

# Introduction au domaine de recherche : Ergodicité et Surfaces de translation

Timothée Bénard

## Introduction

Soit  $S$  une surface compacte connexe orientable de genre  $g$ . L'espace des modules des structures complexes sur  $S$  se définit comme l'ensemble des structures complexes sur  $S$  considérées à isomorphisme près. Il est étudié dès le  $XIX^{\text{ième}}$  siècle par B. Riemann qui prouve qu'une telle structure sur  $S$  est caractérisée par  $3g - 3$  nombres complexes. Ses travaux sont poursuivis par de nombreux mathématiciens (H. Poincaré, O. Teichmüller, W. Fenchel, J. Nielsen, ...) tout au long du  $XX^{\text{ième}}$  siècle. Il apparaît qu'une bonne façon d'appréhender cet espace des modules est de considérer un espace plus simple, appelé *espace de Teichmüller* constitué des structures complexes sur  $S$  à isotopie près. L'espace de Teichmüller admet lui même une structure de variété complexe et chaque vecteur du fibré tangent s'identifie à un couple  $(X, q)$  où  $X$  est une structure complexe sur  $S$  et  $q$  une différentielle quadratique sur  $(S, X)$ . Une notion plus simple et fortement liée est la notion de *structure de translation* qui est la donnée d'un couple  $(X, u)$  où  $X$  est une structure complexe sur  $S$  et  $u$  une différentielle abélienne.

Dans cette introduction, on présente les propriétés ergodiques des surfaces de translation. Les résultats ont essentiellement été prouvés par H. Masur et W. Veech dans les années 80. Ils constituent un argument clef dans la preuve du théorème célèbre de M. Mirzakhani ([?]) estimant le nombre de géodésiques simples fermées sur une surface hyperbolique compacte.

Dans tout ce texte, on se donne une fois pour toute un triplet  $(S, \Sigma, \kappa)$  où  $S$  est une surface topologique compacte connexe orientée,  $\Sigma = (A_1, \dots, A_s)$  est une famille finie non vide de points distincts de  $S$  appelés *singularités*, et  $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_s) \in \mathbb{N}^{*s}$  associe un entier non nul à chaque singularité.

# Table des matières

## Première partie

# Etude d'une surface de translation

Dans cette partie, on introduit la notion de surface de translation. Chaque direction  $\theta \in S^1$  définit un flot sur une telle surface, dont on montrera qu'il est uniquement ergodique pour presque tout choix de  $\theta$ . Enfin, on fait le lien entre ce flot et le flot sur un billard polygonal rationnel.

## 1 Définitions

**Définition 1.1.** Une structure de translation  $\zeta$  sur  $(S, \Sigma, \kappa)$  est un sous-atlas de la variété topologique orientée  $S - \Sigma$  tel que :

1. les applications de transition sont localement des translations
2. pour tout  $i \in \{1, \dots, s\}$ , il existe  $V$  un voisinage ouvert de  $A_i$  dans  $S$ ,  $W$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $p : (V, A_i) \rightarrow (W, \star)$  s'identifiant modulo composition par des homéomorphismes à l'application  $z \mapsto z^{k_i}$  du disque unité dans lui-même, et tel que chaque restriction injective de  $p$  est une carte de  $\zeta$ .
3.  $\zeta$  est maximal pour ces propriétés

Pour un tel atlas  $\zeta$ , la donnée  $(S, \Sigma, \kappa, \zeta)$  est appelée surface de translation.

**Remarque.** On peut montrer que la donnée d'une structure de translation sur  $(S, \Sigma, \kappa)$  équivaut à la donnée d'un couple  $(X, u)$  où  $X$  est une structure complexe sur  $S$  et  $u$  une différentielle abélienne sur  $(S, X)$  dont les zéros sont exactement les points de  $\Sigma$  avec pour ordre d'annulation  $\kappa_i - 1$  en  $A_i$ . On fait ainsi le lien avec la notion annoncée dans l'introduction (voir [?] section 1.3 pour plus de détails).

Avec cette définition, les singularités  $A_i$  de  $S$  telles que  $\kappa_i = 1$  ne sont pas vraiment des singularités au sens où on peut prolonger toute structure de translation à  $(S - \Sigma) \cup \cup_{\kappa_i=1} A_i$ . On pourrait imposer dans la définition que les  $k_i$  soient supérieurs ou égaux à 2.

Soit  $\zeta$  une structure de translation sur  $(S, \Sigma, \kappa)$ . Examinons les structures auxiliaires induites sur  $S$ .

On peut tirer en arrière la métrique euclidienne de  $\mathbb{R}^2$  par les cartes de  $\zeta$  pour obtenir une métrique plate sur  $S - \Sigma$ . Il y a ainsi une notion d'angle (orienté) sur  $S - \Sigma$ . La condition 2 dans la définition précédente garantit que l'angle autour de chaque singularité  $A_i$  est bien défini et vaut  $2k_i\pi$ .

On peut tirer en arrière la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^2$  par les cartes de  $\zeta$  pour obtenir une mesure sur  $S - \Sigma$ , que l'on prolonge à  $S$  en attribuant la mesure nulle aux singularités. On vérifie que cette mesure est finie.

Etant donné  $\theta \in S^1$ , on peut tirer en arrière le champ de vecteur unitaire de direction  $\theta$  sur  $\mathbb{R}^2$  par les cartes de  $\zeta$ . On obtient un champ de vecteur  $X_\theta$  sur  $S - \Sigma$ . Le flot associé à ce champ de vecteurs est noté  $\mathcal{F}^\theta$  et appelé *flot de translation de direction  $\theta$* . Il n'est pas complet car certaines trajectoires aboutissent à des singularités. Cependant, la réunion de ces trajectoires est de mesure nulle. On note  $\Omega_\theta \subseteq S - \Sigma$  le sous ensemble des points de  $S$  pour lesquelles le flot  $\mathcal{F}^\theta$  est défini pour tout temps  $t \in ]-\infty, +\infty[$ . Le domaine  $\Omega_\theta$  est de mesure pleine dans  $S$  et le flot  $\mathcal{F}^\theta$  agissant localement par translation, il préserve la mesure de lebesgue  $\text{leb}|_{\Omega_\theta}$ .

**Exemples.** • On pose  $S = \mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ,  $\Sigma = \mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}^2$  et  $\kappa = 1$ . Les cartes induisent par le revêtement universel naturel  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  définissent une structure de translation sur  $(\mathbb{T}^2, \Sigma, \kappa)$ . Pour  $\theta \in S^1$ , les trajectoires de  $\mathcal{F}^\theta$  sont les projections des droites de  $\mathbb{R}^2$  de direction  $\theta$ .

- Soit  $P_1, \dots, P_n$  une famille de polygones dans  $\mathbb{R}^2$  disjoints. Regroupons les bords de ces polygones par paires de bords distincts, parallèles et de même longueur (on suppose que c'est possible). On pose alors :

$$S = \sqcup P_i / \sim$$

où  $\sim$  identifie les bords appariés par translation.

