Introduction au Domaine de Recherche

Marches aléatoires sur des groupes de type fini moyennables

Nicolás Matte Bon

Encadrant

Anna Erschler

Université Paris Sud-Orsay

Mon travail de M2 et de thèse se situe dans le domaine des marches aléatoires sur les groupes, plus spécifiquement les groupes dénombrables. Ce texte est divisé en deux parties. La première est une introduction élémentaire à quelques aspects du sujet, notamment la *propriété de Liouville* pour les marches aléatoires et ses relations avec la *croissance* et la *moyennabilité* des groupes. On rappelle quelques résultats classiques (sans démonstrations), et on énonce quelques questions ouvertes. La deuxième partie, moins détaillée et plus spécifique, est un bref survol sur des résultats plus récents à propos des marches aléatoires et de la moyennabilité de certaines classes de groupes, qui agissent sur des arbres enracinés. Ces groupes ont fait l'objet de mon mémoire de M2 - un survol de quelques résultats dus à plusieurs auteurs, et de mon travail successif.

Remerciements

Je remercie Anna Erschler, ma directrice de thèse, pour m'avoir introduit à ce sujet et pour ses conseils et sa gentillesse et disponibilité constant. Le travail exposé à la fin de ce texte est en commun avec Gidi Amir, Omer Angel et Bálint Virág, je leur suis très reconnaissant pour leur disponibilité à travailler avec moi. Un remerciement supplémentaire à Gidi Amir pour des nombreuses discussions clarifiants autour de plusieurs sujets.

Table des matières

1 Marches aléatoires sur les groupes dénombrables

Soit G un groupe dénombrable. Si G est de type fini, on le suppose muni d'une partie finie génératrice symétrique S. Dans ce cas, la *métrique des mots* est la distance sur G définie par

$$d_S(g,h) = \min\{n \,:\, \exists s_1,\dots,s_n \in S,\ g^{-1}h = s_1\cdots s_n\}$$

ceci définit une distance invariante par translation à gauche, qui fait de G un espace métrique discret. Si T est une autre partie génératrice, les deux métriques des mots sont *bi-Lipschitz équivalentes*, c'est à dire il existe deux constantes c et C telles que $cd_T \leq d_S \leq Cd_T$. Informellement, ceci dit que les "propriétés de grande échelle" de l'espace (G, d_S) dépendent peu du choix de la partie génératrice. Le *graphe de Cayley* $\mathrm{Cay}(G, S)$ est le graphe qui a pour ensemble de sommets G et $g, h \in G$ sont reliés par une arête si et seulement si il existe $s \in S$ tel que $h = gs$. La métrique des mots d_S coïncide avec la distance ordinaire sur le graphe de Cayley.

Munissons G d'une mesure de probabilité μ. Ceci définit une *marche aléatoire* $(\mathbf{g}_n)_n$, la chaine de Markov d'espace d'état G issue de e obtenue en multipliant à droite à chaque instant par un élément de loi μ indépendant du passé. On suppose que la mesure μ est *non dégénérée*, c'est-à-dire que son support engendre G comme semi-groupe (autrement dit, tout élément de G a une probabilité non nulle d'être atteint par la marche aléatoire).

Dans le cas particulier où μ est équidistribué sur la partie génératrice S, la marche aléatoire est une marche aléatoire simple sur le graphe $\mathrm{Cay}(G, S)$. Il est néanmoins important de considérer aussi des mesures plus générales, non symétriques et dont le support n'est pas forcement fini. La distribution du n-ième pas $\mathbf{g}_n$ est donnée par la convolution μ^{*n}, où la convolution de deux mesure μ, ν sur G est définie par

$$\mu * \nu(g) = \sum_{h \in G} \mu(gh)\nu(h^{-1})$$

La théorie des marches aléatoires sur les groupes s'occupes d'étudier les liens entre le comportement asymptotique de la marche aléatoire, les propriétés de grande échelle de l'espace métrique (G, d_S) et la structure algébrique du groupe G.

Introduisons d'abord deux notions de théorie des groupes qui jouent un rôle central.

1.1 Moyennabilité et croissance des groupes

Définition 1.1. Une *moyenne* sur un ensemble X est une mesure *finiment additive* (pas nécessairement σ-additive), définie sur toutes les parties de X et de masse totale 1.

Un groupe dénombrable G est dit *moyennable* s'il admet une moyenne invariante par l'action de G sur ses parties par translations à gauche.

Cette notion, due a Von Neumann [vN29], a été initialement motivée par le célèbre *paradoxe de Banach Tarsky* (l'existence d'une décomposition de la boule euclidienne de dimension trois en un nombre fini de sous-parties, qui peuvent être réassemblées isométriquement pour obtenir deux copies identiques de la boule de départ) . On dit qu'un groupe admet une *décomposition paradoxale* si il peut être décomposé comme union disjointe

$$G = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n \sqcup B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_n$$

telle que il existent $g_1, \ldots g_n, h_1, \ldots, h_n$ tels que $G = g_1A_1 \cup \cdots \cup g_nA_n = h_1B_1 \cup \cdots \cup h_nB_n$. Par exemple, le groupe libre a deux générateurs $F_2 =< a, b >$ admet une telle décomposition : notons A_x l'ensemble des mots réduits commençant par la lettre $x \in \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$, on a alors

$$F_2 = \{e\} \sqcup A_a \sqcup A_{a^{-1}} \sqcup A_b \sqcup A_{b^{-1}}$$

et $F_2 = a^{-1}A_a \cup aA_{a^{-1}} = bA_{b^{-1}} \cup b^{-1}A_b$. Cette décomposition est un ingrédient crucial du paradoxe de Banach-Tarsky. Une moyenne invariante est une obstruction à l'existence d'une telle décomposition paradoxale, et la réciproque est vraie aussi (ce fait est connu comme l'*alternative de Tarsky*).

