Introduction à un domaine de recherche

LES SURFACES $K3$

SALIM TAYOU

Sous la direction de François Charles

Table des matières

1. Introduction

L'étude des surfaces $K3$ remonte à André Weil qui les nomma ainsi dans le rapport final AF 18 (603)-57, écrit en 1958 et publié dans [11]. Il écrit notamment : *"il s'agit des variétés Kähleriennes dites $K3$, ainsi nommées en l'honneur de Kummer, Kodaira, Kähler et de la belle montagne $K2$ au Cachemire."* Elles interviennent dans différentes branches des mathématiques et se sont révélées comme un champ d'expérience efficace pour la preuve de nombreux grands théorèmes en géométrie algébrique. Les conjectures de Weil ont été ainsi d'abord démontrées dans ce cadre par Deligne (voir [5]). Les surfaces $K3$ sont centrales dans la classification des surfaces algébriques complexes où elles apparaissent comme des surfaces ayant une dimension de Kodaira nulle (voir [1]).
Plus rigoureusement, soit k un corps. Ici, une variété sur k est un schéma intègre séparé de type fini sur k.

Date: 26 octobre 2015.

Définition 1.1. *Une surface $K3$ sur k est une variété non singulière de dimension 2 et propre sur k telle que $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}_X) = 0$ et*

$$\Omega^2_{X/k} \simeq \mathscr{O}_X.$$

Si $k = \mathbb{C}$, on a la définition suivante :

Définition 1.2. *Une surface $K3$ complexe est une variété complexe compacte connexe de dimension 2 telle que $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}_X) = 0$ et $\Omega^2_X \simeq \mathscr{O}_X$*

C'est un fait général que toutes les surfaces complètes sur un corps sont projectives. Dans la deuxième définition, on obtient une classe strictement plus large de surfaces $K3$ sur $\mathbb{C}$ qui ne sont pas nécessairement projectives. Cependant, un théorème difficile de Siu (voir [9]) montre que toutes les surfaces $K3$ sur $\mathbb{C}$ sont Kähleriennes, ce qui permet de faire intervenir la théorie de Hodge complexe pour les étudier. L'une des principales motivations de l'étude des surfaces $K3$ est la conjecture suivante. Rappelons qu'une courbe rationnelle sur une variété X définie sur k est une sous-variété intègre de dimension 1 de normalisation isomorphe à $\mathbb{P}^1_k$.

Conjecture 1.3. *Soit X une surface $K3$ sur un corps algébriquement clos. Alors X contient une infinité de courbes rationnelles.*

Organisation du texte. On introduit dans la première partie les surfaces $K3$ ainsi que quelques invariants classiques qui leur sont attachés. Dans la deuxième partie, on abordera le problème de la construction de courbes rationnelles sur les surfaces $K3$. La rédaction de ce texte s'inspire de [6] et [2].

Remerciements. Je tiens à remercier François Charles pour ses explications claires qui m'ont aidé à comprendre ce riche sujet.

2. Généralités sur les surfaces $K3$

2.1. **Surfaces $K3$ algébriques.** Soit k un corps.

Définition 2.1. *Une surface $K3$ sur k est une variété non singulière, de dimension 2 et propre sur k telle que $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}_X) = 0$ et*

$$\Omega^2_{X/k} \simeq \mathscr{O}_X.$$

On rappelle qu'une variété sur k est propre si le morphisme $X \to \mathrm{Spec}(k)$ est propre, et non-singulière si le faisceau cotangent $\Omega^2_{X/k}$ est localement libre de rang $\dim(X)$. C'est un fait général ([7]) que toute surface propre et lisse sur un corps est projective. Il s'ensuit que toutes les surfaces $K3$ sont projectives.

Exemple 2.2.

