., z_n) \to z_1^{e_1} z_2^{e_2} ... z_r^{e_r}.$$

On va montrer que $a = ppcm(e_i)$ convient. Soit $x \in X_0$, soit $I = \{i \in [1,r] | x \in \{z_i = 0\}\}$ et J le complémentaire de I dans $[1,r]$. On montre que si $e = pgcd(e_i, i \in I)$, alors

$$T^e|_{R^q\Psi(\mathbb{Z})_x} = Id$$

pour tout q. Supposons $x \neq 0$. On a

$$f(z_1, ..., z_n) = \prod_{i\in I} z_i^{e_i} \prod_{j \in J} z_j^{e_j}.$$

Soit $i_0 \in I$, on pose le changement de variable au voisinage de x

$$\left\{ \begin{array}{lcll} z'_i & = & z_i - x_i & si \quad i \neq i_0 \\ z'_{i_0} & = & z_{i_0} \left(\prod_{j\in J} z_j^{e_j}\right)^{1/e_{i_0}} & \end{array} \right.$$

où pour définir $\left(\prod_{j\in J} z_j^{e_j}\right)^{1/e_{i_0}}$ il suffit de choisir un logarithme au voisinage de x. Ce changement de variable est bien un difféomorphisme au voisinage de x car

$$\frac{dz'_{i_0}}{dz_{i_0}}(x_1, ..., x_n) = \left(\prod_{j\in J} x_j^{e_j}\right)^{1/e_{i_0}} \neq 0.$$

De plus x est envoyé sur 0. On peut donc supposer que $x = 0$ et que f est donnée par

$$(z_1, ..., z_n) \to \prod_{i \in I} z_i^{e_i}.$$

En changeant les notations on peut supposer que $I = [1, r]$ et on s'est ramené à montrer que

$$T^e|_{R^q\Psi(\mathbb{Z})_0} = Id.$$

Or on a vu dans la démonstration du lemme 3.1 que

$$R^q\Psi(\mathbb{Z})_0 \cong H^q(F, \mathbb{Z})$$

où F est le sous-espace analytique de $\mathbb{C}^{*r} \times \{\Im(u) > 0\}$ défini par l'équation

$$\prod_{i\in I} z_i^{e_i} = e^{2\pi i u}.$$

De plus la monodromie sur $H^q(F, \mathbb{Z})$ est l'automorphisme induit par

$$\begin{array}{cccc} T: & F & \to & F \\ & (z_1, ..., z_r, u) & \mapsto & (z_1, ..., z_r, u+1). \end{array}$$

On choisi des entiers $\{\alpha_i\}_{1\leq i\leq r}$ vérifiant

$$\sum_{1\leq i\leq r} \alpha_i \cdot e_i = pgcd(e_i) = e$$

On défini un flot χ_t sur F pour $t \in \mathbb{R}$ de la manière suivante

$$\chi_t(z_1, ...z_r, u) = \left(\exp\left(2\pi i t\frac{\alpha_1}{e}\right)z_1, ..., \exp\left(2\pi i t\frac{\alpha_r}{e}\right)z_r, u+t\right).$$

Ce flot est bien défini car $f\left(\exp\left(2\pi i t\frac{\alpha_1}{e}\right)z_1, ..., \exp\left(2\pi i t\frac{\alpha_r}{e}\right)z_r\right) = \exp(2\pi i t)\cdot f(z_1, ..., z_n)$ et donc si $(z_1, ...z_r, u) \in F$, alors

$$f\left(\exp\left(2\pi i t\frac{\alpha_1}{e}\right)z_1, ..., \exp\left(2\pi i t\frac{\alpha_r}{e}\right)z_r\right) = \exp\left(2\pi i(t+u)\right)$$

et finalement $\chi_t(z_1, ...z_r, u) \in F$. Or $\chi_e(z_1, ...z_r, u) = (z_1, ...z_r, u+e) = T^e(z_1, ..., z_r, u)$. Si on regarde F comme étant $f^{-1}(1) \times \{\Im(u) > 0\}$ alors on peut considérer que le flot χ_t agit par $u \mapsto u+t$ et par l'identité sur $f^{-1}(1)$. Donc l'application induite par χ_t sur $H^q(F, \mathbb{Z}) \cong H^q(f^{-1}(1), \mathbb{Z})$ est l'identité, comme $T^e = \chi_e$, l'application induite par T^e sur $H^q(F, \mathbb{Z})$ est l'identité et finalement

$$T^e|_{R^q\Psi(\mathbb{Z})_0} = Id.$$

On pose $e'_i = e_i/e$ et $\zeta = \exp\left(\frac{2\pi i}{e}\right)$ On peut montrer plus précisément que

$$F = \coprod_{0\leq k\leq e-1} F_k$$

où F_k ets le sous-espace analytique de $\mathbb{C}^{*r} \times \{\Im(u) > 0\}$ défini par l'équation

$$\prod_{i \in I} z_i^{e'_i} = \zeta^k \exp\left(\frac{2\pi i u}{e}\right).$$

L'automorphisme T envoie F_k dans F_{k+1} si $0 \leq k \leq e-1$ et F_{e-1} dans F_0. Donc d'après ce qui précède

$$H^q(F, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}] \times H^q(F_0, \mathbb{Z})$$

et la monodromie agit par $\overline{n} \mapsto \overline{n+1}$ sur le facteur $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}]$ et par l'identité sur $H^q(F_0, \mathbb{Z})$.

$\square$

Références

[1] Luc Illusie. *Exposé I : Autour du théorème de monodromie locale.* Orsay, France : Université de Paris-sud, Département de mathématiques, 1992.

[2] John Milnor. *Singular points of complex hypersurfaces.* Princeton University Press, 1968.