De la définition il découle que les groupes finis sont moyennables, la mesure de comptage étant une moyenne invariante. Ils s'agit des seuls exemples évidents à partir de la définition. Pour montrer que ce n'est pas les seuls, on rappelle deux parmi les innombrables caractérisations équivalentes de la moyennabilite, qui montrent le lien avec la géométrie des graphes de Cayely et aux marches aléatoires. On renvoie à [**?**] pour un survol sur la moyennabilité et ses caractérisations équivalentes.

Pour un sous-ensemble $E \subset G$ d'un groupe de type fini, posons

$$\partial_S E = \{g \in E \,:\, \exists s \in S,\, gs \notin E\}$$

.

Théorème 1 (Critères de Følner et de Kesten pour les groupes de type fini)**.** *Soit $G =< S >$ un groupe de type fin. Sont équivalentes*

1. *G est moyennable.*
2. *(*Critère de Følner*) Le graphe* $\mathrm{Cay}(G, S)$ *ne vérifie pas une inégalité isoprérimétriques linéaire, c'est-à-dire il existe une suite $E_n \subset G$ telle que $|\partial_S E_n|/|E_n| \to 0$. Une telle suite s'appelle* suite de Følner*.*
3. *(*Critère de Kesten*) Pour toute mesure μ symétrique de support S, la probabilité de retour en l'identité aux temps pairs $\mu^{*2n}(e)$ ne décroit pas exponentiellement vite.*

Notons que comme la définition de moyennabilité ne dépend pas du choix d'une partie génératrice, le critère de Følner et de Kesten sont simultanément vérifié (où pas) pour tout S.

Le critère de Følner montre immédiatement que $\mathbb{Z}^d$ est moyennable pour tout d, (les boites de coté n sont une suite de Følner).

De plus, la moyennabilité est stable par un certain nombre d'opérations :

Théorème 2. *(Opérations préservant la moyennabilité)*

1. *Les sous-groupes d'un groupe moyennable sont moyennables.*
2. *Les limites directes d'un groupe moyennable sont moyennables.*
3. *La moyennabilité est stable par extensions : si K, H sont moyennables et G vérifie une suite exacte courte*

$$1 \to K \to G \to H \to 1$$

alors G est moyennable.

En particulier tous les groupes que l'on obtient à partir des groupes finis et abéliens de type fini via ces opérations sont moyennables. On rappelle qu'un groupe G est dit résoluble s'il admet une suite de sous-groupes $\{e\} = G_0 \lhd \cdots \lhd G_r = G$ tel que G_{i+1}/G_i est abélien. On a immédiatement que *les groupes résolubles sont moyennables.* En revanche, les groupes ayant un sous-groupe libre ne sont pas moyennables. Dans certains classes de groupes, par exemple les groupes de type fini linéaires sur un corps, celle-ci est essentiellement une caractérisation complète de la moyennabilité (l'*alternative de Tits* affirme qu'un groupe de type fini linéaire sur un corps contient soit un sous-groupe libre, sois un sous-groupes d'indice fini résoluble). Pour des groupes plus généraux, ces implications sont loin d'être des équivalences.

Un autre concept lié est celui de *croissance* d'un groupe. Pour un groupe de type fini $G =< S >$, la fonction de croissance est la fonction qui compte le nombre d'éléments dans la boule de rayon n centrée en l'identité.

$$b_{G,S}(n) = |\{g \in G \,:\, d_S(e,g) \le n\}|$$

Si T est une autre partie génératrice finie symétrique, il existent deux constantes $c, C \in \mathbb{R}$

$$b_{G,S}(cn) \le b_{G,T}(n) \le b_{G,S}(Cn)$$

les inégalités de ce type définissent une classe d'équivalence de fonctions. On peut donc parler de la croissance d'un groupe sans spécifier une partie génératrice, en considérant la classe d'équivalence d'une de ses fonctions de croissance. En particulier la définition suivante ne dépend pas du choix d'une partie génératrice.

Définition 1.2. On dit que la croissance d'un groupe de type fini est *exponentielle* s'il existe $a > 1$ tel que

$$b_{G,S}(n) \ge a^n$$

est que la croissance est *sous-exponentielle* sinon. Dans ce dernier cas, on dit de plus que la croissance est *polynomiale* s'il existent $C, d > 0$ tels que

$$b_{G,S}(n) \le Cn^d$$

est qu'elle *intermédiaire* sinon.

Un célèbre théorème de Gromov affirme qu'un groupe est à croissance polynomiale si et seulement si il contient un sous-groupe d'indice fini *nilpotent* [Gro81].

Si les boules dans le graphes de Cayley vérifient une inégalité isopérimetrique linéaire avec constante uniforme, la croissance est automatiquement exponentielle. Le critère de Følner entraîne donc qu'*un groupe de croissance sous-exponentielle est moyennable*. La réciproque est fausse (par exemple, les groupes résolubles peuvent avoir croissance exponentielle).

1.2 Bord de Poisson et fonctions harmoniques

A un groupe mesuré (G, μ) on peux associer le *bord de Poisson* $(B, \mathcal{F}, \nu)$ un espace de probabilité qui code le comportement à l'infini de la marche aléatoire . Ceci est un quotient de *l'espace des trajets* de la marche aléatoire droite $(G^{\mathbb{N}}, \mathcal{P}(G)^{\otimes\mathbb{N}}, \mathbb{P})$ où la mesure $\mathbb{P}$ est la loi du trajet de la marche aléatoire $(\mathbf{g}_n)_n$ issue de e (attention à ne pas confondre cet espace avec *l'espace des incréments* de la marche aléatoire qui est muni de la mesure produit $\mu^{\otimes\mathbb{N}}$).

Dans l'espace des trajets, considérons la rélation d'équivalence

$$(g_n)_n \sim (g'_n)_n \quad \text{s'il existe } n_0 \; g_m = g'_m \; \forall m \ge n_0$$

Définition 1.3. Le bord de Poisson $(B, \mathcal{F}, \nu)$ de (G, μ) est le quotient mesurable de l'espace des trajets par la relation d'équivalence $\sim$.