Soit k un corps. Une quartique lisse X dans $\mathbb{P}^3_k$ est une surface $K3$. En effet, à partir de la suite exacte courte :

$$0 \to \mathscr{O}(-4) \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3} \to \mathscr{O}_X \to 0,$$

et l'annulation de $\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^3, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3})$ et de $\mathrm{H}^2(\mathbb{P}^3, \mathscr{O}(-4))$, on déduit que $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}_X) = 0$. D'autre part, en prenant les déterminants de la suite exacte courte :

$$0 \to \mathscr{O}(-4)_{/X} \to \Omega_{\mathbb{P}^3/X} \to \Omega_X \to 0$$

on obtient $\omega_X \simeq \omega_{\mathbb{P}^3} \otimes \mathscr{O}(4)_{/X} \simeq \mathscr{O}_X$.

2.2. **Théorie de l'intersection sur les surfaces $K3$.** La théorie de l'intersection est un outil efficace qui permet d'étudier les courbes sur les surfaces. On en donne ici quelques rappels, et on se spécialisera après au cas des surfaces $K3$. Soit X une surface lisse sur un corps k. Soient L_1, L_2 des fibrés en droites sur X. On définit la forme d'intersection $(L_1.L_2)$ comme suit :

$$(L_1.L_2) = \chi(X, \mathscr{O}_X) - \chi(X, L_1^*) - \chi(X, L_2^*) + \chi(X, L_1^* \otimes L_2^*).$$

La forme d'intersection est une forme bilinéaire symétrique, et a les propriétés suivantes (voir [1] pour les démonstrations) :

(1) Si $L_1 = \mathscr{O}(C)$ avec C courbe intègre sur X, alors $(L_1.L_2) = deg(L_{2/C})$.

(2) Si $L_i = \mathscr{O}(C_i)$ où C_1 et C_2 sont deux courbes qui s'intersectent en un nombre fini de points x_1,...,x_n, alors :

$$(L_1.L_2) = \sum_{i=1}^{n} \dim_k(\mathscr{O}_{X,x_i}/(f_{1,x_i}, f_{2,x_i})),$$

où f_{1,x_i}, f_{2,x_i} sont des équations locales de C_1 et C_2 respectivement au voisinage de x_i.

Rappelons également le théorème de Riemann Roch :

$$\chi(X, L) = \frac{(L.L \otimes \omega_X^*)}{2} + \chi(X, \mathscr{O}_X).$$

L'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés en droites sur X peut être muni d'une structure de groupe, appelé groupe de Picard et noté $\mathrm{Pic}(X)$.

Proposition 2.3 ([6])**.** *Soit X une surface $K3$. Le groupe de Picard de X est abélien libre de type fini.*

On note $\rho(X)$ le rang de $\mathrm{Pic}(X)$.

2.2.1. *Diamant de Hodge d'une surface $K3$.* On suppose maintenant que X est une surface $K3$ définie sur un corps algébriquement clos k. Déterminons les nombres de Hodge

$$h^{p,q}(X) := \dim \mathrm{H}^q(X, \Omega_X^p).$$

Par hypothèse $h^{0,0}(X) = 1$, $h^{0,1}(X) = 0$. Par dualité de Serre, $h^{0,2}(X) = h^{2,0} = 1$ et $h^{2,2}(X) = h^{0,0}(X) = 1$. La formule de Noether s'écrit dans le cas des surfaces $K3$, en notant $c_2(X)$ la caractéristique d'Euler-Poincaré de X :

$$\chi(X, \mathscr{O}_X) = \frac{c_2(X)}{12},$$

ce qui implique $c_2(X) = 24$. Par ailleurs, la formule de Hirzebruch-Riemann-Roch (voir [6], p13) nous dit que

$$2h^{1,0}(X) - h^{1,1}(X) = 4 - c_2(X) = -20.$$

Pour finir, il nous reste à déterminer une des deux dimensions $h^{1,0}$, $h^{1,1}$. En fait, on montre que $h^{1,0} = 0$. En caractéristique non nulle, c'est un théorème difficile à démontrer. En caractéristique nulle, on en donnera une preuve dans le paragraphe suivant. Le diamant de Hodge a donc la forme suivante :

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 1 & & 20 & & 1 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

2.3. **Surfaces $K3$ complexes.** Dans le cadre complexe, on a une définition un peu plus générale qui inclut des surfaces $K3$ non-projectives.

