

Espaces métriques aléatoires construits par recollements

Introduction au domaine de recherche

Delphin SÉNIZERGUES

24 novembre 2015

Résumé

David Aldous introduit en 1991 l'arbre brownien (qu'il appelle alors *compact continuum random tree*), qui a en un certain sens la forme limite de n'importe quel modèle d'arbre combinatoire raisonnable, lorsque le nombre de sommets tend vers l'infini. Cet arbre peut être défini par un procédé simple de recollement de segments de longueurs aléatoires. D'autres travaux ont par la suite été fait pour donner des constructions similaires pour d'autres objets, ce qui nous amènera à considérer les propriétés générales de ce type de construction.

Table des matières

1 Arbres discrets, continus et construction	2
1.1 Arbres de Galton-Watson	2
1.2 Arbre brownien d'Aldous	2
1.3 \mathbb{R} -arbres	3
2 Quelques propriétés métriques	5
2.1 Bornitude et compacité	5
2.2 Dimension de Hausdorff	6
2.3 Un exemple déterministe	6
3 Construction d'espaces métriques aléatoires par recollement de segments	7
3.1 Définition du modèle	7
3.2 Point uniforme et bornitude	8
3.3 D'autres constructions sur le même principe	9

1 Arbres discrets, continus et construction

1.1 Arbres de Galton-Watson

Un des processus les mieux connus pour produire des arbres (discrets) est donné par la généalogie du processus de branchement suivant, introduit par Bienaymé puis étudié indépendamment par le scientifique Francis Galton et le révérent Watson dans un article de 1874, qui lui laissèrent leur nom. On considère une population où tous les individus se reproduisent indépendamment les uns des autres et dont le nombre d'enfants suit la même loi $\mu = (\mu_k)_{k \geq 0}$ sur \mathbb{N} . Un résultat bien connu est que si on écarte le cas dégénéré où $\mu_1 = 1$, (chaque individu a exactement un enfant) alors la population s'éteint en un temps fini si et seulement si le nombre moyen d'enfant $m = \sum_{i=1}^{\infty} i\mu_i$ est inférieur à 1. Si on s'intéresse à l'arbre généalogique de la population ainsi obtenue, on obtient alors un arbre fini. Lorsque $m = 1$, on dit que l'arbre a un comportement *critique*. On se placera toujours dans ce cas de figure-là par la suite.

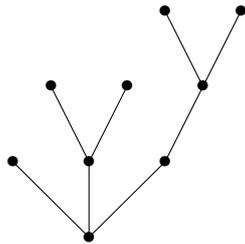


FIGURE 1 – Un exemple d'arbre généalogique

On s'intéresse à la forme des arbres produits ainsi qui ont un grand nombre de sommets, c'est-à-dire en conditionnant l'arbre à avoir un nombre de sommets fixé n , où n va être un très grand nombre.

1.2 Arbre brownien d'Aldous

L'arbre brownien, introduit et étudié par Aldous dans ses trois articles publiés au début des années 1990 [3, 4, 5] (qu'il appelle alors *CRT* pour *Continuum Random Tree*), est un arbre aléatoire aléatoire qui apparaît comme limite d'un très grand nombre de modèles d'arbres combinatoires mais aussi d'autres structures (cartes, graphes). Il en donne plusieurs définitions équivalentes. L'une d'elle consiste à donner une construction d'arbre à partir d'une fonction, et ensuite de faire la même construction pour une fonction aléatoire bien choisie. Si on a une fonction continue f de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}_+ qui vaut 0 en 0 et en 1 on peut définir

$$m_f(x, y) := \min_{t \in [x \wedge y, x \vee y]} f(t),$$

puis

$$\forall x, y \in [0, 1], d_f(x, y) = f(x) + f(y) - 2m_f(x, y).$$

On peut vérifier facilement que $m_f(x, y) = m_f(y, x)$ et que $d_f(x, z) \leq d_f(x, y) + d_f(y, z)$ pour tout $x, y, z \in [0, 1]$, c'est-à-dire que d_f est une pseudo-distance sur $[0, 1]$. Si on quotiente maintenant $[0, 1]$ par la relation d'équivalence \sim_f , définie par $x \sim_f y$ ssi $d_f(x, y) = 0$, et qu'on munit le quotient de la distance induite, on peut vérifier qu'on obtient un espace métrique compact que l'on note (\mathcal{T}_f, d_f) .