Remarque 1.4. Ceci est en effet la définition habituelle du *bord de queue* de (G, μ), mais on peut montrer qu'il coïncide avec le bord de Poisson dans ce cadre.

Le groupe G agit à gauche sur le bord de Poisson. L'action ne préserve pas la mesure ν, mais préserve sa classe d'absolue continuité. Informellement, faire agir l'élement $g \in G$ correspond à considérer la marche aléatoire issue de g.

On dit que le bord de Poisson est trivial s'il est mesurablement isomorphe à un point.

Le bord de Poisson admet une définition simple en tant que G-espace de probabilité abstrait. Néanmoins, tirer des conclusion concrètes directement de sa définition est quasiment impossible (même s'il s'agit seulement d'en décider la trivialité).

Une question récurrente dans ce domaine consiste à identifier (=décrire) le bord de Poisson pour des classes de groupes et de marches aléatoires, c'est-à dire trouver un espace "concret" sur lequel le groupe agit (dans la majorité des cas un espace topologique), le munir d'une mesure de probabilité et montrer que celui-ci est isomorphe au bord de Poisson en tant qu'espace de probabilité (on insiste cependant sur le fait que le bord de Poisson n'admet pas de topologie intrinsèque). Un cas d'école qui illustre ce problème sont les groupes qui admettent une compactification naturelle (un *bord géométrique*), comme par exemple les *groupes hyperboliques*. Une technique standard dans ce cas consiste à montrer que le trajets de la marche aléatoire convergent presque sûrement vers un point du bord géométrique (qui est donc naturellement muni d'une mesure de probabilité, la loi du point limite), puis montrer que celui-ci est mesurablement isomorphe au bord de Poisson (voir [Kai00] pour des vastes applications de cette idéee). La deuxième partie est la plus difficile, et tous les résultats connus demandent des hypothèse de décroissance sur la mesure μ. Pour des mesures très dispersées, il reste des questions ouvertes même dans les cas en apparence plus simples (comme celui du groupe libre).

Une point de vue alternatif sur le bord de Poisson peut être donné en terme de *fonctions μ-harmoniques bornées*

Définition 1.5. Une une fonction $f : G \to \mathbb{R}$ est dite *μ-harmonique* si pour tout $g \in G$

$$f(g) = \sum_{h \in G} \mu(h) f(gh)$$

On peut montrer que *le bord de Poisson est trivial si et seulement si (G, μ) n'admet pas de fonctions μ-harmonique bornées non constantes* (plus précisement, le bord de Poisson est la bonne notion de "bord" pour poser et résoudre le *problème de Dirichlet au bord* pour les fonctions μ-harmoniques bornées, ce qui justifie la terminologie).

Illustrons le lien entre les fonctions harmoniques et le comportement à l'infini de la marche aléatoire avec un exemple particulièrement simple. Soit $A \subset G$ et posons

$$f_A(g) = \mathbb{P}(g\mathbf{g}_n \in A \text{ pour une infinité de } n),$$

où $(\mathbf{g}_n)_n$ est la marche aléatoire issue de e (ainsi, $(g\mathbf{g}_n)_n$ est la marche aléatoire issue de g). L'événement dans l'argument de la probabilité ne dépend que du comportement asymptotique de la marche aléatoire. La fonction f_A μ-harmonique : grace à la propriété de Markov la probabilité en question est égale à la moyenne des mêmes probabilités après un pas de la marche aléatoire. Une simple application de la loi 0-1 de Kolmogorov montre que *si on suppose de savoir que f_A est constante*, sa valeur est 0 où 1. Néanmoins, la question si elle peut être non constante pour un certain choix de A est plus subtile et dépend non trivialement de (G, μ). Cette question est le sujet du prochain paragraphe.

1.3 La propriété de Liouville

Définition 1.6. On dit que (G, μ) a la propriété de Liouville si le bord de Poisson $(B, \mathcal{F}, \mu)$ est trivial comme espace de probabilité.

On veut maintenant énoncer un théorème qui résume plusieurs critères équivalents à las propriété de Liouville. Pour cela, on aura besoin de deux notions.

L'entropie de Shannon d'un mesure ν sur un ensemble dénombrable E est la quantité

$$H(\nu) = -\sum_{x\in E} \nu(x) \log \nu(x) \in [0, +\infty]$$

l'entropie admet l'interprétation heuristique suivante : si X est une variable aléatoire de loi ν à valeurs dans E définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, l'entropie $H(\nu)$ est "la quantité d'information que, en moyenne, on obtient sur la position du point $\omega \in \Omega$ en observant $X(\omega)$". Si la mesure ν est à support fini on a $H(\nu) \leq \log|\mathrm{supp}(\nu)|$, ce qui est cohérent avec cette interprétation heuristique.

Si μ est une mesure sur un groupe, la limite sous-additive suivante existe et s'appelle *entropie asymptotique* (ou *entropie d'Avez*)

$$h(\mu) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\mu^{*n}).$$

Supposons G de type fini. On dit que la mesure a premier moment fini si $\mathbb{E} d_S(e, \mathbf{g}_1) = \sum_{g\in G} \mu(g) d_S(e, g) < +\infty$ (ceci ne dépend pas de S). Le *théorème ergodique sous-additif* garantit que la limite suivante existe presque surement et dans L^1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} d_S(e, \mathbf{g}_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} d_S(e, \mathbf{g}_n) = l(\mu)$$

la limite (déterministe) $l(\mu)$ s'appelle *vitesse de fuite.*

Le théorème suivant classique.

Théorème 3 ([KV83, Die80, KL07])**.** *Soit (G, μ) un groupe mesuré, où μ est non-dégenerée. Les caractérisations suivantes de la propriété de Liouville sont équivalentes*

(i) Le bord de Poisson de (G, μ) est trivial.

(ii) Le groupe G n'admet pas de fonctions μ-harmoniques bornées non constantes.