Définition 2.4. *Une surface $K3$ complexe est une variété complexe compacte connexe de dimension 2 telle que $\mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}_X) = 0$ et $\Omega_X^2 \simeq \mathscr{O}_X$*

Par le principe GAGA de Serre (voir [8]), on peut associer à tout schéma de type fini sur $\mathbb{C}$ un espace analytique complexe X^{an} dont l'ensemble des points sous-jacents est juste $X(\mathbb{C})$. De plus, pour tout faisceau cohérent F sur X, on associe naturellement un faisceau cohérent F^{an} sur X^{an} de telle sorte que $\mathscr{O}_X^{an} \simeq \mathscr{O}_{X^{an}}$ et $\Omega_X^{an} \simeq \Omega_{X^{an}}$. On dispose également d'un morphisme d'espaces annelés $(X^{an}, \mathscr{O}_{X^{an}}) \to (X, \mathscr{O}_X)$. Si X est propre sur $\mathbb{C}$, cette construction induit une équivalence de catégories abéliennes des faisceaux cohérents sur X et X^{an}

$$Coh(X) \to Coh(X^{an}).$$

En particulier, $\mathrm{H}^*(X, F) \simeq \mathrm{H}^*(X^{an}, F^{an})$, et si X est lisse, alors X^{an} est une variété complexe. D'où la proposition suivante :

Proposition 2.5. *Soit X une surface $K3$ algébrique sur $\mathbb{C}$, alors X^{an} est une surface $K3$ complexe projective.*

Remarquons que toutes les surfaces $K3$ ainsi obtenues sont projectives. Mais pas toutes les les surfaces $K3$ complexes sont projectives. On se demande donc au moins si toutes les surfaces $K3$ complexes sont kähleriennes.

Théorème 2.6 ([9])**.** *Soit X une surface $K3$ complexe. Alors X est kählerienne.*

On peut donc utiliser la théorie de Hodge pour étudier les surfaces $K3$ complexes. Considérons donc la suite exacte exponentielle

$$0 \to \underline{\mathbb{Z}} \to \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X^\times \to 0$$

et prenons la suite exacte longue en cohomologie associée

$$0 \to \mathrm{H}^1(X, \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}_X)$$

on a donc $\mathrm{H}^1(X, \mathbb{Z}) = 0$.
Par la théorie de Hodge

$$\mathrm{H}^1(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C} = \mathrm{H}^1(X, \mathscr{O}_X) \oplus \mathrm{H}^0(X, \Omega_X)$$

d'où $h^{0,1}(X) = h^{1,0}(X) = 0$.
Par dualité de Poincaré, on a $\mathrm{H}^0(X, \mathbb{Z}) = \mathrm{H}^4(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ et $\mathrm{H}^3(X, \mathbb{Z}) = 0$ modulo torsion. Or, la torsion de $\mathrm{H}^3(X, \mathbb{Z})$ s'identifie à celle de $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$ qui est nul, et la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^2(X, \mathscr{O}_X)$$

nous dit qu'il est sans torsion puisque $\mathrm{Pic}(X)$ et $\mathrm{H}^2(X, \mathscr{O}_X)$ le sont. Le calcul de la caractéristique d'Euler Poincaré effectué dans le cadre algébrique reste valide et on a donc $c_2(X) = 24$. Par ailleurs, on sait que $c_2(X) = \sum_{i=0}^4 b_i(X)$ où $b_i(X)$ est le $i$éme nombre de Betti de X. On a donc $b_2(X) = 22$.
Par la théorie de Hodge, $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{C}) = \mathrm{H}^{2,0}(X) \oplus \mathrm{H}^{1,1}(X) \oplus \mathrm{H}^{0,2}(X)$ d'où $b_2(X) = h^{2,0}(X) + h^{1,1}(X) + h^{0,2}(X)$, et donc $h^{1,1}(X) = 20$.

