Cocycle d'Eisenstein et fonction L

Hao ZHANG

Table des matières

1 Introduction

Soit u un nombre complexe non entier. D'abord, on considère la série suivante :

$$\phi(u,\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{u+n} = \frac{2\pi i e^{2\pi i\xi u}}{e^{2\pi i u}-1}, \quad 0<\xi<1$$

Il est facile de montrer la formule d'addition de $\phi(u,\xi)$:

$$\phi(x,a)\phi(y,b) - \phi(x+y,a)\phi(y,\{b-a\}) - \phi(x,\{a-b\})\phi(x+y,b) = 0. \tag{1}$$

où $\{t\}$ désigne la partie décimale de t.

Maintenant, je voudrais considérer l'analogue elliptique de la série ci-dessus. On définit :

$$\mathrm{Ser}(\xi,\eta,u,\tau) = \lim_{N,M\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-M}^{M} \frac{e^{2\pi i(-m\xi+n\eta)}}{u+n\tau+m}$$

où ξ, η sont des nombres réels, τ est un point dans le demi-plan supérieur et $u \notin \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$. Kronecker a exprimé cette série en termes de fonction thêta de Jacobi. La définition de fonction thêta de Jacobi est :

$$\theta(z,\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}} e^{2\pi i(\frac{n^2\tau}{2} + n(z-\frac{1}{2}))}$$

On a le théorème de Kronecker suivant :

Théorème 1.1. *On suppose que* $0 < \Im u < \Im \tau$, $0 < \xi < 1$, *alors, on a*

$$\operatorname{Ser}(\xi,\eta,u,\tau) = e^{2\pi i \xi u} \frac{\theta'(0,\tau)\theta(u+\eta+\xi\tau,\tau)}{\theta(u,\tau)\theta(\eta+\xi\tau,\tau)}.$$

C'est la formule limite de Kronecker, en utilisant cette formule, l'équation (1) devient :

$$\Theta(x,x_0)\Theta(y,y_0) - \Theta(x+y,x_0)\Theta(y,y_0-x_0) - \Theta(x,x_0-y_0)\Theta(x+y,y_0) = 0$$

où

$$\Theta(z,w) = \frac{\theta'(0,\tau)\theta(z+w,\tau)}{\theta(z,\tau)\theta(w,\tau)}$$

est la fonction thêta de Kronecker, $x_0 = a\tau, y = b\tau$. Il y a un moyen naturel d'écrire l'identité ci-dessus en termes de cohomologie du groupe $SL_2(\mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} &\Phi((x,y)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}), \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix})\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}) - \Phi((x,y)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}), \begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix})\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}) \\ &- \Phi((y,-x)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}), \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix})\begin{pmatrix}b\\ -a\end{pmatrix}) = 0 \end{aligned}$$

où

$$\Phi((x,y),(a,b)^t) = \Theta(x,a)\Theta(y,b)$$

Donc, pour $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, soit $\sigma = \begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & c\end{pmatrix}$. Si $c \neq 0$, on définit

$$\Psi\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}(u,\xi) = \operatorname{sign}(c) \sum_{\mu \in \mathbb{Z}^2/\sigma\mathbb{Z}^2} \Phi(u\sigma, \sigma^{-1}(\mu+\xi))$$

où $u = (u_1,u_2), \xi = (\xi_1,\xi_2)^t$. Si $c = 0$, on définit $\Psi = 0$. On a la relation de 1-cocycle :

$$\Psi(AB)(u,\xi) = \Psi(A)(u,\xi) + \Psi(B)(uA, A^{-1}\xi).$$

La formule d'addition correspond au cas $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

C'est presque le cocycle d'Eisenstein. Je donnerai une définition modifiée du cocycle d'Eisenstein et l'utiliserai pour obtenir des valeurs de certains fonction L. En corollaire, on obtiendra l'intégralité des fonctions L de Hecke. Dans cet mémoire, je me concentre sur le cas de corps CM. Il y a des résultats similaires pour les corps totalement réels. Pour plus de détails, vous pouvez voir [1], [3], [8]. À la fin, je présente la conjecture de Stark qui concerne la dérivée de la fonction L en $s = 0$ au lieu de la valeur de la fonction L elle-même.

2 Fonction L de Hecke

Soit F un corps quadratique imaginaire, et K une extension de degré n de F. On fixe un idéal intégral $\mathfrak{f}$ de K, et soit $U_\mathfrak{f}$ l'ensemble de unités de K congruentes à 1 mod $\mathfrak{f}$. C'est un sous-groupe d'indice fini de $\mathcal{O}_K^\times$.