(iii) Supposons de plus $H(\mu) < +\infty$. Sous cette hypothèse, la propriété de Liouville est équivalente a $h(\mu) = 0$.

(iv) Supposos de plus que G est de type fini, μ symétrique et à premier moment fini. Sous ces hypothèses, la propriété de Liouville est équivalente à $l(\mu) = 0$.

Ces équivalences sont spécifiques aux groupes. Les quatre propriétés en jeux peuvent être formulées aussi dans des contextes plus généraux, par exemple les marches aléatoires simples sur les graphes, néanmoins cette équivalence remarquable n'a plus lieu (voir [Pet13] pour un survol sur ces équivalences et des contre-exemples connus dans des autres contextes).

Dans (iv) l'hypothèse de symétrie est essentielle (par exemple une marché aléatoire non centrée dans $\mathbb{Z}$ a vitesse de fuite non nulle, pourtant elle est Liouvillienne)

Le critère d'entropie (iii) fait le lien avec la croissance des groupes. On peut montrer que $h(\mu) = 0$ est équivalent à l'existence une suite de sous-ensemble $A_n \subset G$ tels que la cardinalité de A_n croit sous-exponentiellement vite et la masse $\mu^{*n}(A_n)$ reste loin de 0. En particulier, *toute mesure a support fini sur en groupe de croissance sous-exponentielle a la propriété de Liouville*, car dans ce cas le cardinal de $\mathrm{supp}(\mu^{*n})$ croit sous-exponentiellement . Ceci est en général faux pour les groupes moyennables de croissance exponentielle. Le lien entre propriété de Liouville et moyennabilité est donnée par le théorème suivant.

Théorème 4 (Kaimanovich-Vershik, Rosenblaat [KV83, Ros81])**.** *Un groupe G est moyennable si et seulement s'il admet une mesure μ non dégénérée avec la propriété de Liouville. Cette mesure peut être choisie symétrique.*

Néanmoins cette mesure n'a pas forcement support fini, et sur certains groupes moyennables la mesure Liouvillienne peut être très dispersée et difficile à trouver explicitement.

Les liens entre la propriété de Liouville est la croissance sont résumés dans le théorème suivante.

Théorème 5 (Propriété de Liouville et croissance)**.**

1. *Soit G a croissance polynomiale et μ un mesure quelconque. Alors (G, μ) a la propriété de Liouville.*
2. *Soit G a croissance intermédiaire et μ a premier moment fini. Alors (G, μ) a la propriété de Liouville.*

Le point 1 est un résultat de nature algébrique plutôt qu'analityque, et répose sur le théorème de Gromov sur les groupes de Croissance polynomiale. En effet un résultat connu comme *théorème de Choquet-Deny* affirme que toute mesure sur un groupe nilpotent (pas forcément de type fini) a la propriété de Liouville (le théorème originel concernait les groupe abeliens, la généralisation aux groupes nilpotents est due à [DM61]). On termine cette section en discutant des questions ouvertes assez générales dans ce contexte.

Question 1. Existent-t-il des autres groupes de type fini, de croissance non polynomiale, pour lesquels toute mesure a la propriété de Liouville ?

Ceci est faux en général pour les groupes de croissance intermédiaire, un contre-exemple est du à A. Erschler [Ers04a]. Néanmoins cette question est toujours ouverte pour l'exemple plus célèbre d'un groupe à croissance intermédiaire : le premier groupe de Grigorchuck [Gri83].

Pour les groupes de croissance exponentielle, V. Kaimanovich et A. Vershik ont formulé en 1983 la conjecture suivante qui reste ouverte

Conjecture 1 ([KV83])**.** Tout groupe de croissance exponentielle admet une mesure symétrique (en général a support infini) qui n'a pas la propriété de Liouville.

D'après le théorème 4, cette question est non triviale seulement pour les groupes moyennables. Une réponse affirmative est connue dans le cas des groupes résolubles de croissance exponentielle [Ers04b].

Sur certains groupes moyennables de croissance exponentielle, toute mesure symétrique, a support fini a la propriété de Liouville. Pour les groupes de croissance exponentielle la symétrie est une hypothèse importante : les mesures non symétriques sur ces groupes n'ont souvent pas la propriété de Liouville même si le support est fini (il existe pourtant de groupes de croissance exponentielle où toute mesure à support fini, symétrique ou pas, a la propriété de Liouville [BE11]).

Pour les mesures symétriques à support fini (=marches aléatoires symétriques sur un graphe de Cayley), la question suivante est ouverte

Question 2 (Stabilité et monotonie de la propriété de Liouville)**.** 1. Soit G un groupe qui admet une mesure symétrique, à support fini, non dégénérée avec la propriété de Liouville. La même conclusion est-elle vraie pour toute telle mesure ?

2. Soit G un groupe telle que toute mesure symétrique, à support fini, non dégénérée a la propriété de Liouville. La même conclusion est-elle vraie pour tout sous groupe de type fini $H < G$?

Citons enfin une dernière question de nature plus quantitative. Considérons une mesure μ symétrique, à support fini non dégénérée sur un groupe de type fini. On a vu que dans ce cas, la propriété de Liouville est équivalente à la sous-linéairité de la fonction

$$L_\mu(n) = \mathbb{E} d_S(e, \mathbf{g}_n)$$

Il est bien connu que dans le cas des groupe abéliens de type fini on a $L_\mu(n) \simeq \sqrt{n}$ (la notation $f(n) \simeq g(n)$ veut dire ici $cf(n) \leq g(n) \leq Cf(n)$). Ce fait se généralise aux groupes de croissance polynomiale. En général on a $c\sqrt{n} \leq L_\mu(n) \leq Cn$ ([LP09]).

Sur un groupe non moyennable on a forcément $L_\mu(n) \simeq n$, d'après le fait que μ n'a pas la propriété de Liouville (théorème 4) et le théorème 3, point (iv).

Sur les groupes moyennables, une variété de comportements est possible.