2.4. **Nombre de Picard d'une surface $K3$.** On donnera dans cette partie un résumé des résultats connus jusqu'à présent sur le nombre de Picard d'une surface $K3$. Dans le cadre complexe, le théorème des classes $(1, 1)$ de Lefschetz nous dit que $\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z}) \cap \mathrm{H}^{1,1}(X)$. Comme $\mathrm{H}^{1,1}(X)$ est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension 20, on obtient la borne $\rho(X) \leq 20$. En fait, toute valeur entre 0 et 20 est atteinte pour une certaine surface $K3$.
La situation est un peu différente dans le cas des surfaces $K3$ définies sur un corps de caractéristique non nulle. En effet, la cohomologie étale

ℓ-adique de X fournit la borne $\rho(X) \leq 22$. Le nombre 22 peut être atteint pour certaines surfaces, dites supersingulières au sens de Shioda.

Théorème 2.7. *Soit X une surface $K3$ sur un corps k algébriquement clos de caractéristique $p \geq 3$. Alors :*

(1) $\rho(X) \in \{1, ..., 20, 22\}$.

(2) Si X est définie sur un corps fini, $\rho(X)$ est pair.

Les résultats de ce théorème s'obtiennent à l'aide de la conjecture de Tate qu'on explique dans le paragraphe suivant.

2.5. **Conjecture de Tate sur les surfaces $K3$.** La conjecture de Tate est un énoncé qui rend les mêmes services que le théorème des classes $(1,1)$ de Lefschetz en calculant le nombre de Picard à l'aide de données cohomologiques. C'est un cas particulier d'une autre conjecture de Tate (voir [10]) qui décrit les cycles algébriques, i.e les sous-variétés d'une variété algébrique en termes cohomologiques.

Conjecture 2.8. *Soit X une surface $K3$ sur un corps k de type fini. Soient ℓ un nombre premier inversible dans k et $\overline{k}$ la clôture séparable de k. L'application classe de cycle induit un isomorphisme :*

$$\mathrm{Pic}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \to \mathrm{H}^2_{\acute{e}t}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(1))^{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)}.$$

Par corps de type fini, on entend corps de type fini sur son sous-corps premier. On remarquera que cette hypothèse n'est pas restrictive puisque toute surface $K3$ peut être définie sur un corps de type fini.
La conjecture 2.8 a été démontrée en toute caractéristique différente de 2 suivant les travaux de Artin, Swinnerton-Dyer, Nygaard, Ogus et plus récemment Maulik, Charles et Madapusi-Pera.

2.6. **Polarisations sur les surfaces $K3$.** La notion de polarisation est cruciale dans l'étude des surfaces $K3$, elle intervient notamment dans l'énoncé du théorème de Torelli qui est un résultat fondamental de la théorie. Soit k un corps.

Définition 2.9. *Une surface $K3$ polarisée de degré $2d$ sur k est la donnée d'une surface $K3$, notée X et d'un fibré en droites ample L primitif, i.e indivisible dans* $\mathrm{Pic}(X)$ *tel que $(L.L) = 2d$.*

On suppose désormais que $k = \mathbb{C}$. Le produit d'intersection défini dans la section 2.2 s'identifie alors au cup-produit sur $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$. Il fait de ce dernier un réseau unimodulaire pair de signature $(3, 19)$ et dont la structure peut être décrite explicitement. Dans ce cadre, se donner une polarisation sur X revient à se donner une classe de Kähler entière sur X.

Théorème 2.10 (Torelli Global)**.** *Deux surfaces $K3$ complexes polarisables X et X' sont isomorphes si, et seulement si, il existe un isomorphisme entre $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z})$ et $\mathrm{H}^2(X',\mathbb{Z})$ qui respectent les structures de Hodge et le produit d'intersection.*

Il est possible de reformuler ce théorème en terme d'injectivité d'une certaine application de périodes. Nous renvoyons au chapitre 7 des notes de D.Huybrechts [6] pour plus de détails.