Définition 2.1. *Soit $I(\mathfrak{f})$ le groupe des ideaux fractionnaires relativement premiers à $\mathfrak{f}$. Considerons un caractère $\lambda : K^\times \to F^\times$ défini par $\lambda(a) = \overline{N_{K/F}(a)}^k N_{K/F}(a)^{-l}$ et $\phi : (\mathcal{O}_K/\mathfrak{f})^\times \to \mathbb{C}^\times$. On definit le caractère idéal $\chi : I(\mathfrak{f}) \to \mathbb{C}^\times$ comme $\chi((a)) = \phi(a)\lambda(a)$. Enfin, on definit la fonction L de Hecke associée à χ :*

$$L(s, \chi) = \sum_{\substack{\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{O}_K \\ (\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) = 1}} \chi(\mathfrak{a}) N(\mathfrak{a})^{-s}$$

Remarque. *La fonction L de Hecke converge absolument pour* $\mathrm{Re}(s)$ *assez grand. Par le théorème de Hecke, il a prolongement méromorphe au plan complexe. De plus, il y a l'équation functionnelle qui donne la relation entre $L(s, \chi)$ et $L(1-s, \bar{\chi})$. Pour plus de détail, voir [7][Chapter 7]. Dans cette livre, il donne une définition plus moderne de la fonction L de Hecke, i.e en termes d'idèles.*

Définition 2.2. *Soit $\{\mathfrak{b}\}$ un système complet de représentants d'idéaux intégraux premiers à $\mathfrak{f}$. Pour tout $r \in \mathfrak{b}$, on définit la fonction L de Hecke partielle :*

$$\begin{aligned} L(\mathfrak{b}, r, s) &= \sum_{(a) \subseteq \mathfrak{f}\mathfrak{b}^{-1} + r} \lambda(a) N((a))^{-s} \\ &= \sum_{a \subseteq \mathfrak{f}\mathfrak{b}^{-1} + r / U_\mathfrak{f}} \lambda(a) N((a))^{-s} \end{aligned}$$

La proposition suivant montre la relation entre la fonction L de Hecke et la fonction L de Hecke partielle :

Proposition 2.1.

$$L(s,\chi) = \sum_{\mathfrak{b}} \frac{\chi(\mathfrak{b})}{N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})^s} \sum_{\substack{r(\mathfrak{f}) \\ r\in\mathfrak{b}^{-1}}} \phi(r) L(\mathfrak{b}, r, s).$$

3 Le Cas de Corps CM

3.1 Cocycle d'Eisenstein

Soit $A = (A_1, \ldots, A_n) \in \Gamma^n$ un n-tuple de matrices où $\Gamma = GL_n(\mathcal{O}_F)$. On fixe $x \in \mathbb{C}^n - \{0\}$. Pour chaque matrice A_i, on désigne par σ_i la première colonne de A_i telle que $\langle x, \sigma_i\rangle \neq 0$. Désignons par $\sigma = (\sigma_{ij})$ la matrice carrée avec colonnes σ_i. On definit

$$\psi(A)(x) = \frac{\det(\sigma)}{\langle x, \sigma_1\rangle \cdots \langle x, \sigma_n\rangle}.$$

Plus généralement, soit $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n]$ l'espace des polynômes homogènes. On remarque que $\mathcal{P}$ est muni de l'action de $GL_n(\mathbb{Q})$ donnée par

$$(MP)(X_1, \ldots, X_n) := P((X_1, \ldots, X_n)M)$$

où $M \in GL_n(\mathbb{Q})$ et $P \in \mathcal{P}$. Pour tout $P(X_1, \ldots, X_n) \in \mathcal{P}$, on considère l'opérateur différentiel partiel et on définit la fonction

$$\psi(A)(P, x) = P(-\partial_{x_1}, \ldots, -\partial_{x_n})\psi(A)(x).$$

Il est facile de montrer que

Lemme 3.1.

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \psi(A_0, \ldots, \hat{A}_i, \ldots, A_n)(P, x) = 0 \tag{2}$$

où $\hat{A}$ signifie qu'on omet le terme A.

L'équation (2) est la relation de $(n-1)$-cocycle sur $GL_n(\mathcal{O}_F)$.