Question 3 (Vershik)**.** Quelles sont les asymptotiques possibles de $L_\mu(n)$?

Le progrès plus récent dans cette question est le résultat suivant de G. Amir et B. Virág [AV12] : pour toute fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $cn^{3/4} \leq f(n) \leq Cn$ et qui vérifie une faible hypothèse de régularité, il existe (G, μ) comme ci-dessus tel que $L_\mu(n) \simeq f(n)$. Il n'est toujours pas connu si on peut réaliser essentiellement tous les comportements entre $\sqrt{n}$ et n. Les résultat précédent est une des application des construction basées sur les *groupes agissants sur les arbres enracinés*, une source de nouveaux exemples de groupes moyennables qu'on discutera dans la dernière section.

1.4 Un cas d'école

Pour illustrer ces notions, discutons un exemple classique, le *lamplighter group* (=groupe de "l'allumeur de réverbères") de base $\mathbb{Z}^d$. On inclut cet exemple pour son importance historique [KV83] et parce que ils nous permet d'illustrer, dans un cas simple, une technique qui motive partiellement certaines questions exposées dans la dernière section, où on ne pourra pas donner le détails. Cette technique peut être résumé comme suit : *réduire la propriété de Liouville à une autre propriété, plus facile à étudier, de la marche aléatoire projetée à un quotient du groupe.* Dans ce cas le quotient du groupe sera $\mathbb{Z}^d$ et la propriété plus simple est la récurrence/transience, la situation est donc complètement comprise.

Le groupe *lamplighter* est le produit semi-direct

$$(\bigoplus_{\mathbb{Z}^d} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}^d$$

où $\bigoplus_{\mathbb{Z}^d} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dénote l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ a support fini, et $\mathbb{Z}^d$ agit sur ce groupe par translation. Cette construction s'appelle *produit en couronne* et est dénotée $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \wr \mathbb{Z}^d$. Il est résoluble, donc moyennable. On peut imaginer que sur chaque élément de $\mathbb{Z}^d$ il y a un réverbère et qu'au plus un nombre fini de réverbères sont allumés. On interprète un élément $(f, x) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \wr \mathbb{Z}^d$

comme la donnée d'une configuration f de réverbères allumées et de la position $x \in \mathbb{Z}^d$ d'un "allumeur de réverbères". Dénotons f_0 la configuration telle que pour $x \neq 0$ in $\mathbb{Z}^d$ on a $f_0(x) = 0 \in \mathbb{Z}/2$ et $f_0(0) = 1$. La multiplication a droite par $(f_0, 0)$ correspond à "changer l'état du réverbère où l'allumeur se trouve". Le groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \wr \mathbb{Z}^d$ est de type fini, il est engendré par

$$S = \{(f_0, 0), (\bar{0}, \pm e_1), \ldots, (\bar{0}, \pm e_d)\}$$

où $\bar{0}$ est la configuration où tous les réverbères sont éteintes et $e_1, \ldots, e_d$ la base canonique de $\mathbb{Z}^d$

Considérons la mesure μ équi-distribuée sur S et soit $(\mathbf{f}_n, \mathbf{x}_n)$ la marche aléatoire associée.

Si $d \geq 3$, la projection $\mathbf{x}_n$ à $\mathbb{Z}^d$ est *transiente*, donc l'allumeur visite le point 0 un nombre fini de fois, et l'état du réverbère en 0 se stabilise à partir d'un certain temps. Définissons une fonction $h : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \wr \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ comme suit : $h(g)$ est la probabilité que la marche aléatoire issue de g laisse l'ampoule en 0 allumée. Cette fonction est bornée et non constante. De plus elle est μ-harmonique : pour calculer la probabilité en question on peut regarder le premier pas de la marche aléatoire et moyenner sur les cas possibles. Donc la mesure μ n'as pas la propriété de Liouville.

Réciproquement, on peut montrer que si $d \leq 2$ marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ est récurrente, et on visite une infinité de fois le sous-groupe $\bigoplus_{\mathbb{Z}^d} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, qui est abélien. On peut montrer que ceci implique la propriété de Liouville.

Cette approche entraîne automatiquement la stabilité de la propriété de Liouville par changement de la mesure (toujours supposée symétrique et a support fini). Le théorème de Kanai (voir [LP13], théorème 2.17) assure que la transience/récurrence des graphes a les bonnes propriétés de stabilité et monotonie qui sont inconnues pour la propriété de Liouville (Question 2). Une modification mineure de la preuve entraîne donc que *toute mesure symétrique, à support fini, non dégénérée sur* $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \wr \mathbb{Z}^d$ *est liouvillenne pour* $d \leq 2$ *et n'est pas liouvillienne pour* $d \geq 3$.

2 Groupes agissants sur les arbres enracinés

2.1 Des nouveaux exemples de groupes moyennables

Un groupe est dit *élémentairement moyennble* s'il peut être construit à partir des groupes fini et abéliens via les opérations préservant la moyennabilité (2). La classe de groupes élémentairement moyennables est dénotée *EG*. Des exemples de groupes moyennables hors de la classe *EG* sont connus depuis longtemps : le premier exemple d'un tel groupe *groupe de Grigorchuk* [Gri83]) de croissance intermédiare. Ceci peut encore être vu comme un cas "facile" de moyennabilité grace au critère de Følner (Théorème 1). Définissons alors la classe *SG* des groupes *sous-exponentiellement moyennables* de manière analogue à la classe *EG* mais à partir des groupes de croissance sous-exponentielle. Le premier exemple d'un groupe moyennable qui n'est pas dans la classe *SG* est le groupe *Basilica*, défini dans [GZ02] où la question de sa moyennabilité fut soulevée. Sa moyennabilité fut prouvée par L. Bartholdi et B. Virág [BV05a] en utilisant les marches aléatoires, et la preuve a ensuite été simplifiée par Kaimanovich [Kai05].