Introduisons maintenant la fonction aléatoire appelée excursion brownienne normalisée. C'est une fonction de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}_+ , qui s'annule en 0 et en 1. On peut la voir intuitivement comme un mouvement brownien « conditionné à être positif et à revenir en 0 à l'instant 1 ». Une définition plus formelle est celle-ci : soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien. Avec probabilité 1, $B_1 \neq 0$ et on pose $D = \inf\{t \geq 1 : B_t = 0\}$ et $G = \sup\{t \geq 1 : B_t = 0\}$.

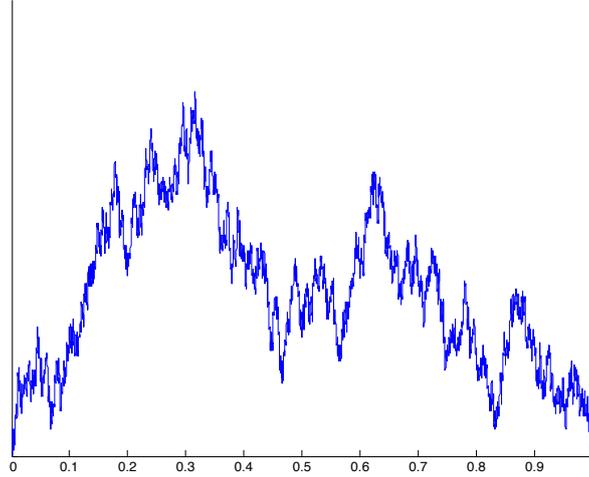


FIGURE 2 – Une approximation d’une excursion brownienne normalisée (image d’Igor Kortchemski)

On pose ensuite

$$\mathbf{e} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$t \longmapsto \frac{\text{sgn}(B_1)}{\sqrt{D-G}} B_{G+t(D-G)},$$

où $\text{sgn}(B_1)$ désigne le signe de B_1 . On peut maintenant donner une définition de l’arbre brownien.

Définition 1

L’arbre brownien est l’espace métrique aléatoire $(\mathcal{T}_{2\mathbf{e}}, d_{2\mathbf{e}})$, où $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_t)_{t \in [0,1]}$ est une excursion brownienne normalisée.

L’arbre brownien, de par sa définition comme quotient de $[0, 1]$, vient aussi avec une mesure de probabilité qui est la mesure image de la mesure de Lebesgue par la projection sur le quotient. Afin de pouvoir comparer et donner un sens à une convergence vers des arbres « continus » tels que l’arbre brownien, on aura besoin de définir quelques notions métriques et topologiques.

1.3 \mathbb{R} -arbres

Définissons d’abord ce que nous voulons dire par « arbre continu ».

Définition 2

Un espace métrique (\mathcal{T}, d) est un \mathbb{R} -arbre si, pour tous $a, b \in \mathcal{T}$, les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

- (i) il existe une unique isométrie $f_{a,b}$ du segment $[0, d(a, b)]$ dans \mathcal{T} telle que $f(0) = a$ et $f(d(a, b)) = b$.
- (ii) si $q : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{T}$ est continue et injective, et que $q(0) = a$ et $q(1) = b$ alors

$$q([0, 1]) = f_{a,b}([0, d(a, b)]).$$

La première condition dit qu’entre deux points, il y a toujours un segment dans l’arbre qui les relie. La seconde condition nous assure l’absence de cycle. Pour un point x d’un arbre \mathcal{T} , on définit le degré de x comme le nombre de composantes connexes de $\mathcal{T} \setminus \{x\}$. Les points de degré 1 sont appelés *feuilles*, et les points de degré plus grand que 3 sont appelés *points de branchements*. On peut remarquer qu’en particulier, si on considère un arbre « combinatoire » comme un espace métrique, en considérant que ses arêtes ont longueur 1, c’est un \mathbb{R} -arbre. On peut aussi remarquer que dans ce cas, les notions de feuilles et de points de branchements coïncident bien. Maintenant, afin de pouvoir énoncer des résultats

de convergence de ces arbres, il faut introduire une façon de comparer deux arbres (à partir de maintenant on va seulement considérer des arbres compacts).

D'abord, si (E, d) est un espace métrique, on note d_H la distance dite de Hausdorff entre deux compacts K et K' de E :

$$d_H(K, K') = \inf\{\epsilon : K \subset U_\epsilon(K'), K' \subset U_\epsilon(K)\},$$

où $U_\epsilon(K) := \{x \in E : d(x, K) < \epsilon\}$ est le ϵ -grossissement de K .

Ensuite si X et Y sont deux espaces métriques compacts, on définit la distance de Gromov-Hausdorff $d_{GH}(X, Y)$ entre ces espaces comme

$$d_{GH}(X, Y) = \inf\{d_H(\phi(X), \phi'(Y))\},$$

où l'infimum est pris sur tous les plongements isométriques $\phi : X \rightarrow l^\infty$, $\phi' : Y \rightarrow l^\infty$, où l^∞ est l'espace des suites réelles bornées, muni de la norme infinie.