On note ensuite  $\Sigma = (A_1, \dots, A_s)$  l'ensemble des projections des sommets des polygones  $P_i$  (ordonné en une famille de façon arbitraire), et  $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_s)$  famille d'entiers telle que l'angle autour de  $A_i$  dans le recollement de polygones soit  $2\kappa_i\pi$ . On munit alors naturellement  $(S, \Sigma, \kappa)$  d'une structure de translation telle que les projections  $\overset{\circ}{P}_i \rightarrow S$  soient des cartes de translation.

On démontre plus bas (corollaire 2.3) que toute surface de translation s'obtient comme recollement des bords d'un seul polygone.

## 2 Ergodicité du flot de translation

Dans cette section, on s'intéresse au comportement du flot de translation sur une surface de translation  $(S, \Sigma, \kappa, \zeta)$  fixée. Plus précisément, on voit que pour presque tout  $\theta \in S^1$ , le système dynamique  $(\Omega_\theta, \text{leb}|_{\Omega_\theta}, \mathcal{F}^\theta)$  est uniquement ergodique. On suivra la démarche proposée par S. Gouëzel et E. Laney dans [?], elle même inspirée de travaux de H. Masur ([?]).

### Minimalité du flot de translation

Démontrons d'abord un résultat plus faible. On appelle *connexion sur  $S$  de direction  $\theta \in S^1$*  une trajectoire finie de  $X^\theta$  joignant deux singularités.

**Théorème 2.1.** *Si  $(S, \Sigma, \kappa, \zeta)$  n'a pas de connexion de direction  $\theta$ , alors toutes les orbites positives du flot  $\mathcal{F}^\theta$  sont denses.*

*Démonstration.* On donne une preuve succincte dans le cas où  $\theta = \pi/2$ . Le cas général est analogue. Pour plus de détails on pourra consulter [?], proposition 5.3. Tout d'abord, on remarque que l'absence de connexion verticale implique que le flot  $\mathcal{F}^{\pi/2}$  n'a pas de trajectoire périodique. On se donne  $I \subseteq S - \Sigma$  un intervalle ouvert horizontal d'extrémités  $a, b$  non singulières et on montre que toute trajectoire sous  $\mathcal{F}^{\pi/2}$  suffisamment longue rencontre  $I$ .

Posons  $\Sigma' := \Sigma.(a, b)$  où  $.$  désigne la concaténation. Pour chaque  $A \in \Sigma'$  et chaque direction  $-\pi/2$  issue de  $A$ , suivons le flot  $\mathcal{F}^{-\pi/2}$ . On marque le premier point d'impact sur  $I$  (s'il existe). On obtient ainsi une suite  $a = u_0^+ < u_1^+ < \dots < u_{m+1}^+ = b$  de points distincts sur  $I$  ordonnés de  $a$  vers  $b$ . On fait de

même avec la direction  $+\pi/2$  et on obtient  $a = u_0^- < u_1^- < \dots < u_{n+1}^- = b$ . On remarque ensuite que l'action du flot vertical  $\mathcal{F}^{\pi/2}$  sur  $]u_i^+, u_{i+1}^+[$  réalise un rectangle plongé partant de  $]u_i^+, u_{i+1}^+[$  et revenant à  $I$  sans rencontrer de singularités. Le bord d'arrivée est donc inclus dans un intervalle  $]u_j^-, u_{j+1}^-]$ . Cela implique que  $m \geq n$ , et par symétrie que  $m = n$  et que le flot  $\mathcal{F}^{\pi/2}$  associe bijectivement les intervalles  $]u_i^+, u_{i+1}^+[$  et  $]u_j^-, u_{j+1}^-]$ . On parle d'*échange d'intervalles*. Le temps de retour à  $I$  sous le flot vertical est constant sur  $]u_i^+, u_{i+1}^+[$ , on le note  $t_i$ . On pose ensuite :

$$E := \bigcup_{i=0}^m \text{Adh } \mathcal{F}_{[0, t_i]}^{\pi/2} ]u_i^+, u_{i+1}^+[$$

où Adh désigne l'adhérence dans  $S$ . On affirme que  $E = S$ . On a bien sûr que  $E$  est fermé non vide. On vérifie qu'il est ouvert dans  $S - \Sigma'$ . Il suffit de le vérifier en un point  $x$  sur un bord horizontal de  $\mathcal{F}_{[0, t_i]}^{\pi/2} ]u_i^+, u_{i+1}^+[$ . Supposons par exemple que  $x$  est sur le bord droit. Quitte à restreindre  $I$ , on peut supposer que qu'il n'y a pas de connexion verticale entre points de  $\Sigma'$ . Ainsi, ce bord contient un unique élément de  $\Sigma'$ . On distinguant les cas où  $x$  est en dessous ou au dessus de la singularité sur le bord, et en se rappelant que le flot vertical n'a pas d'orbite périodique, on voit que  $x$  admet un voisinage ouvert de  $S - \Sigma'$  inclus dans  $E$ .

Ceci conclut la preuve que  $E = S$ . Or tout point de  $E$  revient à  $I$  en un temps borné (inférieur au max des  $t_i$ ) s'il ne rencontre pas de singularité entre temps, d'où le résultat.  $\square$

On peut aussi démontrer, en passant à un revêtement universel, que l'ensemble des directions  $\theta \in S^1$  portant une connexion est dénombrable. Combiné au théorème précédent, cela donne :

**Corollaire 2.2.** *Pour presque tout  $\theta \in S^1$ , le flot  $\mathcal{F}^\theta$  est minimal.*

En reprenant le début de la preuve précédente, on a aussi :

**Corollaire 2.3.** *Toute surface de translation est isomorphe à un recollement des bords d'un seul polygone (cf. exemple section 1).*

*Démonstration.* On se donne une connexion  $J \subseteq S - \Sigma$ . On se donne une direction  $\theta \in S^1$  ne portant pas de connexion (en particulier transverse à  $J$ ). On reprend les notations  $(u_i^+)_{i=1, \dots, m}$ ,  $(u_i^-)_{i=1, \dots, m}$  de la preuve précédente (adaptée à  $\theta$ ). On se donne alors  $J' \subseteq \mathbb{R}^2$  une copie de  $J$  (même longueur, même direction orientée). Soit  $\tau_i > 0$  le temps que met  $u_i^+ \in J$  à atteindre  $\Sigma$  sous  $\mathcal{F}^\theta$ . A partir de chaque  $u_i^+ \in J'$ , on se déplace dans la direction  $\theta$  d'une longueur  $\tau_i$  et on marque  $s_i^+ \in \mathbb{R}^2$  le point d'arrivée. De même avec les  $u_i^-$  en suivant la direction  $-\theta$ . On relie alors par un segment chaque  $s_i^+$  à  $s_{i+1}^+$ , et chaque  $s_i^-$  à  $s_{i+1}^-$ . Cela donne un polygone dans  $\mathbb{R}^2$ . L'action du flot  $\mathcal{F}^\theta$  sur la surface  $S$  induit un appariement des bords du polygone, par paires de même longueurs et parallèles. Quotienter par cette appariement donne une surface de translation isomorphe à  $(S, \Sigma, \kappa, \zeta)$ .  $\square$

## Unique ergodicité du flot de translation

Començons par énoncer un critère assurant qu'une direction  $\theta \in S^1$  induit un flot  $\mathcal{F}^\theta$  uniquement ergodique.