K. Juschenko et N. Monod [JM13] ont montré qu'il existe des groupes moyennables, infini, de type fini simples, ces groupes ne sont pas dans la classe *SG*. La moyennabilité de ces groupes et du groupe Basilica est maintenant un cas particulier d'un critère de moyennabilité dû a K. Juschenko, V. Nekrashevych et M. de la Salle [JNdlS13].

2.2 Un groupe auto-similaire : le groupe Basilica

Le groupe Basilica et le groupe de Grigorchuk sont des groupes d'automorphismes d'un *arbre enraciné régulier* de degré 2. Cet arbre s'identifie avec l'ensemble des mots d'un alphabet $X = \{0, 1\}$ que l'on note

$$X^* = \{x_1 x_2 \cdots x_l \ : \ l \geq 0 \, x_i \in X\}$$

cet ensemble est naturellement l'ensemble des sommets d'un arbre enraciné dont la racine est le mot vide $\varnothing$ et les arètes sont de la forme (w, wx) pour $w \in X^*$ et $x \in X$. Tout automorphisme de X^* fixe la racine $\varnothing$

Le groupe Basilica B est le groupe d'automorphismes de X^* engendré par deux automorphismes $a, b \in \mathrm{Aut}(X^*)$ qui admettent les définitions récursives suivante

$$\begin{aligned} a(0w) &= 0b(w) \qquad & b(0w) &= 1a(w) \\ a(1w) &= 1w \qquad & b(1w) &= 0w \end{aligned}$$

donc par exemple $b(10) = 00$ et $a(010) = 0b(10) = 000$.

Il est facile de voir que pour tout automorphisme de l'arbre $g \in \mathrm{Aut}(X^*)$ et tout sommet $w \in X^*$ de l'arbre il existe un unique automorphisme de X^*, dénoté $g|_w$, qui "donne l'action de g sur le sous arbre de racine w", formellement $g|_w$ est l'unique automorphisme de X^* qui vérifie pour tout $v \in X^*$

$$g(wv) = g(w) g|_w(v)$$

cet élément s'appelle la *section* de g en w. Le groupe B à la particularité d'être fermé par cette opération : pour tout $g \in B$ et tout sommet w on a $g|_w \in B$. Les groupes d'automorphismes de X^* avec cette propriété sont dit *auto-similaires*. Voir [Nek05] pour un survol sur les groupes auto-similaires.

L'application $g \mapsto g|_w$ n'est pas un morphisme de groupes. Néanmoins si on se restreint au stabilisateur B^w du sommet w il devient un morphisme de groupes

$$\begin{aligned} B^w &\to B \\ g &\mapsto g|_w \end{aligned}$$

Notons que le stabilisateur B^w a indice fini dans B, comme l'orbite de w est contenue dans son niveau de l'arbre qui est fini.

Théorème 6 (Bartholdi et Virág, [BV05b, Kai05])**.** *Soit μ la mesure equidistribuée sur $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$. Alors μ est Liouvillienne. En particulier B est moyennable d'après le théorème 4.*

Pour illustrer l'utilisation astucieuse de l'auto-similarité, on donne un esquisse des idées contenues dans la preuve. On suit l'approche de [Kai05], qui utilise le critère d'entropie (point (iii) du théorème 3).

Idée de la preuve. Soit $(\mathbf{g}_n)_n$ la marche aléatoire à gauche de pas μ. L'image $\mathbf{g}_n(0)$ de 0 est une chaine de Markov d'espace d'états $\{0, 1\}$. Les sections $\mathbf{g}_n|_0, \mathbf{g}_n|_1$ ne sont pas des marches aléatoires (en effet, ils ne sont même pas des processus de Markov). Considérons la suite de temps d'arrêts $\mathbf{T}_i$ auxquels le sommet 0 (donc, le sommet 1) est stabilisé par la marche aléatoire. La suite $(\mathbf{g}_{\mathbf{T}_n})_n$ est encore une marche aléatoire, on note $\tilde{\mu}$ la distribution de ses incréments (=loi de $\mathbf{g}_{\mathbf{T}_1}$). Le long de ces temps d'arrêt, les suites $(\mathbf{g}_{\mathbf{T}_n}|_0)_n$ et $(\mathbf{g}_{\mathbf{T}_n}|_1)_n$ deviennent aussi des marches aléatoires sur B (car les sections restreintes aux stabilisateurs sont des morphismes), on note $\mu^{(0)}$ et $\mu^{(1)}$ les distributions respectives des incréments. L'étape clé consiste à montrer l'inégalité suivante

$$h(\mu) \leq h(\mu^{(0)}) \tag{1}$$

La preuve de cette inégalité procède comme suit : des propriétés générales de l'entropie nous disent que l'on peut calculer l'entropie asymptotique le long de la suite de temps d'arrêt $(\mathbf{T}_n)_n$, est ceci donne l'égalité $h(\mu) = \frac{1}{2}h(\tilde{\mu})$ (le facteur 1/2 provient du fait que $\mathbf{T}_n/n \to 2$).

La variable aléatoire $\mathbf{g}_{\mathbf{T}_n}$ est complètement déterminée par la donnée de la permutation $\sigma_{\mathbf{T}_n} \in \mathfrak{S}_2$ qui donne son action sur l'alphabet $X = \{0, 1\}$ est ses sections $\mathbf{g}_{\mathbf{T}_n}|_0, \mathbf{g}_{\mathbf{T}_n}|_1$. Encore une fois, des propriétés générales de l'entropie nous garantissent que l'entropie de $\tilde{\mu}^{*n}$ n'excède pas la somme des entropies des distributions de ces trois variables aléatoires. Lorsque on divise par n et on prend la limite on trouve

$$h(\mu) = \frac{1}{2}h(\tilde{\mu}) \leq \frac{1}{2}(h(\mu^{(0)}) + h(\mu^{(1)}))$$