On note que si X et Y sont isométriques, alors $d_{GH}(X, Y) = 0$ et de part la définition, si X_1 est isométrique à X_2 , et Y_1 est isométrique à Y_2 , alors $d_{GH}(X_1, Y_1) = d_{GH}(X_2, Y_2)$. Maintenant si on considère l'ensemble des sous-ensembles compacts $\mathcal{T} \subset l^\infty$ qui sont des \mathbb{R} -arbres, qu'on quotiente par la relation d'équivalence « être isométriques » on obtient un espace \mathbb{T} , que l'on peut munir de la distance d_{GH} .

Il paraît peut-être étrange de se limiter aux sous-ensembles de l^∞ , mais en fait on peut plonger isométriquement tout espace métrique séparable dans l^∞ . On peut donc voir l'infimum dans la définition de la distance de Hausdorff comme pris sur « l'ensemble des espaces métriques » et \mathbb{T} comme l'ensemble des classes d'isométries de tous les \mathbb{R} -arbres compacts. Le but de cette construction est de ne pas parler de « l'ensemble des espaces métriques compacts » qui n'est bien entendu pas un ensemble. Cette distance a été introduite par Gromov dans [11]. On a des résultats sur les propriétés générales de \mathbb{T} , voir [8] pour des preuves détaillées à ce sujet :

Théorème 3

(\mathbb{T}, d_{GH}) est un espace métrique complet séparable.

Avec cette distance sur les arbres réels, on peut énoncer un vrai résultat de convergence en loi. On n'avait en fait pas besoin de ce résultat sur \mathbb{T} pour exprimer ce qui suit, mais il est toujours intéressant d'avoir plus de structure sur l'espace des objets qui nous intéressent. Si (\mathcal{T}, d) est un arbre, on note $c\mathcal{T}$ l'arbre $(\mathcal{T}, c \cdot d)$ où toutes les distances ont été multipliées par un facteur c .

Théorème 4

Soit μ une loi de reproduction critique sur \mathbb{N} , telle que $\text{Var}(\mu) = \sigma^2 < \infty$, alors si on note $T^{(n)}$ un arbre de Galton-Watson de loi μ conditionné à avoir n sommets,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} T^{(n)} \xrightarrow[n \in \mathcal{G}, n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \frac{1}{\sigma} \mathcal{T},$$

où \mathcal{T} est l'arbre brownien, \mathcal{G} est un sous-ensemble de \mathbb{N} pour lequel le conditionnement a un sens et la convergence en loi a lieu dans \mathbb{T} .

Ce qui rend le théorème remarquable c'est que la limite ne dépend de la loi μ qu'à travers sa variance. À l'instar du mouvement brownien, qui a le comportement typique de n'importe quelle marche aléatoire à variance finie convenablement renormalisée, l'arbre brownien a le comportement typique de n'importe quel grand arbre de Galton-Watson, de loi de reproduction à variance finie. L'arbre brownien est aussi la limite d'autres modèles d'arbres [12] ou d'autres structures combinatoires comme des graphes [7] ou des cartes [2].

En fait la première définition qu'a donné Aldous de son CRT dans [3] est la suivante. On considère un processus de Poisson sur \mathbb{R}_+ d'intensité tdt , dont les points dans l'ordre croissant sont P_1, P_2, \dots . On imagine que l'on « casse » la droite réelle en tout point du processus de Poisson et procède ensuite ainsi : on prend le premier segment, de taille P_1 , et on colle récursivement les segments $[P_i, P_{i+1}[$ en un point B_i uniforme sur la structure déjà construite. Le CRT est l'espace obtenu en prenant la fermeture de la structure construite au bout d'un temps infini. C'est cette construction simple qui a poussé d'autres auteurs à utiliser le même type de construction « par recollement de segments » pour construire d'autres



FIGURE 3 – Une approximation de l’arbre brownien d’Aldous, construite après 1000 étapes de la procédure d’Aldous

objets. Par exemple dans [1], les auteurs utilisent une construction très semblables pour construire la limite au sens de Gromov-Hausdorff d’une grande composante connexe d’un modèle de graphes aléatoires. Dans [10], les auteurs utilisent une telle construction (un peu plus complexe) pour construire les arbres stables, qui eux-mêmes sont les limites de grands arbres de Galton-Watson dont la loi de reproduction μ vérifie $\mu_k \sim ck^{-\alpha-1}$, pour $\alpha \in]1, 2[$ et $c > 0$, (donc en particulier leur loi n’admet pas de variance).