Soient $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$, n réseaux avec le même anneau de multiplicateurs $\mathcal{O}$ dans F satisfaisant $\Lambda_i = \Lambda_{i+1}\mathfrak{a}_i$ pour des idéaux donnés $\mathfrak{a}_i \subseteq \mathcal{O}$. On pose $\Lambda = \Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_n$.

On suppose que R_n l'ensemble des matrices $M \in GL_n(K)$ telle que les colonnes $M_1, \cdots, M_n$ sont conjuguées sur F. C'est à dire :

$$M = \begin{pmatrix} \rho_1(a_1) & \cdots & \rho_n(a_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \rho_1(a_n) & \cdots & \rho_n(a_n) \end{pmatrix}$$

où les ρ_i sont les plongements distincts de K dans $\mathbb{C}$, fixant F. On pose $S = \{f : R_n \times F^n/\Lambda \times \mathcal{P} \to \mathbb{C}\}$.

Maintenant, on donne la definition de cocycle d'Eisenstein :

Définition 3.1. *Le cocycle d'Eisenstein est la fonction de $GL_n(\mathcal{O}_F)^n$ à valeurs dans S défini par :*

$$\Psi_s(A)(P, u, M) = \sum_{x \in \Lambda + u} \psi(A)(P, x)\Omega_s^k(x, M)$$

où $A = (A_1, \cdots, A_n) \in GL_n(\mathcal{O}_F) \times \cdots \times GL_n(\mathcal{O}_F)$, $k \in \mathbb{Z}$ et

$$\Omega_s^k(x, M) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\overline{xM_i}^k}{|xM_i|^{2s}}.$$

Remarque. *Obervez que $\Omega_s^k(x, M)$ est bien défini pour s assez grand. Si on n'ajoute pas le terme $\Omega_s^k(x, M)$, la série*

$$\sum_{x \in \Lambda + u} \psi(A)(P, x)$$

ne convergerait pas. De plus, on a le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Fixons A, P, u, M. Alors Ψ_s converge absolument pour* $\mathrm{Re}(s) > 1 + \frac{k}{2}$.

Démonstration. On peut déduire la théorème du corollaire 1 de [3][P.196]. $\square$

Par le lemme (3.1), on a

Théorème 3.2. *Le cocycle d'Eisenstein Ψ_s représente une classe de cohomologie non triviale dans $H^{n-1}(GL_n(\mathcal{O}_F), S)$.*

3.2 Le cycle

Parce que F est imaginaire, il n'y a pas de plongement réel de K dans $\mathbb{C}$. Donc par le théorème des unités Dirichlet, le rang de $\mathcal{O}_K^\times$ egal $n-1$, ceci est différent du cas totalement réel.

On choisit unités $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{n-1} \in U_{\mathfrak{f}}$ libres dans $\mathcal{O}_K^\times$ telle que $N_{K/F}(\epsilon_i) = 1$. Soit V le sous-groupe engendré par les ϵ_i. C'est aussi un sous-groupe d'indice fini de $U_{\mathfrak{f}}$.

Pout tout $i = 1, \ldots, n-1$, on pose $\delta(\epsilon_i) = \operatorname{diag}(\rho_1(\epsilon_i), \ldots, \rho_n(\epsilon))$ et $A_i = M\delta(\epsilon_i)M^{-1}$. En fait, parce que les colonnes de M sont conjuguées sur F, on a $A_i \in SL_n(\mathcal{O}_F)$. Soit $\mathbf{A}$ le sous-groupe engendré par A_i.

Définition 3.2. *On définit la chaîne dans $C_{n-1}(\mathbf{A}, \mathbb{Z})$:*

$$\mathfrak{E} = (-1)^{n-1} \operatorname{sign}(R_{K/F}) \sum_{\pi} \operatorname{sign}(\pi)[A_{\pi(1)}| \ldots |A_{\pi(n-1)}]$$

où $R_{K/F} = \det(2\log|\rho_i(\epsilon_j)|)$ est le regulateur, π parcourt toutes les permutations de $\{1, \cdots, n-1\}$, i.e $\pi \in S_{n-1}$ et

$$[A_1, \ldots, A_{n-1}] := (1, A_1, A_1A_2, \ldots, A_1 \cdots A_{n-1}).$$

Remarque. *La définition de cycle semble bizarre, je voudrais donner une explication géométrique. Parce que*

$$[A_{\pi(1)}, \ldots, A_{\pi(n-1)}] = M[\delta(\epsilon_{\pi(1)})| \ldots |\delta(\epsilon_{\pi(n-1)})]M^{-1},$$