(la permutation $\sigma_{\mathbf{T}_n}$ne donne pas de contribution a l'entropie asymptotique car elle vie dans un ensemble fini). Mais en effet on peut voir que $h(\mu^{(0)}) = h(\mu^{(1)})$ ce qui donne bien l'inégalité (1). En applicant deux fois cette inégalité on trouve

$$h(\mu) \leq h(\mu^{(0)}) \leq h(\mu^{(00)}).$$

Nototns que jusqu'à ce point la forme de la mesure et la structure de groupe n'ont pas été utilisés. Or, on peut montrer que pour la mesure en question on a $\mu^{(00)} = \frac{1}{2}\delta_e + \frac{1}{2}\mu$, où μ est la mesure de départ et δ_e la masse de Dirac en l'identité. Autrement dit, la marche aléatoire de pas $\mu^{(00)}$ est qualitativement identitique à la marche aléatoire de départ, mais à chaque instant elle tire à pile ou face pour décider si avancer (on dit que μ est une *mesure auto-similaire*). La marche aléatoire correspondante est donc ralentie d'un facteur 1/2 à grande échelle de temps. Ce fait et des propriétés générales de l'entropie nous garantissent que $h(\mu^{(00)}) = \frac{1}{2}h(\mu)$. On a donc montré que $h(\mu) \leq h(\mu^{00}) = \frac{1}{2}h(\mu)$, ce qui entraîne que $h(\mu) = 0$. □

2.3 La propriété de Liouville pour les groupes d'automate

Le groupe Basilica est un *groupe d'automate*. Un sous-groupe de type fini $G < \mathrm{Aut}(X^*)$ es dit *groupe d'automate* s'il admet une partie génératrice finie S telle que pour tout $w \in X^*$ et tout $s \in S$ la section $s|_w$ est encore un générateur dans S (une condition strictement plus forte que l'auto-similarité). Le nom provient du fait que lapartie génératrice S est naturellement l'espace d'état d'un *automate* agissant sur l'alphabet X (on ne donne pas la définition d'un automate). A tout groupe d'automate on peut associer une certaine *fonction d'activité* qui mesure la complexité de l'action de ses élément sur l'arbre. Il s'agit de la fonction de $n \in \mathbb{N}$ qui compte le nombre de mots $w \in X^*$ de longueur n pour lesquelles la section $s|_w$ est non trivial pour au moins un générateur de S (cette définition n'est pas essentielle pour lire la suite).

La fonction d'activité vérifie une dicotomie : elle croit ou bien polynomialement avec un certain degré entier $d \geq 0$, ou bien exponentiellement. Dans le premier cas, le nombre d s'appelle *degré d'activité*, et on classifie les groupes d'automates selon cet invariante. Par exemple, le groupe Basilica est à *activité bornée* ($d = 0$), la classe des groupes d'automate à activité bornée est la plus étudiée car elle contient déjà un nombre consistant d'exemples intéressants.

Les groupes d'automate à activité polynomiale ne contiennent pas de sous-groupes libres [Sid04]. On sait que ces groupes sont moyennables pour $d \leq 2$ [JNdlS13], et on ne sait pas s'ils sont moyennables pour tout d.

La preuve de moyennabilité originelles pour $d = 0$ [BKN10] et pour $d = 1$ [AAV13] utilise les marches aléatoires : la preuve consiste à montrer que tous ces groupes se plongent dans une famille de groupes "mère" , puis construire sur ces groupes une mesure non dégénérée avec la propriété de Liouville, en utilisant l'auto-similarité de manière astucieuse comme dans la preuve du théorème 6. Cela implique la moyennabilité des groupes mère et des tous ses sous-groupes, dont les groupes d'automate. Néanmoins cette preuve n'implique pas la propriété Liouville pour les marches aléatoires les groupes d'automate différents du groupe mère, ni pour des mesure plus générales de celles considérées sur le groupe mère (qui ont une forme très spéciale) à cause de la question 2 (formulée dans la section précédente). G. Amir et B. Virág [AV11] ont aussi montré que *pour $d \geq 3$ les mesures symétriques, à support fini n'ont pas en général la propriété de Liouville.* Dans [AAV13] G. Amir, O. Angel et B. Virág ont formulé la conjecture suivante.

Conjecture 2 ([AAV13])**.** Toute mesure symétrique, a support fini sur un groupe d'automate de degré d'activité $d \leq 2$ a la propriété de Liouville.

Faisons quelques commentaires sur cette conjecture et sur les résultats qui l'ont motivée. Une action de groupe G sur l'arbre X^* se prolonge naturellement à l'ensemble des mots infinis dans l'alphabet X

$$X^\omega = \{x_1 x_2 x_3 \cdots : x_i \in X, \, i \geq 1\}$$

cet ensemble s'identifie avec le *bord à l'infini* de l'arbre, et il admet une topologie qui en fait un ensemble de Cantor. Soit $(\mathbf{g}_n)_n$ une marche aléatoire *à gauche* sur G, et soit $\bar{x} \in X^\omega$. Alors $\mathbf{g}_n(\bar{x})$ est une chaîne de Markov d'espace d'états égal à l'orbite de $\bar{x}$. On peut voir cette chaîne de Markov comme une marche aléatoire sur un *graphe de Schreier orbital* du groupe : le graphe qui a pour ensemble des sommets les points dans l'orbite de $\bar{x}$ et deux points y, z sont liés par une arête s'il existe un générateur $s \in \mathrm{supp}(\mu)$ tel que $sy = z$.

Pour certains groupes d'automate de degré d'activité $d \geq 3$, il se trouve que la marche aléatoire sur ce graphe de Schreier est transiente. De manière analogue au cas du groupe lamplighter $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \wr \mathbb{Z}^d$ (section 1.4), on peut utiliser ce fait pour construire une fonction harmonique, bornée, non constante.

La motivation à la racine de la conjecture 2 est que que pour $d \leq 2$ la marche alétoire les graphes de Schreier en question est récurrente. Cette propriété ne dépend pas du choix de la mesure (symétrique, à support fini) et passe aux sous-groupes. Néanmoins, pour ces groupes il n'est pas évident de passer de la récurrence à la propriété de Liouville.