2 Quelques propriétés métriques

Introduisons dans cette partie quelques propriétés métriques que nous chercherons ensuite à caractériser sur des \mathbb{R} -arbres aléatoires.

2.1 Bornitude et compacité

Une des propriétés les plus simples que nous chercherons à caractériser dans nos arbres aléatoires sera le fait d’être *borné*. Si (X, d) est un espace métrique, on note le diamètre de X

$$\text{diam}(X) := \sup \{d(x, y) \mid x, y \in X\} \in [0, \infty],$$

le supremum des distances entre deux points de X . On dit que X est borné si son diamètre est fini. Ici on s’intéressera la plupart du temps à des arbres enracinés, c’est-à-dire avec un point distingué ρ , que l’on appelle la *racine* de l’arbre. Dans ce cas, si (\mathcal{T}, d) est un \mathbb{R} -arbre, muni d’une racine ρ , on notera pour x un point de l’arbre

$$\text{ht}(x) = d(\rho, x),$$

la hauteur du point x dans \mathcal{T} , et on définit la hauteur de l’arbre comme

$$\text{ht}(\mathcal{T}) = \sup \{\text{ht}(x) \mid x \in \mathcal{T}\}.$$

Dans ce cas, être borné pour l’arbre est équivalent à avoir une hauteur finie. On se demandera aussi si les arbres que nous étudions sont *compacts*. C’est bien sûr une propriété suffisante pour la bornitude mais pas nécessaire, comme on le voit sur l’exemple de l’arbre en étoile : on considère une infinité dénombrable de segments de longueur 1 attachés sur le même point, que l’on prend pour racine. Cette arbre est borné puisque sa hauteur est 1, mais il n’est pas compact.

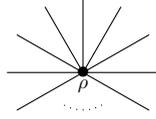


FIGURE 4 – L'arbre en étoile

2.2 Dimension de Hausdorff

Une autre caractéristique métrique que nous essayons de déterminer sur nos arbres sera une certaine notion de dimension. À un espace métrique on peut associer un nombre (éventuellement infini) appelé *dimension de Hausdorff*. Ce nombre correspond à la notion habituelle de dimension dans l'espace usuel \mathbb{R}^n ou pour des variétés différentielles et est dans ces cas-là un entier, mais ce n'est pas le cas pour des espaces moins lisses. On peut trouver une bonne introduction à cette notion ainsi qu'à son utilisation dans des cas concrets dans [9].

Pour (X, d) un espace métrique, on dit que $(U_i)_{i \in I}$ est un δ -recouvrement de X si I est au plus dénombrable et que pour tout $i \in I$, U_i est un ouvert de X tel que $\text{diam}(U_i) < \delta$. On pose

$$\mathcal{H}_s^\delta(X) := \inf \left\{ \sum_{i \in I} \text{diam}(U_i)^s \mid (U_i)_{i \in I} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } X \right\},$$

l'infimum sur tous les δ -recouvrements de la somme des diamètres des ouverts de recouvrement, à la puissance s . Cette quantité est croissante en δ puisque l'ensemble des recouvrements considérés décroît avec δ . On peut donc définir

$$\mathcal{H}_s(X) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_s^\delta(X) \in [0, \infty],$$

la *mesure de Hausdorff s -dimensionnelle* de X . En effet si on s'intéresse aux valeurs $\mathcal{H}_s(A)$, pour $A \subset X$ (munis de la distance induite), on peut vérifier que \mathcal{H}_s est dans ce cas une mesure extérieure sur X . Par des résultats de théorie de la mesure, on peut montrer que si on se restreint aux boréliens de X , \mathcal{H}_s est alors une mesure, d'où son nom.

Si $(U_i)_{i \in I}$ est un δ -recouvrement de X avec $\delta < 1$, et $0 \leq s < t$ alors

$$\sum_{i \in I} \text{diam}(U_i)^t \leq \sum_{i \in I} \text{diam}(U_i)^s \text{diam}(U_i)^{t-s} \leq \delta^{t-s} \sum_{i \in I} \text{diam}(U_i)^s,$$

donc en prenant l'infimum, on obtient

$$\mathcal{H}_t^\delta(X) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_s^\delta(X).$$

Maintenant si $\delta \rightarrow 0$ on en déduit que si $\mathcal{H}_s^\delta(X) < \infty$, alors pour tout $t > s$, $\mathcal{H}_t(X) = 0$. Finalement, on en déduit qu'il existe une valeur, que l'on notera $\dim_H(X)$, telle que pour tout $0 < s < \dim_H(X)$, $\mathcal{H}_s(X) = \infty$ et pour tout $s > \dim_H(X)$, $\mathcal{H}_s(X) = 0$. On appelle ce nombre la *dimension de Hausdorff* de X , aussi appelée dimension de Hausdorff-Besicovitch. On a par définition

$$\dim_H(X) = \inf \{s > 0 \mid \mathcal{H}_s(X) = 0\} = \sup \{s > 0 \mid \mathcal{H}_s(X) = \infty\}.$$