Soit  $M \in GL_2(\mathbb{R})$ , et  $\zeta$  une structure de translation sur  $(S, \Sigma, \kappa)$ . On peut composer toutes les cartes  $\zeta$  par l'action de  $M$  et obtenir une nouvelle structure de translation sur  $(S, \Sigma, \kappa)$ . L'action de  $GL_2(\mathbb{R})$  restreinte au sous groupe à un paramètre  $\left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$  induit un flot sur l'ensemble des structures de translation qu'on appelle *flot de Teichmüller* et que l'on note  $\phi_t$ .

Pour une direction  $\theta \in S^1$ , on définit aussi

$$R_\theta := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Enfin on appelle *systole* d'une structure de translation  $\zeta$  la plus courte longueur de connexion entre des singularités. On la note  $\text{sys}(\zeta) \in \mathbb{R}_{>0}$ .

**Critère de Masur.** Soit  $\zeta$  une structure de translation sur  $(S, \Sigma, \kappa)$  et  $\theta \in S^1$ .

Si la systole  $\text{sys}(\phi_t \cdot R_{\pi/2-\theta} \cdot \zeta)$  ne tend pas vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , alors le système dynamique  $(\Omega_\theta, \text{leb}_{|\Omega_\theta}, \mathcal{F}^\theta)$  est *uniquement ergodique*.

*Démonstration.* Esquissons une preuve dans le cas (général) où  $\theta = \pi/2$ . Pour une démonstration complète, on pourra consulter [?] pages 12–17. Comme on le verra plus bas, on peut définir l'espace des modules des structures de translation  $\mathcal{M}(S, \Sigma, \kappa)$  comme étant l'ensemble des structures de translation sur  $(S, \Sigma, \kappa)$  quotienté par la relation d'isomorphisme.  $\mathcal{M}(S, \Sigma, \kappa)$  admet une structure d'orbifold. Une généralisation du *critère de Malher* sur les réseaux donne le résultat suivant :

Un sous ensemble  $K \subseteq \mathcal{M}(S, \Sigma, \kappa)$  est d'adhérence compacte si et seulement si la systole restreinte à  $K$  est minorée par un réel strictement positif.

Fort de ce résultat, on déduit l'existence d'une suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  strictement croissante non majorée et d'une structure de translation  $\zeta_\infty$  telle que  $\zeta_n := \phi_{t_n} \cdot \zeta \rightarrow \zeta_\infty$  dans l'espace des modules. Cela assure l'existence d'homéomorphismes  $f_n, n \in \mathbb{N}$  tels que  $f_n \cdot \zeta_n := \zeta_n \circ f_n^{-1} \rightarrow \zeta_\infty$  dans l'espace des structures de translation.

Remarquons alors le phénomène suivant. Soit  $x, y \in S$  les extrémités opposées d'un rectangle plongé dans  $\zeta_\infty$ . Alors  $f_n^{-1}(x)$  et  $f_n^{-1}(y)$  sont les extrémités opposées d'un rectangle plongé dans  $\zeta$  de largeur arbitrairement petite et de hauteur arbitrairement grande (pourvu que  $n$  soit assez grand), et cela reste vrai pour des petites perturbations de  $x$  et  $y$ .

Soit  $\mu$  et  $\nu$  des mesures ergodiques sur  $(\Omega_{\pi/2}, \mathcal{F}^{\pi/2})$ . On note  $B(\mu), B(\nu) \subseteq \Omega_\theta$  leurs ensembles typiques (de mesures pleines). Supposons que  $x \in B(\mu)$  et  $y \in B(\nu)$  sont les extrémités opposés de rectangles plongés arbitrairement fins et hauts. Alors, pour une fonction continue  $g \in C^0(S, \mathbb{R}_+)$  et quitte échanger les noms de  $\mu$  et  $\nu, x$  et  $y$ , on a :

$$\int_{\Omega_\theta} g d\mu = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[0, T]} g \circ \mathcal{F}_t^{-\pi/2}(x) dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[0, T]} g \circ \mathcal{F}_t^{+\pi/2}(y) dt = \int_{\Omega_\theta} g d\nu$$

Ainsi  $\mu = \nu$ .

Combinons maintenant les deux derniers paragraphes. Soit  $x_\infty, y_\infty \in S$  extrémités d'un rectangle plongé dans  $\zeta_\infty$ , et  $x \in B(\mu), y \in B(\nu)$ . On suppose que  $f_n(x) \rightarrow x_\infty$  et  $f_n(y) \rightarrow y_\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Alors,  $x$  et  $y$  sont les extrémités opposés de rectangles plongés arbitrairement fins et hauts, puis  $\mu = \nu$ .

Terminons la démonstration. On peut contruire une suite finie  $U_1, \dots, U_n$  d'ouverts de  $S$  telle que si on se donne un point  $x_i \in U_i$  pour chaque  $i$ , alors :

1. Pour tout  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , il existe  $R_1, \dots, R_k$  des rectangles plongés dans  $\zeta_\infty$  et  $i_0, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$  tels que  $x_i$  et  $x_{i+1}$  sont des sommets opposés de  $R_{i+1}$  et  $i_0 = i, i_k = j$ .

2. Pour tout  $y \in S$ , il existe  $i \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $x$  et  $x_i$  sont extrémités opposées d'un rectangle plongé dans  $\zeta_\infty$ .