3. Constructions de courbes rationnelles sur les surfaces $K3$

On s'intéresse dans cette partie à la construction de courbes rationnelles sur les surfaces $K3$ algébriques définies sur un corps k. Tout d'abord, remarquons que ces courbes ne viennent jamais en famille en caractéristique nulle. En effet, considérons une famille $\mathscr{C} \subset B \times X$ de courbes rationnelles sur X paramétrée par une variété B telle que la projection $\mathscr{C} \to X$ soit dominante. On obtient alors un morphisme rationnel dominant $D \times \mathbb{P}^1 - - > X$ avec D une courbe. Ce qui implique l'inégalité sur les dimensions de Kodaira (voir [1], page 119) :

$$0 = kod(X) \leq kod(D \times \mathbb{P}^1) = -\infty.$$

Si la caractéristique n'est pas nulle, il est possible d'avoir des familles de courbes sur les surfaces $K3$, mais c'est plutôt un phénomène rare. Un exemple de ces surfaces est donnée par les surfaces unirationnelles, appelées aussi supersingulières au sens de Shioda. Li et Liedtke ont montré qu'être supersingulier au sens de Shioda est équivalent à être supersingulier, i.e avoir un nombre de Picard égal à 22.
Hormis ces cas particuliers, la question de savoir s'il y a qu'un nombre fini de courbes rationnelles se pose, ce qui motive la conjecture suivante.

Conjecture 3.1. *Soit (X, L) une surface $K3$ polarisée définie sur un corps k algébriquement clos. Alors X contient une infinité de courbes rationnelles linéairement équivalentes à L.*

On ne sait même pas si toute surface $K3$ contient au moins une courbe rationnelle linéairement équivalente à un multiple de L.
Il existe une version plus faible de la conjecture 3.1 énoncée ci-après.

Conjecture 3.2. *Soit X une surface $K3$ définie sur un corps k algébriquement clos. Alors X contient une infinité de courbes rationnelles.*

Cette version de la conjecture a été prouvée dans de nombreux cas résumés dans le théorème suivant :

Théorème 3.3. *La conjecture 3.2 est vraie dans les deux cas suivants :*

(1) Si $car(k) = 0$ et X ne peut pas être définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

(2) $car(k) \neq 2$ et $\rho(X)$ est impair.

La preuve a été développée par Bogomolov, Hassett et Tschinkel puis par Li et Liedtke. Elle repose sur de nombreux travaux antérieurs, notamment de Mumford et Bogomolov qui montrent l'existence d'une courbe rationnelle sur toute surface $K3$. On se propose de donner des idées de preuves de deux cas particuliers par la suite : les surfaces de Kummer et les surfaces $K3$ elliptiques.

3.1. **Surfaces de Kummer.** On retrace sommairement les idées de l'article [3]. Soit k un corps de caractéristique différente de 2. Soit A une variété abélienne sur k, i.e une variété algébrique projective qui admet une structure de groupe algébrique commutatif. Soit $\sigma : A \to A, x \mapsto -x$. C'est une involution de A dont l'ensemble des points fixes est exactement $A[2]$ le sous-groupe de 2-torsion. L'éclaté X du quotient de A par l'action de σ le long de $A[2]$ est une surface $K3$ sur k, dite surface de Kummer.

Théorème 3.4. *On suppose que k est fini. Alors par tout point de $X(\overline{k})$ passe une courbe rationnelle définie sur $\overline{k}$*

Corollaire 3.5. *Soit X une surface de Kummer définie sur un corps fini. Alors $X_{\overline{k}}$ contient une infinité de courbes rationnelles.*

L'idée de la preuve est la suivante : si A désigne la variété abélienne sous-jacente à X, on sait que A est la jacobienne d'une courbe hyperelliptique C de genre 2 définie sur $\overline{k}$. On utilise ensuite le fait que tout point x de $A(\overline{k})$ qui n'est pas de 2-torsion est l'image d'un point de $C(\overline{k})$ par un endomorphisme ϕ de A. L'image de C par ϕ est alors encore une courbe hyperelliptique de genre 2 dont l'image dans S est une courbe rationnelle passant par x.