2.3 Un exemple déterministe

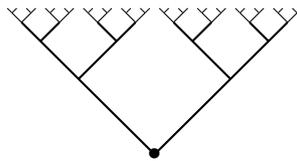


FIGURE 5 – Un exemple d'arbre fractal

Soit $\gamma > 0$. On considère l'arbre suivant dessiné dans la figure ci-contre. C'est un arbre binaire complet infini où les arêtes qui lient la génération n à la génération $n + 1$ sont de longueur $2^{-\gamma n}$. On le munit de

sa distance d'arbre, où la distance entre deux points x et y est la distance du plus court chemin tracé dans l'arbre qui permet de le considérer comme un \mathbb{R} -arbre, (\mathcal{T}, d) . Pour cette distance cet arbre n'est pas complet car par exemple on considère la suite de points suivante : x_0 est la racine et pour tout n , x_{n+1} est l'enfant de gauche de x_n , on obtient une suite de Cauchy qui ne converge pas. En fait si on complète cet espace métrique, on rajoute une quantité indénombrable de points que l'on peut indexer de la façon suivante : chaque point rajouté peut être décrit comme une suite infinie $(G, G, D, G, D, G, G \dots)$ qui correspond à la suite des directions prises lorsqu'on va de la racine vers ce point en empruntant à chaque étape l'arête gauche G ou droite D . On appelle *feuilles* les points que l'on a rajouté en complétant et on note \mathcal{L} l'ensemble de ces points.

Calculons la dimension de Hausdorff de cet objet. Déjà, des résultats généraux sur la dimension de Hausdorff montrent que l'arbre avant la complétion est de dimension de Hausdorff 1, car c'est une réunion dénombrable de segments, qui sont de dimension 1. Il nous suffit donc de calculer la dimension des feuilles pour obtenir la dimension de l'arbre total, qui sera la maximum entre 1 et la dimension des feuilles.

On peut vérifier que la distance entre deux feuilles $x = (x_1, x_2, \dots) \in \{G, D\}^{\mathbb{N}}$ et $y = (y_1, y_2, \dots)$ est donnée par :

$$d(x, y) = \frac{2 \cdot 2^{-\gamma n}}{1 - 2^{-\gamma}} = c \cdot 2^{-\gamma n}, \quad \text{où } n = \sup\{k \geq 0, x_i = y_i, \forall i \leq k\}.$$

En considérant les ensembles $\{x \in \mathcal{L} \mid x_1 = \epsilon_1, \dots, x_n = \epsilon_n\}$ pour $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{G, D\}^n$ on obtient un recouvrement de \mathcal{L} par de 2^n ouverts de diamètre $c \cdot 2^{-\gamma n}$, ce qui, après un calcul montre que $\mathcal{H}_{\gamma-1}(\mathcal{L}) < \infty$. Et donc la dimension de Hausdorff de \mathcal{T} est inférieure à γ^{-1} . En fait en introduisant la mesure $(\frac{1}{2}\delta_G + \frac{1}{2}\delta_D)^{\otimes \mathbb{N}}$ sur \mathcal{L} et en utilisant lemme de Frostman (voir [9]), on peut prouver que $\dim_H(\mathcal{L}) = \gamma^{-1}$.

Deux points importants sont à retenir de ce bref exemple déterministe : premièrement c'est aux feuilles qu'il faut s'intéresser pour obtenir la dimension de l'arbre total car le squelette a dimension 1. Deuxièmement, plus la longueur des branches décroît lentement, plus la dimension est élevée. On verra des comportements similaires dans l'étude de notre modèle d'arbres, aléatoires cette fois-ci.