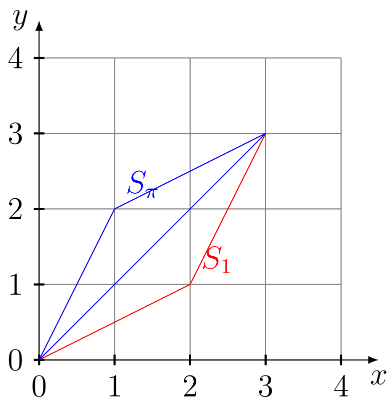
on se concentre sur la matrice diagonale $\delta(\epsilon_i)$. On considère l'application logarithmique :

$$l : \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (2\log|x_1|, \ldots, 2\log|x_n|).$$

L'image de $\delta(\epsilon_i)$ sous l'application est contenue dans l'hypersurface

$$H := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum x_i = 0\}.$$

En particulier, $[\delta(\epsilon_{\pi(1)})| \ldots |\delta(\epsilon_{\pi(n-1)})]$ définit un $(n-1)$-simplexe. Alors, somme sur $\pi \in S_{n-1}$, il donne parallélépipède généré par $l(\delta(\epsilon_1)), \ldots, l(\delta(\epsilon_{n-1}))$. Donc, la chaîne est similaire à un parallélépipède en $\mathbb{R}^{n-1}$. L'image ci-dessous montre le cas $n = 3$, le point $(2,1)$ correspond $l(\delta(\epsilon_1))$, le point $(1,2)$ correpond $l(\delta(\epsilon_2))$, et le point $(3,3)$ correspond $l(\delta(\epsilon_1\epsilon_2))$. Le triangle au dessous S_1 correspond au 2-simplexe défini par $[\delta(\epsilon_1)|\delta(\epsilon_2)] = (1, \delta(\epsilon_1), \delta(\epsilon_1\epsilon_2))$, et le triangle au dessus S_π correspond au 2-simplexe défini par $[\delta(\epsilon_{\pi(1)})|\delta(\epsilon_{\pi(2)})] = [\delta(\epsilon_2)|\delta(\epsilon_1)] = (1, \delta(\epsilon_2), \delta(\epsilon_1\epsilon_2))$ où $\pi = (1,2) \in S_2$.



À partir de maintenant, on fixe :

$$P(x) = \prod_{i=1}^{n} x(M^{-t})_i, \quad Q(x) = \prod_{i=1}^{n} xM_i$$

où M_i est la i-ième colonne de M.

Lemme 3.2. *Soit l un entier positif, pour toute $x \in \Lambda + u$ et $Y \in GL_n(\mathbb{C})$, on a*

$$\sum_{A \in \mathbf{A}} \psi(A\mathfrak{E}Y)(P^{l-1}, x) = \det(M)\frac{((l-1)!)^n}{Q(x)^l}.$$

Démonstration. Voir [5]. Je pense qu'il y a une erreur à la fin de la démonstration, mais je ne connais pas d'autres démonstrations. Néanmoins, je crois que le résultat est vrai. □

3.3 Relation avec la fonction L de Hecke

Pour obtenir la relation entre le cocycle d'Eisenstein et la fonction L de Hecke, on présente la proposition suivante :

Proposition 3.1. *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal fractionnaire de K, alors il y a une base $\{m_1, \ldots, m_n\}$ de K sur F et des idéaux uniquement $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ de $\mathcal{O}_F$ tels que $\Lambda_1 \subseteq \cdots \subseteq \Lambda_n$ et $\mathfrak{a} = \sum m_i \Lambda_i$.*

On applique cette proposition à $\mathfrak{f}\mathfrak{b}^{-1}$, on a

$$\mathfrak{f}\mathfrak{b}^{-1} + r = \sum_i m_i(\Lambda_i + u_i)$$

pour certains $u_i \in F$ et $\Lambda_i \subseteq \mathcal{O}_F$. Alors, on a

$$(\mathfrak{f}\mathfrak{b}^{-1} + r)/V \cong (\Lambda + u)/\mathbf{A} \tag{3}$$

où $\Lambda = \Lambda_1 \times \cdots \times \Lambda_n$ et $u = (u_1, \ldots, u_n)$.