Dans [AAMBV13] on montre

Théorème 7. *Toute mesure symétrique, à support fini sur un groupe d'automate à activité bornée a la propriété de Liouville.*

La preuve reprend et généralise des idées déjà contenues dans des travaux précédents (en particulier dans le travail de Kaimanovich [Kai05]), et les combine avec une analyse détaillée de la marche aléatoire sur les graphes de Schreier. On croît que notre méthode peut se généraliser au cas de degrée $d = 1$ et à d'autres groupes agissant sur les arbres enracinés différents de ceux qu'on considère. En révanche le cas $d = 2$ pourrait demander des nouvelles idées. En effet, on ne dispose toujours pas d'un critère simple et suffisamment général qui permet de déduire, pour ces groupes, la propriété de Liouville de la récurrence des graphes de Schreier.

La moyennabilité des groupes d'automate de degré $d = 2$ découle d'un travail récent de Juschenko, Nekrashevych et de la Salle [JNdlS13], qui montre la moyennabilité d'une large classe de groupes non élémentairement moyennables. Ce critère de moyennabilité s'applique à un groupe agissant sur un espace topologique et s'appuie sur deux hypothèses. Une hypothèse est une condition locale sur l'action des élément de G sur Y. L'autre hypothèse, globale, est précisement la récurrence de la marche aléatoire simple sur les graphes de Schreier.

Ce résultat ne concerne pas directement la propriété de Liouville, mais on croit que les idées qui y sont contenues pourraient être lié à cela. Nos recherches ultérieures pourraient être guidées par la question suivante : existe-t-il un critère analogue au résultat de [JNdlS13] pour la propriété de Liouville ?

Références

[AAMBV13] Gideon Amir, Omer Angel, Nicolás Matte Bon, and Bálint Virág. The liouville property for groups acting on rooted trees. 2013. preprint, arXiv :1307.5652.

[AAV13] Gideon Amir, Omer Angel, and Bálint Virág. Amenability of linear-activity automaton groups. *Journal of the European Mathematical Society*, 2013. To appear.

[AV11] Gideon Amir and Bálint Virág. Positive speed for high-degree automaton groups. 2011. preprint, /arxiv.org/abs/1102.4979.

[AV12] Gideon Amir and Bálint Virág. Speed exponents for random walks on groups. 2012. preprint, arXiv :1203.6226.

[BE11] Laurent Bartholdi and Anna Erschler. Poisson-furstenberg boundary and growth of groups. 2011. preprint, arXiv :1107.5499.

[BKN10] Laurent Bartholdi, Vadim Kaimanovich, and Volodymyr Nekrashevych. On amenability of automata groups. *Duke Math. J*, 2010.

[BV05a] Laurent Bartholdi and Bálint Virág. Amenability via random walks. *Duke Math. J.*, 2005.

[BV05b] Laurent Bartholdi and Bálint Virág. Amenability via random walks. *Duke Math. J.*, 2005.

[Die80] Yves Dierrenic. Quelques applications du théorème ergodique sous-additif. *Asterisque*, 1980.

[DM61] E.B. Dynkin and M.B. Maliutov. Random walks on groups with a finite number of generators. *Soviet. Math. Dokl.*, 1961.

[Ers04a] Anna Erschler. Boundary behavior for groups of subexponential growth. *Ann. Math.*, 2004.

[Ers04b] Anna Erschler. Liouville property for groups and manifolds. *Inventiones mathematicae*, 2004.

[Gri83] Rotislav Grigorchuk. On the milnor problem of group growth. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1983.

[Gro81] Mikhail Gromov. Groups of polynomial growth and expanding maps. *Publications mathematiques I.H.É.S., 53, 1981*, 1981.

[GZ02] Rotislav Grigorchuk and Andrej Zuk. On a torsion free weakly branch group defined by a three state automaton. *Interat. J. Algebra Comput.*, 2002.

[JM13] Kate Juschenko and Nicolas Monod. Cantor systems, piecewise translations and simple amenable groups. *Ann. of Math.*, 2013. to appear.

[JNdlS13] Kate Juschenko, Volodymyr Nekrashevych, and Mikael de la Salle. Extesions of amenable groups by recurrent grupoids. 2013. Preprint, arXiv :1305.2637v1.

[Kai00] Vadim Kaimanovich. The poisson formula for groups with hyperbolic properties. *Ann. of Math.*, 2000.

[Kai05] Vadim A. Kaimanovich. "munchaussen trick" and amenability of self-similar groups. *Int. J. Algebra Comput.*, 2005.

[KL07] Anders Karlsson and Fran¸cois Ledrappier. Linear drift and poisson boundary for random walks. *Pure Appl. Math. Q.*, 2007.

[KV83] Vadim A. Kaimanovich and Anatoly M. Vershik. Random walks on discrete groups : Boundary and entropy. *Ann. Probab.*, 1983.

[LP09] J.R. Lee and Y. Peres. Harmonic maps on amenable groups and a diffusive lower bound for random walks. 2009. Preprint, arXiv :0911.0274.

[LP13] Russ Lyons and Yuval Peres. Probability on trees and networks. 2013. book in progress, http ://mypage.iu.edu/ rdlyons/prbtree/prbtree.html.

[Nek05] Volodymyr Nekrashevych. *Self-similar groups.* AMS, 2005.

[Pet13] Gabor Pete. Probability and geometry on groups. 2013. lecture notes, www.math.bme.hu/ gabor/PGG.html.

[Ros81] J. Rosenblaat. Ergodic and mixing random walks on locally compact groups. *Math. Ann*, 1981.

[Sid04] Said Sidki. Finite automata of polynomial growth do not generate a free subgroup. *Geom. Dedicata,*, 2004.

[vN29] J. von Neumann. Zur allgemeinen theorie des masses. *Fund. Math.*, 1929.