3 Construction d'espaces métriques aléatoires par recollement de segments

3.1 Définition du modèle

L'idée développée dans l'article par Bénédicte Haas et Nicolas Curien, a été de reprendre la construction par recollement de l'arbre brownien d'Aldous mais pour une suite de branches de longueurs quelconques. L'idée de la construction est la même : on considère une suite de « branches » déterministes de taille $(a_i)_{i \geq 1}$ et on note $A_i = \sum_{k=1}^i a_k$ la somme des longueurs des i première branches. On construit les arbres (aléatoires) $(\mathcal{T}_n)_{n \geq 1}$ récursivement. On définit \mathcal{T}_1 comme un segment de longueur a_1 . À chaque étape, on tire un point sur l'arbre \mathcal{T}_{i-1} uniformément pour la mesure de longueur (normalisée), et on « greffe » une branche de taille a_i . On construit dans les faits ces arbres comme des sous-ensembles de $l^1(\mathbb{R})$ de la façon suivante. L'arbre \mathcal{T}_1 est l'ensemble $\{(x, 0, 0, \dots) \mid x \in [0, a_1]\}$ et pour tout $n \geq 1$, conditionnellement à \mathcal{T}_n on prend $(u_1^{(n)}, \dots, u_n^{(n)}, 0, 0, \dots) \in \mathcal{T}_n$ un point uniforme sur \mathcal{T}_n et on pose :

$$\mathcal{T}_{n+1} := \mathcal{T}_n \cup \left\{ (u_1^{(n)}, \dots, u_n^{(n)}, x, 0, 0, \dots) \in l^1(\mathbb{R}) \mid x \in [0, a_{n+1}] \right\}.$$

On considère ensuite

$$\mathcal{T}^* := \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{T}_n,$$

l'union croissante des arbres ainsi construits. Comme ce n'est pas en général un fermé, on considère son adhérence

$$\mathcal{T} := \overline{\mathcal{T}^*}.$$

Les théorèmes suivants prouvent que l'arbre obtenu, sous certaines conditions sur la suite $(a_i)_{i \geq 1}$, est compact et a des comportement fractals.

Théorème 5

Supposons qu'il existe $\alpha \in]0, 1]$ tel que

$$a_i \leq i^{-\alpha+o(1)} \quad \text{et} \quad A_i = i^{1-\alpha+o(1)} \quad \text{lorsque } i \rightarrow \infty.$$

Alors \mathcal{T} est presque sûrement un \mathbb{R} -arbre compact de dimension de Hausdorff $\frac{1}{\alpha}$.

Théorème 6

Supposons qu'il existe $\alpha > 1$ tel que

$$a_i \leq i^{-\alpha+o(1)} \quad \text{et} \quad \sum_{k=i+1}^{2i} a_k = i^{1-\alpha+o(1)} \quad \text{lorsque } i \rightarrow \infty.$$

Alors \mathcal{T} est presque sûrement un \mathbb{R} -arbre compact et l'ensemble de ses feuilles est presque sûrement de dimension de Hausdorff $\frac{1}{\alpha}$.

Parmi les théorèmes énoncés, pour certains comportements de la suite $(a_i)_{i \geq 1}$ on peut calculer la dimension de Hausdorff des arbres obtenus, et cette dimension est une constante presque sûre. En fait, le fait que la dimension soit constante ne dépend pas du comportement de la suite. En effet, un argument du type loi du 0 – 1 permet de conclure que comme la dimension de Hausdorff de l'arbre final est indépendante des recollements fait avant l'instant n , pour tout entier n , c'est une variable aléatoire mesurable par rapport à la tribu de queue des recollements, et c'est donc une constante. Par le même argument, la probabilité pour l'arbre d'être compact est 0 ou 1. En fait on peut aussi montrer que pour ce modèle, être compact p.s. est équivalent à être borné p.s.

3.2 Point uniforme et bornitude

Introduisons d'abord une notation : pour $x \in \mathcal{T}$, on note $[x]_k$ la projection de x sur \mathcal{T}_k , c'est-à-dire le point de \mathcal{T}_k qui minimise la distance à x . Maintenant si $n \geq 2$, et qu'on prend un point Y_n uniforme sur \mathcal{T}_n , conditionnellement à \mathcal{T}_n , deux cas sont possibles :

- le point Y_n appartient au sous-arbre \mathcal{T}_{n-1} , ce qui arrive avec probabilité $1 - \frac{a_n}{A_n}$. Conditionnellement à cet événement, le point $Y_n = [Y_n]_{n-1}$ est uniforme sur \mathcal{T}_{n-1} .
- le point Y_n est situé sur la dernière branche greffée sur \mathcal{T}_{n-1} , ce qui arrive avec probabilité $\frac{a_n}{A_n}$. Conditionnellement à cet événement, Y_n est situé en un point uniforme de la dernière branche et sa projection $[Y_n]_{n-1}$ est uniforme sur \mathcal{T}_{n-1} .