Un peu de théorie de la mesure montre que l'ouvert  $U_1$  contient un point  $x_1$  valeur d'adhérence d'une suite  $(f_n(x))$  où  $x \in B(\mu_1)$  pour une certaine mesure ergodique  $\mu_1$ . Quitte à considérer dès le début une sous suite de  $(t_n)$ , on peut supposer que  $f_n(x) \rightarrow x_1$ . On réalise le même raisonnement pour  $U_2$ , puis  $U_3$  etc. jusqu'à  $U_n$  ce qui nous donne pour tout  $i$  un point  $x_i \in U_i$  et une mesure ergodique  $\mu_i$ . D'après le dernier paragraphe, on a  $\mu_1 = \dots = \mu_n$ . Soit maintenant  $\nu$  une mesure ergodique sur  $(\Omega_{\pi/2}, \mathcal{F}^{\pi/2})$ . On se donne  $x \in B(\nu)$ . Quitte à extraire, on peut supposer que la suite  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un  $y \in S$ . La propriété 2 des  $(U_i)$  permet alors d'obtenir  $\nu = \mu$  ce qui conclut.  $\square$

Pour que le critère de Masur soit applicable, il faut que des directions  $\theta$  ne faisant pas converger la systole vers 0 existent. Elles sont même génériques :

**Proposition 2.4.** *Soit  $\zeta$  une structure de translation sur  $(S, \Sigma, \kappa)$ . L'ensemble des directions  $\theta \in S^1$  telle que  $\text{syst}(\phi_t.R_\theta.\zeta) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$  est de mesure nulle.*

*Démonstration.* On donne un squelette de preuve. Pour plus de détails on pourra consulter [?] pages 17 – 21. Soit  $c > 0$ . On pose :

$$A(t, \epsilon) := \{\theta \in S^1, \phi_t.R_\theta.\zeta \text{ a une connexion de longueur } \leq \epsilon \text{ ne rencontrant aucune autre connexion de longueur } \leq c\}$$

On montre qu'il existe  $K > 0$  tel que pour tout  $\epsilon > 0$  assez petit, pour tout  $t > 0$  assez grand,

$$\text{leb}_{S^1}(A(t, \epsilon)) \leq K.\epsilon$$

Dans l'idée, pour la plupart des directions  $\theta$ , si on se déplace suffisamment longtemps en suivant le flot de Teichmüller, les petites connexions rencontreront toutes une autre connexion de longueur inférieure à  $c$ .

Il s'agit alors de prouver que la négation de la proposition implique l'existence d'un  $c > 0$  et de suites réelles positives  $(t_n)$  tendant vers  $+\infty$  et  $(\epsilon_n)$  tendant vers 0 telles que  $\inf_n \text{leb}_{S^1} A(t_n, \epsilon_n) > 0$ .

Remarquons que si  $A'(t, \epsilon)$  est défini comme  $A(t, \epsilon)$  mais sans la condition de non intersection, alors le dernier résultat est élémentaire. Le raffinement demandé s'obtient en considérant des triangulations partielles de  $S$ .  $\square$

Le critère de Masur et la proposition précédente se combinent pour donner :

**Théorème 2.5.** *Soit  $\zeta$  une structure de translation sur  $(S, \Sigma, \kappa)$ . Pour presque toute direction  $\theta \in S^1$ , le système dynamique  $(\Omega_\theta, \text{leb}_{\Omega_\theta}, \mathcal{F}^\theta)$  est uniquement ergodique.*

### 3 Application aux trajectoires sur un billard polygonal rationnel

Dans cette section, on montre que l'étude des trajectoires dans un billard polygonal rationnel se ramène à l'étude des trajectoire du flot de translation sur une certaine surface de translation.

Soit  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  un polygone dont les angles aux sommets sont des multiples rationnels de  $\pi$ . Pour un côté  $c$  de  $P$ , on note  $g_c$  la réflexion vectorielle de  $\mathbb{R}^2$  de droite parallèle à  $c$ . On appelle  $G$  le groupe engendré par les  $g_c$  où  $c$  décrit l'ensemble des côtés de  $P$ . L'hypothèse que  $P$  soit rationnel implique  $G$  est inclus dans le groupe des symétries d'un polygone régulier et donc fini. Pour chaque  $g \in G$ , on se

donne  $P_g \subseteq \mathbb{R}^2$  un translaté de  $g.P$  de sorte que les  $P_g, g \in G$  soient deux à deux disjoints. Soit  $c$  un côté d'un certain  $P_g$ . La réflexion  $g_c$  associée est aussi dans  $G$  et  $c$  s'apparie naturellement à un côté " $g_c(c)$ " de  $P_{g_c g}$ . Ce procédé permet de regrouper les côtés des  $P_g$  en paires de côtés parallèles de même longueur. En les identifiant via des translations, on obtient une surface de translation  $(S_P, \Sigma_P, \kappa_P, \zeta_P)$  (cf. exemple 2 section 1) munie d'une projection sur  $P$  (qui à  $x \in P_g = g.P + \tau_g$  associe le point correspondant à  $g^{-1}(x - \tau_g)$ ). On remarque alors que toute trajectoire du flot de translation sur  $S_P$  se projette sur  $P$  en une trajectoire du flot de billard et que réciproquement, une trajectoire du flot de billard se relève à  $S$  en une trajectoire du flot de translation.

**Corollaire 3.1.** *Soit  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  un polygone dont les angles aux sommets sont des multiples rationnels de  $\pi$ . Alors pour tout  $x \in P$ , pour presque toute direction  $\theta \in S^1$ , la trajectoire de billard issue de  $x$  avec la direction  $\theta$  est dense dans  $P$ .*

Les résultats de la sous-section précédente donnent aussi que la mesure de Lebesgue sur  $P$  est ergodique (même si elle n'est pas invariante par le flot) au sens où l'intégrale d'une fonction continue est égale à sa moyenne temporelle sur presque toute orbite, multipliée par la mesure totale de  $P$ .

Terminons cette partie par une conjecture sur le flot d'un billard rationnel. On appelle diagonale généralisée une trajectoire joignant deux sommets du billard et on note  $d(L)$  le nombre de diagonales généralisées de longueur inférieure à  $L$ . Alors, on conjecture que  $d(L)/L^2$  a une limite quand  $L \rightarrow +\infty$ . Howard Masur a démontré dans [?] et [?] que la  $\liminf$  est non nul et que la  $\limsup$  est finie.

## Deuxième partie

# Etude de l'espace des modules

La preuve exposée du critère de Masur montre l'intérêt qu'il y peut y avoir à considérer toutes les structures de translation sur une donnée  $(S, \Sigma, \kappa)$ , même si le résultat qu'on cherche à démontrer s'énonce à structure fixée. Dans cette partie, on définit un cadre sain permettant de tels raisonnements. Il est naturellement muni d'un flot dont on montrera qu'il est ergodique. Tous les résultats présentés sont démontrés dans [?].

## 4 Cadre

On rappelle qu'un triplet  $(S, \Sigma, \kappa)$  est fixé et que l'on a noté  $\Sigma = (A_1, \dots, A_s)$ . On fixe également un revêtement universel  $p : \tilde{S} \rightarrow \Sigma$  tel que  $0 \in p^{-1}(A_1)$ . Le cadre que l'on va définir sera relatif à ces données.

### Surface de translation marquée

Soit  $\zeta$  une structure de translation sur  $(S, \Sigma, \kappa)$ . On appelle *séparatrice* de  $\zeta$  de direction de  $\theta \in S^1$  la donnée d'une trajectoire de  $\mathcal{F}^\theta$  issue d'une singularité  $A_i \in \Sigma$ . On appelle *marquage* de  $\zeta$  la donnée d'une séparatrice de direction  $1 \in S^1$  (i.e. horizontal, orientée vers la droite) issue de la première singularité  $A_1$  de  $S$ .