Maintenant, on montre comment le cocycle paramètre les valeurs spéciales de fonctions L de Hecke :

Théorème 3.3. *Considérons $\mathfrak{f}, \mathfrak{b}, M$ définis comme ci-dessus. Alors on a*

$$\Psi_s(\mathfrak{E})(P^{l-1}, u, M) = \det(M)((l-1)!)^n [U_\mathfrak{f} : V] L(\mathfrak{b}, r, s)$$

pour $\mathrm{Re}(s) > 1 + \frac{k}{2}$.

Esquisse de démonstration. Par la définition du cocycle, on a

$$\begin{aligned}
\Psi(\mathfrak{E})(P^{l-1}, u, M) &= \sum_{x \in \Lambda + u} \psi(\mathfrak{E})(P^{l-1}, x)\Omega_s^k(x, M) \\
&= \sum_{x \in \Lambda + u/\mathbf{A}} \Omega_s^k(x, M) \sum_{A \in \mathbf{A}} \psi(\mathfrak{E})(P^{l-1}, xA) \\
&= \sum_{x \in \Lambda + u/\mathbf{A}} \Omega_s^k(x, M) \sum_{A \in \mathbf{A}} \psi(A\mathfrak{E})(P^{l-1}, x) \\
&= \det M((l-1)!)^n \sum_{x \in \Lambda + u/\mathbf{A}} \frac{\Omega_s^k(x, M)}{Q(x)^l} \quad \text{lemme(3.2)}
\end{aligned}$$

D'autre part, par la définition de la fonction L et l'equation (3), on a :

$$\begin{aligned}
[U_\mathfrak{f} : V] L(\mathfrak{b}, r, s) &= \sum_{a \in \mathfrak{f}\mathfrak{b}^{-1} + r/V} \overline{N_{K/F}(a)}^k N_{K/F}(a)^{-l} N_{K/\mathbb{Q}}((a))^{-s} \\
&= \sum_{x \in \Lambda + u/\mathbf{A}} \frac{\Omega_s^k(x, M)}{Q(x)^l}.
\end{aligned}$$

Cela prouve le théorème. □

En combinant la proposition (2.1) et le théorème (3.3), on a :

Corollaire 3.1.

$$L(s, \chi) = \sum_{\mathfrak{b}} \frac{\chi(\mathfrak{b})}{N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b})^s} \sum_{\substack{r(\mathfrak{f}) \\ r \in \mathfrak{b}^{-1}}} \phi(r) \Psi_s(\mathfrak{E})(P^{l-1}, u, M)$$

pour $\mathrm{Re}(s) > 1 + \frac{k}{2}$.

4 Conjecture de Stark

Dans cette section, je présente la conjecture de Stark qui concerne la dérivée de la fonction L.

Soit K/F une extension abélienne de corps de nombres. Soient $\mathcal{O}_K, \mathcal{O}_F$ leurs anneaux des entiers. Soit S un ensemble fini de places de F contenant les places archimédiennes et celles qui ramifient en K. On suppose que S contient au moins une place v qui se décompose complètement en K et $|S| \geq 2$. Pour chaque idéal $\mathfrak{n} \subseteq \mathcal{O}_F$ non divisible par un idéal premier qui ramifie en K, on designe par $\sigma_{\mathfrak{n}}$ l'élément associé de Frobenius dans $G := \mathrm{Gal}(K/F)$. Pour chaque élément $\sigma \in G$, on definit la fonction zêta partielle :

$$\zeta_{K/F,S}(\sigma, s) := \sum_{\substack{\mathfrak{n} \subseteq \mathcal{O}_F \\ (\mathfrak{n},S)=1, \sigma_{\mathfrak{n}}=\sigma}} \frac{1}{N\mathfrak{n}^s}.$$

Cette série converge absolument pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ et il a un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ avec un pôle simple en $s = 1$ et pas d'autre pôle. Soit $U_{v,S} = U_{v,S}(K)$ l'ensemble d'élément $u \in K^\times$ telle que :

- si $|S| \geq 3$, alors $|u|_{w'} = 1$ pour tout $w' \nmid v$;
- si $S = \{v, v'\}$, alors $|u|_{w'}$ est constant sur tous w' sur v', et $|u|_{w'} = 1$ pour tout $w' \notin S$.

Alors on enonce la conjecture de Stark :

Conjecture 1 (Stark)**.** *On fixe une place w de K sur v. Alors il existe un $u \in U_{v,S}$ tel que*

$$\zeta'_{K/F,S}(\sigma, 0) = -\frac{1}{e} \log |u^\sigma|_w \quad \textit{pour tous } \sigma \in G$$

et $K(u^{1/e})/F$ est une extension abélienne où e est le nombre de racines de l'unité de K.