En se servant de cette observation on peut construire une suite (\mathcal{T}_n, X_n) telle que $[X_n]_k = X_k$ pour tout $k \leq n$ et telle que conditionnellement à \mathcal{T}_n , X_n est uniformément distribué sur \mathcal{T}_n . En effet, on se donne $(U_i)_{i \geq 1}$ et $(V_i)_{i \geq 1}$ des variables aléatoire iid de loi uniforme sur $[0, 1]$. L'arbre \mathcal{T}_1 est un segment de longueur a_1 , enraciné sur une extrémité et soit X_1 le point situé à distance $a_1 V_1$ de la racine. On construit ensuite récursivement $(\mathcal{T}_{n+1}, X_{n+1})$ en supposant (\mathcal{T}_n, X_n) déjà construit :

- si $U_{n+1} \leq \frac{a_{n+1}}{A_{n+1}}$, on greffe un segment de longueur a_{n+1} sur le point X_n pour obtenir \mathcal{T}_{n+1} et X_{n+1} est le point de la branche situé à distance $a_{n+1} V_{n+1}$ de X_n ,
- si $U_{n+1} > \frac{a_{n+1}}{A_{n+1}}$, on greffe un segment de longueur a_{n+1} sur un point choisi uniformément sur \mathcal{T}_n (indépendamment du reste) et on pose $X_{n+1} = X_n$.

Il est important de remarquer que la distance de X_n à la racine de l'arbre est croissante, on peut d'ailleurs l'écrire :

$$\text{ht}(X_n) = \sum_{i=1}^n a_i V_i \mathbf{1}_{\{U_i \leq \frac{a_i}{A_i}\}}.$$

De plus on a aussi par la construction :

$$d(X_n, X_m) = \sum_{i=m+1}^n a_i V_i \mathbf{1}_{\{U_i \leq \frac{a_i}{A_i}\}}.$$

À partir de cette égalité on peut remarquer que si la quantité

$$H(\mathbf{a}) := 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\text{ht}(X_n)] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^2}{A_i}$$

est finie, alors la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ est de Cauchy presque sûrement. Comme les arbres sur lesquels on travaille sont complets on peut donc définir p.s.

$$X := \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \in \mathcal{T}.$$

Ce point X ainsi défini est la limite de points uniformes sur \mathcal{T}_n , et peut être pensé comme un point typique de l'arbre \mathcal{T} . Remarquons qu'il peut être défini même dans le cas où la longueur cumulée des branches est infinie. En fait dans ce cas, presque sûrement le point X appartient aux feuilles de l'arbre \mathcal{T} . La finitude de la hauteur moyenne d'un point typique est un premier pas vers la bornitude de l'arbre mais n'est pas suffisante pour conclure : c'est une condition nécessaire mais rien n'empêche les arbres ainsi construits de toucher l'infini avec des bras très minces, dont la masse ne suffit pas à faire exploser la hauteur du point typique. Ce problème n'apparaît toutefois pas dans le cas où la suite $(a_i)_{i \geq 1}$ est décroissante. Dans leur article [6], Amini, Devroye, Griffiths et Olver montrent le théorème suivant.

Théorème 7

Si on suppose que $(a_i)_{i \geq 1}$ est décroissante, l'arbre obtenu est presque sûrement borné si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{i} < +\infty \quad \text{ou de façon équivalente si} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^2}{A_i} < \infty.$$

Sinon, l'arbre est presque sûrement non borné.

Dans le cas où la suite $(a_i)_{i \geq 1}$ n'est pas décroissante on peut exhiber des contre-exemples qui vérifient $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^2}{A_i} < \infty$ mais telles que l'arbre obtenu n'est pas borné. Pour cela il suffit de prendre une suite $(a_i)_{i \geq 1}$ qui ne tend pas vers 0, par exemple $a_i = i^{-1/2} + \mathbf{1}_{\{i \in \mathbb{N}^3\}}, \forall i \in \mathbb{N}$. En effet on peut montrer que le fait que \mathcal{T} soit borné est équivalent au fait que les \mathcal{T}_n convergent au sens de la distance de Hausdorff. En remarquant que

$$d_H(\mathcal{T}_n, \mathcal{T}_m) \geq \max_{n+1 \leq i \leq m} a_i,$$

on voit que la suite des $(\mathcal{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a aucune chance d'être de Cauchy dans ce cas, donc elle ne peut pas converger.

Question ouverte : si on ne suppose pas la décroissance de la suite, est-ce que la condition de convergence vers 0 est suffisante ? Sinon exhiber un contre-exemple.

Un autre projet serait de regarder ce modèle en prenant des longueurs aléatoires. Une question intéressante serait d'exhiber des lois sur les longueurs telles que l'arbre ait des propriétés d'auto-similarité, à l'instar de l'arbre brownien.