On note

$$\tilde{\mathcal{S}} := \{(\zeta, s), \zeta \text{ est une structure de translation sur } (S, \Sigma, \kappa) \text{ et } s \text{ un marquage de } \zeta\}$$

l'ensemble des structures de translation marquées.

Pour  $(\zeta, s) \in \tilde{\mathcal{S}}$ , on définit une application développante  $D_\zeta : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{C}$  qui à une classe d'homotopie de chemins  $\gamma$  de  $A_1$  vers un point  $B \in S$  associe le point de  $\mathbb{R}^2$  obtenu en relevant  $\gamma$  dans des cartes de translation à partir de 0 et en appelant  $D_\zeta(\gamma) \in \mathbb{R}^2$  le point d'arrivée. Cette application ne dépend pas du marquage  $s$  que l'on omet donc dans la notation.

Si  $\zeta'$  est une structure de translation telle que  $D_\zeta$  et  $D_{\zeta'}$  sont assez proches pour la topologie compacte ouverte, le marquage sur  $\zeta$  induit un marquage sur  $\zeta'$ .

On munit finalement  $\tilde{\mathcal{S}}$  d'une topologie métrisable telle qu'une suite  $(\zeta_n, s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $(\zeta, s)$  si et seulement si  $D_{\zeta_n} \rightarrow D_\zeta$  pour la topologie compacte ouverte et les marquages correspondent à partir d'un certain rang. Une telle topologie est unique.

## Espace de Teichmüller marqué

On note  $\text{Homeo}_0$  le groupe des homéomorphismes de  $S$  fixant chaque point de  $\Sigma$  et isotopes à l'identité.  $\text{Homeo}_0$  agit sur  $\tilde{\mathcal{S}}$  par  $g.(\zeta, s) := (\zeta \circ g^{-1}, g(s))$ . On définit :

$$\tilde{\mathcal{T}} := \text{Homeo}_0 \backslash \tilde{\mathcal{S}}$$

appelé *espace de Teichmüller marqué* des structures de translation sur  $(S, \Sigma, \kappa)$ .

Nous allons donner une bonne structure à l'espace de Teichmüller (marqué). On définit pour cela l'application période  $\Theta : \tilde{\mathcal{T}} \rightarrow \text{Hom}(H_1(S, \Sigma, \mathbb{Z}), \mathbb{C})$  telle que  $\Theta(\zeta, s)(\gamma)$  s'obtient comme dans la définition de l'application développante à partir d'un représentant quelconque de  $\gamma$  comme somme formelle de chemins. On a le résultat suivant ([?], prouvé en section 6.5) :

**Proposition 4.1.** *L'application période  $\Theta : \tilde{\mathcal{T}} \rightarrow \text{Hom}(H_1(S, \Sigma, \mathbb{Z}), \mathbb{C})$  est un homéomorphisme local.*

La suite exacte en homologie associée à la paire  $(S, \Sigma)$  donne que  $H_1(S, \Sigma, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g+s-1}$  et donc que l'espace d'arrivée de  $\Theta$  s'identifie à  $\mathbb{C}^{2g+s-1}$  modulo un choix de base. Changer de base revient à faire agir un élément de  $SL_{2g+s-1}(\mathbb{Z})$ , qui préserve la forme volume canonique. On a donc une forme volume naturelle sur  $\text{Hom}(H_1(S, \Sigma, \mathbb{Z}), \mathbb{C})$  notée  $dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{2g+s-1}$ .

On munit alors  $\tilde{\mathcal{T}}$  de l'unique structure complexe et de l'unique forme volume  $\omega_{\tilde{\mathcal{T}}}$  telles que  $\Theta$  est holomorphe et  $\Theta^* dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{2g+s-1} = \omega_{\tilde{\mathcal{T}}}$ .

On peut également définir la fonction aire  $A : \tilde{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  qui à  $[(\zeta, s)]$  associe l'aire de  $\zeta$ . On peut voir en coordonnées que  $A$  est une submersion  $C^\infty$ . On note  $\tilde{\mathcal{T}}^1 = \tilde{\mathcal{T}} \cap \{A = 1\}$ . C'est une sous variété  $C^\infty$ . On la munit d'une forme volume  $\omega_{\tilde{\mathcal{T}}^1}$  de la façon suivante. On se donne  $\alpha$  une  $(2g+s-2)$ -forme sur  $\tilde{\mathcal{T}}^1$  telle que  $\omega_{\tilde{\mathcal{T}}} = \alpha \wedge dA$  et on pose  $\omega_{\tilde{\mathcal{T}}^1} := \alpha|_{\tilde{\mathcal{T}}^1}$ .

## Espace des modules marqué

On note  $\text{Homeo}$  l'ensemble des homéomorphismes de  $S$  préservant l'orientation et fixant chaque point de  $\Sigma$ , et on définit le groupe modulaire de  $(S, \Sigma)$  par :

$$\text{Mod} = \text{Homeo} \backslash \text{Homeo}_0.$$

On a une action de  $\text{Homeo}$  sur  $\tilde{\mathcal{S}}$  (définie comme l'action de  $\text{Homeo}_0$ ) et cette action passe au quotient en une action de  $\text{Mod}$  sur  $\tilde{\mathcal{T}}$ . On appelle  $\tilde{\mathcal{M}}$  l'ensemble des orbites :

$$\tilde{\mathcal{M}} := \text{Mod} \backslash \tilde{\mathcal{T}}$$

C'est l'*espace des modules marqué* sur  $(S, \Sigma)$ . On le lemme suivant prouvé, dans [?] section 6.9.



**Lemme 4.2.** *L'action de  $\text{Mod}$  sur  $\tilde{\mathcal{T}}$  est libre et proprement discontinue. De plus, chaque élément de  $\text{Mod}$  agit de façon holomorphe, en préservant la forme volume  $\omega_{\tilde{\mathcal{T}}}$  et en laissant invariant la fonction d'aire  $A$ .*

En conséquence, la projection  $\pi : \tilde{\mathcal{T}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$  est un revêtement. De plus, on peut munir  $\tilde{\mathcal{M}}$  d'une unique structure complexe telle que  $\pi$  soit holomorphe puis d'une unique forme volume  $\omega_{\tilde{\mathcal{M}}}$  telle que  $\pi^*\omega_{\tilde{\mathcal{M}}} = \omega_{\tilde{\mathcal{T}}}$ . Enfin la fonction d'aire  $A$  passe à l'espace des modules en une submersion  $C^\infty$ . On note  $\tilde{\mathcal{M}}^1 := \tilde{\mathcal{M}} \cap \{A = 1\}$ . C'est une sous variété  $C^\infty$  de  $\tilde{\mathcal{M}}$  munie canoniquement d'une forme volume  $\omega_{\tilde{\mathcal{M}}^1}$ . On remarque que  $\pi|_{\tilde{\mathcal{T}}^1} : \tilde{\mathcal{T}}^1 \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}^1$  est un revêtement  $C^\infty$  qui préserve les formes volumes.