Example 1. *Posons $F = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{Q}(\zeta_N)^+$ et $S = \{\infty, p|N\}$. Soit a un entier premier à N. Alors la fonction zêta partielle ci-dessus s'écrit :*

$$\zeta_N(a, s) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv a(f)}}^{\infty} \frac{1}{n^s} = N^{-s} \zeta_H(\frac{a}{N}, s)$$

où $\zeta_H(x, s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^s}$ est la fonction zêta de Hurwitz. Au lieu de $\zeta_N(a, s)$, on considére la fonction zêta symétrique :

$$\zeta_N^+(a, s) = \zeta_N(a, s) + \zeta_N(-a, s)$$

parce que l'on a $\zeta_N^+(a,0)=0$. Par une formule classique [7][Chapter 3], on a

$$\frac{d}{ds}\zeta_H(x,s)|_{s=0} = \log\Gamma(x) - \frac{1}{2}\log(2\pi).$$

Alors,

$$\zeta_N(a,s) = C(a,N)s + \cdots$$

où

$$C(a,N) = \log\frac{\Gamma(\frac{a}{N})\Gamma(1-\frac{a}{N})}{2\pi} = -\frac{1}{2}\log(1-\zeta_N^a)(1-\zeta_N^{-a})$$

Donc l'élément $u = (1-\zeta_N)(1-\zeta_N^{-1})$ satisfait la conjecture de Stark et $u^{\sigma_a} = (1-\zeta_N^a)(1-\zeta_N^{-a})$.

Plus généralement, on considère la fonction L associée au caractère $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$:

$$L_S(\chi,s) = \sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\zeta_{K/F,S}(\sigma,s) = \sum_{\substack{\mathfrak{n}\subseteq\mathcal{O}_F\\(\mathfrak{n},S)=1}}\frac{\chi(\sigma)}{N\mathfrak{n}^s}.$$

On a la conjecture de Stark suivante :

Conjecture 2 (Stark)**.** *On suppose que $v\in S$ se décompose complètement dans K, et on fixe une place $w\in S_K$ sur v. Alors il existe un $u\in U_{v,S}$ tel que*

$$L_S'(\chi,0) = -\frac{1}{e}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\log|u^\sigma|_w$$

et $K(u^{1/e})/F$ est une extension abélienne.

On note que la conjecture de Stark est vraie si on a la théorie corps de classe explicite. Par exemple, lorsque $F=\mathbb{Q}$ et v est la place infinie, c'est le cas dans l'example (1) ; lorsque $F=\mathbb{Q}$ et v est une place finie, la conjecture de Stark découle du théorème de Stickelberger. Lorsque F est un corps quadratique imaginaire, Stark a prouvé la conjecture en utilisant la théorie de l'unité elliptique et la deuxième formule limite de Kronecker [9].

L'un des moyens efficaces de traiter les unités dans F est de définir une certaine classe de cohomologie d'Eisenstein, parce qu'il contient plus d'informations que les valeurs spéciales de la fonction zêta partielle. Pour plus d'information, voir [1], [4].

Références

[1] P. Charollois, S. Dasgupta. *Integral Eisenstein cocycles on* GL_n*, I : Sczech' s cocycle and p-adic L-functions of totally real fields*

[2] P. Charollois, R. Szcech. *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker : An update*. EMS Newsletter, 2016

[3] P. Colmez. *Algébricité de valeurs spéciales de fonctions L*. Invent. Math, 95(1) :161-205, 1989.

[4] S. Dasgupta, M. Greenberg. *The rank one abelian Stark conjecture* Lecture note.

[5] J. Flórez, C. Karabulut, T, Wong. *Eisenstein cocycles for* $GL(n)$ *and values of L-functions in imaginary quadratic extensions*

[6] P. Gunnells, R. Sczech. *Evaluation of Dedekind sums, Eisenstein cocycles, and special values of L-functions*. Duke Math. Journal 118 (2003), no. 2, 229-260.

[7] Kazuya. Kato, Nobushige. Kurokawa, Takeshi. Saito. *Number theory 1 : Fermat's Dream* Translations of Mathematical Monographs Vol 186.

[8] R. Sczech. *Eisenstein group cocycles for* GL_n *and values of L-functions*. Invent. Math. 113(1993), no. 3, 581-616.

[9] H. Stark, *L-functions at* $s = 1$*. IV. First derivatives at* $s = 0$. Adv. in Math. 35 (1980), no. 3, 197-235.