3.3 D'autres constructions sur le même principe

On voudrait étudier des généralisations de cette construction. Une première idée est de changer le mécanisme de sélection du point lors de la greffe d'une nouvelle branche. Dans le premier modèle, chaque branche avait une probabilité proportionnelle à sa longueur de recevoir une greffe. On peut relaxer cette hypothèse et se donner une suite de poids $(b_i)_{i \geq 1}$ tels que la probabilité pour chaque branche de recevoir une greffe est proportionnelle à son poids. On peut aussi vouloir recoller des espaces mesurés plus généraux comme par exemple des sphères. Dans tous ces cas, on aimerait étudier la compacité des objets ainsi définis, leur dimension de Hausdorff ainsi que leurs éventuelles propriétés d'auto-similarité. Un autre objectif est aussi de donner des descriptions de ce type d'objets aléatoires déjà connus, comme dans [10, 1].

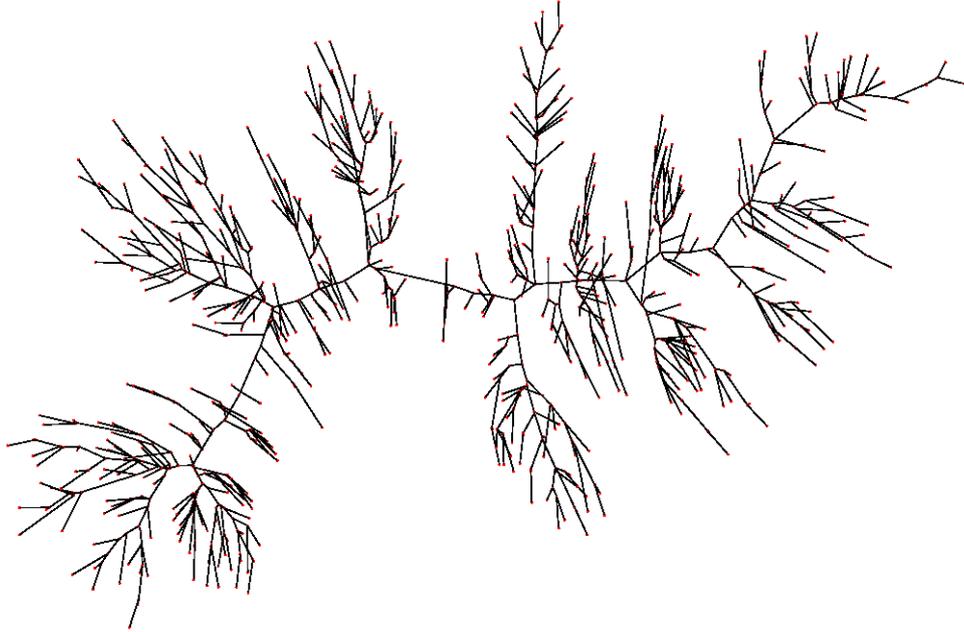


FIGURE 6 – Un arbre construit avec des branches de longueur $i^{-1/3}$, après 1000 étapes.

Références

- [1] L. Addario-Berry, N. Broutin, and C. Goldschmidt. The continuum limit of critical random graphs. *Probab. Theory Related Fields*, 152(3-4) :367–406, 2012.
- [2] Marie Albenque and Jean-François Marckert. Some families of increasing planar maps. *Electron. J. Probab.*, 13(56) :1624–1671, 2008.
- [3] David Aldous. The continuum random tree. I. *Ann. Probab.*, 19(1) :1–28, 1991.
- [4] David Aldous. The continuum random tree. II. An overview. In *Stochastic analysis (Durham, 1990)*, volume 167 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 23–70. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [5] David Aldous. The continuum random tree. III. *Ann. Probab.*, 21(1) :248–289, 1993.
- [6] Omid Amini, Luc Devroye, Simon Griffiths, and Neil Olver. Explosion and linear transit times in infinite trees. *arXiv preprint arXiv :1411.4426*, 2014.
- [7] Nicolas Curien, Bénédicte Haas, and Igor Kortchemski. The crt is the scaling limit of random dissections. *Random Structures & Algorithms*, 2014.
- [8] Steven Neil Evans. *Probability and Real Trees : École D'Été de Probabilités de Saint-Flour XXXV-2005*. Springer, 2008.
- [9] Kenneth Falconer. *Fractal geometry : mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons, 2004.
- [10] Christina Goldschmidt and Bénédicte Haas. A line-breaking construction of the stable trees. *Electron. J. Probab.*, 20 :no. 16, 24, 2015.
- [11] Misha Gromov. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, english edition, 2007. Based on the 1981 French original, With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes, Translated from the French by Sean Michael Bates.
- [12] Jean-François Marckert and Grégory Miermont. The crt is the scaling limit of unordered binary trees. *Random Structures & Algorithms*, 38(4) :467–501, 2011.