## Flot de Teichmüller

Nous avons défini au début de la sous-section 2.2 une action de  $GL_2(\mathbb{R})$  sur l'ensemble des structures de translation sur  $(S, \Sigma, \kappa)$  ainsi qu'un flot  $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  donné par restriction de cette action au sous groupe à un paramètre  $\left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$

Le flot  $\phi_t$  se relève en un flot (continu) sur  $\tilde{\mathcal{S}}$  défini par  $\phi_t \cdot (\zeta, s) = (\phi_t \cdot \zeta, s)$  et préservant la notion d'aire. De plus l'action du flot commute avec l'action du groupe Homeo sur  $\tilde{\mathcal{S}}$  définie par  $g \cdot (\zeta, s) = (\zeta \circ g^{-1}, g(s))$ .

Cela induit des flots sur  $\tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathcal{T}}^1, \tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathcal{M}}^1$  que l'on appelle tous *flot de Teichmüller* et que l'on note également  $\phi_t$ .

Sur  $\tilde{\mathcal{T}}$ , on a  $\Theta(\phi_t \cdot [\zeta, s]) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \circ \Theta[\zeta, s]$ . Cela montre que le flot de Teichmüller préserve la forme volume  $\omega_{\tilde{\mathcal{T}}}$  et donc toutes les autres formes volumes  $\omega_{\tilde{\mathcal{T}}^1}, \omega_{\tilde{\mathcal{M}}}, \omega_{\tilde{\mathcal{M}}^1}$ .

## 5 Ergodicité du flot de Teichmüller sur l'espace des modules marqué normalisé

Notons  $\mu_1$  la mesure sur  $\tilde{\mathcal{M}}^1$  induite par la forme volume  $\omega_{\tilde{\mathcal{M}}^1}$ . Nous allons résumer la démonstration donnée dans [?] du théorème ci dessous. C'est elle même une reprise des démonstrations originales données dans [?], [?] et [?].

**Théorème 5.1.** *Le système dynamique à temps continu  $(\tilde{\mathcal{M}}^1, \mu_1, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  est de mesure finie et ergodique sur chacune de ses composantes connexes.*

### Finitude de la mesure

Rectangles zippés de Veech

Commençons par introduire une méthode de construction de surfaces de translation proposée dans [?] et adaptée à l'action du flot de Teichmüller.

On se donne  $d \geq 1$ ,  $\sigma \in \mathfrak{S}_d$ . On dit que  $\tau \in \mathbb{R}^d$  est  $\sigma$ -compatible si pour tout  $k \in \{1, \dots, d-1\}$  on a :

$$\sum_{i \leq k} \tau_i > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\sigma(i) \leq k} \tau_i < 0.$$

On pose  $\Theta_\sigma := \{\tau \in \mathbb{R}^d, \tau \text{ est } \sigma\text{-compatible}\}$ .

Pour  $\tau \in \Theta_\sigma$ , on note  $h \in \mathbb{R}^d$  le vecteur hauteur défini par :

$$h_i := \sum_{k \leq i} \tau_k - \sum_{\sigma(k) \leq i} \tau_k = (\tau \Omega_\sigma)_i$$

où  $\Omega_\sigma \in M_d(\mathbb{R})$  est la matrice définie par  $\Omega_\sigma(i, j) = -1$  si  $i > j$  et  $\sigma(i) < \sigma(j)$ ,  $\Omega_\sigma(i, j) = +1$  si  $i < j$  et  $\sigma(i) > \sigma(j)$  et  $\Omega_\sigma(i, j) = 0$  sinon.

Soit  $(\lambda, \tau) \in \mathbb{R}_{>0}^d \times \Theta_\sigma$ .

Plaçons nous dans  $\mathbb{R}^2$ . On définit pour  $i = 1 \dots d$  :

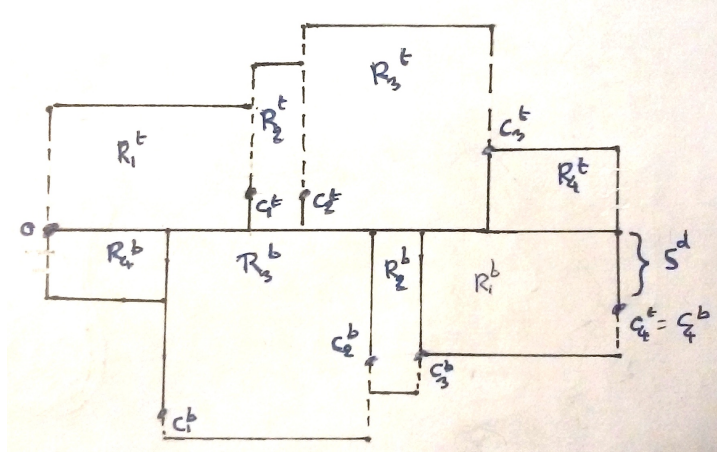
$$R_i^t = ] \sum_{k < i} \lambda_k, \sum_{k \leq i} \lambda_k [ \times ] 0, h_i [ \quad \text{et} \quad R_i^b = ] \sum_{\sigma(k) < \sigma(i)} \lambda_k, \sum_{\sigma(k) \leq \sigma(i)} \lambda_k [ \times ] -h_i, 0 [$$

On introduit ensuite pour  $i = 1, \dots, d-1$  les points  $C_i^t = (\sum_{k \leq i} \lambda_k, \sum_{k \leq i} \tau_k)$ ,  $C_i^b = (\sum_{\sigma(k) \leq i} \lambda_k, \sum_{\sigma(k) \leq i} \tau_k)$  et  $C_0^t = C_0^b = 0$ ,  $C_d^t = C_d^b = (\sum_{k \leq d} \lambda_k, \sum_{k \leq d} \tau_k)$ . On note  $u_i^t, u_i^b$  leurs projections orthogonale sur l'axe réel.

On définit enfin pour  $i = 0, \dots, d$ , les segments  $S_i^t = [u_i^t, C_i^t]$ ,  $S_i^b = [u_i^b, C_i^b]$ .

La réunion de toutes ces parties de  $\mathbb{R}^2$  est appelée  $\hat{S}$ . On quotiente alors  $\hat{S}$  par les identifications suivantes :

- $R_i^t \equiv R_i^b$  par translation. On note  $v_i \in \mathbb{R}^2$  le vecteur de cette translation orienté de  $R_i^t$  vers  $R_i^b$ .
- $C_i^t \equiv C_i^b + v_i$ .
- Si  $C_d$  est au dessus de l'axe réel, on identifie :  $S_d \equiv S_d - v_{\sigma^{-1}(d)}$ , si  $C_d$  est en dessous de l'axe réel, on identifie :  $S_d \equiv S_d + v_d$ .