Remarque 3.6.

Bogomolov et Tschinkel conjecturent que ce résultat est encore vrai pour toute surface $K3$ définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ ou $\overline{\mathbb{F}_p}$ pour p nombre premier. On ne connaît pour le moment ni exemple ni contre exemple sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

3.2. **Surfaces $K3$ elliptiques.** La situation est la suivante : soit K un corps de nombres, X une surface $K3$ définie sur K munie d'un morphisme surjectif $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ de fibre générique X_η une courbe lisse de genre 1. On dit que π est une fibration elliptique.
La méthode suivie par Bogomolov et Tschinkkel dans [4] consiste à construire, pour p nombre premier assez grand, des surfaces $K3$ X_p pour lesquelles on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X_p \arrow[rr, "\eta_p"] \arrow[dr, "\pi_p"'] & & X \arrow[dl, "\pi"] \\ & \mathbb{P}^1 & \end{tikzcd}$$

Des arguments de la théorie des déformations permettent de construire des courbes rationnelles C_p sur X_p telles que $\eta_p(C_p)$ soit birationnelle à C_p et l'intersection $(X_\eta.C_p)$ soit divisible par p. Ce qui suffit pour conclure qu'on construit bien une infinité de courbes rationnelles sur X.

4. Conclusions

On sait que toute surface $K3$ de nombre de Picard supérieur ou égal à 5 est elliptique. En combinant avec les résultats du théorème 3.3, on sait alors que les surfaces $K3$ en caractéristique nulle pour lesquelles la conjecture 3.2 n'est pas connue sont définies sur un corps de nombre K et ont un nombre de Picard $\in \{2, 4\}$. La méthode de la preuve du théorème 3.3 revient à connaître l'existence d'une infinité de places $\mathfrak{P}$ de K pour lesquelles $\rho(X_{\mathfrak{P}}) > \rho(X)$ et $X_{\mathfrak{P}}$ non supersingulière. C'est toujours une question ouverte. Une autre limite de la preuve de Bogomolov-Hassett-Tschinkel est l'utilisation de spécialisations pour s'assurer que l'on construit bien des courbes rationnelles distinctes. Cela ne peut pas marcher par exemple quand le corps de base est $\overline{\mathbb{F}_p}$.

Références

[1] A. Beauville, *Surfaces algébriques complexes*, Astérisque, Société Mathématique de France, 1978.

[2] O. Benoist, *Construction de courbes sur les surfaces K3 [suivant Bogomolov-Hassett-Tschinkel, Charles, Li-Liedtke, Madapusi Pera, Maulik...]*, ArXiv e-prints, (2014).

[3] F. Bogomolov and Y. Tschinkel, *Rational curves and points on $K3$ surfaces*, Amer. J. Math., 127 (2005), pp. 825–835.

[4] F. A. Bogomolov and Y. Tschinkel, *Density of rational points on elliptic $K3$ surfaces*, Asian J. Math., 4 (2000), pp. 351–368.

[5] P. Deligne, *La conjecture de Weil pour les surfaces $K3$*, Invent. Math., 15 (1972), pp. 206–226.

[6] D. Huybrechts, *Lectures K3 surfaces*, preprint, 2015.

[7] Q. Liu, *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*, Oxford graduate texts in mathematics, Oxford University Press, 2002.

[8] J.-P. Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 6 (1955–1956), pp. 1–42.

[9] Y. T. Siu, *Every $K3$ surface is Kähler*, Invent. Math., 73 (1983), pp. 139–150.

[10] J. T. Tate, *Algebraic cycles and poles of zeta functions*, in Arithmetical Algebraic Geometry (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963), Harper & Row, New York, 1965, pp. 93–110.

[11] A. Weil, *Oeuvres Scientifiques / Collected Papers : Volume 2 (1951-1964)*, Oeuvres Scientifiques : Collected Papers, Springer, 2009.