En raisonnant comme dans le deuxième exemple de la section 1, on voit qu'on obtient une surface de translation  $(S, \Sigma, \kappa, \zeta)_{(\sigma, \lambda, \tau)}$  où  $\Sigma$  est l'ensemble des  $C_i^t, C_i^b$  modulo identifications et ordonné par un procédé quelconque (mais qu'il est bon de fixer une pour toute). De plus, la projection de l'intervalle  $I := ]0, \sum_{k \leq d} \lambda_k [ \times \{0\}$  dans  $S$  est une portion initiale d'une séparatrice horizontale  $s$  que l'on considèrera comme un marquage par défaut de  $(S, \Sigma, \lambda, \tau)$ .

En conclusion, on obtient une surface de translation marquée munie d'une portion initiale privilégiée de la séparatrice. On appelle cette méthode la *construction par rectangles zippés de Veech*.

Donnons nous maintenant un autre couple de paramètres  $(\lambda', \tau') \in \mathbb{R}_{>0}^d \times \Theta_\sigma$ . On a alors un homéomorphisme  $h : S_{(\sigma, \lambda, \tau)} \rightarrow S_{(\sigma, \lambda', \tau')}$  canonique à isotopie près qui respecte les singularités, leurs angles, et fait correspondre les portions initiales des séparatrices. On peut alors tirer en arrière la

structure marquée  $(\zeta', s')$  sur  $S_{(\sigma, \lambda', \tau')}$  en une structure marquée  $(h^*\zeta', h^{-1}(s'))$  sur  $S_{(\sigma, \lambda, \tau)}$ . Ce procédé permet de se ramener à une donnée topologique fixée  $(S, \Sigma, \kappa)$  sur laquelle on fait varier une structure de translation marquée, paramétrée par  $\mathbb{R}_{>0}^d \times \Theta_\sigma$ .

Inversons maintenant la construction. Soit  $(\zeta, s) \in \tilde{\mathcal{S}}$  une structure marquée sur  $(S, \Sigma, \kappa)$  et  $I \subseteq s$  une portion initiale de  $s$  i.e. un sous-intervalle ouvert borné de  $s$  ayant  $A_1$  pour extrémité gauche. On dit que  $I$  vérifie l'énoncé  $(H)$  si  $I$  rencontre toutes les connexions verticales de  $\zeta$  et qu'il existe une séparatrice verticale rencontrant l'extrémité droite de  $I$  avant de rencontrer  $I$ . On peut voir que si  $\zeta$  est sans connexion verticale ou sans connexion horizontale, alors il existe une infinité de telles  $I$  et que leurs longueurs forment un sous ensemble discret de  $\mathbb{R}_{>0}$ , non minoré et non majoré.

La construction de Veech s'inverse selon le lemme suivant ([?], corollaire 5.5) :

**Lemme 5.2.** *Soit  $(\zeta, s) \in \tilde{\mathcal{S}}$  et  $I \subseteq s$  une portion initiale vérifiant  $(H)$ . Alors il existe un unique triplet  $(\sigma, \lambda, \tau)$  où  $\sigma \in \mathfrak{S}_d$ ,  $(\lambda, \tau) \in \mathbb{R}_{>0} \times \Theta_\sigma$  tel que  $(S, \Sigma, \zeta, s)$  et  $(S, \Sigma, \zeta, s)_{(\sigma, \lambda, \tau)}$  sont isomorphes par un isomorphisme envoyant  $I$  sur la portion initiale privilégiée de  $s_{\sigma, \lambda, \tau}$ .*

Finitude du nombre de composante connexes

On prouve que  $\tilde{\mathcal{M}}^1$  n'a qu'un nombre fini de composantes connexes. Il suffit de le montrer pour  $\tilde{\mathcal{M}}$ . Notons  $d = 2g + s - 1$  et définissons le *diagramme de Rauzy-Veech* (de paramètre  $d$ ). Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_d$  une permutations de  $\{1, \dots, d\}$ . On note  $R^t(\sigma)$  la permutation de  $\{1, \dots, d\}$  définie par :  $R^t(\sigma)(i) = \sigma(i)$  si  $\sigma(i) \leq \sigma(d)$ ,  $R^t(\sigma)(\sigma^{-1}(d)) = \sigma(d) + 1$  et  $R^t(\sigma)(i) = \sigma(i) + 1$  si  $\sigma(d) < \sigma(i) < d$ . On note  $R^b(\sigma)$  la permutation de  $\{1, \dots, d\}$  définie par :  $R^b(\sigma) := (R^t(\sigma^{-1}))^{-1}$ . On appelle diagramme de Rauzy-Veech le graphe orienté  $\mathcal{D}$  de sommets les permutations  $\sigma \in \mathfrak{S}_d$  et d'arêtes orientées les couples  $(\sigma, R^t(\sigma))$  et  $(\sigma, R^b(\sigma))$ . De chaque sommet partent (resp. arrivent) exactement deux arêtes.

**Remarque.** *Les flèches  $R^t$  et  $R^b$  trouvent leur sens de la façon suivante. Soit  $(\zeta, s) \in \tilde{\mathcal{S}}$  sans connexion verticale,  $I \subseteq s$  vérifiant  $(H)$  et  $J \subseteq I$  la plus grande portion initiale incluse dans  $I$  et vérifiant  $(H)$ . Toutes deux définissent des triplets  $(\sigma^I, \lambda^I, \tau^I)$ ,  $(\sigma^J, \lambda^J, \tau^J)$ . Alors si  $\lambda^I_d > \lambda^J_{\sigma^{-1}(d)}$ , on a  $\sigma_J = R^t(\sigma_I)$  et si  $\lambda^I_d < \lambda^J_{\sigma^{-1}(d)}$ , on a  $\sigma_J = R^b(\sigma_I)$ .*

**Lemme 5.3.** *Les composantes connexes de  $\tilde{\mathcal{M}}$  s'injectent dans les composantes connexes du diagramme de Rauzy-Veech non orienté. En particulier, elles sont en nombre fini.*

*Démonstration.* Soit  $C \subseteq \tilde{\mathcal{M}}$  une composante connexe. On montre d'abord que le sous ensemble  $C_{h,v} \subseteq C$  des structures sans connexion verticale ou sans connexion horizontale est connexe par arcs. Ensuite, on se donne  $x \in C_{h,v}$ . On peut réaliser  $x$  grâce à la construction par rectangle zippés avec une certaine permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_d$ . Cette réalisation n'est pas unique, un autre choix de réalisation est nécessairement associé à une permutation  $\sigma' \in \mathfrak{S}_d$  liée à  $\sigma$  dans  $\mathcal{D}$  par un chemin orienté (voir la remarque précédente). On note  $C_{RV}$  la composante non orientée de  $\mathcal{D}$  contenant  $\sigma$ . Il reste à voir que cette composante ne dépend pas du choix de  $x \in C_{h,v}$ . On se donne pour cela un autre point  $y \in C_{h,v}$  ainsi qu'un chemin de  $x$  vers  $y$  dans  $C_{h,v}$ . Alors la classe de Rauzy-Veech  $C_{RV}$  est localement constante le long du chemin, donc constante et indépendante du point choisi.  $\square$

Mesure finie d'une composante connexe

Soit  $C$  une composante connexe de  $\tilde{\mathcal{M}}^1$ . On montre que  $\mu_1(C) < +\infty$ . Notons  $C_{RV}$  la composante de Rauzy-Veech associée comme dans le paragraphe précédent.

Pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_d$ , on définit  $N_\sigma$  l'ensemble des  $[\zeta, s] \in \tilde{\mathcal{M}}^1$  tel que  $\zeta$  est sans connexion verticale, sans connexion horizontale, et tel que la portion initiale de longueur 1 de  $s$  vérifie  $(H)$  avec la permutation  $\sigma$ . On pose aussi :

$$N := \coprod_{\sigma \in C_{RV}} N_\sigma$$

On a montré que  $N$  n'est autre que l'ensemble des points de  $C$  sans connexion verticale ni horizontale et dont la portion initiale de longueur 1 de la séparatrice vérifie l'énoncé (H).

Remarquons que pour  $x \in N$ , le flot de Teichmüller revient à  $N$  en un temps fini (borné par  $\ln 2$ ). On note  $T : N \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  le temps de retour.

On a une mesure naturelle sur chaque  $N_\sigma$  vu comme partie de la sous-variété

$$\{(\lambda, \tau) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \sum_{i \leq d} \lambda_i = 1, \tau \Omega^t \lambda = 1\}$$

On peut alors montrer que :

$$\int_N T = \mu_1(C).$$

Partionnons  $N$  en  $N = N^t \sqcup N^b$  où  $(\sigma, \lambda, \tau) \in N$  est dans  $N^t$  si  $\lambda_d > \lambda_{\sigma^{-1}(d)}$  et dans  $N^b$  si  $\lambda_d < \lambda_{\sigma^{-1}(d)}$ . Les sous ensembles  $N^t$  et  $N^b$  jouent des rôles analogues. Il s'agit donc de montrer que  $T$  est intégrable sur  $N^t$ . Or si  $(\sigma, \lambda, \tau) \in N^t$ , on a  $T(\sigma, \lambda, \tau) = -\ln(1 - \lambda_{\sigma^{-1}(d)})$ . Il reste donc à voir que :

$$\int_{\Omega_\sigma^t} -\ln(1 - \lambda_{\sigma^{-1}(d)}) < +\infty$$

où  $\Omega_\sigma^t = \{(\lambda, \tau) \in \mathbb{R}_{>0}^d \times \Theta_\sigma, \sum_i \lambda_i = 1, \tau \Omega^t \lambda = 1, \lambda_d > \lambda_{\sigma^{-1}(d)}\}$  ce qui se démontre par des techniques d'analyse élémentaires (voir [?] sections 9.6 et 9.7).

## Ergodicité

Terminons par la preuve de l'ergodicité du système dynamique  $(C, \mu_1|_C, (\phi_t|_C)_{t \in \mathbb{R}})$  où  $C$  désigne une composante connexe quelconque de  $\widetilde{\mathcal{M}}^1$ . On trouvera les détails dans [?], section 10.3.

Soit  $f : C \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  une fonction continue à support compact. Par finitude de la mesure de  $C$ , le théorème de Birkhoff assure l'existence d'une fonction  $F : C \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  et d'un ensemble de mesure pleine  $E \subseteq C$  tel que pour tout  $x \in E$ , on a :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[0, T]} f \circ \phi_t(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{[0, T]} f \circ \phi_{-t}(x) = F(x)$$

Il suffit de montrer qu'une telle fonction  $F$  est nécessairement  $\mu_1$  presque-partout constante.

Soit  $C_v = \{x \in C, x \text{ est sans connexion verticale}\}$  (de mesure pleine dans  $C$ ). Pour  $\sigma \in \Sigma_d$  on note  $C_{v, \sigma}$  le sous ensemble des  $x \in C_v$  tel que la première portion initiale de la séparatrice marquée vérifiant (H) et de longueur strictement supérieure à 1 a  $\sigma$  pour permutation. Ainsi,  $C_v = \coprod_{\sigma \in C_{RV}} C_{v, \sigma}$ . On peut identifier  $C_{v, \sigma}$  à une partie pleine de

$$\{(\lambda, \tau) \in \mathbb{R}_{>0}^d \times \Theta_\sigma, \sum_i \lambda_i \in ]1, 1 + \min(\lambda_d, \lambda_{\sigma^{-1}(d)})[, \tau \Omega^t \lambda = 1\}.$$

On montre alors que pour un sous ensemble plein  $E_\sigma$  de  $C_{v, \sigma} \cap E$ , deux éléments de projections  $\lambda$  se rapprochent infiniment sous l'action du flot de Teichmüller  $\phi_t$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ ; et que deux éléments de projections  $\tau$  se rapprochent infiniment sous l'action du flot  $\phi_t$  quand  $t$  tend vers  $-\infty$ . On en déduit que deux éléments de  $E_\sigma$  ayant une projection commune ont même image par  $F$ , puis via le théorème d'Egorov, que  $F$  est presque constante sur  $C_{v, \sigma}$ , de constante notée  $c_\sigma$ .

Soit enfin  $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_d$  des sommets de  $C_{RV}$  liés par une flèche de  $\mathcal{D}$ . Pour tout point  $x \in C_{v,\sigma}$ , il existe un voisinage ouvert  $V_x$  tel que  $\phi_t(V_x) \subseteq C_{v,\sigma'}$ . Cela implique  $c_\sigma = c_{\sigma'}$ .

Ainsi  $F$  est presque-partout constante sur  $C_v = \coprod_{\sigma \in C_{RV}} C_{v,\sigma}$ . C'est le résultat voulu.

□

## Avancée

On termine ce mémoire en énonçant un théorème récent publié sur Arxiv par A.Eskin, M.Mirzakhani et A. Mohammadi en 2013 ([?]). Nous avons défini plus haut une action du groupe à un paramètre  $\left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$  sur l'espace des modules marqué normalisé  $\widetilde{\mathcal{M}}^1$ . On peut en fait définir de la même façon une action du groupe  $T$  des matrices triangulaires supérieures de  $SL_2(\mathbb{R})$ . On a alors le théorème de suivant :

**Théorème 5.4.** *L'adhérence de l'orbite d'un point  $x \in \widetilde{\mathcal{M}}^1$  sous l'action de  $T$  est une sous variété de  $\widetilde{\mathcal{M}}^1$  donnée par des équations affines en coordonnées périodes.*